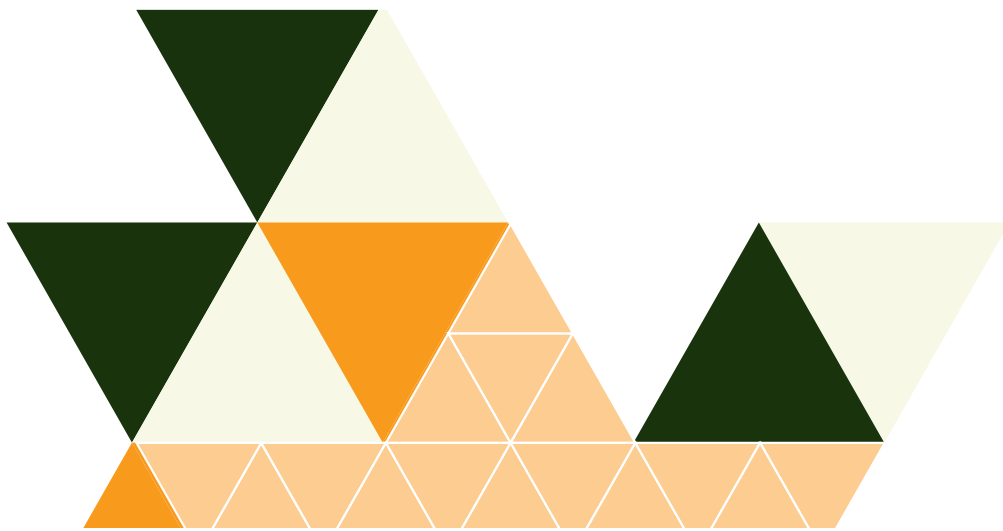




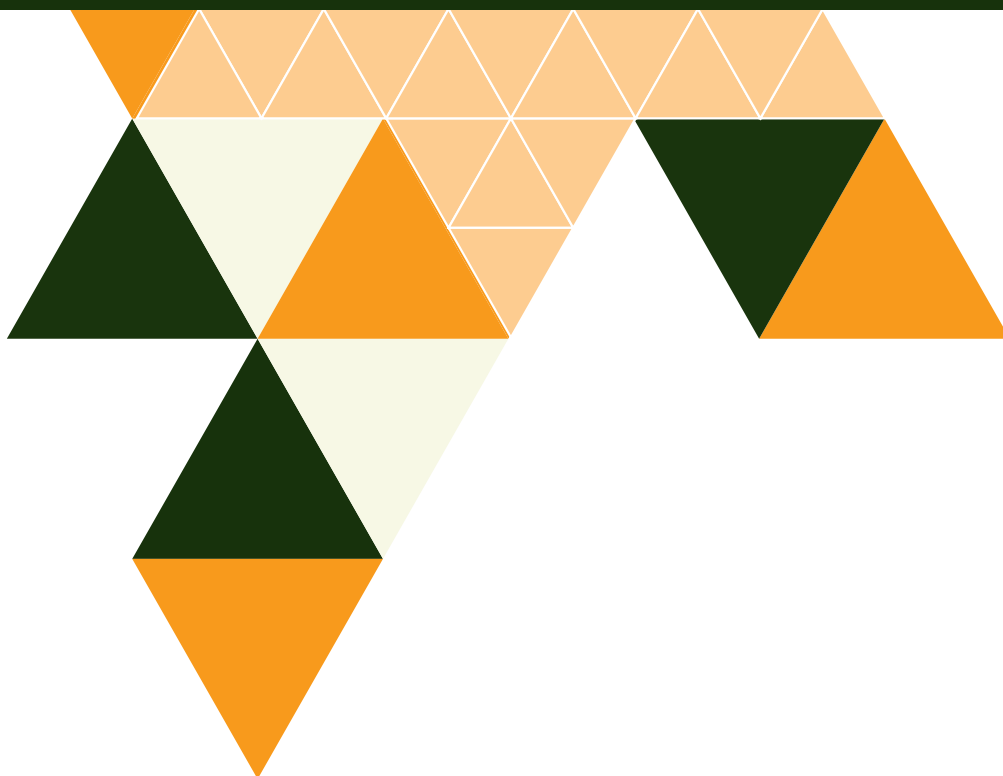
Jerusalem Conference on Research in
Mathematics Education



כנס ירושלים השנים עשר למחקר בחינוך מתמטי

ספר מאמרי הכנס

עורכים: ברקאי רותי, וינגרדן מרב, ויסמן אילנה, לוינסון אסתר,
מחאג'נה אחלאם, ענאבוסי אחלאם, פלטיניק אליק



4	דבר יושבת ראש הכנס
6	רשימת שופטי ההצעות
	הרצאות מליאה
	תרומתם של תהליכים מטה-קוגניטיביים לפיתוח חשיבה מתמטית:
9	The What, the How, and Research Evidence פרופ' זמירה מברך
10	מורים כמחזאים – גישה לחקר וחזקת ידע מתמטי הנדרש להוראה פרופ' רינה צצקיס
11	מתמטיקה – היופי מעבר למשוואות פרופ' אביב גיבלי
	דווחי מחקר
	איך להמשיג אינטגרציה: סכימה של 'חתיכות' או הצטברות מקצב שינוי? אנטולי קורופטוב, ליה נח-סלע,
13	דפנה אליאס, טומי דרייפוס
	הצטברות, פונקציית שטח ומושג האינטגרל- חקר מקרה ליה נח-סלע, דפנה אליאס,
17	טומי דרייפוס, אנטולי קורופטוב
	נגזרת, שיפוע משיק, קצב שינוי ומנת הפרשים - מילים נרדפות? כלילה קופרמן, דפנה אליאס, טומי דרייפוס,
21	ליה נח סלע, אנטולי קורופטוב
	גישות לבחינת חשיבה אסטרטגית לפתרון בעיות מתמטיות: המקרה של הוראה מפורשת והוראה
25	בלתי מפורשת ילנה פורטנוב נאמן, מרים עמית
29	כיצד ניתן להעריך נכונות של מורים לשלב פתרון-בעיות בכיתות המתמטיקה? רחל זקס
33	מורים מלמדים באמצעות בעיות מתמטיות שחיברו עבור תלמידיהם המתקשים במתמטיקה תקוה עובדיה
	עבודה קבוצתית על פעילויות המעודדות יצירתיות: המקרה של שילוב תלמידה עם הישגים נמוכים
37	בקבוצה הטרוגנית זהיה גנאים, אסתר לוינסון
	אמונות מורים לגבי יצירתיות מתמטית והבאתן לידי ביטוי בכיתה: המקרה של שתי מורות המלמדות
41	בחינוך המיוחד מאיה רון עזרא, אושרית לובל רוקח, אסתר לוינסון
45	פער בשיח מראיינת-תלמידה והשלכותיו לילך שחם, עינת הד-מצויינים
49	במהלך רצפי הוראה בגיאומטריה בבית ספר יסודי חסן איוב, שי אולשר (DFA) הערכה מעצבת ממוחשבת
53	איום סטריאוטיפי בסביבה וירטואלית ללימודי מתמטיקה שי אולשר, תמי הראל בן שחר, אכראם חסן
57	עיצוב פעילויות מידול מבוססות מחשב במתמטיקה מונה תומא, שי אולשר
	המחשה = ויזואליזציה? איך מורים בישראל פותחים נושא בגיאומטריה בכיתות ז' - ח'? איילת קריספין,
61	אליק פלטיניק
65	האם אפשר "לראות" אוטומטית את האסטרטגיות של התלמיד בנושא השוואת שברים? אמל קעדאן
	הדינמיקה של עמדות תלמידי תיכון כלפי הוראה היברידית במתמטיקה לפני ובמהלך תקופת
69	COVID-19 סוהא רואשדה, מיכל איילון
	קשרים בין 'נוטיסינג' של מורים למתמטיקה לאירוע קריטי כתוב לבין רמת פירוט התיאור של האירוע
73	שירה עבאד, מיכל איילון
	סוגי חשיבה מתמטיים ומגדר? תפיסות של מורים בחברה הערבית בישראל סברין סעד,
77	לורי רובל, ג'והינה עואודה-שחברי
	דיווח קצר על מחקר
	שילוב כלים טכנולוגיים בהוראת המתמטיקה במסגרת ההוראה ההיברידית בצל מגפת covid-19 :
82	נקודת מבטם של מורים רובא זערורה, מיכל איילון
86	שתי גישות להוראת מושג נגזרת - חקר מקרה אמירה עאבד, מיכל איילון, אנטולי קורופטוב
90	המנוע האדפטיבי כדידקטיקן בסביבת למידה קארין אלוש, שי אולשר, יניב ביטון
	הרגולציה נמצאת בפרטים הקטנים - שיח מכווין סביב בעיות אלגבריות ברק כהן, עינת הד-מצויינים,
94	אביטל אלבוים-כהן, מיכל טבח
98	גיליון אלקטרוני כמנגנון לקידום תהליכי למידה של ראשית האלגברה תמר אבירם, מיכל טבח, עינת הד -מצויינים

	בחינת התפיסות ודרכי ההתמודדות של תלמידי 5 יחידות לימוד מתמטיקה בעקבות חשיפה למגוון
102	דרכי פתרון של בעיות קיצון מתן דמרי, שולה וייסמן
	אמונות ומסוגלות עצמית של מדריכות למתמטיקה ביסודי, בנוגע לשילוב והכלה של תלמידים עם צרכים
106	מיוחדים בכיתות רגילות ביטל אמיר, אסתר לוינסון
110	תפקודים ניהוליים בלמידת מתמטיקה: תפיסות מורים בזיקה לרמות לימוד יחיאל תנעמי
114	פרקטיקות של הוראת מתמטיקה בשילוב טכנולוגיה: המקרה של מורים מומחים אחלאם ענאבוס, מיכל טבח
	בניית מושגים מתמטיים בנושא של מערכת צירים קרטזית בסביבת SCRATCH: המקרה של תלמידי
118	בית ספר יסודי אחלאם ענאבוס, וג'יה דאהר, רונית בסן-צינצינטוס
122	הרחבת מושג הסינוס מיחס במשולש לפונקציה מחזורית בסביבה טכנולוגית תגיל פרלמוטר, מיכל טבח
126	מאפיינים דיאלוגיים של שיח קבוצתי במשימות תרגול וחקר בגאומטריה תמר שובל, מיכל טבח
	בחינת ההשפעה של יישומון אינטראקטיבי לעומת יישומון סטטי על החשיבה של תלמידים במשימות
130	גיאומטריה מרחבית ורד גבריאילוב, אליק פלטינק
	תהליכי הבניית הידע במעבר מפריסה דו ממדית לגוף תלת ממדי ולהפך כאשר לומדים באמצעות
134	מציאות רבודה ענבל ישראל, אוסאמה סוידאן
	סדנאות
139	בעיות בנייה חדשות ומתאימות לתלמידי תיכון דוד פרייברט
143	מורי מתמטיקה וחוקרי חינוך- הילכו שניים יחדיו בלתי אם נועדו? אביטל אלבוים כהן, טלי נחליאלי, ג'ייסון קופר
146	סיעור מוחות לקראת התצוגה הלאומית ב ICME-15 בסידיני יולי 2024 נצה מובשוביץ-הדר
	כתיבת תסריטים ככלי ליצירת הזדמנויות ללמידה על הוראת מתמטיקה בהכשרת מורים סיגל- חוה רותם,
148	אליק פלטינק, עדי עראקי
152	שימוש במגוון כלים דיגיטליים בעבודת חקר מתמטית בתחום האקולוגיה סבינה סגרה
156	שימוש במתווכים פדגוגיים ללמידת מורים: ייצוגי הוראה, מסגרות מושגיות ומה שביניהם מרב וינגרדן, נדב ארנפלד
160	שינוי הפרדיגמה: הדרך הניסויית לפתרון בעיות בנייה בסביבת גיאומטריה דינמית איליה סיניצקי
	סימפוזיון
	מידול מתמטי בהקשר מדעי- הנדסי: מודל הטמעה בקנה מידה רחב זהבית כהן, הדס הנדלמן,
165	לירון שוורץ-אביעד, אורית כהן ניסן
	מייצגים
173	קידום מחוננים דרך עבודות גמר במתמטיקה -חקר מקרה סבינה סגרה
	יצירתיות מתמטית קולקטיבית בקרב תלמידי כיתה יב': קבוצות פנים-אל- פנים וקבוצות וירטואליות אמאני דסקי,
175	אסתר לוינסון
	גורמים משפיעים בבחירת בנות ערביות במסלול האקדמי של מדעי החברה בתום לימודי חמש יחידות במתמטיקה
177	בתיכון: סטריאוטיפים מגדריים ותמיכה חברתית רימא זגייר עראידה
179	חינוך מתמטי ומגדר: תפיסות תלמידי תיכון בחינוך הדתי הנפרד שרי אלוש, לורי רובל, ג'והיינה עואודה שחברי
181	על חשיבות הקפדה על יחידות מדידה. מקרה של מדידת זוויות: מעלות מול רדיאנים יוליה מורשטיין, לינה וינצקי
	מפגש חוקרים צעירים
	איך ממשיכים מכאן? על מוטיבציה בעשיה המחקרית בועז זילברמן, לירון שוורץ אביעד, מרב וינגרדן,
184	נדב מרקו, רוני יודקוביץ

דבר יושבת ראש הכנס

שלום רב לקהילת החינוך המתמטי בישראל, ברוכות הבאות וברוכים הבאים לכנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי המתקיים זו הפעם השנים עשרה ברציפות. כולנו קיוונו שגם השנה יתאפשר לנו לקיים את הכנס באופן היברידי, הכולל יום מפגש פנים אל פנים במרכז אקדמי לב בירושלים, ולהמשיך את הכנס ביום נוסף מהבית. אבל לצערי הרב, לאור המלחמה והימים המורכבים שאנחנו חווים בימים אלו, החלטנו לא לקחת סיכונים ולקיים את שני ימי הכנס בימים מקוונים. ניתן למצוא גם יתרונות בימים המקוונים, המאפשרים ליותר אנשים, וגם לכאלו שלא בארץ, להשתתף בשני ימי הכנס.

לפני הכל, נזכור את הנופלים, נקווה לשחרורם המהיר של החטופים ולשובם המהיר של החיילים והחיילות לבתיהם ונאחל החלמה מהירה לפצועים.

למרות המצב המורכב בו אנחנו נמצאים, הוגשו השנה מספר רב של ההצעות, המלמד על עבודה פורייה ואינטנסיבית של חברי הקהילה למחקר בחינוך המתמטי. הוגשו 55 הצעות לשיפוט. בסופו של דבר, הכנס כולל 18 הצגות של דיווחי מחקר; 14 הצגות של דיווח מחקר קצר, 5 מיצגים, 7 סדנאות וסימפוזיון אחד. כמו כן הכנס כולל מושב חוקרים צעירים ו-3 הרצאות מליאה.

הרצאתה של פרופ' (אמריטה) זמירה מבורך, מהפקולטה לחינוך באוניברסיטת בר אילן וכלת פרס ישראל בתשפ"ג, תעסוק בתרומתם של תהליכים מטה-קוגניטיביים לפיתוח חשיבה מתמטית ובהשפעת פדגוגיות מטה-קוגניטיביות על תהליכי למידה והוראה.

הרצאתה של פרופ' רינה צצקיס, מאוניברסיטת סימון פרייזר בקנדה, תפתח את היום השני של הכנס ותתמקד בגישה לחקר וחיזוק ידע מתמטי הנדרש להוראה ותציג משימות פדגוגיות שיש בכוחן לחשוף ידע מתמטי של מורים הרלוונטי למשימה.

הרצאתו של פרופ' אביב גיבלי תסגור את היום השני של הכנס ותעסוק ביופי של המתמטיקה-מעבר לפתרון משוואות ותרגול. בהרצאה יוצגו מספר בעיות מתמטיות ופתרונן.

ספר הכנס מספק הצצה למגוון המחקרים הנעשים בתחום החינוך המתמטי בישראל. ההצעות שבספר מתייחסות להיבטים קוגניטיביים, היבטים טכנולוגיים והיבטים ריגושיים-חברתיים ותרבותיים. ההצעות מתייחסות ללמידה והוראה של תלמידים מחוננים, מתקשים וכל מה שביניהם, וכן לפיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה.

בפעם הראשונה, הכנס יכלול סדנה שבה מתקיים פאנל שהמשתתפים בו מורכב מחוקרים ומורים ואני בטוחה שמפגש זה ייצור שותפויות בין מורים לחוקרים.

הכנס לא היה יכול להתקיים ללא עזרה ותמיכה של גורמים רבים. תודתי נתונה:

- למרכז האקדמי לב בירושלים, שממשיך לתת את חסותו ולהעמיד לרשותנו שרותים ומשאבים;
- למוסדות האקדמיים שממשיכים לתמוך כספית בכנס שנה אחר שנה;
- לכלל הוועדה המארגנת, ובאופן מיוחד לפרופ' רותי ברקאי ולגב' אסנת אדרי;
- לצוות הטכני של מכללת אלקאסמי שבנו את הסביבה הטכנולוגית המאפשרת את קיום הכנס המקוון;
- לכל חברות וחבר וועדת הכנס, שעמלו רבות, במהלך השנה האחרונה והמאוד מאוד מורכבת, על תוכנית הכנס ועל כל הכלול בה.

**ותודה מיוחדת לקהילה כולה, שהשתתפה בשיפוט ההצעות ושמשתפת אותנו
אותנו במחקריה.**

אנחנו מאחלים לכולכם כנס מעניין, מעשיר ומהנה.

בתקווה שבקרוב יגיעו ימים טובים ושקטים!!!

בברכה,

פרופ' אסתר לוינסון, יושבת ראש ועדת הכנס

חברי ועדת התכנית (לפי סדר ה- א"ב)

ד"ר מרב וינגרדן, מכון ויצמן למדע

ד"ר אילנה ויסמן, מכללת שאנן, מכללת בראודה, אוניברסיטת חיפה

ד"ר אחלאם מחאג'נה, אורנים, רשת עתיד

ד"ר אחלאם ענאבוסי, מכללת סמינר הקיבוצים ומכללת אלקסמי

ד"ר אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית בירושלים

חברי הוועדה המארגנת (לפי סדר א"ב):

גב' אסנת אדרי, המרכז האקדמי לב

פרופ' רותי ברקאי, מכללת סמינר הקיבוצים (מזכירת הכנס)

פרופ' נח דנא-פיקארד, המרכז האקדמי לב

רשימת שופטי הכנס (לפי סדר הא"ב)

אביטל אלבוים כהן	לירון שוורץ-אביעד
אוסאמה סוידאן	מאיה רון עזרא
אורית כהן ניסן	מיכל איילון
איליה סיניצקי	מיכל טבח
איריס שרייבר	מיסא חאיין הלון
אלון פינטו	מירלה וידר
אנטולי קורופטוב	נדב מרקו
בועז זילברמן	נורית פז ברוך
ביטל אמיר	נעמה בן-דור
גילה רון	סבינה סרגה
גלית נגרי-חדיף	סוהא רואשדה
דינה תירוש	סיגל רותם
דפנה אליאס	עדי עראקי
וגיה דאהר	עותמאן גאבר
ג'והיינה עואודה שחברי	עינת הד מצויינים
ג'ייסון קופר	עירית לביא
זהבית כהן	ענבל ישראל
זהיה גנאים	רגינה אובודנקו
טומי דרייפוס	רונית בסן-צינצינטוס
טלי נחליאלי	רותי סגל
פאתנה מרג'יה	רחל זקס
ילנה נפתלייב	שולה וייסמן
ילנה פורטנוב נאמן	שי אולשר
יניב ביטון	שיר קרני
כלילה קופרמן	שרה הרשקוביץ
ליה נח-סלע	תקוה עובדיה



Jerusalem Conference on Research in
Mathematics Education



כנס ירושלים השנים עשר למחקר בחינוך מתמטי

לתכנית הכנס לחץ כאן <<

הרצאות מליאה





המפגש יפתח בהצגת נתונים עכשוויים המשווים את יעילותן של 30 שיטות הוראה, כגון: פדגוגיות מטה-קוגניטיביות, למידה שיתופית, הוראה פרטנית, מתן שיעורי בית, הקטנת גודל כיתה ועוד.

המחקר שפורסם ב-2022, נערך על ידי ארגון Educational Endowment Foundation (EEF), ארגון בריטי ללא מטרות רווח. הממצאים מבוססים על כ-2500 מחקרים ומאות אלפי תלמידים. הממצאים מפתיעים. ספוילר: פדגוגיה מטה-קוגניטיבית דורגה במקום הראשון (באילו מדדים נראה בהרצאה). ממצאים אלה מביאים אותנו לניתוח מהותם של תהליכים מטה-קוגניטיביים המהווים "וייז" לפתרון בעיות מורכבות בכלל, ופתרון בעיות במתמטיקה בפרט.

בהרצאה נראה כיצד מדינות שונות שילבו תהליכים מטה-קוגניטיביים בתכניות הלימודים שלהן, ונשווה את ההישגים במתמטיקה של תלמידים שהיו חשופים לפדגוגיה מטה-קוגניטיבית, למידה שיתופית, למידה אינדיבידואלית וקבוצת ביקורת.

הקדמה זו תוביל אותנו להתבונן בממצאי מחקרים שבדקו כיצד השתנתה חשיבה מתמטית של תלמידים משכבות גיל שונות, מגיל הגן ועד מבוגרים. נתבונן בקצרה בהשפעת פדגוגיות מטה-קוגניטיביות כשהן מופעלות לאורך שנה שלמה (לא רק לאחר התערבות קצרה של החוקרים), ולאורך זמן גם לאחר שהניסוי נגמר. ניכנס "לקרביים" של השיטה, תוך סקירת האפקט של המרכיבים השונים של פדגוגיה מטה-קוגניטיבית.

לאחר שננתח את יעילותן של פדגוגיות מטה-קוגניטיביות תוך התמקדות במגוון משתנים, נציג בהרחבה (יחסית) שני מחקרים שעדיין לא פורסמו בכתבי העת הרלוונטיים. מחקר אחד מתייחס לפיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה תוך שימוש בסרטוני ווידאו המדגישים אלמנטים שונים בהוראה, כגון: מוטיבציה, קוגניציה, מטה-קוגניציה. המחקר המבוסס על תצפיות הראה את השינויים בדרכי ההוראה של מורים וכן את ההבדלים בהישגים במתמטיקה של תלמידי מורים אלה. ההישגים במתמטיקה נבדקו במבחני מיצ"ב. המחקר השני מתמקד בתלמידי גן ובית ספר יסודי: מה ילדים רואים סביבם, כיצד תופעה זו קשורה לחשיבה מתמטית, ומהי השפעת פדגוגיה מטה-קוגניטיבית על משתנים אלה. לבסוף, אציג שאלות מחקר פתוחות.

המחקרים נעשו בשיתופי פעולה עם עמיתים וסטודנטים. במפגש אדגיש את שיתופי הפעולה ואתן להם את הקרדיט.



עבודתי כמורת מורים למתמטיקה מציבה זו לצד זו מתמטיקה ופדגוגיה, ולעתים קרובות כרוכה בשימוש במשימות בעלות אוריינטציה פדגוגית, כדי לעזור למורים להרחיב את הבנתם לגבי המתמטיקה עצמה.

בהרצאה אציג משימות פדגוגיות שיש בכוחן לחשוף ידע מתמטי של מורים הרלוונטי למשימה. במיוחד, אתמקד ברעיון של תסריט או כתיבת תסריטים, ואדגים כיצד הוא מספק צוהר לידע של מורים.

אשתף בדוגמאות לשימוש במשימות כאלה במחקר, ואדגים כיצד בחירות פדגוגיות הבאות בעקבות הפעילות, בונות על- ומרחיבות את- ידע המורים, תוך הארת הקשרים בין מתמטיקה אוניברסיטאית וזו של בית הספר.

בעוד שמתמטיקה היא בסיס היופי והאומנות, בעיניי רבים, שנחשפו אליה בעיקר בלימודיהם בבית-הספר, היא נתפסת כמאיימת ולרוב דורשת תרגול אין סופי שאינו קושר את הדברים לחיים האמיתיים.

ישנו קו דק המפריד בין מתמטיקה שנקראת "טהורה" לזו הנקראת "שימושית" שמאפשרת ליישם תאוריה לפתירת בעיות בתחומים שונים. לעיתים נדרשים שנים עד שלתחום מסוים נמצאים שימושים. כיום, בעידן הדיגיטלי והטכנולוגי, למתמטיקה תפקיד מכריע בהבנה ופתירת בעיות בצורה יצירתית שתוכל אף להצמיד את הפיתוחים קדימה.

בהרצאה זו אנסה לפרט מהי תפקידה של המתמטיקה ע"י הצגת מספר בעיות ודרכי פתרון, וזאת במטרה לחשוף את היופי שבמתמטיקה ולשכנע שניתן ללמד וללמוד אותה אחרת.



איך להמשיג אינטגרציה: סכימה של 'חתיכות' או הצטברות מקצב שינוי?



אנטולי קורופטוב, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט

ליה נח-סלע, אוניברסיטת תל אביב

דפנה אליאס, אוניברסיטת תל אביב

טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

מבוא

במאמר זה אנו מדווחים על מחקר מקרה אמפירי שנערך במסגרת פרויקט המתמקד במשמעות האישית של תלמידי בית ספר תיכון למושג אינטגרל. גילינו שמטפורת הקריסה, Collapse Metaphor (Oehrtman, 2009; Noah-Sella et al., 2022), משחקת תפקיד מעניין ואולי חיוני במשמעות התלמידים לגבי האינטגרציה, ודורשת בצורה מסוימת, לפגוש בין הבנת האינטגרל בתוך סכימת חתיכות (Adding Up Pieces - AUP) לבין הבנת האינטגרל בתוך הצטברות מקצב שינוי (Accumulation from Rate - AR), אבחנה שחוקרים הציעו לאחרונה (Jones & Ely, 2023).

רקע תיאורטי

למידה והוראת החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי נחשבות לחלק חשוב הן בהוראת מתמטיקה והן במחקר בחינוך (Kidron, 2019). קיימת הסכמה רחבה בקרב אנשי הקהילה המקצועית שהמושגים של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי הם מאתגרים מאוד לתלמידים (Bressoud et al., 2016). המחקרים העדכניים בתחום האינטגרציה הצביעו על חשיבותן של משמעויות מבוססות חשיבה כמותית ברכישת מושג האינטגרל (Stevens & Jones, 2023). אך הסוגייה המחקרית הזו עדיין זקוקה לשיקולים מדעים מפורטים על איך התלמידים מתפתחים ומבינים את הנושא הזה לאורך יחידת למידה שלמה באינטגרציה. צורך זה מודגש עוד יותר בהקשר של הקשר בין שתי הגישות להמשגת אינטגרציה: כסכימת חתיכות (AUP) וכצטברות מקצב שינוי (AR) (Jones & Ely, 2023). המחקר שלנו נדרש לשאלה זו בעזרת ההתבססות על נתונים אמפיריים.

מתודולוגיה

אוכלוסייה ואיסוף נתונים

הנתונים נאספו כחלק מפרויקט שהתכוון לזהות את המשמעויות שברשות תלמידי ישראל לגבי מושגים יסודיים בחדו"א. במהלך מחקר זה, פיתחנו משימות וביצענו ראיונות מבוססי משימות אלו כחלק מתהליך העיצוב. הראיונות הוקלטו ותומללו.

הראיונות התקיימו עם תלמידים, פרחי הוראה ומורים. אחד מהראיונות האלו הוא בסיס המאמר הזה. המראיין הוא נתן, מורה בסיום הלימודים לתואר ההוראה שלו. הוא השלים מספר קורסים באנליזה ברמה אוניברסיטאית. נתן רואיין על מספר משימות במהלך שלב העיצוב של המחקר.

ניתוח הנתונים

חשיבה כמותית

במהלך ניתוח הראיונות, בדקנו אמירות שמצינות חשיבה כמותית. אלו כוללות אמירות בהן המראיין משתמש בהסברים או בהפניות שמתייחסות ישירות לכמויות פיזיות, יחידות מידה כולל השתנות משולבת שלהן. הפניות לכמויות בכלל ולחתיכות מצטברות בפרט פירשנו כעדות לחשיבה כמותית, כמו גם כן ההפניות לאינפיניטסימלים כאל כמויות קטנות סופיות מתמצקות שמתווספות.

Adding Up Pieces (AUP) ו-Accumulation from Rate (AR)

חיפשו עדויות שמבטאות אם החשיבה של המרואיין תואמת את AUP או את AR. בדקנו אמירות שכוללות חשיבה אודות מבנה או בניית האינטגרל. שייכנו אמירות אלה ל-AUP אם הן מתייחסות לחתיכות שמתווספות כחלק קטן מהכמות הכוללת. שייכנו אמירות אלה ל-AR אם הן מתייחסות לצבירה מקצב שינוי, או אם הן מתייחסות לחתיכות שנצברות בתור כמויות כפולות.

מטפורת הקריסה

מאחר והעניין המרכזי היה החתיכות הנצברות והמבנה שלהן, התייחסנו גם למטפורת הקריסה. בדקנו האם המרואיין מקריס ממד בחשיבה שלו. קבענו כי אמירות מעידות על מטפורת הקריסה כאשר הן מתייחסות לגדלים שנסכמים כקטנים בממד אחד מאשר הגודל המתקבל מהסכימה, למשל, חישוב שטח על ידי קווים שמתווספים, או על ידי מלבנים שאין להם רוחב.

זיהינו שני סוגים של מטפורת הקריסה - דינמית וסטטית. מטפורת קריסה דינמית היא המטפורה בה הרעיון של גבול מתבטא כתהליך באופן גלוי או סמוי. במטפורה הדינמית, המלבנים הופכים לקווים דרך תהליך של הגעה לגבול. במטפורה הסטטית, בעוד שקווים יכולים להיות מובנים כמלבנים בלי רוחב, הקווים והמלבנים הם למעשה ישויות נפרדות.

ביטוי אחר של מטפורת הקריסה שזיהינו הוא המשגת האינטגרל כסכימת ערכי y של הפונקציה של האינטגרנד. בסוג הזה של חשיבה, מה שנסכם הוא אורכי הקווים, כלומר, זהו ביטוי של הקרסת ממד - חישוב של שטח דו-ממדי על ידי סכימת קווים חד-ממדיים. בחשיבה מסוג זה, dx מובן כסימון ולא ככמות.

שינויים והשמטות

שמנו דגש על המקרים שבהם מרואיין השתמש בשפתו הייחודית או שינה את ניסוחן של הצהרות קודמות (לדוגמה, מקלות במקום קווים). כמו-כן שמנו דגש על מקרים בהם מרואיין שינה בדיבורו את הכתוב במטלה והחליף או השמיט מילים (לדוגמה, שקלים במקום שקלים לשנייה). התייחסנו למקרים האלו כעל עדויות למשמעויות האישיות של המרואיין.

ממצאים וניתוחם

נתן רואיין על שלוש משימות שונות. שתיים מהן כללו הקשרים שאינם מתמטיים - תזרים מזומנים וצפיפות מסה. המשימה השלישית הייתה בהקשר מתמטי טהור - אורך עקומה.

במשימת אורך העקומה, ביקשו מנתן לחשב את אורכה של עקומה נתונה לפי הנוסחה והגרף של פונקציה $(f(x) = e^x + x - 1)$ בקטע סגור. נתן הראה שימוש במטפורת הקריסה כאשר אמר: "אני רוצה לקחת את כל הנקודות ולחבר אותן". כאשר התבקש להבהיר את כוונתו, נתן ענה:

נתן: אני רוצה לקחת שתי נקודות ולחשב את האורך ביניהן, ולגרום לכך שהמרחק, שהדלתא איקס שלהן יהיה, ישאף לאפס, ואז אני מקבל אורך קטע בודד, והוא הולך להיות לכל זוג נקודות באשר הן על גרף הפונקציה, כאשר אם אני אעשה לזה אינטגרל, אני אקבל בעצם את האורך של הקטע הזה לאורך כל גרף הפונקציה.

נתן הגיע לביטוי $\sqrt{(f(x+h) - f(x))^2 + h^2}$, כאשר הוא התייחס ל- h גם כ- Δx וכגודל השואף לאפס. אז הוא פתח סוגריים, והציב במקום h אפס, מה שגרם לו להתבלבל מעט ולהיות מתוסכל: "הגעתי למבוי סתום". אך בסופו של דבר, נתן הצליח לשנות את הביטוי כך שיהיה בפורמט הקשור לאינטגרל $\Delta x - \sqrt{\frac{(f(x+h) - f(x))^2}{h^2} + 1}$, ואז השלים את המשימה, על ידי המרת הביטוי באינטגרל $\int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx$.

את המתואר לעיל ניתן לראות כדוגמה לתלמיד שמשתמש ב-AUP: הוא זיהה את הנוסחה למרחק כמודל הבסיסי לחישוב אורך; הוא חשב שעל ידי התקרבות לגבול, המודל הבסיסי הזה תקף לאורך כל הקו; הוא שינה את הביטוי כך שיתאים למבנה של $\int_a^b f(x) dx$. בנוסף, החשיבה של נתן כללה חלוקה לחתיכות, כמות מטרה וסכימת החתיכות, אך לא טיפלה ב'חתיכות' שנצברות ככמויות כפולות, אלא

טיפול במבנה אלגברי שצריך לקבלו כדי לעשות אינטגרל. למרות הצלחתו של נתן באמצעות גישה זו, ואף שהוא התייחס ל- h ול- Δx ככמויות, בראיון זה לא הייתה עדות לכך שהוא רואה ב- dx יותר מאשר סימון, ובהתאם הוא עובר להשתמש ב- dx רק בשלב האחרון בהחלט, כאשר הגיע לפורמט אותו הוא מזהה עם אינטגרל.

במשימת תזרים המזומנים, הוצג לנתן הגרף של פונקציה של תזרים מזומנים, שנמדד ב-1000 שקלים לשנייה. ציר ה- x היה ציר הזמן, שנמדד בשניות. נתן הצליח לתת אומדן טוב והולם לגבי ההתנהגות של המזומנים שנצברים בסיטואציה זו על ידי הקשר היעיל שהוא בנה בין המזומנים שנצברים לבין שטח הנמצא בין הגרף וציר ה- x .

למרות שנתן סיפק הערכות הולמות לכמויות הכסף ברגעים שונים, לכל אורך הריאיון הוא השתמש במטפורת הקריסה. הוא הציג אותה הן בצורה גרפית, על ידי שרטוט קווים על הגרף הנתון, והן באמירותיו:

נתן: ההיגיון שלי אומר שכאשר Δx שואף לאפס, או אפילו שווה לאפס, גודל ה- $\dots$, אני לא רוצה להגיד מלבן, זה קו, אין לו רוחב. זה פשוט קו, ומכיוון שרוחב הקו הוא אפס, כשנחבר ביחד את כל הקווים האלה, אנחנו נקבל את השטח שכלוא מתחת לעקומה.

שאלות נוספות גילו שנתן בהחלט נמנע מהמילים הקשורות לכמויות שבמשימה (כמות הכסף, תזרים הכסף). כאשר המראיין שאל את נתן להסביר מהו "לחבר קווים", הוא ענה:

נתן: לחבר, בעצם לחבר את שיעור y של כל, זאת אומרת לחבר את האורך של כל הקווים, כלומר לחבר את שיעור y של כל הנקודות, של אינסוף הנקודות האלה.

מראיין: אתה מחבר אינסוף ערכים, איך אתה עושה את זה בפועל?

נתן: בעזרת גבולות ובעזרת אינטגרל על גרף של פונקציה.

למרות שנתן זיהה את השטח כמייצג את כמות המזומנים הנצברת, נראה כי הוא לא תפס את הפונקציה הנתונה כקצב שינוי ולא החשיב את ה'חתיכות' המצטברות ככפולות. המראיין הציג לנתן דוגמאות כיצד לפרש את הנקודות בגרף במשימה, כמו: "בשעה 8:30 בבוקר (זמן $x=0$ שניות), $y=2$, כלומר נכנסו 2000 שקלים לשנייה לחשבונות הבנק". למרות שנתן קרא הצהרות אלו בקול בצורה נכונה, כאשר הוא חזר על ההצהרה הנ"ל, הוא השמיט את ה-"לשנייה" מהיחידות, ואמר כי: "נכנסו לחשבונות הבנק 2000 שקלים". לאחר מכן, נתן לא נעזר ביחידות מידה בחשיבה שלו. בנוסף, הוא טען: "כמה כסף יצא מהבנק? הסכום. הסכום של האורך של הקטע הזה והאורך של הקטע הזה והאורך של הקטע הזה, וכו' וכו' וכו', אינטגרל על גרף הפונקציה בין 8:40 לבין 10:00". לכן, נראה שנתן תופס את ה'חתיכות' הנצברות כאורכי קווים, במקום כמויות כפולות, מה שמחזק את הטענה שבעיניו הפונקציה הנתונה לא הייתה קצב שינוי, והקשר הכמותי באינטגרל לא היה כפלי.

המשימה השלישית הייתה 'משימת המסה': החוט AB באורך של 8 מטר עשוי מחומר חדשני. צפיפות החומר בחוט אינה קבועה, אלא הצפיפות (בגרמים למטר) בכל נקודה X שווה מספרית לאורך AX . מצאו את המסה של החוט (בגרמים).

במשימה זו, בתחילה, נתן הגיב מיידית עם האינטגרל הנכון, וטען ש"בנקודה X , אם הצפיפות היא AX , כלומר, המסה בנקודה היא x , אז $\int_a^b x dx$ ייתן לנו את מסת החוט". אף שהתשובה הסופית שלו נכונה, הוא אינו מבחין בין צפיפות למסה בהסבר שלו. כאשר המראיין מזכיר לו את יחידות המידה, מתעורר קונפליקט עבור נתן שגורם לו לאבד ביטחון: "אני נכנס לסחרור עם עצמי".

כתוצאה מקונפליקט זה, נתן חוזר בו מתשובתו ומחליט לשנות כיוון, בניסיון למצוא את הפונקציה המייצגת את המסה בכל נקודה. זה גורם לו, בתוך שתי דקות, להצהיר "כל הביטחון שלי ירד", ולטעון:

נתן: עניין הצפיפות מול המסה, מאוד, זאת אומרת הוא מבלבל אותי [...] אני לא מצליח להחליט עם עצמי על מסה בנקודה. מה תהיה המסה של... בנקודה מסוימת. אני רוצה לקחת את הנקודה מסוימת על חוט, ולהביע פונקציה שתתן לי את המסה שם, והפונקציה הזאת תהיה האינטגרל.

כלומר, נתן אינו מזהה את הצפיפות כקצב השינוי של המסה, ואת האינטגרנד כקצב שינוי. הבנה זו של האינטגרל תואמת לגישת AUP שאינה מדגישה את קצב השינוי, ואינה דורשת מבנה כפלי (כלומר,

אינה מדגישה את AR). יחד עם זאת, בהלימה לכך שנתן רואה את dx כסימון ולא ככמות, הוא ממשיך ואומר שאם המסה בכל נקודה נתונה על ידי $g(x)$, אז המסה הכוללת תהיה $\int_0^8 g(x) dx$, ולא $\int_0^8 dg$.

לסיכום

גם AR וגם AUP ממשיגים את dx ככמות. בנתונים שאספנו גם בראיונות נוספים, נראה שתלמידים תופסים את dx כסימון מתמטי ותו לא. זה מתבטא במיוחד במקרה של נתן, דרך שימוש במטפורת הקריסה. נתן 'מקריס' את המלבנים לקווים וטוען שהאינטגרל סוכם את אורכיהם, או את ערכי ה-y של פונקציית האינטגרנד. דבר זה ניכר בעיקר במשימות עם הקשר חוץ-מתמטי. במשימת תזרים המזומנים נתן משנה את יחידות המידה של הפונקציה שניתנה כך שתתאים לגישתו לאינטגרל, ובמשימת המסה, למרות שהוא מזהה נכונה את פונקציית הצפיפות, נתן מעוניין למצוא פונקציה של המסה לצורך אינטגרציה.

במשימת אורך הקו, נתן מזהה את המודל הבסיסי הנגזר ממשפט פיתגורס, מסביר שהוא זקוק לחלק את העקומה לאינסוף קטעים קטנים, 'מקריס' את הממד כדי להוסיף נקודות, ומבצע מניפולציה אלגברית כדי להגיע לתבנית המאפשרת אינטגרציה. למרות שנתן משתמש חשיבה כמותית בתחילה, אין ראיות שהוא ממשיג את dx ככמות. למעשה, בבניית האינטגרל הוא משתמש ב- h או ב- Δx , ורק בסוף התהליך הוא מחליף אותם ל- dx , לאחר המניפולציה האלגברית. זה מרמז שאף אם בבניית האינטגרל הוא משתמש ב- h או ב- Δx ככמות, כאשר הוא מגיע לתבנית, הוא מתייחס ל- dx כאל סיומת, כחלק מהתבנית. ההצגה הזו מתאימה היטב ל-AUP ומשרתת את נתן בשתי המשימות הראשונות, אך לא עובדת במשימה השלישית. אנו טוענים שכדי להתמודד עם כל המשימות, נתן צריך גם את AR – בפרט, לדעת לזהות את האינטגרנד כקצב שינוי, ולזהות את הכמויות הנסכמות ככפוליות.

במהלך ההצגה האפשרית בכנס, אנו מתכוונים להציג ולתאר את המשימות בקצרה, להרחיב ולשוחח על הניתוח והממצאים שלנו ביחס לנבדקים אחרים, ולדון בהשלכות אפשריות של הממצאים.

תודה

מחקר זה נתמך על ידי קרן הלאומית למדע, מענק 1743/19.

מקורות

- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. Springer Open.
- Kidron, I. (2019). Calculus teaching and learning. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of mathematics education*, (pp. 69–75). Springer.
- Jones, S. R. & Ely, R. Approaches to integration based on quantitative reasoning: Adding Up Pieces and Accumulation from Rate. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 9, 8–35. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00203-x>
- Noah-Sella, L., Kouropatov, A., Dreyfus, T., & Elias, D. (2022). Manifestations of the collapse metaphor and their possible implications on personal meanings of integral and accumulation. In Hodgen, J., Geraniou, E., Bolondi, G. & Ferretti, F. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 4773-4780). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
- Oehrtman, M. C. (2009). Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Student Metaphors for Limit Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(4), 396–426.
- Stevens, B. N. & Jones, S. R. (2023). Learning integrals based on adding up pieces across a unit on integration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* , 9, 118–148. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00204-w>



רקע תאורטי

בשנת הלימודים הנוכחית נכנסת לשימוש תוכנית לימודים חדשה במתמטיקה בכל כיתות י' ברחבי הארץ. במסמך המפרט את עקרונות תכנית הלימודים החדשה ניתן דגש על פיתוח מושג הנגזרת בעזרת קצב שינוי, ופיתוח מושג האינטגרל כהצטברות, תוך שימוש בהקשר שימושי פיזיקלי (משרד החינוך, n.d.). בפרט, בשנים האחרונות נכנס בהדרגה לבחינות הבגרות הנושא של הצטברות.

מחקרים מעידים על מספר קשיים מרכזיים בלמידת אינטגרלים והצטברות. ראשית, תלמידים פעמים רבות מתקשים לתפוס מהן 'הפיסות' שמצטברות. על מנת שתלמידים יוכלו לזהות את 'השטח תחת הגרף' כמייצג גודל שאיננו שטח (למשל מרחק), עליהם להמשיג את הפיסות שמצטברות כמכפלות של קצב שינוי ושינוי במשתנה הבלתי תלוי (למשל מהירות כפול קטע זמן). כלומר, מתמטית פונקציה $f(x)$ היא קצב השינוי של פונקציית ההצטברות $\int_a^x f(t)dt$, ולכן כדי למצוא כמות שהצטברה יש לזהות את קצב השינוי, להיעזר בו לבניית הפיסות, ולסכום אותן (Thompson & Silverman, 2008). קושי נוסף הוא ב-covariational reasoning, חשיבה כמותית המאופיינת בתפיסה דינמית של כמויות ותיאום בין השינויים בהן. חשיבה זו היא בליבה של גישה המתמקדת בקצב שינוי ובהצטברות. בעוד שעבור קצב שינוי תלמידים נדרשים לתיאום בין שתי כמויות בלבד, בלמידה של אינטגרלים התלמידים נדרשים להתאמה של שלוש כמויות המשתנות סימולטנית – שינוי ב- x , שינוי ב- $f(x)$, ושינוי ב- $\int_a^x f(t)dt$ (Thompson & Silverman, 2008).

קושי אפשרי נוסף בלמידת אינטגרלים הוא מידור ידע. מידור ידע הוא תופעה שבה ללומד יש שני מבני ידע שונים העלולים להיות בקונפליקט. המידור יכול לבוא לידי ביטוי בחוסר עקביות ובחוסר קוהרנטיות, קושי במעבר בין ייצוגים שונים וקושי בזיהוי ידע כרלבנטי (Vinner & Dreyfus, 1989). למושג האינטגרל יש היבטים שונים רבים – פונקציה קדומה, שטח, הצטברות ועוד. תלמידים עשויים להתקשות לקשר בין היבטים שונים אלה, מה שיעיד על מידור ידע.

במחקר שאנו עורכים, שמקרה פרטי שלו מוצג כאן, אנו רוצים לזהות כיצד מורים ותלמידים מקשרים בין ההיבטים השונים של האינטגרל, בפרט הצטברות, וכיצד הקשרים שקיימים משפיעים על התמודדותם עם הקשיים המוכרים בספרות.

מתודולוגיה

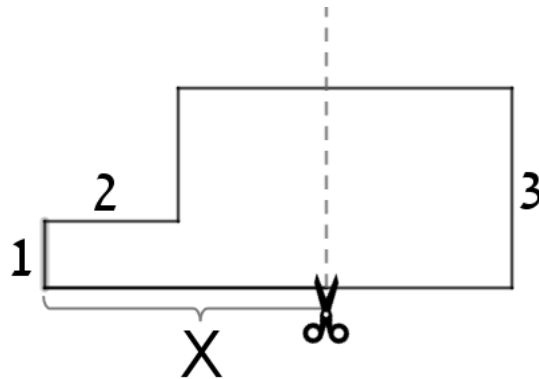
הממצאים המוצגים להלן נאספו במהלך ריאיון לא מובנה מבוסס מטלה. המרואיינת לינוי היא מורה בתחילת דרכה וסטודנטית לחינוך מתמטי. הריאיון הוקלט ותומלל.

בניתוח הריאיון חיפשנו התנהגויות המעידות על תפיסה דינמית לעומת סטטית של פונקציה: שרטוט רציף לעומת שרטוט נקודות ספציפיות, התייחסות לקצב שינוי, שימוש במילות זמן (למשל, מהר), ואמירות המעידות על covariational reasoning: תיאורים כיצד שינוי ב- x משפיע על y , התייחסות לקצב שינוי ולשינוי בקצב שינוי.

בנוסף לכך, בכל אמירה המתייחסת לאינטגרל חיפשנו התייחסות לפיסות המצטברות. כמו-כן, בחנו כיצד המרואיינת מקשרת בין היבטים שונים של האינטגרל כגון: הצטברות, שטח, פונקציה קדומה וכו'.

המטלה

בן רוצה לחתוך צורה מנייר. יש לו חתך אחרון לעשות, כפי שניתן לראות בתמונה.



תארו את הפונקציה המתארת את השטח של צורת הנייר המתקבלת משמאל לחתך, כתלות במרחק של החתך מהפינה השמאלית (מסומן ב- x).

ממצאים

Covariational reasoning

אף כי לינוי הצליחה בנקל להגיע לביטוי האלגברי $y = 3x - 4$, המתאים לתחום $x > 2$, היא התקשתה לזהות את התחומים הרלבנטיים לשאלה. מחד, כאשר התייחסה לצורה הנתונה, לינוי לא התייחסה כלל לערכי x קטנים מ-2, עבורם הביטוי לא תקף, ומאידך, בהתייחסות לביטוי האלגברי, היא הגיעה למסקנה שתחום הערכים הרלבנטי הוא $x > \frac{4}{3}$. יתרה מזאת, כאשר המראיינת שאלה אותה מפורשות על חתך בתחום $x < 2$, בתחילה, ללא הדרכה, לינוי התקשתה לזהות את x , וטענה כי חסרים לה נתונים.

מראיינת: ומה היה קורה אם נגיד החתך היה, למשל פה [מציירת קו מקווקו משמאל ל- $x=2$]?

לינוי: ואני צריכה את החלק השמאלי. אוקיי. אז יש לי אורך שהוא 1. אז אם אני לא טועה, רגע, כל זה, זה x , זה 2, זה x פחות 2. אני חושבת שאין לנו אפשרות לדעת מה השטח לפי הנתונים.

הקושי של לינוי לזהות שקיימים שני תחומים בשאלה מעיד כי התייחסותה לפונקציה הנתונה הייתה סטטית, והיא התקשתה לתפוס את x כמשתנה באופן דינמי. לאחר התערבות של המראיינת, לינוי מזהה את התחומים הנכונים, ומתחילה להתייחס לשינוי של x והשפעתו על השטח. עם זאת, לינוי לא מתייחסת לאופי השינוי. היא לא מציינת אם השטח יגדל או יקטן, ולא מתייחסת לקצב השינוי. בהתאם, גם בהתייחסות לתחום ערכי x היא מתעלמת מהשינוי בצורה. הבלבול שלה בין תחום הערכים השגוי לתחום הערכים הנכון ממשיך, מה שמעיד על המשך הקושי לתפוס את x באופן דינמי.

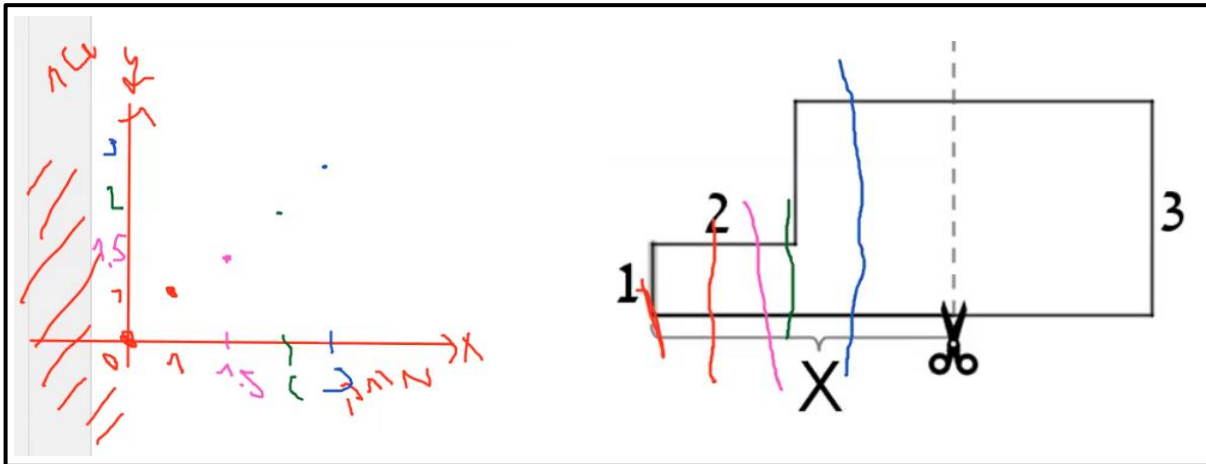
לינוי: הרי אני מבינה שיש לי פונקציה שהשטח שלה ישתנה לפי ערך ה- x . כלומר, ככל שאני אגזור שמאלה יותר, יקרה משהו בהתאמה. זתומרת יקרה משהו בעקבות זה. ואנחנו רואות שאם אני רק אצייר את הביטוי האלגברי, אז אני כבר יודעת ש- x צריך להיות גדול מ-4 חלקי 3, כי אחרת יהיה לי שטח שלילי, משהו שבכלל לא יכול להיות. ואז אנחנו רואות שאם x בעצמו... אה, רגע, אבל הוא גדול מ-2 במקרה הזה. אם נחתוך שמאלה יותר, הוא יכול להיות קטן מ-2. כאילו, אם נחתוך כאן... שנייה... אם נחתוך כאן... אז x כן יהיה קטן מ-2. כאילו, מה שאמרתי לך עכשיו רלבנטי לסיטואציה הזו.

בהמשך, לינוי נותנת דעתה גם לערכי x הקטנים מ-2, ומנסה לשרטט את הפונקציה. במקרה זה היא מחליטה לשרטט נקודה-נקודה על פי הצורה הנתונה, מה ששוב מעיד על תפיסה סטטית של הפונקציה. אף כי כבר מצאה את הביטוי האלגברי המתאים ל- $x > 2$, לאחר שלינוי משרטטת שלוש נקודות על הגרף, היא מזהה שעבור $x < 2$ מדובר בפונקציה קווית עם שיפוע 1, ומכלילה זאת לכל הפונקציה, בפרט עבור $x = 3$, בסתירה לביטוי האלגברי שכבר מצאה (איור 1).

לאחר התערבות המראיית, לינוי מגיעה למסקנה שהחישוב שלה שגוי, ומחשבת את הנקודה מחדש על פי הצורה הנתונה. החריגה של הנקודה מהקו הישר $y = x$ מובילה את לינוי להשערה שמדובר בפונקציה מעריכית, בסתירה לביטויים שכבר מצאה, ובאופן שאינו תואם את אופייה של הצורה הנתונה, עבורה קצב הצטברות השטח קבוע למקוטעין. ממצאים אלה מעידים שוב כי לינוי אינה שוקלת את האופן בו השינוי ב- x משפיע על השטח.

איור 1

השרטוט של לינוי. כל נקודה בגרף משמאל מתאימה לחתך באותו הצבע מימין



לינוי טוענת כי הבעיה מזכירה לה אינטגרלים, מאחר והיא עוסקת בשטח, אך במהרה מבטלת את אמירתה ומשייכת את השאלה לתחום של בעיות קיצון בגלל השרטוט הנתון. זאת למרות שלא התבקשה למצוא ערך מקסימלי או מינימלי, וניתן לזהות בנקל כי לצורה אין שטח מקסימלי, והשטח המינימלי הוא פשוט אפס. ממצא זה מחזק את הקביעה כי לינוי לא משתמשת ב-covariational reasoning בפתרון הבעיה.

לינוי: אז גם קשה לי לחשוב כאן על אינטגרל שוב, בגלל שאין לי פונקציה. כאילו, כשאני רואה פונקציה עם גרף בעיניים, או שנותנים לי ביטוי אלגברי, אז קל לי להגיע לזה. ברגע שאני רואה שרטוט כזה, כאילו זה מזכיר לי בעיות קיצון ודברים שלא, לא, אף פעם לא השתמשתי באינטגרל בהם.

מידור בין היבטים שונים של אינטגרל

במהלך הריאיון, המראיית מבקשת מלינוי להבהיר מדוע אינטגרלים אינם רלבנטיים לדידה לבעיה.

לינוי: [...] כאילו אם עכשיו אני אדבר, אני אגיד ציר X זה ציר הזמן שלי, וציר Y זה ציר הדרך שלי. אז יש לי פה בעצם גרף שציר X מייצג זמן וציר Y מייצג את הדרך. ואני רואה שזה לא פונקציה קווית, זאת אומרת אין פה מהירות קבועה בהכרח, אלא נניח יש פה איזשהו שנוסע ונוסע, אז בזמן מסוים הוא עובר דרך מסוימת, אז אם אני רוצה לדעת מה המרחק שהוא עבר, אני יכולה בעצם לחשב את השטח הזה שמתחת. והוא ייתן לי את הדרך.

לינוי מתייחסת לצורך בגרף נתון של הפונקציה. בנוסף לכך, היא מקשרת בין אינטגרלים למציאת מרחק שעובר גוף בתנועה. מעניין לציין שלינוי מיוזמתה ביקשה להיעזר בהקשר של מרחק מצטבר בהסבריה. יחד עם זאת, עבור לינוי על מנת למצוא את המרחק היא צריכה למצוא את השטח שמתחת לגרף של הדרך כתלות בזמן. לפיכך, לינוי אינה תופסת את הגרף הנדרש כגרף קצב שינוי.

כאשר לינוי מנסה להבין מה הקשר של הבעיה לאינטגרל היא מבחינה בין השטח שהצטבר לבין ערך פונקציית השטח.

לינוי: רגע, אנחנו רוצים את השטח שמצטבר, או שאנחנו רוצים לדעת מה השטח בכל שלב? [מקריאה] תארו את הפונקציה המתארת את השטח של צורת הנייר המתקבלת כתלות במרחק. אה, הם לא רוצים את השטח המצטבר של הצורה.

מרמינת: מה ההבדל?

לינוי: כאילו, לא רוצים ש... ההבדל הוא בלשואל מה שטח הצורה כאשר $X=20$, ואז אני אומרת לך, אה, אוקיי, זה ה-Y הזה. לעומת... [...] לעומת כל מה שמתחת, כאילו.

הבחנה זו מעידה כי היא אינה תופסת גודל מצטבר כפונקציה, ואינה מקשרת בין השטח שהצטבר לבין ערכי פונקציית השטח. נראה כי קיים אצל לינוי מידור בין היבטים אלה של אינטגרל. לינוי אף מוסיפה: "אני מבולבלת מעצמי. אני מרגישה שיש לי המון המון כזה דברים בראש וקשה לי לחבר אותם."

יתרה מזאת, על מנת למצוא את שטח הצורה ב- $x = 2$ לינוי עושה אינטגרל מסוים מ-0 עד 2 על פונקציית השטח בתחום $(y = x)$. כלומר, אף שהיא מקשרת בין אינטגרל מסוים לבין חישוב שטח, היא לא מקשרת בין ערך האינטגרל לבין ערך פונקציית השטח. כמו-כן, על מנת למצוא מרחק לינוי רוצה לחשב את השטח מתחת לגרף פונקציית המרחק, ואף שוללת מפורשות שימוש בגרף מהירות. לפיכך, למרות שלינוי מקשרת בין הפיסות שמצטברות לבין שטחי מלבנים, עבורה, הפיסות שמצטברות אינן מכפלות שאחד מגורמיהן הוא קצב שינוי. כלומר, היא לא מקשרת בין הצטברות לבין קצב שינוי.

דיון

מן הממצאים עולה כי לינוי מתקשה לתפוס פונקציות באופן דינמי, לא משתמשת ב-covariational reasoning, ולא מקשרת בין היבטים שונים של אינטגרל. כל אלה מקשים על לינוי לבנות תפיסה קוהרנטית של מושג האינטגרל, ובאילו מקרים אפשר ורצוי להשתמש בו. בפרט ניכר שכאשר לינוי נעזרת בדוגמת המרחק, היא לא מזהה את הפיסות המצטברות כמכפלות של מהירות וזמן, כלומר לא מזהה את הקשר בין הצטברות וקצב שינוי. בהתאם, עבור לינוי, כפי שאינטגרל על פונקציית המרחק נותן מרחק, גם אינטגרל על פונקציית השטח נותן שטח.

אף כי הממצאים המדווחים הם מריאון יחיד, הם מעלים סוגיות חשובות שיש להידרש אליהן לאור כניסתה של תוכנית הלימודים החדשה. בפרט ראוי לציין כי בשנים האחרונות נושא פונקציית ההצטברות נכנס בהדרגה לבחינות הבגרות, מבלי התייחסות מפורשת לקצב שינוי, ומבלי התייחסות להקשרים חוץ מתמטיים. בהינתן שהבנה של הפיסות המצטברות, וקואורדינציה בין גדלים המשתנים בהתאמה הם אתגרים מרכזיים העומדים בפני תלמידים, אנו רואים חשיבות מכרעת של לימוד נגזרת כקצב שינוי בהקשרים פנים וחוץ מתמטיים על מנת להתגבר על אתגרים אלה. את היסודות בנושא קצב שינוי יש להניח כבר בחט"ב ולחזק אותן בעת לימוד הנגזרת.

תודות

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק מספר 1743/19).

רשימת מקורות

משרד החינוך. (n.d.). תוכנית הלימודים החדשה. פורטל עובדי הוראה. https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika/chativa-elyona/teaching-mathematics/new-curriculum

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The Concept of Accumulation in Calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection* (pp. 43–52). The Mathematical Association of America. <https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.005>

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356. <https://doi.org/10.2307/749441>

נגזרת, שיפוע משיק, קצב שינוי ומנת הפרשים – מילים נרדפות?



כלילה קופרמן, מרכז אקדמי לב

דפנה אליאס, אוניברסיטת תל אביב

טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

ליה נח סלע, אוניברסיטת תל אביב

אנטולי קורופטוב, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט

מבוא

בשנים האחרונות, לקראת כניסתה של תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה, זוכה המונח קצב שינוי להתייחסות מרכזית כחלק מתפיסת מושג הנגזרת. כניסתו לשיח הכיתתי מעוררת שאלות בדבר המשמעויות הנבנות אצל התלמידים. לאורך שנים, מחקרים הראו שהבנתם של תלמידים את מושג הנגזרת היא ברובה ביצועית (למשל, Kidron 2019). האם השינוי בישראל של השנים האחרונות משנה את פני הדברים? במאמר זה נציג ניתוח משמעויות של שלושה תלמידי תיכון עבור מושג הנגזרת. המשמעות למושג נבחנה על בסיס סוג הקשרים שתלמידים מבטאים בנוגע לייצוגיו השונים. נראה כי לתלמידים שונים נבנו מערכות קשרים שונות, כאשר חלקם מתייחסים לייצוגים השונים כאל מילים נרדפות, בעוד אחרים מבטאים את הקשרים באופן נהיר ומעמיק.

רקע תיאורטי

נגזרת

על פי תוכנית הלימודים החדשה למתמטיקה ל-5 יח"ל (אתר המפמ"ר, 2023) מושג הנגזרת מוצג לתלמידי כיתה י', כ"ביטוי לקצב השינוי של הפונקציה". התוכנית מציעה לפתוח את פרק הנגזרת כך: (1) הצגת בעיות שימושיות מחיי היומיום; (2) ניתוח השתנות ערכי הפונקציה באמצעות היחס של גובה מדרגה לרוחבה; (3) הצגת מושג המשיק בנקודה באופן אינטואיטיבי; (4) התייחסות לנגזרת כפונקציה (ולא רק כתכונה נקודתית); (5) הגדרת קצב שינוי כגבול של קצב שינוי ממוצע (מנת הפרשים).

עקרונות אלה תואמים במידה רבה את גישתה של Zandieh (2000) למושג הנגזרת כמושג הבנוי מייצוגים שונים: (1) ייצוג גרפי כשיפוע המשיק; (2) ייצוג מילולי כקצב שינוי; (3) ייצוג פיזי כמהירות ("הפונקציה יורדת מהר בקטע זה" או "השינוי כאן הוא איטי יותר"); (4) ייצוג סימבולי כמנת הפרשים. על אף שרק ארבעה ייצוגים מוצגים במפורש, הכותבת מציינת שיכולים להיות עוד רבים אחרים, אחד לכל מצב בו קיימת מערכת בה ניתן לדון במושג הנגזרת, לדוגמה – טמפרטורה המשתנה ביחס לזמן.

משמעויות אישיות שיש לתלמידים

Thompson (2015) צועד בעקבותיו של פיאז'ה ומתמקד במה שעולה במוחו של אדם כשהוא נתקל במצב כלשהו. להגדרתו, המשמעות שיש לאדם עבור מושג היא מה שעולה במוחו מיד, יחד עם מה שמוכן לעלות בראשו בהמשך. כלומר, משמעות היא מרחב ההשלכות (space of implications) שההבנה הנוכחית מגייסת – פעולות וסכימות שההבנה של אותו אדם במצבה הנוכחי מציעה.

בחינת קשרים בין ייצוגים כרמז למשמעות אישית

בעוד שייצוגי הנגזרת מאפשרים ניתוח אפיסטמי למושג, משמעויות הן קוגניטיביות ואישיות. בחינת בקיאות בייצוגים יכולה לגלות ידע של תלמידים, אך לגילוי משמעויות אישיות נצטרך להוסיף שכבה

נוספת למסגרת התיאורטית. לצורך כך בחרנו להסתכל על הקשרים בין מושג הנגזרת לייצוגיו השונים, ובין הייצוגים עצמם, תוך בחינת יכולת של תלמידים לבטא קשרים אלה. הייצוגים קשורים זה לזה, אך נפרדים, כשכל אחד מהם תורם לעושר ולמורכבות מושג הנגזרת. צורת מערכת הקשרים הזאת אצל כל תלמיד היא אישית ומביעה את מרחב ההשלכות של התלמיד במצב ההבנה הנוכחית שלו.

שאלות המחקר שלנו הן: מה טיב הקשרים כפי שבאים לידי ביטוי אצל תלמידים שונים? כיצד טיב הקשרים מרמז על המשמעויות של התלמיד לנגזרת?

מתודולוגיה

ייצוגים

לצורך מחקר זה, אימצנו את הייצוגים של מושג הנגזרת אשר הוגדרו על ידי Zandieh (2000), כולל את המלצתה להרחבה. לפיכך הייצוגים שהוגדרו במחקר זה הם: שיפוע משיק, קצב שינוי (רגעי), מהירות, מנת הפרשים (וגבולה) והשתנות טמפרטורה ביחס לזמן (ייצוג תלוי הקשר חוץ מתמטי).

קשרים בין ייצוגים

נבחן את הקשר בין מושג הנגזרת לבין כל ייצוג, ובין כל שני ייצוגים, אותו מביע התלמיד כאשר הוא מדבר על שני מונחים (מושג או ייצוג). לצורך מחקר זה הגדרנו שני סוגי קשרים:

1. קשר של זהות (Saming) – בקשר כזה שני המונחים (מושג או ייצוג) הם מילים נרדפות וזהות עבור התלמיד. מבחינה אופרטיבית, נבחין בין שני מקרים: (א) התלמיד מסתמך על סמכות חיצונית בטיעון הקושר שני מונחים, ואינו בעל יכולת להסביר את הקשר בעצמו. במקרה כזה תלמיד ישתמש בביטויים כמו: "כך לימדו אותי", "זה מה שהמורה שלי הסביר" וכיו"ב; (ב) התלמיד מקשר את שני המונחים אך אינו מסוגל לנמק את הקשר בצורה מתמטית ומשתמש בביטויים כמו: "הם זהים", "זאת ההגדרה", "זה פשוט ככה" וכיו"ב.

2. קשר של חיבור (Connecting) – הייצוגים נתפסים כמבטאים היבטים שונים של המושג, כך שיש לכל ייצוג ייחודיות אך גם קשר לייצוג האחר. הגדרות אופרטיביות לסוג קשר כזה הן: (א) התלמיד מסוגל להסביר במילים שלו את הקשר, תוך מתן נימוק מתמטי; (ב) התלמיד מנמק את הקשר בין שני מונחים ע"י שימוש במונח שלישי המחובר ביניהם; (ג) התלמיד מסוגל להסביר את ההבדלים בין שני מונחים; (ד) התלמיד מציין יתרונות לכל מונח ו/או מבטא העדפה למונח כלשהו על פני האחר.

נציין כי ייתכן מצב של היעדר קשר, בו התלמיד לא מקשר כלל בין שני מונחים. לא נרחיב במאמר הנוכחי לגבי מצב זה.

אופן ביצוע המחקר

מחקר זה הינו חלק מפרויקט מחקר רחב יותר בו נבחנות משמעויות שיש לתלמידי תיכון בנוגע למושגים מרכזיים בחדו"א. במאמר זה נדווח על ראיונות עומק אשר בוצעו עם תלמידי תיכון הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יח"ל בקשר למושג הנגזרת. התלמידים מילאו במסגרת הכיתתית שלהם שאלון, והתנדבו לקחת חלק בראיון המשך. בראיון, אשר בוצע מספר שבועות לאחר מילוי השאלון, נשאלו לגבי התשובות שסימנו. הראיונות הוקלטו ותומללו. בניתוח הראיונות חיפשנו בתמלול מילים הקשורות לייצוגים השונים וניתחנו התייחסות לזוגות של מונחים (נגזרת וייצוגיה), לפי שני סוגי הקשרים שהגדרנו – קשר של זהות או קשר של חיבור.

בשאלון מתוארת הסיטואציה הבאה: "בכיתה עוסקים בהשתנות הטמפרטורה T של מים בקומקום (במעלות צלסיוס) כפונקציה של הזמן x (בדקות). אלונה אמרה שערך הנגזרת של הטמפרטורה לפי הזמן ב- $x=3$ הוא 0.47. התלמידים דנו במשמעות אמירתה עבורם." בהמשך מובאים היגדים של תלמידים דמיוניים שונים, המתארים ייצוגים שונים. לגבי כל היגד התבקשו התלמידים לדרג עד כמה ההיגד נכון, ועד כמה הם מזדהים עימו. מפאת קוצר היריעה, אנו נתמקד בהיגד אחד של תלמידה דמיונית בשם סאלי, המציגה את הנגזרת כשיפוע משיק: "בשבילי, המשמעות היא שאם נשרטט גרף של הטמפרטורה (במעלות) כפונקציה של הזמן (בדקות), שיפוע המשיק לגרף ב- $x=3$ יהיה 0.47".

בפרק זה נציג קטעי ראיונות עם שלושה תלמידים, עופר, גילי ונועם (שמות בדויים) העוסקים במשמעות של נגזרת כשיפוע המשיק, בהתייחסם לאמירתה של סאלי.

קטע ראיון עם עופר - אותו דבר והיינו הך

עופר: זה נכון, כן. זו ההגדרה שלמדתי בבית הספר. ותראי, זה מאוד קרוב לדרך החשיבה שלי, כי שוב, למדתי את זה בבית הספר, וגם בפיזיקה, זה הרבה תרגילים ככה.

[...]

מראיינת: אוקיי. וסאלי אומרת שהמשמעות היא ששיפוע משיק, ב $X=3$ יהיה 0.47. איך זה קשור למה שאלונה אמרה?

עופר: כמו שאמרתי, היא אמרה ערך הנגזרת, אז בשבילי ערך הנגזרת, זה שיפוע משיק, אותו דבר. זה הינו הך. אני אמרתי, זו טענה נכונה.

עבור עופר הקשר בין הנגזרת ושיפוע המשיק הוא קשר של זהות, כפי שניתן להתרשם כשהוא אומר "למדתי את זה בבית ספר", "אותו דבר, זה הינו הך" ומתאים בכך להגדרות האופרטיביות לקשר של מסוג זה. עופר נשען על סמכות חיצונית, ולא מערב את הדעה או ההבנה שלו.

קטע ראיון עם גילי - נגזרת כקצב שינוי

גילי: כן, זה נכון [מה שסאלי אומרת], כי זה בדיוק ההגדרה של קצב שינוי זה גם מה שאמרתי קודם לגבי זה, שהשיפוע מייצג את הקצב.

מראיינת: אוקיי, את יכולה להסביר עוד קצת מה זה קצב שינוי?

גילי: זה כמה טמפרטורות, כמה מעלות צלסיוס משתנות ביחידת זמן. עכשיו השיפוע יכול להשתנות, זאת אומרת שנכון ל- $X=3$ זה הקצב של השינוי. [...] אלונה, אה, היא כתבה ערך הנגזרת, אז נגיד מה שאני חושבת אוטומטית כשאומרים לי ערך נגזרת אז אני אומרת שזה קצב שינוי, אני לא אומרת שזה שיפוע אבל זה כן, זה גם קרוב.

על אף שגילי משתמשת במילים "זה בדיוק ההגדרה", היא קושרת בין הנגזרת לשיפוע המשיק בקשר של חיבור, היות והיא מבצעת מעבר בין המונחים דרך ייצוג אחר - קצב השינוי. קצב השינוי מתאר עבורה את השינוי בטמפרטורה בהתאם לזמן, ייצוג נוסף שהיא מכניסה להסבר. המשמעות של שיפוע "קרובה" למשמעות של קצב שינוי, כלומר זו משמעות שעולה בראשה לנגזרת, אולם אחרי המשמעות של קצב שינוי. קצב השינוי הוא הייצוג המועדף עליה לנגזרת, בכך היא עונה על ההגדרה האופרטיבית של העדפת ייצוג אחד על פני האחר.

קטע ראיון עם נועם - שילוב של פיסי ומתמטי

נועם: אני חושב שהשיפוע באופן כללי הוא 0.47, שזה פשוט כאילו נכון. [...] אני גם אוהב להסתכל על דברים פיזיים, אני אוהב לשלב, כאילו בצורה מתמטית ו/או גם, זה... אני לא אוהב לבחור בין או להסתכל על זה בצורה פיזית או מתמטית. אני חושב שהם נורא קשורים [...] פה אני מאוד מסכים, כי זה קשר מתמטי נכון, הוא מאוד עוזר לחקור עוד דברים ופשוט מתמטיקה. [...]

מראיינת: אוקיי. אז בוא תקרא עוד פעם את סאלי ותסביר לי מתוך המילים שלה איך זה מתקשר למה שאתה אומר לי.

נועם: [...] בעצם נהפוך את זה לגרף. עכשיו, בפונקציות שהן לא ליניאריות, אין להן שיפוע, אבל, לכל נקודה על הגרף יש את המשיק, שזה הקו שנושק לנקודה, שלו יש שיפוע, ככה שבעצם אם זה כזה בצורה אך ורק מתמטית אפשר לחשוב על זה, שבעצם בנקודה מסוימת, אז יש לנו את הנגזרת, אז אם ניקח את הערך איקס לנקודה מסוימת ונציב בנגזרת, זה השיפוע של המשיק. [...] אני חושב שזה מגניב להסתכל על דברים, לראות איך המתמטיקה מתבטאת בחיי היום יום.

לא! מה פתאום?! [...] הנגזרת זה פונקציה בפני עצמה. [...] זה שאם ניקח איזה שהוא נקודה על גרף הפונקציה, ה... העיקרית נקרא לזה ככה [...] ונשרטט לאותה נקודה משיק, קו שהוא נוגע ולא חותך, אז... השיפוע של המשיק, בעצם קצב השינוי של המשיק, באותה נקודה, שווה ל... לאם ניקח את אותו ערך איקס ונציב בנגזרת. אבל, שיפוע ונגזרת זה לא אותו דבר בכלל. השיפוע זה פשוט... זה קשור למשיק [...] זה ה- m .. זה בעצם, קצב שינוי של המשיק. שהמשיק בפני עצמו הוא פונקציה, הוא קו. פונקציית קו ישר.

נועם דוגל בשילוב של המתמטיקה עם המציאות. הוא מבטא התלהבות מכך שניתן לתאר תופעה מציאותית בכלים מתמטיים ולתת למציאות פרשנות מתמטית מדויקת. נועם מייצר ציר דמיוני, בין המתמטיקה הטהורה לבין העולם הפיסי, עליו כל ייצוג מונח במיקום שונה. שיפוע המשיק עבורו הוא ייצוג בעל משמעות מתמטית טהורה. הוא מחבר מיוזמתו ייצוג נוסף - קצב שינוי, שהוא עבורו בעל משמעות פיזית ויכול לתאר בהקשר הנידון את שינוי הטמפרטורה ביחס לזמן (ייצוג נוסף). בכך שציין מאפיין מובהק המבדיל בין הייצוגים, היוצר התאמה של כל ייצוג לצורך שונה, אנו רואים עדות לכך שלא רק שהקשר בין הנגזרת לבין שיפוע המשיק הוא קשר של חיבור, אלא גם הקשר בין הייצוגים שציין הוא של חיבור. נועם מודע להבדלים בין נגזרת לשיפוע המשיק ("הנגזרת היא פונקציה בפני עצמה", השיפוע "זה ה- m " וגם "קצב שינוי של המשיק") ובכך אנו רואים עדות נוספת לקשר של חיבור בין הנגזרת ושיפוע המשיק.

סיכום

במסגרת המחקר הנוכחי הוגדרו ייצוגים למושג הנגזרת, ונבחנו הקשרים בין המושג לבין ייצוגיו השונים, ובין הייצוגים עצמם. כפי שניתן להתרשם מהתוצאות שהוצגו במאמר זה, תלמידים מבטאים באופן ייחודי את מערכת הקשרים האישית שנבנתה עבורם במהלך לימוד מושג הנגזרת. בתוצאות המחקר, אשר קצרה היריעה הנוכחית מלתאר באופן מלא, נצפו מערכות קשרים שונות המבטאות משמעויות שונות למושג. אצל חלק גדול מהתלמידים משמעות הנגזרת היא קצב שינוי, במובן שזהו הייצוג הראשון שעולה בראשם כשמדברים איתם על המושג. יחד עם זאת, נושא קצב השינוי הרגעי והקשר לגבול מנת הפרשים לא עלו באופן מובהק מדברי רוב התלמידים.

המתודולוגיה שהוצגה – בחינת מערכת קשרים בין ייצוגים ובינם לבין מושג מתמטי אותו הם מייצגים – נמצאה כמתאימה לבחינת משמעויות הנגזרת עבור תלמידים. נוסף על כך, אנו מוצאים טעם בהשלכת מתודולוגיה זאת על מושגים אחרים (כגון אינטגרל) במחקרים עתידיים.

תודות

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק מספר 1743/19).

רשימת מקורות

- אתר המפמ"ר (2023). תכנית כיתה י' – חמש יח"ל. אוחר ביום 11 בספטמבר 2023 מהאתר https://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/matematika/yod5.pdf
- Kidron, I. (2019). Teaching and Learning Calculus. Long entry in: Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*, 69-75. Springer Dordrecht, Heidelberg, New York, London.
- Thompson, P. W. (2015). Researching mathematical meanings for teaching. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Third handbook of international research in mathematics education* (pp. 435–461). New York, NY: Taylor & Francis.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, 103-127.



ילנה פורטנוב נאמן, המחלקה למתמטיקה, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי
מרים עמית, המחלקה להוראת המדעים, אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מבוא

בשני העשורים האחרונים, תחום פתרון בעיות נמצא בסדר חשיבות גבוה בתוכניות הלימודים במתמטיקה. תחום זה אוצר בתוכו מרכיבים מטה-קוגניטיביים המתבטאים בכל שלבי הפתרון, ולאסטרטגיות קיים תפקיד מרכזי בתהליך. אסטרטגיות מקושרות לתהליכי חשיבה שבהן הלומדים צריכים להבין מתי ואיך להשתמש בהן בצורה אפקטיבית. ספרות המחקר מראה כי שימוש קבוע באסטרטגיות מפתח פותרים יעילים, מהירים ואינטליגנטים שיודעים להתמודד עם מצבי אתגר (Polya, 1957). היכולת לפתור בעיות באמצעות אסטרטגיות מתוארת כחשיבה אסטרטגית. פורטנוב נאמן (2019) תיארה את החשיבה האסטרטגית כמיומנות המורכבת משלוש מיומנויות מטה-קוגניטיביות מרכזיות: תכנון, בקרה תהליכית והערכה ובדיקה ותיארה אותה כיכולת להבין את מהות הבעיה ומרכיביה, לתכנן תוכנית פעולה ולפקח על תהליך היישום ולבסוף להעריך את הפתרון על סמך דרישות הבעיה. בכדי לפתח כל סוג של מיומנות ובפרט מיומנות לחשיבה אסטרטגית חשוב לחשוף ילדים לאסטרטגיות כבר מגיל צעיר. עם זאת, מחקרים מראים כי מרבית הילדים והמבוגרים לא חושבים באופן אסטרטגי וייתכן כי גם לא יחשבו כך ללא הוראה מותאמת ועידוד קבוע לשימוש באסטרטגיות (Tishman et al, 1996). גם תלמידים מוכשרים שידועים בזכות יכולות התכנון הטובות שלהם, לרוב יסתמכו על ההיגיון והביטחון העצמי שלהם ולא תמיד יפתרו בעיות בצורה מתוכננת ויעילה (Nevo & Rachmel, 2007). לכן ישנו צורך במסגרת הוראה שמייצרת הטמעה מיטבית של אסטרטגיות לפתרון בעיות, הכוללת מעקב אחרי ההתקדמות ומאפשרת עידוד מתמיד בשימושן. שתי גישות הוראה נבחנו במחקר. הראשונה, גישת ההוראה המפורשת (Explicit Teaching), מתודולוגיה שיטתית ומובנית המורכבת מחמישה שלבים: אוריינטציה, הצגת מודל מובנה, תרגול מובנה, תרגול מודרך, ותרגול עצמי. היא נקראת מפורשת משום שהיא חווה בתוכה גישה ישירה וחד-משמעית שכוללת הדרכה צמודה בכל שלבי הלמידה תוך כדי הסקת מסקנות. הגישה השנייה היא ההוראה הבלתי מפורשת (Implicit Teaching) המבוססת על מרכיבי החקר והגילוי שנמצאו יעילים בפיתוח חשיבה לפתרון בעיות. הגישה מבוססת על שלושה עקרונות: לימוד אסטרטגיה לפתרון בעיות דרך התנסות וחקר ופיתוח מודל עצמי של האסטרטגיה; התאמות של המודל לאור בעיות מתקדמות; סיכום ודיון על ידי המורה לצורך דיוק מודל האסטרטגיה.

מתודולוגיה

אוכלוסיית מחקר

במחקר הנוכחי השתתפו כ-70 תלמידים מוכשרים במתמטיקה מכיתות ו' הלומדים במועדון המתמטי 'קידומטיקה'. התלמידים השתתפו בתוכנית ייחודית ללימוד אסטרטגיות מתמטיות שנמשכה כ-35 שעות במשך חצי שנה והופעלה בשני סבבים. סך הכל 38 תלמידים למדו באמצעות גישת ההוראה מפורשת ו-32 תלמידים למדו בגישה הבלתי מפורשת. מטרת המחקר הייתה לבחון האם קיים הבדל בין הגישות במרכיבי המיומנות לחשיבה אסטרטגית (תכנון, בקרה תהליכית והערכה ובדיקה) בפתרון בעיות.

בכדי לאפיין את מיומנות החשיבה האסטרטגית של התלמידים ואת רמתה, עלה הצורך בפיתוח כלי מדידה שיכלול מספר שלבים. הראשון הוא שאלון בעיות המזמן שימוש באסטרטגיות. השלב השני כלל ניתוח השאלון על פי מחוון ייעודי. לבסוף התאמת ווקטור למדידת רמת המיומנות לחשיבה אסטרטגית בהתאם לכל בעיה.

שאלון בעיות: השאלון כלל כ-4 בעיות לא שגרתיות במתמטיקה. מטרתן הייתה לבחון את צורת החשיבה האסטרטגית של התלמידים. הבעיות נבחרו בקפידה ע"י שני מומחי תוכן ולאחר שני סבבי פיילוט. כל הבעיות יכולות להיפתר באמצעות אסטרטגיות שנלמדו בתכנית הלימוד וביניהן: הוכחה על דרך השלילה, ניסוי וטעייה, פתרון מהסוף להתחלה ורקורסיה, או אסטרטגיות אחרות. השאלון הותאם ל-75 דק' וניתן לתלמידים לאחר חצי שנה, בסיום תוכנית הלימוד.

מחוון לניתוח שאלון הבעיות: המחוון חולק לפי המיומנויות המטה-קוגניטיביות המתרחשות במהלך פתרון בעיה ומרכיבות את מיומנות החשיבה האסטרטגית: תכנון, בקרה תהליכית והערכה ובדיקה. הניתוח לכל מיומנות נוקד בין 0-4 כפי שמתואר בטבלה 1.

טבלה 1

מחוון לניתוח שאלון בעיות מבוססות אסטרטגיות

מיומנויות מטה-קוגניטיביות			
תכנון Planning	בקרה תהליכית Monitoring	הערכה ובדיקה Evaluation	
מצב			ניקוד
התלמיד לא ענה על הבעיה			0
תשובה סופית ללא כל דרך או הסבר			0.5
התלמיד רשם/סימן/סידר את הנתונים אך לא המשיך בפתרון הבעיה	יישום אסטרטגיה לא מתאימה לבעיה	הגעה לפתרון שגוי ללא שינוי או חיפוש של אסטרטגיה אחרת	1
התלמיד ניסה למצוא/לבנות תוכנית אך ללא דרך ממוקדת (נעשה שימוש בציור, גרף, תרשים או נתינת דוגמה)	יישום אסטרטגיה (נת) מתאימה באופן שגוי	הגעה לפתרון שגוי, חיפוש אסטרטגיה אחרת ללא הצלחה	2
התלמיד ציין שם של אסטרטגיה אך לא המשיך לפתור את הבעיה	יישום אסטרטגיה (נת) מתאימה המובילה למצב חלקי של פתרון הבעיה	הגעה לפתרון חלקי של הבעיה/טעות חישובית	3
ניתן לזהות תכנון מובן וברור של אסטרטגיה לפתרון הבעיה	יישום אסטרטגיה (נת) מתאימה המובילה לפתרון נכון	פתרון נכון ומוסבר של הבעיה	4
ניקוד הערכה:	ניקוד בקרה:	ניקוד הערכה ובדיקה:	

מדידת המיומנות לחשיבה אסטרטגית על פי המחוון: בהתאם למחוון (טבלה 1) התקבל ווקטור מספרי הבנוי לפי קואורדינטות שמייצגות כל אחת מהמיומנויות: X – תכנון, Y – בקרה תהליכית, Z – הערכה ובדיקה. מטרת הווקטור היא לאפיין את רמת החשיבה האסטרטגית בכל בעיה לפי המודל שמוצע בטבלה 2. מודל זה עבר תיקוף של שלושה מומחים, ומהימנות הכלי נבחנה במחקר פיילוט באמצעות אלפא קרונברך ונמצאה גבוהה מאוד בכל אחת מבעיות השאלון ($\alpha > 0.87$).

טבלה 2

מודל למדידת רמת המיומנות לחשיבה אסטרטגית

תכנון- X	בקרה תהליכית- Y	הערכה ובדיקה- Z	וקטור אפשרי	רמת המיומנות
אם $X \leq 3$	אז	($Y = 0$ וגם $Z = 0$)	(3,0,0), (2,0,0), (1,0,0), (0,5,0,0), (0,0,0)	נמוכה
אם $X = 4$	וגם	($0 \leq Y \leq 2$ וגם $Z \leq 2$)	(4,2,2), (4,2,1), (4,1,2), (4,1,1)	בינונית
אם $X = 4$	וגם	($3 \leq Y$ וגם $0 \leq Z \leq 4$)	(4,3,2), (4,3,1), (4,4,1), (4,3,3), (4,4,3), (4,4,4)	גבוהה

הנתונים התקבלו מתוך שאלון בעיות שניתן בסיום התכנית בשני סבבים. במהלך השאלון נכחו בכיתה המורה וחונך כיתתי. מטרתם הייתה לעבור בין התלמידים ולתעד ביומן מורה את השימוש במיומנויות התכנון, הבקרה והערכה ובדיקה בכל בעיה. לתלמידים הוסבר שמטרת השאלון היא לבחון איך הם חושבים ולכן התבקשו לתאר את כל דרך הפתרון. בסיום השאלון המורה קיימה ראיונות קצרים עם התלמידים וביקשה מהם להסביר את דרך הפתרון שלהם. וכך התקבלה תמונה רחבה על אופן החשיבה האסטרטגית של התלמידים.

ניתוח נתונים

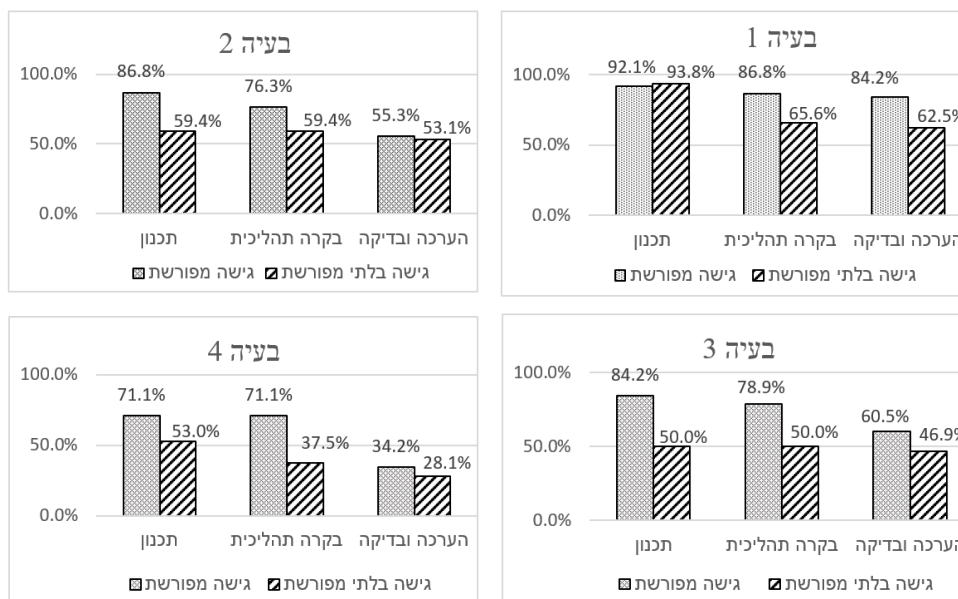
ניתוח הנתונים נעשה בשיטת mix method. ראשית, התשובות נותחו באופן איכותי לפי הכלי לבחינת המיומנות לחשיבה אסטרטגית (ראו טבלה 1). לאחר מכן הותאם הווקטור (X,Y,Z) כדי למדוד את רמת המיומנות (ראו טבלה 2). יחד עם הרשמים מיומן המורה והראיונות הקצרים התקבלה תמונה מלאה על דרך הפתרון של כל תלמיד בכל אחת מהבעיות. לאחר הניתוח האיכותי, הנתונים כומתו בעזרת מבחן חי בריבוע (χ^2 Chi-Square) בכדי לבדוק האם קיימים הבדלים בין גישות ההוראה מבחינת שכיחות ההתפלגות בהתאם לכל אחת מהמיומנויות: תכנון, בקרה תהליכית והערכה ובדיקה.

ממצאים

מיומנות החשיבה האסטרטגית נותחה לפי שלוש מיומנויות מטה-קוגניטיביות תכנון, בקרה תהליכית והערכה ובדיקה בכל ארבעת שאלות השאלון כפי שניתן לראות באיור 1.

איור 1

ממצאים מתוך שאלון הבעיות לפי ממוצעי המיומנויות המטה-קוגניטיביות



1. בשלוש מתוך ארבע בעיות, הקבוצה שלמדה בגישה המפורשת הראתה יכולות תכנון ובקרה תהליכית טובות יותר מאשר הקבוצה שלמדה בגישה הבלתי מפורשת ונמצא הבדל מובהק בין הקבוצות.
2. מיומנות הערכה ובדיקה נמצאה הנמוכה ביותר ולא נמצא הבדל מובהק בין הקבוצות. מרמי יומן המורה והראיונות עלה שהתלמידים העדיפו לא להשקיע זמן בבדיקת התשובה וביעילותה.
3. ניתוח של רמת המיומנות לחשיבה אסטרטגית הראה כי ב-3 מתוך 4 הבעיות לא נמצאו הבדלים בין הקבוצות ברמה הגבוהה של המיומנות. עם זאת, תלמידים שלמדו בגישה

המפורשת הראו רמה בינונית-נמוכה טובה יותר בשתיים מתוך ארבע הבעיות האסטרטגיות
 $X^2(2, 70) = 7.476, p \leq 0.05$ לעומת תלמידים שלמדו בגישה הבלתי מפורשת.

דיון

אסטרטגיות ידועות בחלק האינטגרלי שלהן בפתרון בעיות ודרכן יכולה להתפתח מיומנות לחשיבה אסטרטגית (Polya, 1957). הסקירה התיאורטית תיארה את החשיבה האסטרטגית כמיומנות המורכבת משלוש מיומנויות מטה-קוגניטיביות שמתקיימות בזמן פתרון בעיות: תכנון, בקרה תהליכית והערכה ובדיקה (פורטנוב נאמן, 2019). בכדי לפתח אותה עלה הצורך במסגרת הוראה שתאפשר הטמעה מיטבית של אסטרטגיות ותפתח את החשיבה האסטרטגית של התלמידים. המחקר הנוכחי בא לענות על צורך זה ומטרתו הייתה לבחון את ההתאמה של גישות ההוראה המפורשת והבלתי מפורשת לפיתוח המיומנות. ממצאי המחקר הראו כי מיומנות התכנון היא החזקה ביותר אצל התלמידים בשתי הקבוצות. ממצא זה מחזק את הטענה כי תלמידים מוכשרים הם בעלי יכולות תכנון טובות. תלמידים שלמדו בגישה המפורשת הצליחו במיומנות התכנון טוב יותר מאלו שלמדו בגישה הבלתי מפורשת. נראה כי מבנה הלימוד בגישה שכלל שימוש במודלים מובנים לפתרון בעיות ותרגול שיטתי, איפשר לתלמידים לחזק את המיומנות הזו טוב יותר. מיומנות הערכה ובדיקה נמצאה חלשה יותר מבין המיומנויות. נראה כי תלמידים מביעים עניין ומוטיבציה לפתור בעיות, אך עקב קשיים שנובעים תוך כדי יישום תוכנית הפעולה, הם עוזבים את הבעיה ועוברים לאחרת. בבדיקת רמת מיומנות לחשיבה אסטרטגית נמצא כי תלמידים הדגימו רמה גבוהה בשלוש מתוך ארבע הבעיות בשאלון ולא נמצאו הבדלים בין הקבוצות ברמה הגבוהה של המיומנות. ממצא זה ממחיש את היכולות הגבוהות של תלמידים מוכשרים במתמטיקה. תלמידים אלו יכולים לפתור בעיות לא שגרתיות, לזהות את מבנה הבעיה, לחשוב באופן דדוקטיבי ולהתאים אסטרטגיות בצורה מיטבית (Nevo & Rachmel, 2007). בבחינת ההשפעה של גישות ההוראה על רמת המיומנות נמצא כי תלמידים שלמדו בגישה המפורשת הראו רמת מיומנות בינונית-נמוכה טובה יותר מאלו שלמדו בגישה הבלתי מפורשת והצליחו להגיע לפתרונות אסטרטגיים טובים יותר. לסיכום, נראה כי מסגרות הוראה מותאמות ללימוד אסטרטגיות יכולות לקדם את מודעות השימוש בהן ולחזק מיומנויות של תכנון, בקרה והערכה של פתרון בעיות מתמטיות. מבין שתי הגישות שנבדקו נמצא כי הוראה מפורשת הצליחה לקדם מיומנויות מטה-קוגניטיביות טובות יותר בקרב תלמידים מוכשרים ולהקנות להם חשיבה אסטרטגית. לפיכך, נראה כי מדובר בגישה יעילה ואפקטיבית ללימוד אסטרטגיות מתמטיות. עם זאת, ישנו צורך במחקר המשך לבחינת תוכנית הלימוד והשפעות גישות ההוראה גם בקרב תלמידים עם יכולות מגוונות במתמטיקה.

רשימת מקורות

פורטנוב נאמן, י' (2019). פיתוח מיומנות לחשיבה אסטרטגית במתמטיקה בגישות הוראה מפורשת והבלתי מפורשת בקרב תלמידים מוכשרים מהמועדון המתמטי "קידומטיקה" (חיבור לשם קבלת תואר "דוקטורט לפילוסופיה"). אוניברסיטת בן גוריון, באר שבע.

Nevo, B., & Rachmel, S. (2009). Education of gifted children: a general roadmap and the case of Israel. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 243-251). Rotterdam: Netherlands.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Tishman, S., Perkins, D., & Jay, E. (1996). *The thinking classroom: Learning and teaching in a culture of thinking*. Jerusalem, Israel: The Branco Weiss Institute for Development.



מבוא

פתרון בעיות נחשב על ידי מתמטיקאים לב המתמטיקה. לדעת רבים מחוקרי החינוך המתמטי פתרון בעיות אמור להיות פעילות מרכזית בשיעורי המתמטיקה, והכשרת התלמידים להיות פותרים בעיות גמישים ועצמאיים היא אחד מתפקידיו של המורה למתמטיקה (למשל, Liljedahl & Cai, 2021).

כשאנו משתמשים במושג פתרון בעיות במחקר זה, אנו מאמצים את הגישה המקובלת בתחום החינוך המתמטי (Schoenfeld, 1985), לפיה זיהוי משימה כבעיה תלוי בפתור המשימה. אם לפותר לא ידוע מראש איזו דרך עליו לנקוט כדי לפתור את המשימה, אולם יש לו הרקע הנחוץ לפתרון - הרי היא מהווה בעיה עבורו. אחרת, אף אם דרך פתרון המשימה ארוכה, מסורבלת או מייגעת - היא לא תיחשב בעיה אלא "תרגיל". פתרון בעיות הוא התהליך שעובר הפותר בדרך לפתרון, והוא כולל השקעת מאמץ להבנת המתמטיקה ולפענוח משהו שאינו ניכר באופן מיידי.

מקומו של פתרון בעיות במחקר בחינוך המתמטי הולך ומתרחב בעשורים האחרונים (Felmer et al., 2016). אולם, כמו שקורה בתחומים אחרים, הפער בין הידע הקיים ובין מה שהופך שימושי הוא פער משמעותי (Rogers, 2003). עבור מורים רבים, שילוב פתרון בעיות עדיין מאתגר ואינו מהווה פרקטיקת הוראה מקובלת. חוקרים (למשל Schoenfeld, 2021) מצביעים על כך שהתלמידים (כמעט) אינם חווים בעצמם תהליך של פתרון בעיות במהלך לימודיהם בבית-הספר. לרוב, המורה הוא זה המדגים את תהליך פתרון הבעיות, והתלמידים אינם נדרשים אלא לחזור על צעדי הפתרון שהוצגו.

פרקטיקת הוראה המזמנת לתלמידים תהליך פתרון בעיות דורשת מהמורה ידע אודות פתרון בעיות מתמטיות בכלל, וידע אודות התלמידים כפותרים בעיות בפרט; אך לא הידע בפני עצמו הוא החשוב, אלא השימוש היעיל בו (Chapman, 2015). במחקר שעקב אחר המסלול שעוברים המורים לקראת אימוץ של פרקטיקת הוראה המזמנת לתלמידים התמודדות עצמאית עם פתרון בעיות, נמצא שלב הנכונות של המורה לאימוץ הפרקטיקה, כחוליה המגשרת בין ההשתלמות המקצועית של המורים – שבה הם מתוודעים לפרקטיקה ומתנסים בה, ובין ההטמעה של הפרקטיקה כחלק ממלאכת ההוראה השוטפת במציאות הבית ספרית (Zaks & Koichu, 2022). נכונות (readiness) זו של המורה ליישום פרקטיקת הוראה נבחרת, היא ההסכמה של המורה והכוונה שלו לפעול בהתאם לפרקטיקה, הנשענות על ידע רלוונטי. מכאן נובע הצורך בכלי אשר ידרג את מידת הנכונות של מורים כלפי פרקטיקת ההוראה המדוברת, היינו שילוב של פתרון בעיות בשיעורים. כלי כזה עשוי לסייע לחוקרים ולמורי מורים השואפים לאפיין מורים, למשל כדי לעצב פעילויות המותאמות לרמת הנכונות או לעקוב אחר התפתחות הנכונות שלהם. בהתאם, שאלת המחקר היא: כיצד ניתן להעריך את נכונות המורים לשלב פעילויות של פתרון בעיות בשיעורי המתמטיקה?

רציונל ושלבי פיתוח

הכלי המוצע ידרג רמת נכונות של המורים לשילוב פתרון בעיות בשיעורים. הנכונות אינה תכונה הניתנת לצפייה, ולכן הכלי שבחרנו לפתח הוא שאלון ליקרט, המתאים לבחינת מבנים שאינם ניתנים לצפייה (Jebb et al., 2021). בנוסף, שאלוני ליקרט מאפשרים איסוף נתונים מהיר יחסית מאוכלוסייה רחבה, וניתנים לשילוב עם שיטות איסוף נתונים איכותניות (Nemoto & Beglar, 2014).

נכונות המורה ליישום פרקטיקת הוראה מסוימת ובחירה בה כדרך ההוראה המועדפת עליו, נכונות לא רק על בסיס ידע מקצועי רלוונטי; אלא מושתתות גם על אמונתו של המורה בהיתכנות היישום של פרקטיקה זו וביעילותה (Buchbinder & McCrone, 2020). מכיוון שפרקטיקות הוראה של מורים והאמונות שלהם שלובים אלו באלו ומשפיעים אלו על אלו (למשל Kagan, 1992); השאלון המוצע מורכב משני פרקים: פרק על אמונות המורה ביחס לפרקטיקה הנדונה ופרק על פרקטיקות ההוראה שלו. נדגיש שהאמונות והפרקטיקות שייבחנו באמצעות השאלון הן הצהרתיות בלבד, כאלו שהמורה מודע להן ומדווח עליהן, אך אינן משקפות בהכרח את המתרחש בפועל במעשה ההוראה שלו. בהתאם, השאלון אינו מיועד לבדוק את השימוש בפרקטיקה המדוברת אלא את הנכונות לאמץ אותה.

פיתוח השאלון התבצע בשישה שלבים, אותם נפרט להלן. בשלב הראשון נערך סבב ראיונות שבו השתתפו שישה מורים בעלי מוניטין של מורים מנוסים ומובילים. המרואיינים התבקשו להתייחס לשתי פעילויות הוראה. כל פעילות מתארת הזדמנות של פתרון בעיות על ידי התלמידים בעצמם, וכוללת משימה בהקשר שבו התבקשו התלמידים לפתור אותה. המורים נשאלו על פעילויות אלו בהתאם לשלבי מסלול הלמידה ההיפותטי HLT שהציע סיימון (Simon, 1995): מטרה, משימה ותגובות התלמידים. הראיונות תומללו ונותחו ניתוח נושאי (Saldana, 2021) ומהם נדלו התבטאויות של המרואיינים המבטאות עמדות ביחס לשילוב פתרון בעיות בשיעורים, אמונות ופרקטיקות.

בשלב השני הומרו ההתבטאויות שנבחרו להיגדים בסולם ליקרט, תוך שמירה מרבית על שפת המורים וסגנונם. לדוגמה, אמירה של המורה: "אני מאוד רחמנית לתלמידים, אני לא הייתי נותנת את השאלה הזו בלי הדרכה", הומרה להיגד: המורה רחמן ולעולם לא ייתן לתלמיד שאלה קשה ללא הדרכה. על המורה לדרג את ההיגד בסולם ליקרט: (1) המורה הזה בכלל לא דומה לי – (4) המורה הזה מאוד דומה לי. ההיגדים נוסחו בסולם ליקרט בן ארבע דרגות, כדי למנוע אפשרות של זליגה למרכז והתחמקות מנקיטת צד (Krosnick, 2018). סה"כ בשאלון 20 היגדים, 10 היגדים בכל פרק שמתוכם שניים-שלושה מנוסחים בסולמות הפוכים.

בשלב השלישי נבדק השאלון באופן בלתי תלוי על ידי ארבעה מורי מתמטיקה בעלי נתוני רקע שונים, ובוצעו תיקוני ניסוח בהתאם להמלצותיהם. בשלב הרביעי הועבר השאלון ל-13 מורות במהלך השתלמות שעסקה בפתרון בעיות. מניתוח התבטאויות המורות בכתב ובעל-פה באותו פרק זמן שבו מילאו את השאלון, נמצאה הלימה בין היענות הנחקרות לשתף בבעיות שהן הציגו לאחרונה בכיתות ההוראה שלהן ובין הציונים שלהן בשאלון הנכונות. ממצא זה מצביע על תוקף הניבוי של השאלון (בייט-מרום, 2001).

בשלב החמישי נשלח השאלון למורים ברשימת תפוצה רחבה. בבדיקה של 60 המענים שהתקבלו נמצא מקדם אלפא של קרונברך עבור כל פרטי השאלון: 0.77. ממצא זה מעיד על רמה משביעת רצון של מהימנות השאלון (Taber, 2018). בנוסף, בחישוב מתאם פירסון לקורלציה בין שני חלקי השאלון נמצא קשר חיובי בינוני ($r(58) = 0.44, p=0.0005$) בין אמונות המורה כלפי פתרון בעיות בשיעורים ובין פרקטיקות ההוראה המדווחות שלו. ככל שאמונות המורה תומכות יותר בפתרון בעיות עצמאי הוא מדווח על יותר מעשי הוראה המתאימים לפרקטיקה זו ולהפך.

חישוב ציון הנכונות היה השלב השישי והאחרון בפיתוח. הציון מחושב כממוצע המענים לכל 20 ההיגדים בשאלון (Boone & Boone, 2012). בקרב המשיבים לשאלון בשלב זה של הפיתוח, נמצא ציון נכונות ממוצע 3.17 ($n=60$) עם סטיית תקן 0.34. לזיהוי רמת נכונות גבוהה או נמוכה נקבע ציון החתך (cutoff score) כציון הרחוק בסטיית תקן אחת או יותר מן הציון הממוצע (Mills & Melican, 1988). בהתאם, ציון 3.5 ומעלה בשאלון זה ייחשב כמעיד על נכונות גבוהה של המורה לשילוב פתרון בעיות בשיעוריו, וציון 2.8 ומטה ייחשב כנכונות נמוכה.

ממצאים: השאלון

באיר 1 להלן מוצג השאלון המלא לדירוג רמת הנכונות של המורים לשילוב פתרון בעיות בשיעוריהם.

מורה יקר/ה,
 שאלון זה מיועד למורי מתמטיקה בחט"ב או בחט"ו ומעבר כחלק ממחקר שנערך במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן. נודה לך אם תקדיש כעשר דקות למילוי השאלון. לשאלות בשאלון אין תשובות "נכונות" או "לא נכונות". בכל שאלה סמן בבקשה את האפשרות הנכונה ביותר לביך.
תודה רבה על שיתוף הפעולה!

חלק א'
לפני משפטים המתארים מורי מתמטיקה באמצעות כעולות שהם נוקטים באופן שוטף. (המשפטים מסומנים בלשון זכר אך הם מתארים נשים וגברים כאחד)
בכל שורה סמן V בעמודה המתאימה: 1 - המורה הזה בכלל לא דומה לי <<<< 4 - המורה הזה מאוד דומה לי

	4	3	2	1
1 המורה נותן לש"ב שאלות שהן לא בדיקת כמו שעשו בכיתה.				
2 המורה דואג שיכניעו בתרגילים לקראת המבחן גם שאלות בניסוחים שונים מאלו שהוצגו בכיתה.				
3 בסיס נשא המורה מחפש שאלות שדורשות חשיבה אחרת.				
4 למעמים המורה מבקש מהתלמידים לעבוד בעצמם על השיטה לפחות 10 דקות לפני שהוא נותן רמז.				
5 המורה אוהב שדורשת תלמידים יתנסו במשימה בעצמם לפני שהוא כותב דיון.				
6 המורה רחמן ולעולם לא ייתן לתלמיד שאלה קשה ללא הדרכה.				
7 אם המורה ידע שהתלמידים לא ידעו אך נלשת לבעיה, הוא נותן להם שאלות מבוטאות מראש.				
8 המורה נותן לפעמים שאלות כאלו, שברגע הראשון שבו התלמיד קורא את השאלה - אין לו מושג מה הוא אמור לעשות.				
9 לפני שהמורה נותן משימה לכיתה, הוא מנסה לשער איך התלמידים שלו יפתרו אותה.				
10 לפני השיעור המורה בודק באילו דרכים אפשר לפתור את המשימות ואם יש לתלמידים כלים לפתרון				

חלק א'
לפני טענות של מורים ומורות אודות דרכי הוראת מתמטיקה.
בכל שורה סמן V בעמודה המתאימה: 1 - בכלל לא מסכים <<<< 4 - מאוד מסכים

	4	3	2	1
1 תלמידים צריכים להתרגל להפתעות ולא להיבהל אם הם לא יודעים מייד איך לפתור.				
2 עבודה עצמית של תלמידים בכיתה היא בזבוז זמן, להתנסות לבד הם יכולים בבית.				
3 לא הגו לבקש מתלמידים לפתור בעצמם משימות בניסוחים שונים מאלו שהם מכירים.				
4 תלמידים אמורים להתמודד בעצמם גם עם שאלות שלא מזכירות להם שאלות שהם כבר פתרו בעבר.				
5 בשאלות שדורשות קישור בין נושאים מתמטיים שונים - אחרי שכל נושא נלמד בכפי עצמו - חשוב שהתלמידים יעלו בעצמם על דרך הפתרון.				
6 בשיעור פתיחה של נושאים מסוימים, עדיף לא להציג את השיטה שעומדים למו, אלא להכיר, לתת לתלמידים להמציא את הדרך בעצמם.				
7 תלמידים לא יצליחו להתקדם אם המשימה דורשת קישור בלתי צפוי עם תחום מתמטי אחר.				
8 חשוב יותר ליצור הדמנויות עבור תלמידים לחפש בעצמם את הדרך לפתרון מאשר להראות להם את הפתרון.				
9 יש תלמידים שמספיקים מכך שהמורה מוביל אותם לפתרון ולא מאפשר להם להתמודד בעצמם.				
10 לפני השיעור, המורה אמור לפתור את המשימות שהוא מתכנן לתת ולחשוב איך התלמידים שלו ייגשו אליהן				

סיכום ודין

הפניית הזרקור אל הנכונות, שהיא נטייה לפעולה מבוססת ידע, והצעת כלי מחקר לדירוג רמת הנכונות - מהוות תרומה תיאורטית לגוף הידע אודות למידת מורים ואודות המסלולים שעוברים מורים בדרך לאימוץ פרקטיקות הוראה שהן חדשות עבורם. ממצאים אלו מעניקים מענה מסוים לחסר בספרות המחקר החינוכי, שכן המחקר עדיין אינו מציע רעיונות מפותחים היטב אודות למידת מורים, ולא אודות הדרכים לסייע למורים למזג רעיונות חדשים למערכת הפרקטיקות השוטפות שלהם (Kennedy, 2016). השאלון מוצע לשימוש עבור מורי מורים וחוקרי חינוך מתמטי, ואף נעשה בו כבר שימוש במחקר (למשל Zaks & Koichu, 2022). השאלון שפותח במסגרת מחקר זה בודק נכונות של מורים לנקוט פרקטיקת הוראה מסוימת (הפרקטיקה של שילוב פתרון בעיות בשיעורים), אך אנו מאמינים שאותם שלבים מתאימים לפיתוח שאלון לבחינת נכונות של מורים כלפי כל פרקטיקת הוראה אחרת.

רשימת מקורות

בייט-מרומ, ר' (2001). שיטות מחקר במדעי החברה: עקרונות המחקר וסגנונותיו. (מהדורה שנייה). האוניברסיטה הפתוחה.

Boone, H. N., & Boone, D. A. (2012). Analyzing Likert data. *Journal of Extension*, 50(2), 1-5. <https://tigerprints.clemson.edu/joe/vol50/iss2/48>

Buchbinder, O., & McCrone, S. (2020). Characterizing mathematics teachers' proof-specific knowledge, dispositions and classroom practices. In *ICME 14th International Congress on Mathematical Education*.

- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT - International Journal on Math, Science and Technology Education*, 3(1), 19-36. <https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049>
- Felmer, P. L., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (2016). Posing and solving mathematical problems. Springer.
- Jebb, A. T., Ng, V., & Tay, L. (2021). A review of key Likert scale development advances: 1995–2019. *Frontiers in psychology*, 12, 637547. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.637547>
- Kagan, D. M. (1992). Implication of research on teacher belief. *Educational Psychologist*, 27(1), 65-90. https://doi.org/10.1207/s15326985ep2701_6
- Kennedy, M. M. (2016). How does professional development improve teaching?. *Review of Educational Research*, 86(4), 945-980.
- Krosnick, J. A. (2018). Questionnaire design. In *The Palgrave handbook of survey research* (pp. 439-455). Palgrave Macmillan, Cham.
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM – Mathematics Education*, 53(4), 723-735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Mills, C. N., & Melican, G. J. (1988). Estimating and adjusting cutoff scores: Features of selected methods. *Applied Measurement in Education*, 1(3), 261-275. https://doi.org/10.1207/s15324818ame0103_7
- Nemoto, T., & Beglar, D. (2014). Developing Likert-scale questionnaires. In N. Sonda & A. Krause (Eds.), *JALT2013 Conference Proceedings*. JALT.
- Rogers, E. (2003). *Diffusion of innovations* (5th Ed.). The Free Press.
- Saldaña, J. (2021). *The coding manual for qualitative researchers*. Sage.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. (2021). Reflections on 50 years of research & development in science education: What have we learned? And where might we be going? In A. Hofstein, A. Arcavi, B. Eylon, & A. Yarden (Eds.), *Long-term research and development in science education* (pp. 387-412). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004503625_017
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. <http://dx.doi.org/10.2307/749205>
- Taber, K. S. (2018). The use of Cronbach's alpha when developing and reporting research instruments in science education. *Research in Science Education*, 48, 1273-1296. <https://doi.org/10.1007/s11165-016-9602-2>
- Zaks, R., & Koichu, B. (2022). How do teachers adopt autonomous problem solving as a classroom practice? In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 147-154). PME.

ⁱ מחקר זה הוא חלק מעבודת דוקטורט בהנחיית פרופ' בוריס קיז'צ'ו מהמחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.



מבוא ורקע תאורטי

מטרת המחקר הנוכחי לקדם פרקטיקת הוראה של חיבור בעיות מתמטיות באמצעות כלים טכנולוגיים על ידי מורים עבור תלמידיהם המתקשים במתמטיקה ולחקור את תהליך ההוראה של הבעיות. החידוש במחקר בא לידי ביטוי בשני היבטים: התמקדות בחיבור בעיות עבור קידום פתרון בעיות מתמטיות בקרב אוכלוסיית התלמידים המתקשים במתמטיקה (ב'–י"ב); חקירת תהליך ההוראה של הבעיות שחבורו.

חיבור בעיות על ידי מורים

פעילות של מורים ופרחי הוראה כמחברי בעיות נחקרה מעט ויש ממצאים המראים כי פרקטיקה זו מקדמת מבחינה מקצועית פרחי הוראה ומורים להבין לעומק משימה מתמטית ולהתאים תוכן מתמטי למטרה דידקטית ופדגוגית.

מחקרים על חיבור בעיות על ידי מורים נגעו להיבטים מגוונים של פרקטיקה זו: חיבור בעיות "לפי דרישה" בתנאי מעבדה; חיבור בעיות על רקע סדנאות פיתוח מקצועי כדי לפתח ולהרחיב את הכישורים של חיבור הבעיות (למשל, Ovadiya, 2021); חיבור בעיות כדי להגדיר מהי בעיה טובה ולפתח את יכולת המורים לבחור בעיות טובות עבור תלמידיהם. ממצאים שחזרו על עצמם הראו כי לא היו הרבה מורים שיכלו לחבר בעיות בעלות ערך להוראה או בעיות שאינן "חשב" או "מצא", אלא עוסקות ברעיונות מתמטיים מהותיים או לוגיים. ניקול וקרספו (Nicol & Crespo, 2006) ועובדיה (Ovadiya, 2019, 2023) סיפקו במחקריהן תוצאות מעודדות על נכונותם של מורים למתמטיקה לשנות בעיות מספרי הלימוד כדי ליצור בעיות משל עצמם. החוקרות מצאו שהמורים ניסו להרחיב או לשנות את הבעיות המתמטיות המצויות בספרי הלימוד כדי לעשותן מורכבות או פשוטות יותר, או מותאמות למטרה דידקטית או פדגוגית. מתוך תהליך הלמידה באמצעות הדיונים בקבוצת המורים בתוכנית המקצועית שלמדו בה, מורים פיתחו את היכולת לחבר בעיות המתמקדות במטרות שהם ניסחו. למשל: הבנת תכונות של גרפים בחדו"א (Ovadiya, 2021), קידום העברת למידה של תלמידים צעירים מנושא חשבוני לנושא גאומטרי (Ovadiya, 2019) או יישום גישת החקר בגאומטריה או בחדו"א באמצעות כלים דיגיטליים (Ovadiya, 2023).

בסקירות הספרות שעוסקות בנושא של חיבור בעיות מתמטיות עולים נושאים כמו חיבור בעיות של התלמידים בכיתה ויחס המורים כלפי פעילות זו או חיבור בעיות של מורים ופרחי הוראה כתרגיל הכשרה או התפתחות מקצועית (למשל: Cai & Hwang, 2020; Li et al., 2022) אך לא בצד המחקרי של אפיון הוראת הבעיה בכיתה בבית הספר.

פתרון בעיות ויישום כלים טכנולוגיים

הכלים הטכנולוגיים קידמו את הלמידה המותאמת אישית במתמטיקה באמצעות תוכנות אדפטיביות. בפתרון בעיות באמצעות כלים טכנולוגיים הלומד יכול לחזור לתוכן שוב ושוב, להתבונן בייצוגים הוויזואליים, להעלים ייצוגים כדי למקד קשב (למשל Geogebra), להסתמך על המשוב המיידי במקום להמתין למשוב המורה (למשל פולפרוף: <https://app.fullproof.io/he/app/signin>) ועוד. במחקרים נמצא כי תלמידים שפתרו בעיות באמצעות כלים טכנולוגיים, קידמו את ידיעותיהם המתמטיות לאורך זמן יותר מתלמידים שפתרו בדף ובעט (למשל: Kurvinen et al., 2020).

הכלים הטכנולוגיים מאפשרים למורים ליישם את פרקטיקת הוויזואליזציה וההמחשה, אך לא די בפרקטיקה זו כדי להגיע לידי הבנת עומק של פתרון בעיות מתמטיות, ובוודאי לא לקדם עצמאות בפתרון בעיות מתמטיות של תלמידים מתקשים. הוויזואליזציה מתאפיינת לעיתים בהבנה שטחית כללית ולא עמוקה מתמטית (למשל: Castro-Alonso et al., 2015). כדי שתלמידים חלשים ידעו לפתור בעיות מתמטיות בעצמם המורים נדרשים ליישם פרקטיקות ייחודיות בכיתה המתמטיקה (Ovadiya, 2021). המחקר הנוכחי מרים את הכפפה של פיתוח מקצועי של מורים באמצעות חיבור בעיות הכוללות כלים טכנולוגיים בעבור תלמידיהם המתקשים במתמטיקה, סוגיה שלא מצאתי לה סימוכין במחקר.

מהלך המחקר

מטרת המחקר הנוכחי הייתה לאפשר ולזמן למורים התנסות במחקר פעולה שבו הם מחברים בעיות מתמטיות המשלבות כלים טכנולוגיים עבור תלמידיהם (בכל הגילים) המתקשים במתמטיקה, וללמוד באמצעות המחקר על שני תהליכים: תהליך חיבור הבעיות לצורך המטרה שהוגדרה ותהליך ההוראה של הבעיות. המנחה של המחקרים מתבוננת במחקרי הפעולה מתוך שתי נקודות מבט המתבטאות בשאלות המחקר האלה: 1. האם וכיצד אפשר לאפיין את תהליך חיבור הבעיות ממוקד המטרה לקידום פתרון בעיות של תלמידים חלשים במתמטיקה? 2. האם וכיצד אפשר לאפיין את תהליך הוראת הבעיות כמקדם את פרקטיקות ההוראה של המורים עבור תלמידיהם המתקשים במתמטיקה?

משתתפי המחקר הם סטודנטים-מורים (15) הלומדים בתוכניות לתואר שני בשתי מכללות. כמה מהם מלמדים בכיתות היסודי והאחרים בכיתות התיכון.

איסוף הנתונים כלל שלושה סוגי נתונים: יומנים של המורים שתיעדו בהם את תהליך חיבור הבעיות ואת תהליך ההוראה; מחקרים שכתבו המורים לאחר איסוף הנתונים; יומן החוקרת שתיעדה בו את ההנחיה לתהליכי חיבור הבעיות והשיעורים התומכים שהתקיימו במליאה בקורס במכללה. במהלך המחקר נעשו ארבעה תהליכים: חיבור הבעיה על ידי המורים; שיתוף הבעיה עם עמיתים בקבוצה במכללה; הוראת הבעיה וניתוח אירוע מתוך ההוראה בכיתת המכללה. ניתוח נתונים נעשה כמתואר בטבלה 1.

טבלה 1

ניתוח נתונים

שאלת המחקר	הנתונים	סבבי ניתוח הנתונים
1. אירועים מתוך יומני מחקר ומתוך עבודות המחקר שנכתבו, כגון בחירת נושא להוראה מתוכנית הלימודים, מיפוי קשיים צפויים, בחירת כלי טכנולוגי, בחירת ייצוגים לבעיה וכדומה	בשלב הראשון ניתן שם לאירוע, בשלב השני אוחדו אירועים לנושאים זהים, כגון "שיקולים מוצהרים לבחירת ייצוגים בבעיה", "שיקולים סמויים לבחירת סדר המשימות הבעיה", בשלב השלישי הוגדרה תופעה, כגון תפיסות של מורים על אסטרטגיות או קשיים של תלמידיהם וקשר לכלי הטכנולוגי כמתווך	
2. אירועים הקשורים לפרקטיקות הוראה של הבעיות שחוברו	בשלב הראשון ניתן שם לפרקטיקות. בשלב השני נותחו האירועים בשלב השלישי נוסחו תמות המדייקות את הקשר בין חיבור הבעיה להוראתה, כגון חיבור בעיה כהזדמנות למיקוד תשומת לב של המורים בחשיבת תלמידיהם	

ממצאים

בהצעה הנוכחית אתמקד בממצא אחד העוסק בתשומת לב וגמישות המורה בזמן אמת בהוראת הבעיה. ממצא זה נוגע לעובדה שהמורים שחיברו את הבעיות הגיעו איתן לכיתותיהם כשהם בטוחים שהבעיה מאורגנת היטב להוראה מאחר שהם עיצבו אותה על פי שיקולים רחבים. לתופעת מיקוד תשומת הלב וגילוי הגמישות נמצאו שלושה זרזים: זיהוי בכיתה של אי התאמת היישומן לבעיה; שגיאות שזיהו תלמידים ביישומן בבעיה; הקושי של הלומדים לפתור את הבעיה או אי התאמתה לידע קודם שלהם.

כדי להסביר את הממצא אציג להלן בקצרה שלוש דוגמאות:

דוגמה 1: יישומן שנמצא לא מתאים

המורה ורד חיברה עבור תלמידיה את הבעיה שסעיפים ממנה מובאים להלן: נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^2 + 9x$ ונתון הישר שמשוואתו $y = 3x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון, מעל הישר. הנקודה B נמצאת על הקטע AB המקביל לציר ה-x. הנקודה C נמצאת על הקטע AC המאונך ל-AB (ראו קישורים). היכנסו ליישומן לראות את תכונות המשוואות:

<https://www.geogebra.org/classic/mgtevqjq>

היכנסו ליישומון ובדקו מהו הקשר בין הנקודות A ל-B:
<https://www.geogebra.org/classic/mmv9za3w>
מצאו את הערך של x שעבורו שטח המשולש ABC הוא מקסימלי.
היכנסו ליישומון ובדקו תשובתכם:

<https://www.geogebra.org/classic/kstmmgyu>

ביומן המחקר תיעדה המורה ורד את ההוראה וכתבה: "בהתחלה כששני תלמידים נכנסו ליישומון הם התבלבלו משום שהיו ערכים ופרמטרים לא רלוונטיים לבעיה ביישומון, עקב כך הפסקתי ללמד את הבעיה, חזרתי על היישומון (לאחר השיעור) והסרתי את כל הנתונים והפרמטרים הלא רלוונטיים". כאשר תיארה ורד לעמיתיה בקורס את האירוע היא אמרה: "אם זה היה מתרחש על בעיה מספר לימוד או מאתר מורים, לא הייתי עוצרת, כי יש לי אמון בספר, ובאתר המורים (הייתי מתכחשת לבלבול). זו בעיה שאני חיברתי בזמן אמת אני מזהה שהיישומון שהתאמתי מבלבל את תלמידיי. מיד עצרתי את השיעור ולימדתי בעיה אחרת מהספר, זו פעולה שלא עשיתי 12 שנה שאני מורה. ואולי עד היום לא הייתה לי תשומת לב מדויקת מה מבלבל את תלמידיי?" העדות של המורה ורד מחדדת שתי תובנות: ורד מזהה שהיא לא הייתה ערנית ולא שמה לב שתלמידיה הביעו בלבול כשלמדו מבעיות שלא היא חיברה. אומנם גם הפעם ורד לא מדייקת את הבלבול ולא ממקדת את הקושי אבל היא ערה לו; ורד מגלה גמישות ואחריות בזמן אמת ומשנה את השיעור, חוזרת לבעיה לאחר השיעור ומתקנת אותה להוראה עתידית.

דוגמה 2: תלמידה מזהה שגיאה ביישומון ובעיה

רוני חיברה בעיה לתלמידה שלימדה (פרטני) על יחסים בין צורות הקשורים למשפטי הפרופורציה במעגל. בעת פתרון הבעיה הבחינה התלמידה שהמקביליות המסומנות בשרטוט לא בהכרח מקבילות. היא ביקשה מהמורה לחקור האם המקביליות אכן מקבילות לפני שהיא עונה על הבעיה. חקר היישומון גילה לתלמידה שהמקביליות אינן מקבילות. המורה רוני רואה באירוע זה אירוע בעל משמעות בעבורה: "כל מה שהשקעתי בחיבור הבעיה הסתיים בשיעור שבו התלמידה המתקשה גילתה שיש לי שגיאה מהותית בבניית היישומון ובניסוח הבעיה [...] אני חושבת שזו הצלחה שלי כל התהליך הזה כי אם היא גילתה שגיאה אז לימדתי אותה היטב איך חוקרים יישומון לעומק, להבין תכונות...". כאן יש גמישות של המורה רוני לאפשר לתלמידה לסטות מהתכנון המקורי של דרישות הבעיה ולפתור בעיה "אחרת", ויש פה מסקנה שהשגיאה שהתלמידה זיהתה מוכיחה שהיא למדה לחקור לעומק יישומון מתוך התהליך שנעשה בפתרון הבעיות הקודמות (פירוט נמצא בתוך (Ovadiya, 2023). מקולוך ואחרים (McCulloch et al., 2023) טוענים שמיקוד תשומת לב המורה להבנת התלמידים את התיווך הטכנולוגי הוא מרכיב חשוב של תשומת לב המורה בשיעור מתמטיקה המלווה בכלים טכנולוגיים.

דוגמה 3: התאמת הבעיה ללומדים בזמן אמת

כשמרים חיברה בעיה לתלמידה היא יצאה מנקודת הנחה שהם זוכרים מכיתה ו' את כל המושגים והנוסחאות לחישובים במעגל ועיגול, וגם זוכרים לפתור בעיות תנועה פשוטות על פי הנוסחה שלימדה. אי לכך היא החליטה לחבר בעיה שלא מזכירה ידע קודם. מרים השתמשה ביישומון <https://www.geogebra.org/m/Kbxwmb3G> וחיברה בעיה לעבודה עצמית הקשורה לידע שיש לשלוף מהיישומון. בזמן השיעור לא הבינו התלמידים כיצד עליהם "לשחק" ביישומון כדי לענות על הבעיה, ולכמה מהם היה חסר ידע קודם. מרים שמה לב שהבעיה שהיא חשבה שהיא יפה וגם פשוטה (מחברת גם ידע על חישובים במעגל מתוך קריאת נתונים מיישומון דינמי, וכוללת גם פתרון בעיית מהירות) מתסכלת את תלמידיה, ולכן היא מחליטה לתווך את הבעיה ולפתור אותה בעת דיון במליאה ולא בעצמם כמתוכנן מראש. ההוראה במליאה בזמן אמת כללה רמזים לידע קודם, והנחיות מדויקות ללמידה מהיישומון. מרים דיווחה שיכלה להתעלם מהמתקשים, כי בכל זאת היו בכיתה תלמידים שהצליחו לפתור בעצמם את הבעיה, אלא שהיא העדיפה להיות גמישה ולנהל את הבעיה במליאה לטובת התלמידים שהביעו תסכול במקום אתגר. כאן נראה שמרים הייתה ערה לשלושת ההיבטים של תשומת לב של מורה בשיעור: לאסטרטגיות של התלמידים, לאופן שהבינו או לא ולתגובתה.

דיון

המחקר הנוכחי הוא חלק ממחקר העוסק בפער בין חיבור בעיות לצורכי הוראה, להוראת הבעיות והתאמתן ללומדים. על פי הממצא שתואר לעיל נראה כי פרקטיקה של חיבור בעיות על ידי מורים ככלי

לקידום מקצועי אכן מזמנת למורים חוויה עמוקה של בחירת שיקולים לחיבור הבעיה (נמצא גם בתוך Ovadiya, 2021), וערנות ייחודית בזמן ההוראה הנובעת מתשומת ליבם להשגת מטרות פדגוגיות ודידקטיות ממוקדות שהגדירו מראש. במחקר הנוכחי התמקדו המורים בחיבור בעיות הכוללות מתווכים דיגיטליים עבור תלמידים מתקשים במתמטיקה ושינו את התנהגותם בזמן אמת בהוראה. הם היו ערים יותר לשאלות והערות של תלמידיהם על הבעיה, וגמישים יותר לשנות את פעולותיהם שנבחרו מראש בהכנת השיעור בזמן אמת. השגת תשומת לב של מורים למתמטיקה בזמן אמת בפתרון בעיות מתווכות טכנולוגיה היא סוגיה שנדונה גם במחקרם של מקולוך ואחרים (McCulloch et al., 2023). בתשומת לב של מורה למתמטיקה יש לרוב שלושה רכיבים הקשורים זה בזה: תשומת לב לאסטרטגיות של התלמידים, פירוש הבנות של התלמידים והחלטה כיצד להגיב על הבנת התלמידים. החוקרים רואים בתהליך הוראה באמצעות כלים טכנולוגיים תהליך הדורש מהמורה להבחין בחשיבה מתמטית של תלמידיו כך שעבודתם בכלים הטכנולוגיים ברורה ומפורשת לו.

רשימת מקורות

- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Castro-Alonso, J. C., Ayres, P., & Paas, F. (2015). The potential of embodied cognition to improve STEAM instructional dynamic visualizations. In Xun Ge, J. D. Ifenthaler, & M. Spector (Eds.), *Emerging technologies for STEAM education* (pp. 113–136). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02573-5_7
- Kurvinen, E., Kaila, E., Laakso, M., & Salakoski, T. (2020). Long term Effects on Technology Enhanced learning: The use of weekly digital lessons in mathematics. *Informatics in Education*, 19(1), 51–75. <https://doi.org/10.15388/infedu.2020.04>
- Li, X., Sun, X., & Cai, J. (2022). Integrating problem posing into the mathematics classroom: current advances and future directions of research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 48, 101213. <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2022.101213>
- McCulloch, A. W., Dick, L. K., & Lovett, J. N. (2023). A framework to support teacher noticing of students' mathematical thinking in technology-mediated environments. *School Science and Mathematics*, 123(7), 348–361. <https://doi.org/10.1111/ssm.12601>
- Nicol, C., & Crespo, S. (2006). Learning to Teach with Mathematics Textbooks: How Preservice Teachers Interpret and Use Curriculum Materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 331–355. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-5423-y>
- Ovadiya, T. (2019). Posing problems and designing tasks to promote transfer of learning in geometry by teacher-researchers: The case of tessellations. In J. Novotná, & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of the International Symposium in Elementary Mathematics Teaching* (August 18 – 22, 2019) (pp. 280-287). Prague, Czech Republic. <https://www.semt.cz/proceedings/semt-19.pdf>
- Ovadiya, T. (2021). A novice teacher researcher's action research project: Posing problems to promote concepts of graphs in calculus. *Action Research and Innovation in Science Education*, 4(1), 13–23. <http://doi.org/10.12973/arise/132570>
- Ovadiya, T. (2021). Implementing theoretical intervention principles in teaching mathematics to struggling students to promote problem-solving skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(1), 4–28. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1944682>
- Ovadiya, T. (2023). Teacher-researchers can develop techno-mathematical literacy by posing and teaching problems with digital tools. *13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: CERME13*. (July 10-14, 2023). Eötvös Loránd University of Sciences; Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.



מבוא

בשנים האחרונות גברה המודעות וההתעניינות ביצירתיות מתמטית בכיתה (Levenson & Molad, 2022; Luria, et al., 2017). חוקרים ואנשי חינוך במתמטיקה הציעו דרכים שונות לקדם יצירתיות במתמטיקה, וביניהן התמודדות עם משימות פתוחות (Molad et al., 2020). כמו כן, נמצא שעבודה בקבוצות יכולה לתרום ליצירתיות, זאת משום שלמידה בקבוצה מאפשרת לתלמידים להיחשף לפתרונות שלא חשבו עליהם לבדם (Levenson, 2011). מעט מבין המחקרים שהוקדשו ליצירתיות מתמטית בכיתה, התמקדו בתלמידים עם הישגים נמוכים במתמטיקה (Levav-Waynberg & Leikin, 2012; Levenson et al., 2018). ואולם, בבית הספר היסודי, לומדים התלמידים בכיתות הטרוגניות. מאמר זה מתאר חלק ממחקר גדול יותר המבקש לבדוק את האפשרות לעודד יצירתיות מתמטית בקרב תלמידי כיתות ו' באופן כללי, ובמיוחד בקרב תלמידים שלהם הישגים נמוכים. הוא בודק את רמת היצירתיות באופן יחידני בקרב תלמידים לפני ואחרי התערבות כאשר ההתערבות כוללת עבודה בקבוצות הטרוגניות על ארבע פעילויות פתוחות שונות. מאמר זה מתמקד בקבוצה אחת של ארבע תלמידות, ועל פעילות קבוצתית אחת, ומתאר את רמת היצירתיות של כל תלמידה לפני ואחרי ההתערבות, ואת מאפייני העבודה הקבוצתית ובמיוחד ההשתתפות של תלמידה אחת עם הישגים נמוכים בקבוצה הזאת. במחקר זה, המונח "תלמידים עם הישגים נמוכים" מתייחס לתלמידים מתקשים, שהישגיהם במתמטיקה נמוכים יחסית לאלה של בני גילם באותה הכיתה.

רקע תיאורטי

חוקרים מתייחסים לעידוד יצירתיות מתמטית כחלק משמעותי בהוראת מתמטיקה בכיתה. לדוגמא, פרוסק (2018) סוברת שפיתוח יצירתיות מתמטית בכיתה מפתחת את הדמיון, מה שמניע את התלמיד להמציא ולחפש עוד ועוד דרכים חדשות לפתרון. חוקרים נוספים הצביעו שעצם החיפוש עבור דרכים חדשות מוביל לשטף, גמישות ומקוריות (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). לוריה ואחרים (Luria et al., 2017) אף טענו שיש להתייחס ליצירתיות מתמטית ככלי הכרחי לטיפול סביבת למידה שוויונית לכל התלמידים, ובכך הרחיבו את החינוך של היצירתיות עבור תלמידים עם הישגים נמוכים.

חוקרים רבים (פרוסק, 2018; Molad et al., 2020) ממליצים לפתח יצירתיות מתמטית על ידי הצגת בעיות פתוחות. הרשקוביץ וקלור (2005) טענו שלמשימה פתוחה יש מספר גדול מאוד של פתרונות והיא מאפשרת לתלמידים להציע מגוון רחב של רעיונות מתמטיים. אולם, הצגת מטלה פתוחה אינה תנאי מספיק לזימון היצירתיות. על המורה לעודד את התלמידים לחפש דרכים שונות לפתרון המטלה (Levav-Waynberg & Leikin, 2012), ולתת הוראות ברורות. לוינסון (2011) הציעה שעל המורה לדאוג לסביבת למידה נוחה ופתוחה שתאפשר לתלמידים לחשוב באופן חופשי ומקורי ללא חשש מטעויות. היא מצאה כי תלמידים הלומדים בסביבה בה הם מרגישים חופשיים להציע רעיונות, הם יטו להציע גם דרכים מקוריות לפתרון בעיה.

בחינוך מתמטי נהוג למדוד יצירתיות בשלושה מרכיבים עיקריים: שטף, גמישות ומקוריות. שטף (Fluency) - מספר התשובות או הרעיונות שהועלו במסגרת זמן מוקצב; גמישות (Flexibility) - מידת השוני בין התשובות או הרעיונות המראה חשיבה בכיוונים שונים; מקוריות (Originality) - באיזו מידה הרעיון שהועלה נדיר. לדוגמא, במחקרם של הרשקוביץ וקלור (2005) השטף נמדד בהתאם למספר התשובות הנכונות שהתלמיד נתן למטלה. פתרונות התלמידים סווגו לקטגוריות והגמישות נמדדה באמצעות מספר המעברים בין הקטגוריות.

במחקר זה, התלמידים עבדו על מטלות פתוחות באופן קבוצתי. בעבודה קבוצתית תלמידים פותרים יחד בעיה, משלימים משימה או יוצרים מוצר (Molad et al., 2020). עבודה זו מאופיינת על ידי רעיונות

ופעולות מתמטיות, שמקורם ביחיד, נבנים ומנוסחים מחדש על ידי אחרים בקבוצה (Martin et al., 2006). מתוך מחקרם של מולד ואחרים (Molad et al., 2020) עולה, שפתרון משימות פתוחות בקרב קבוצות של תלמידים מעודד יצירתיות קולקטיבית ובמיוחד את השטף ואת הגמישות. לבסוף, מחקר אחר (Levenson & Molad, 2022) מצא שבעבודה קבוצתית, תלמידים הגיעו לפתרון מקורי כתוצאה משזירת רעיונות שעלו מיחידים בתוך הקבוצה.

לאור החשיבות של עידוד יצירתיות יחד עם עבודה קבוצתית, המטרה הראשונה היא להשוות את רמת היצירתיות המתמטית (שטף, גמישות ומקוריות) של תלמידים עם הישגים שונים לפני ואחרי התערבות. לאור החשיבות לעודד מיומנויות אלו גם בקרב תלמידים עם הישגים נמוכים, המטרה השנייה היא בדיקת מאפייני העבודה הקבוצתית, ודרך השתתפותה של תלמידה עם הישגים נמוכים בקבוצה.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו ארבע תלמידות הלומדות בכיתה ו' בבית ספר יסודי במרכז הארץ מהמגזר הערבי. לפי דיווח המורה, קבוצת התלמידות כללה: תלמידה עם הישגים גבוהים (לין), שתי תלמידות בעלות הישגים בינוניים (נור ודימא) ותלמידה אחת עם הישגים נמוכים (מירנא), כל השמות בדויים. לפי דיווח המורה והתצפיות של החוקרת בכיתה לפני תחילת ההתערבות, התלמידים נהגו לעבוד באופן מסורתי ללא קבוצות (כל הכיתה ביחד). המחקר התבצע תוך שמירה על כללי אתיקה לפי הנחיות המדען הראשי של משרד החינוך וועדת האתיקה של אוניברסיטת תל אביב.

כלי המחקר כללו מבחן מקדים (Pretest) ומבחן סופי (Post-test), ארבע פעילויות מתמטיות המעודדות יצירתיות ותצפיות. מטרת המבחן המקדים והסופי היה לבחון את השטף, גמישות ומקוריות בקרב התלמידים כשהם עובדים באופן פרטי. במבחן המקדים התלמידים התבקשו למצוא את המספר היוצא דופן בין המספרים (25, 23, 20, 15) ובמבחן הסופי היו צריכים למצוא את מספר היוצא דופן בין המספרים (25, 30, 29, 35).

בין המבחן המקדים והסופי, התלמידים התבקשו לבצע ארבע פעילויות מתמטיות פתוחות. הפעילויות הקבוצתיות צולמו ותמללו על ידי החוקרת. המצלמה הייתה מכוונת לקבוצה שתאסוף מלל, מחוות והבעות פנים. המטרה הייתה לברר את מעורבות המשתתפים בעבודה הקבוצתית. במאמר זה, נציג ניתוח של הפעילות הראשונה בהתערבות. בפעילות זו הוצגו לתלמידים את המספרים (2, 10, 12, 18, 15, 90, 20, 3, 48, 40) והם התבקשו לבנות כמה שיותר תרגילים באמצעות המספרים שהוצגו כך שתוצאתם תהיה 30. התלמידות ישבו מסביב לשולחן אחד, מצוידות בעטים ודף עבודה גדול (A3).

התוצרים של המבחן המקדים, המבחן הסופי והפעילות שהועברה במהלך הניסוי תועדו ונבחנו על פי שטף, גמישות ומקוריות. ציון השטף התקבל על פי מספר התשובות הנכונות והשונות שקבל כל יחיד. כדי למדוד את הגמישות, תשובות התלמידים סווגו לקטגוריות, ומספר הקטגוריות שיקף את הגמישות. במבחן המקדים והסופי, ציון מקוריות נמדד לפי תשובה ייחודית שלא נמצאה אצל שאר המשתתפות בקבוצה. בעבודה הקבוצתית, לא הייתה התייחסות למקוריות.

שלושה מאפייני עבודה קבוצתית נותחו לפי לוינסון ומולד (Levenson & Molad, 2022). ראשית, נותח סוגי התפקידים שתלמידים לקחו על עצמם בתוך הקבוצה (כגון: מומחה מתמטי, מנהיג חברתי, עוזר, תלמיד משתתף או לא משתתף). שנית, נבחנו הסביבה החברתית, כלומר, האם הייתה אווירה שיתופית ומעודדת (כגון כבוד הדדי בין התלמידים ורמת הסבלנות לטעויות). לבסוף, נעשה מעקב אחרי גלגול רעיונות, כלומר כיצד רעיונות נעבדו והורחבו על ידי חברי הקבוצה כך התוצר הסופי נבנה מכמה פתרונות ו/או רעיונות שקודמו בתהליך הקבוצתי.

ממצאים

מהממצאים של המבחן המקדים והמבחן הסופי (ראו טבלה 1), ניכר ששלוש בנות, וביניהן מירנא, השתפרו (לפחות בשטף, חלק גם שיפרו את הגמישות) בעקבות ההתערבות. בפעילות הקבוצתית הראשונה של ההתערבות, התלמידים מצאו 26 פתרונות שסווגו לארבע קטגוריות, ולכן השטף היה 26 והגמישות הייתה ארבע.

שם התלמיד			רמת הישגי התלמיד			יצירתיות לפני התערבות			יצירתיות אחרי התערבות		
						שטף	גמישות	מקוריות	שטף	גמישות	מקוריות
מירנא			נמוכה			0	0	0	2	1	0
דימא			בינונית			7	4	0	6	3	0
נור			בינונית			9	6	1	14	5	0
לין			חזקה			9	4	0	12	6	1

כעת נציג את התנהלות הקבוצה על פי שלושה קריטריונים: תפקידי המשתתפים בקבוצה, סביבה חברתית ומעודדת, ורעיון מוביל לרעיון. בנוגע לתפקידי המשתתפים בקבוצה, לין הייתה המנהיגה של הקבוצה ודאגה שכל אחת תקבל הזדמנות לדבר, כפי שהיא אמרה: "עכשיו תורה של נור!" וגם "מה רצית להגיד דימא?". היא גם הייתה המומחית למתמטיקה, בדקה וגם תיקנה פתרונות של אחרים: "רגע אז בתרגיל זה אנחנו צריכות להוסיף סוגריים כדי שהתשובה תהיה נכונה". בתור המומחית במתמטיקה, היא גם הצליחה להוציא את התלמידות מקיבעון: "חברות, אנחנו צריכות לחשוב גם על שימוש בכפל וחילוק לא רק להשתמש בחיבור וחיסור...!"

דימא ונור לרוב העלו רעיונות, כאשר דימא גם לקחה על עצמה לעזור למירנא. לפעמים, היא תיקנה הצעה שגויה של מירנא: "זה יהיה 144, ואי אפשר לכתוב שני מספרים דומים". דימא גם דאגה להסביר למירנא ולוודא שהיא מבינה מה נדרש, אפילו שתלמידה אחרת הסבירה לה:

95 מירנא: האם אני יכולה להשתמש במספרים עוד פעם?

96 לין: כן את יכולה, אבל תכתבי תרגיל שונה וחדש.

97 דימא: זאת אומרת שאפשר להשתמש במספרים אבל לכתוב תרגילים אחרים.

מירנא גם הכירה בתפקיד זה של דימא ולכן נהגה לפנות דווקא אליה: "דימא תגידי לי, האם אפשר לכתוב 10 כפול 12?" לרוב, מירנא לא השתתפה בדיונים כלליים של הקבוצה.

לגבי הסביבה החברתית, המשתתפות נטו לעודד את חברותיהן, כולל מירנא, ולהעריך את הפתרונות שלהן, לדוגמה, לין אמרה: "מירנא עזרה לנו הרבה היום, איזה יופי" וגם: "מירנא, את תני לנו רעיונות ואנחנו ממשיכות". כמו כן, נצפה כבוד הדדי בקרב התלמידים לגבי התייחסות לשגיאות, לדוגמה, מירנא אמרה: "האם אפשר לכתוב 20 חלקי 3?" ותשובתה של לין הייתה: "תקשיבי מירנא, מספר 20 אפשר להתחלק ב 4, 5, 10, 2", נציין שהתלמידות לא צחקו על תשובתה של מירנא, לא אמרו זה טעות, וגם לא התעלמו ממנה, אלא הסבירו לה למה התשובה לא נכונה.

עוד דוגמא נצפת בשורות 149 ו 150, כאשר מירנא שוב טועה. יתר על כן, בהמשך השיחה, הפתרון השגוי של מירנא לא נעלם, אלא משמש כבסיס לפתרון אחר נכון.

149 מירנא: האם אפשר לכתוב 15 ועוד 20

150 נור: אבל 15 ועוד 20 זה יהיה 35

151 לין: פחות 5 אהה אין 5...

152 לין: רגע אפשר לכתוב 20 ועוד 15 פחות

153 לין ודימא: פחות 3 פחות 2.

154 לין: כותבת התרגיל (2+3)-(15+20)

סיכום ודיון

נתייחס ראשית לתלמידה מירנא והשתתפותה בעבודה הקבוצתית. הממצאים הראו שמירנא השתתפה באופן פעיל בהעלאת רעיונות וגם שהתלמידים שיתפו אותה. חלק מהרעיונות שהציעה מירנא אף

פותרו על ידי חברי הקבוצה. זה מתכתב עם מחקרה של לוינסון (Levenson, 2011) שזיהתה תלמיד מציג רעיון, תלמיד אחר מרחיב את אותו הרעיון, ובסופו של דבר, התוצר הסופי היה מורכב מכמה פתרונות שקודמו בתהליך קבוצתי. אך חשיבות המחקר הנוכחי היא שהתלמידה שהתחילה את תהליך הפתרון הייתה דווקא התלמידה עם הישגים נמוכים. אנו מודעים שזה לא תמיד המצב. במחקרם של לוינסון ומולד (Levenson & Molad, 2022), מנהיג הקבוצה שגם היה המומחה המתמטי המשיך לדחות רעיונות שהוצגו על ידי תלמיד אחר והמשיך בעבודה שלו. אך במחקר ההוא, הנחקרים היו סטודנטים אחרי התיכון שפחות הכירו אחד את השני ומנהיג הקבוצה שם היה מומחה מתמטי ולא תיפקד כמנהיג חברתי. באותו מחקר, בקבוצה אחרת, היה מנהיג חברתי שדאג לשיתוף פעולה בין משתתפי הקבוצה ובכך העלה את השטף של אותה הקבוצה. לוינסון ומולד הצהירו שמנהיג חברתי, או כל אדם קשוב במיוחד, יכול להשפיע על יצירתיות קולקטיבית על ידי איסוף רעיונות והעלאתם לקבוצה. במחקר הנוכחי, לין הייתה גם מנהיגה חברתית וגם המומחית במתמטיקה.

אנו מודעים שהתלמידה מירנא לא הפכה לפתע בקיאה במתמטיקה או יצירתית מאוד, אך ניתן לומר שהיא הראתה שיפור במבחן הסופי לעומת מבחן מקדים שבו מעולם לא נתנה תשובה. לדעתנו, גם אם התלמידה נתנה רק שתי תשובות נכונות במבחן הסופי, הדבר מעיד על רצונה להתנסות, שזה לעצמו חשוב. במאמר זה הצגנו רק קבוצה אחת. בהמשך, ננתח עוד קבוצות על מנת לראות דרכי השתתפות של תלמידים עם הישגים נמוכים בעבודה על מטלות פתוחות, במטרה להדריך מורים בהפעלת קבוצות הטרוגניות במטרת לפתח יצירתיות מתמטית בקרב כל תלמידי הכיתה.

רשימת מקורות

- הרשקוביץ, ש. וקליר, ר. (2005). הוראה והערכה של "שאלות פתוחות לחלוטין". *מספר חזק*, 10, 46-52.
- פרוסק, א. (2018). בניית קשרים אינטגרטיביים בתהליך הוראת המתמטיקה באמצעות פתרון בעיה אחת בדרכים שונות. *שנתון "שאנן"*, כד', 140-154.
- Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 73-90.
- Levenson, E. (2011). Exploring collective mathematical creativity in elementary school. *Journal of Creative Behavior*, 45(3), 215-234.
- Levenson, E., & Molad, O. (2022). Analyzing collective mathematical creativity among post high-school students working in small groups. *ZDM Mathematics Education*, 54, 193-209.
- Levenson, E., Swisa, R., & Tabach, M. (2018). Evaluating the potential of tasks to occasion mathematical creativity: Definitions and measurements. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 273-294.
- Luria, S. R., Sriraman, B., & Kaufman, J. C. (2017). Enhancing equity in the classroom by teaching for mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 49(7), 1033-1039.
- Martin, L., Towers, J., & Pirie, S. (2006). Collective mathematical understanding as improvisation. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(2), 149-183.
- Molad, O., Levenson, E., & Levy, S. (2020). Individual and group mathematical creativity among post-high school students. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 201-220.



מבוא

פיתוח יצירתיות אצל הלומד הינו דבר משמעותי למהלך הלמידה ולטיפול תובנה מתמטית. מחקרים שונים עוסקים בהיבטים מגוונים של יצירתיות מתמטית בכיתות רגילות ובכיתות לתלמידים מחוננים, אך לא נערכו מחקרים הבודקים יצירתיות מתמטית בכיתות חינוך מיוחד. כמו כן, ידוע כי למורה תפקיד משמעותי בעידוד יצירתיות מתמטית בכיתה. על כן במחקר זה נבדקו תפיסותיהן של שתי מורות לחינוך מיוחד (חנ"מ) בנושא עידוד יצירתיות מתמטית בכיתה חנ"מ וכן דרכי ההוראה בהן המורות משתמשות, המעודדות ביטויים של יצירתיות מתמטית הלכה למעשה בכיתה.

רקע תיאורטי

יצירתיות מתמטית היא מושג שכיח בעשורים האחרונים בכל הקשור לחינוך מתמטי. יש המתייחסים למושג זה כחיבור בין תהליך יצירתי (creative processes) ותוצר יצירתי (creative products) שמשמעותם התבוננות בבעיה מזווית שונה, הפעלת הדמיון, אבחנה בדפוסים, העלאת שאלות ודרכי פעולה אפשריות לצד פתרונות ייחודיים ומקוריים או מגוון דרכים לפתרון (Gómez-Chacón & de la Fuente, 2018). יצירתיות מתמטית נבחנת לרוב על פי שלושה מרכיבים: שטף, גמישות ומקוריות.

העיסוק ביצירתיות מתמטית מחייב התייחסות לקשר בין ידע לביטוי יצירתי. שלילת הידע רלוונטי כחלק מקידום הרעיון היצירתי (Sriraman, 2004), אך אין די בה. על פי Leikin (2020) סיפוק הזדמנויות ואתגרים בלמידה כמו גם מרכיבים אישיותיים (מוטיבציה, עניין ועוד) יכולים להביא את הפוטנציאל המתמטי (ידע) הגלום בתלמידים, לידי מימוש של יצירתיות מתמטית. דרך לעידוד היצירתיות הנה שילוב מטלות המעוררות תובנה ופתרונות ייחודיים, המציגות בעיות מוכרות באור חדש, או מאפשרות כיווני התייחסות שונים. קיימות מטלות שונות הנחשבות כמעודדות ביטויים של יצירתיות מתמטית למשל, מטלות מסוג שאלה פתוחה (open-ended task) או מטלות המאפשרות דרכי פתרון מגוונות (multiple solution task) (Levenson, 2013; Elgrably & Leikin, 2021).

היבט נוסף בהתייחס ליצירתיות מתמטית הוא המורה, תפיסותיו בנושא ותפקידו כמעודד יצירתיות מתמטית בכיתה. אמונות של מורים משפיעות על המטלות שהם מזמינים לכיתה ועל דרכי הניווט של השיח המתמטי (Levenson, 2013). מחקרים שונים (למשל Bolden et al., 2010) הראו כי מורים למתמטיקה בביה"ס היסודי תופסים את המקצוע כתחום המזמן יצירתיות מצומצמת ופחות בקיאים במושג יצירתיות מתמטית ומרכיביה. גם כאשר המורים משלבים בהוראתם מטלות הנחשבות כמעודדות יצירתיות מתמטית (למשל בחירת דפוס פתרון שונים, שונות בתשובות ושילוב תחומים שונים בפתרון), הם אינם מגדירים זאת במונחים של יצירתיות מתמטית (Levenson, 2013). לעיתים, אף קיים פער בין המטלה הנבחרת כבעלת פוטנציאל לעידוד יצירתיות מתמטית לבין עיבוד המטלה על ידי המורה כמקדם ומאפשר ביטוי ליצירתיות מתמטית (Lev-Zamir & Leikin, 2012). לדעת Levenson (2013) לא די בהצגת מטלות המעודדות יצירתיות, לאקלים הכיתתי תפקיד משמעותי ביצירת סביבה בטוחה, בה מתקבלים רעיונות חדשים, מקוריים שטרם נלמדו. המורה מנווט את המתרחש בכיתה וביכולתו לעודד את היצירתיות המתמטית על מרכיביה השונים (שטף, גמישות ומקוריות). במחקר זה יבחנו תפיסות של מורים בחינוך המיוחד כלפי יצירתיות מתמטית.

הוראת תלמידים עם צרכי חינוך מיוחדים (צח"מ) מצריכה את המורים להתגמש ולהתאים את תהליך ההוראה למאפיינים הייחודיים של הלומדים. שילוב אמצעי המחשה מסייע בגישור ובהבניית החומר הנלמד על פי תוכנית הלימודים של משרד החינוך (Geary, 2003). עוד נמצא, כי הוראה פעילה בעת שיעור המתמטיקה מסייעת לתלמידים אלו לבצע אופרציות מהזיכרון ולפתור בעיות (Chiu, 2009).

בנוסף, לא די להתייחס לתוכן המתמטי ולסוג המטלות שמציג המורה בכיתה, יש להתייחס גם לתפיסה של המורה את תלמידיו ויכולותיהם. באינטראקציה מורה-תלמיד נדרשת נקודת מבט כוללת על התלמיד, התייחסות לאלמנטים קוגניטיביים לצד היבטים חברתיים ורגשיים. למורים ולאמונותיהם כלפי תלמידי הצח"מ, אם במודע ואם לא, חלק בהגבלת הזדמנויות הלמידה ובמתן הזדמנות שווה כשותפים בתהליך הלמידה ולא רק בתוצר (הד-מצוינים, 2016). מכאן, מטרת המחקר היא לבדוק מהן התפיסות של מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות חינוך מיוחד בנוגע לעידוד ליצירתיות מתמטית וכיצד אלו באות לידי ביטוי במהלך שיעורי מתמטיקה.

שתי שאלות מחקר עומדות בסיס מטרות זו:

- מה הן התפיסות אותן מציגות מורות למתמטיקה המלמדות בכיתות חנ"מ בנושא יצירתיות מתמטית?
- באילו מדרכי ההוראה שהמורות משתמשות בהן במהלך השיעור, ניתן לזהות עידוד ליצירתיות מתמטית בהקשר של שטף, גמישות ומקוריות?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו שתי מורות, נירה ורויטל, המלמדות מתמטיקה בשתי כיתות ג' חנ"מ, המאופיינות ככיתות לתלמידים עם הפרעת למידה, בבתי ספר כוללניים. נירה, מורת חינוך מיוחד בהכשרתה ללא התמחות במתמטיקה, מלמדת כ- 21 שנים בכיתות חנ"מ ומחנכת הכיתה בה לומדים 9 תלמידים. רויטל, מורת חינוך מיוחד בהכשרתה עם התמחות במתמטיקה, מלמדת 4 שנים בכיתות חנ"מ ומחנכת הכיתה בה לומדים 10 תלמידים.

בהתאם לשאלות המחקר, נעשה שימוש בריאיון חצי מובנה למורות והתקיימו שלוש תצפיות בכל כיתה. מטרת הריאיון החצי מובנה להבין מהן עמדות המורה בנוגע ליצירתיות מתמטית בכיתות חנ"מ. כבסיס לריאיון הוכן פרוטוקול מנחה שכלל שאלות כגון: האם מתמטיקה היא תחום יצירתי? כיצד באה יצירתיות מתמטית לידי ביטוי בשיעור? האם קיימות מטלות שיכולות לעודד ביטויים של יצירתיות מתמטית? תוך כדי הריאיון נשאלו שאלות נוספות במטרה לקבל תמונה רחבה לגבי סוגיות שונות שהמורות העלו. בנוסף, הוצגה למורות דוגמא למטלות המאפשרות דרכי פתרון מגוונות והנחשבות כמעודדות יצירתיות מתמטית (איור 1). בשבועות שלאחר מכן, התקיימו בכל כיתה שלוש תצפיות לא מתערבות, במטרה לזהות ביטויי יצירתיות מתמטית בשיעורי המתמטיקה בכיתות חנ"מ. הראיונות והתצפיות תועדו בוידיאו ותומללו. המחקר בוצע תוך שמירה על כללי אתיקה הנהוגים במחקרים מסוג זה המתבצעים בבתי ספר, על פי הנחיות המדען הראשי של משרד החינוך וועדת האתיקה של אוניברסיטת תל אביב.

ממצאים

בחלק זה נתייחס לממצאים שעלו מתוך הראיונות וממצאים שעלו מתוך התצפיות בכיתה.

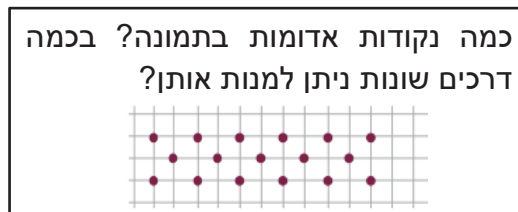
מטרת הראיונות היתה לבדוק מהן תפיסותיהן של המורות לגבי יצירתיות מתמטית והצהרותיהן לגבי שילוב פעילויות הנחשבות כמעודדות ביטויים של יצירתיות מתמטית בכיתה. בשני הראיונות עלה כי המורות אינן מכירות את המושג "יצירתיות מתמטית". כך למשל נירה מדגישה את חוסר הבהירות לגבי המושג "אני כאילו, ההגדרה מהי יצירתיות לא ברורה, לא ברור לי מה אתם חושבים החוקרים". גם כאשר הוצגו למורות מטלות פתוחות אשר להן מגוון פתרונות (איור 1) ניכר שהן אינן מכירות או חשופות למטלות שכאלה. למרות זאת, הן גילו עניין לנסות להשתמש במטלות אלו בכיתתן. לדוגמא, נירה מביעה עניין ואומרת "זה נחמד, אם מישהו היה נותן לי דברים כאלה כדי להפעיל את הראש לכיוונים האלה", ורויטל מציינת שמטלה זו מבטאת יצירתיות בכך "שכל אחד יכול לבנות תרגילים אחרים שונים, מגוונים".

למרות שהמושג יצירתיות מתמטית ומרכיביו (שטף, גמישות ומקוריות) אינם מוכרים למורות, לאורך הראיונות הן מציינות באופן לא מפורש רעיונות המתקשרים לנושא. בריאיון עם נירה, היא מציינת "אני עושה איתם יצירתיות במתמטיקה, אני עושה איתם משחקים בחשבון...אני משתמשת בשטיח, בלוח, עם דברים אחרים, אמצעים אחרים". היא מייחסת את היצירתיות במתמטיקה לאופן ההוראה שלה,

כאשר היא יוזמת שילוב משחקים, חושפת את התלמידים למגוון דרכי פתרון ומשתמשת באמצעי המחשה מרובים כדי להביע רעיונות מתמטיים. כאשר היא נשאלת כיצד מתבטאת יצירתיות מתמטית בשיעור, היא עונה "המתמטיקה מופיעה בכל מקום... היא חלק מחיינו בכל דבר. אני מראה להם את זה בלוח השנה, בשעון, בתאריך, בתאריכי יום הולדת". כלומר, היא רואה ביצירת הקשרים לסיטואציות שגרתיות ביטוי ליצירתיות. בהתייחס לשאלה "מי יחשב בעיניך כתלמיד שמביע יצירתיות מתמטית?", היא משיבה "... הוא (התלמיד) יכול להראות לי עם אביזרים דרך אחרת שהוא רואה את החשבון, רואה את המספר", ובדבריה קיים רמז למימד הגמישות והמקוריות, אך לא לשטף.

איור 1

דוגמא למטלה המעודדת יצירתיות מתמטית, אשר הוצגה למורות בריאיון



בראיון עם רויטל היא מציינת כי עידוד יצירתיות מתמטית בכיתה הוא אמצעי חשוב על מנת לפתח קווי מחשבה חדשים עבור התלמידים. לשאלה "כיצד ניתן לעודד יצירתיות מתמטית אצל תלמידים?" היא משיבה "(על ידי) חשיפה שלהם (התלמידים) לדרכים שונות... וגם אפשר לשאול אותם אם להם יש דרכים שונות". ניתן להסיק מדבריה שהיא מתייחסת למדדי השטף והגמישות, אולם ללא שימוש ישיר במושגים אלו. לדעתה, מעורבות והשתתפות פעילה של התלמיד בשיעור מהווים אף הם ביטוי ליצירתיות מתמטית, והיא מציינת "שאיני אומרת לילדים מראש שהם יצטרכו לקחת חלק פעיל, שהם יצטרכו להעביר חלק מהשיעור, אז גם בחלקים האלה אפשר לתת להם להיות יצירתיים". אולם כאשר מתבקשת לתת דוגמה לפעילות המזמנת אפשרות לעידוד מתמטית היא מתקשה למצוא.

מטרת התצפיות היתה לבדוק אילו דרכי הוראה בהן משתמשת המורה במהלך שיעורי המתמטיקה בכיתות חנ"מ, מעודדות ביטויים של יצירתיות מצד התלמידים. נירה השתמשה במהלך השיעורים בשאלות שאלות ומתן הוראות פתוחות, המאפשרות לתלמידים לענות באופן גמיש ובדרך המתאימה להם. בנוסף נעשה שימוש באמצעי המחשה מגוונים המוכרים לתלמידים, אשר מזמנים גמישות והנגשת אפשרויות שונות לייצוג. בכיתה של רויטל דרכי ההוראה כוללות יצירת סביבת לימוד תומכת ואסטרטגיות למסוגלות עצמית והעלאת מוטיבציה. אלו מהווים אקלים כיתתי המאפשר השתתפות פעילה של התלמידים לצד מתן לגיטימציה לטעויות של תלמידים, המתקבלות כחלק מתהליך הלמידה ומעודדות ביטויים של יצירתיות מתמטית. גם בכיתה של רויטל נעשה שימוש בשאלות שאלות ושימוש באמצעי המחשה, אך כאן נראה שאלו אינן מקדמות ביטויים של יצירתיות. כך לדוגמה שימוש בשאלות המכוונות לפתרון יחיד והכוונה לדרך פתרון אחת, חוסמות את האפשרות לשונות בין פתרונות ומצמצמות עידוד יצירתיות מתמטית. בנוסף, רויטל חושפת את התלמידים לדרך פתרון באמצעות אביזרים ואמצעי המחשה אך זה נעשה בהכוונה מרובה, ממוקד לפתרון ולא כאמצעי מגוון לייצוג בעיה.

דיון ומסקנות

הקשר בין תפיסות המורות כפי שעלו בראיונות לבין ההתנהלות בשיעורים בנוגע לעידוד יצירתיות מתמטית בכיתות חנ"מ עולה במספר נושאים. נתייחס כעת לשלוש סוגיות מרכזיות: אמצעי המחשה, אקלים כיתתי ושאלות שאלות, שעלו בראיונות ובאו לידי ביטוי בתצפיות בכיתות. בנוגע לאמצעי ההמחשה, בשני הראיונות המורות ציינו את חשיבות השימוש בהם (Geary, 2003) ככלי לביטוי יצירתיות מתמטית. בעוד שבכיתה של נירה התלמידים משתמשים באמצעים ומבטאים דרכי פתרון על ידי ייצוגים שונים, המעידים על עידוד לגמישות, אצל רויטל השימוש באמצעי ההמחשה נעשה בהכוונה מרובה. כל התלמידים עושים שימוש באותו האמצעי לפתרון יחיד ולא כאמצעי מגוון לייצוג בעיה. סוגיית האקלים הכיתתי עלה בשני הראיונות. נירה דברה על התנסות פעילה של התלמידים כחלק מתהליך הלמידה, אך התלבטה האם זו הכוונה בעידוד יצירתיות מתמטית בשיעור. רויטל ציינה

את החשיבות שבמעורבות הפעילה של התלמיד כחלק מעידוד היצירתיות ואכן היא יוצרת בכיתה אקלים המעודד השתתפות פעילה יצירת מוטיבציה אצל התלמיד ומקום בטוח לטעויות (Levenson, 2013). אחד הפערים בין הראיונות לתצפיות עולה סביב נושא שאילת השאלות בכיתה (Elgrably & Leikin, 2021; Levenson, 2013). בראיונות, המורות מזהירות כי אינן מכירות וחשופות למטלות באמצעותן ניתן לעודד יצירתיות מתמטית בשיעורים, אך בתצפיות שנערכו בשיעורי המתמטיקה בכיתות חנ"מ ניכר כי הן עושות שימוש בטכניקה של שאילת שאלות היכולה לעודד יצירתיות מתמטית בקרב התלמידים. בעוד נירה משתמשת בשאלות פתוחות המאפשרות לתלמידים גמישות ומקוריות במגוון תשובות, ריטל שואלת שאלות סגורות ומספקת הכוונה לפתרון אחד אשר מצמצמת את האפשרות למגוון. כאן ניכר ההבדל בגישות בין שתי המורות ובאופן שהן משתמשות בשאילת השאלות כדרך לעידוד יצירתיות מתמטית.

המחקר מעלה את הצורך לקיים הכשרה עבור מורים המלמדים תלמידים עם צח"מ בנושא יצירתיות מתמטית, לחשוף ולהרחיב את הכלים המתאימים בפיתוח עידוד יצירתיות מתמטית בחינוך המיוחד. בנוסף הוא פותח צוהר למחקר עתידי הבודק מה השפעת חשיפה של מורות בחינוך המיוחד למטלות מסוג זה.

רשימת מקורות

- הד-מצוינים, ע'. (2016). הבנייה משותפת של זהות "תלמידה מתקשה": שגרות שיח בין מורה לתלמידתה ותפקידם בהנצחת קשיי למידה במתמטיקה. *כתב עת למחקר ולעיון בחינוך מתמטי*, 4, 124-148.
- Bolden, D. S., Harries, T. V., & Newton, D. P. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 143-157.
- Chiu, M. S. (2009). Approaches to the teaching of creative and non-creative mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(1), 55-79.
- Elgrably, H. & Leikin, R., (2021). Creativity as a function of problem-solving expertise: posing new problems through investigations. *ZDM – mathematics education*. 1-14. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01228-3>
- Gómez-Chacón, I. M., & de la Fuente, C., (2018). Problem-solving and mathematical research projects: Creative processes, actions, and mediations. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving*. (pp. 347–373). Cham, Switzerland: Springer.
- Geary, D. C., (2003). Learning disabilities in Arithmetic: problem-solving differences and cognitive deficits. In H.I. Swanson, K. R. Harris & S. Graham, (Eds.), *The Handbook of Learning Disabilities*. (pp.199-211). New York: The Guilford Press.
- Leikin R., (2020) Giftedness and High Ability in Mathematics. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_65
- Levenson, E., (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: Teachers' choices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(4), 269–291.
- Lev-zamir, H., & Leikin, R., (2012). Saying versus doing: teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM-Mathematics Education*, 45, 295-308.
- Sriraman, B., (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator*, 14, 19–34.



מבוא ובסיס תיאורטי

המושג "פער שיח" (Sfard, 2023) מתייחס למצב בו קיים פער משמעותי בפרשנויות והבנות של משימה או תקשורת נתונה בין שני משתתפים בשיח, למשל, מורה ותלמידה. פערים אלה לרוב אינם גלויים לעין ועשויים להתגלות רק לאחר ניתוח או שיקוף מדוקדק. עבור תלמידים מתקשים במתמטיקה פערי שיח עם המורה עשויים להיות קריטיים (Heyd-Metzuyanim, 2013). נשאלת השאלה, מה עשויים להיות הגורמים המסייעים או מעכבים את חשיפת פערי השיח? לניתוח שיח בו החוקרת היא גם המורה המשתתפת בשיח עשוי להיות יתרון על מנת לחקור סוגיה זו. בחירה במחקר כזה מאפשרת גישה ישירה לשיח הפנימי של המורה, לאינטרפרטציות ולמניעים שלה (Zieman, 2012). במחקר הנוכחי, עשינו שימוש בראיון שערכה המחברת הראשונה עם תלמידת כיתה ז' שמטרתו המקורית הייתה לאבחן את השיח החשוב של התלמידה.

על מנת לעמוד על פערי השיח בין החוקרת (המורה) לתלמידה, נשענו על התיאוריה הקומוניטיבית (Sfard, 2008). לביא, שטיינר וספרד (2019) מגדירות למידה כשינוי בשיח אשר מתרחש על ידי אימוץ רוטינות (routines) - דפוס של פעולות או התנהגות מקובלות להשגת מטרות מסוימות. רוטינה מורכבת ממטלה והליך. המטלה היא המשימה כפי שהיא נתפסת על ידי המבצע וההליך הוא דרך הביצוע של המשימה. ספרד (2023) מוסיפה ואומרת כי פערי שיח ניכרים בעיקר בפרשנויות שונות של משתתפים בשיח למצב מטלה נתון. כלומר, כאשר למשתתפים יש מטלות שונות, הליכים שונים לביצוע במצב מטלה אחד, מה שמוביל לפרשנויות מוטעות. פרשנויות שונות נובעות לעיתים קרובות מכללי-על שונים, כלומר כללים (לרוב סמויים) אשר לפיהם המשתתפים בשיח מנווטים את פעולותיהם. לדוגמה, כלל-על מוכר (ולא קנוני) שתלמידים פועלים לפיו הוא ש"כפל תמיד מגדיל" (Sfard, 2008). פרשנויות שונות יכולות לנבוע גם מכך שלילדים או תלמידים חסרים בשיח עצמים דיסקורסיביים מסוימים (כמו מספר רציונלי) שהמורה או המומחה רואים כקיימים בעולם (Sfard, 2008).

למרות ההתקדמות התיאורטית שיש בעבודתה של ספרד (2023) סביב מושג "פער השיח" ויישומו עבור אינטראקציות מורה-תלמיד, יש חסר במחקרים אמפיריים על פערי שיח בין מורים ותלמידים, כמו גם בפיתוח כלים מתודולוגיים לחשיפת פערים אלה. חסר זה נובע, בין השאר, משום שקשה מאוד ללכוד פערי שיח באינטראקציות יום-יומיות בכתה ומחוצה לה. זאת, משום שהתחקות אחר הפער דורשת מבט מעמיק הן על השיח של התלמיד/ה והן על השיח של המורה סביב מצב מטלה מתמטית מסוים. במחקר הנוכחי, אנו עושות צעד ראשון למילוי חסר זה, תוך שאנו עושות שימוש במקרה שבו ישנו מידע עשיר על האינטראקציה בין המורה/מראיינת והתלמידה סביב בעיה מתמטית מובחנת היטב.

שאלות המחקר: (1) מה הם פערי השיח בין המראיינת והתלמידה? כלומר האם והיכן היה שוני במטלות שלהן? (2) מה עשו שתי המשתתפות על מנת לחשוף ולצמצם את פערי השיח ביניהן, והאם המאמצים של השותפות מובילים לחשיפה או צמצום של פערי השיח?

שיטת המחקר

המחקר הנוכחי הוא חלק ממחקר מקדים שנערך על מנת לפתח שיטת ניתוח לבחינת פערי שיח בין מורים לתלמידים סביב קשיים בראשית למידת האלגברה. נציג ניתוח של מטלה אחת שבה נמצא פער שיח. הקטע לקוח מתוך ראיונות שערכה המחברת הראשונה עם מאיה (שם בדוי), תלמידת כיתה ז'. מאיה נחשבת לתלמידה ממוצעת אולם נתקלת בקשיים מידי פעם. מאיה למדה עם המחברת הראשונה מספר שיעורים פרטיים, לפני תחילת המחקר. למצב שבו לתלמידה יש היכרות מוקדמת ויחסי הוראה-למידה עם המראיינת יש יתרון עבור מטרת המחקר שכן ראיון כזה מתקרב יותר לסיטואציות הוראה-

למידה יומיומיות מאשר ראיון שנועד למטרות מחקר או אבחון בלבד. בה בעת, מצב כזה מעודד אינטראקציות הוראה החורגות מתחום הריאיון המאבחן כגון בקשת עזרה מצד התלמידה במצבים בהם היא לא מצליחה לפתור מטלות באופן עצמאי.

הריאיון התבצע באמצעות פרוטוקול ראיון משי"ח (Heyd-Metzuyan et al., 2022) שבו תרגילים מתוך תכנית הלימודים של בית הספר היסודי מוצגים על גבי אייפד ומבוצעים באמצעות עט אלקטרוני. העבודה על האיפד מאפשרת להקליט את כל הנאמר והנכתב על ידי התלמיד בו-זמנית. בנוסף, הריאיון צולם במצלמת וידאו שכוונה אל המראיינת והתלמידה.

בניתוח הנתונים התרכזנו בקטע מתוך הריאיון שבו התרחשה אינטראקציה יוצאת דופן בין התלמידה והמראיינת. התלמידה ביטאה קושי לפתור את השאלה אך התעקשה לנסות שוב ושוב, בעוד המראיינת הציעה לה לעזוב את השאלה. קונפליקט זה העלה את החשד כי יש בין התלמידה למראיינת פער שיח וסביבו נסוב הניתוח. השאלה עליה מאיה התבקשה לענות היא:

כתבי את המספר המתאים (תרגמי ממילים למספר): ששה עשר מיליון, שש מאוד וחמישה אלף, ותשע.

החלק המתמטי נותח כך שכל רוטינה חולקה למטלה ולהליך. המטלות חולקו לתת מטלות. המטלות כמו גם תת המטלות חולקו לשתיים; המטלה של מאיה והמטלה של המראיינת. בניתוח הפערים בין המטלות התמקדנו במיוחד באופן השימוש במילות המספר ובכללי העל שהנחו את המשתתפות סביב הדיבור על המספרים.

ממצאים

פער שיח בין השיח המצופה על ידי המטלה (הזהה לשיח של המראיינת) לבין השיח של מאיה ניכר כבר בתחילת התמודדותה של מאיה עם השאלה (שהיתה גם השאלה הראשונה בראיון). זאת משום שמאיה עצרה וביטאה בלבול סביב מה נדרש ממנה:

(כותבת 16, עוצרת) אלף זה עם ארבע(ה) אפסים? (מסתכלת על המראיינת). אלף זה עם 3 (אפסים), עשרת אלפים זה עם 4 (אפסים) אז זה (מצביעה על ה-16 שכתבה) עם חמש. את לא יכולה להגיד לי? (מסתכלת על המראיינת).

בהמשך, האינטראקציה הארוכה בין המראיינת ומאיה סביב השאלה, שהתרחשה לאורך 53 תורי דיבור, הראתה שפער השיח לא נסגר בקלות. למעשה, המראיינת (מחברת ראשונה) מעידה כי היא לא הבינה עד ניתוח השיח של מאיה מה בדיוק היה פער השיח. לפיכך, יש צורך בשחזור מדויק של כלל הרמזים היכולים להעיד על מקורו של פער השיח.

הרמז הראשון למהות פער השיח טמון בשאלתה של מאיה "אלף זה עם ארבע(ה) אפסים?" ולאחר מכן, קביעתה כי "זה (ה-16 שכתבה) עם חמש (אפסים)". מכאן אנחנו מסיקות שהאובייקט "מאה אלף" לא מופיע באופן ספונטני בשיח של מאיה ואף קיימת קפיצה בין "עשרת אלפים" לבין "זה", אשר ככל הנראה מתייחס ל"מליון" (שכן המטלה דורשת לכתוב "ששה עשר מליון"). לעומת זאת, המראיינת מניחה שאובייקטים מסוג מאות אלפים נמצאים בשיח של מאיה.

יחד עם זאת, נראה כי היעדרותו של האובייקט "מאה אלף" מהשיח של מאיה איננה המכשול היחיד, ואולי גם לא העיקרי עבורה בביצוע המטלה. זאת משום שבשלב מתקדם יותר באינטראקציה, כאשר המראיינת מציעה למאיה לכתוב "מאה ואחת אלף" מאיה כותבת את המספר באופן קנוני: "...כאילו אם אומרים מאה (כותבת 100), נגיד אלף (כותבת פסיק ושלושה אפסים)" [17]. ניכר, אם כן, שהקושי של מאיה לפרש לעצמה את השאלה מורכב יותר. כדי להבין קושי זה, בחנו את השאלות שהיא הציבה למראיינת בבואה להתמודד עם המטלות של לכתוב שש מאות אלף ולכתוב שש מאות וחמישה אלף:

"איך? אבל זה 600 ואז 1000?" [7]

"אבל קודם כל זה 1000 ואז 600. איך שש מאות אלף?" [9]

"אז שש מאות אבל, זה רק שלוש... איך אני יכולה לעשות? ... איך? איפה אני אשים חמש אלף?" [31]

מתוך שאלותיה של מאיה, אנו מסיקות שהיא פעלה לפי כלל על לא קנוני שניתן להגדיר כך: (א) סדר הכתיבה של המספרים צריך להיות תואם לסדר הדיבור; (ב) המספר אותו כותבים קודם צריך לכלול

מספיק ספרות על מנת שניתן יהיה לשבץ אחריו את כל המספרים שיזכרו בהמשך; (ג) אלפים מיוצגים על ידי פסיק. את חלק (א) של כלל העל ניתן להבין מתוך השאלה "אבל זה 600 ואז 1000?" [7] המפר את כלל העל הזה. יתרה מזאת, מבט על מספרים בתחום המאות והאלפים, שנראה שלמאיה אין קושי לכתוב, מראה שמספר כגון "אלף שש מאות עשרים וחמש" אכן עוקב אחר כלל העל הייחודי של מאיה. תמיהתה של מאיה על הפרת כלל העל ניכרת גם בנרטיב העוקב "אבל קודם כל זה אלף ואז שש-מאות, איך שש מאות אלף?". חלק (ב) של כלל העל מודגם בשאלה [31] כאשר מאיה מתמודדת עם תת-המטלה של לכתוב שש מאות וחמישה אלף. מאחר שלפי חלק (א) של כלל העל ראשית יש לכתוב את הסימנים המתאימים ל"שש מאות" ורק לאחר מכן את אלו שמתאימים ל"חמישה אלף", נוצר מצב שבו המספר הראשון (600) מכיל "רק שלוש" ספרות שאינם מספיקים להכיל המספר הבא אחריו ("איפה אני אשים חמש אלף?" [31]). חלק (ג) של כלל העל ניכר בכך שבכל פעם שהיא מתבקשת לכתוב אלפים, מאיה מקפידה לשים פסיק אחרי המספר. לדוגמה כאשר היא כותבת מאה אלף [17], היא כותבת 100, לאחר מכן את הפסיק ואחריו מוסיפה שלושה אפסים. זו דוגמה לשימוש קנוני בפסיק, אולם מיד אחר כך מאיה אומרת: "אה, אז הבנתי, שש מאות וחמש (כותבת 605,05), כאילו ככה?" [19]. מספר זה נפסל מיידית על ידי מאיה על בסיס "אבל לא אומרים (כלומר לא ביקשו בתרגיל) שש אלפים אומרים שש מאות." [19]. כלומר הספרה 6 ב-605,05 מייצגת עבור מאיה שש אלפים מאחר שהיא מופיעה משמאל לפסיק.

פעולות המשתתפות לחשיפת פער השיח וצמצומו - מאיה והמראיינת פעלו שתיהן לחשיפה ולצמצום פער השיח, כל אחת בדרכים מעט שונות. מאיה ניסתה לחשוף את פער השיח בכמה דרכים. הדרך הראשונה היתה באמצעות ביטויים של בלבול. למשל בשאלות כדוגמת "מה זה אומר אבל? איך אפשר לעשות שש מאות ואז חמישה אלף?" [13]. לעתים הבלבול וחוסר ההבנה בוטא באופן מפורש: "אבל עדיין, אני לא יודעת למה אני לא מבינה את זה" [15]. דרך נוספת בה נקטה מאיה לגילוי פער השיח היא חשיפת כללי העל שלה עצמה. דוגמאות לחשיפה זו, כפי שהוצג בתשובה לשאלת המחקר הראשונה, הם הביטויים "לא, אבל קודם כל זה 1000 ואז 600. איך 605 אלף?" [9], ו"נו, אז שש מאות אבל, זה רק שלוש..." איך אני יכולה לעשות... איפה אני אשים חמש אלף?" [31]. לא זו בלבד שמאיה ניסתה לחשוף את פער השיח, היא אף ניסתה לצמצם אותו על ידי בקשת אשור לנרטיבים שלה (למשל "... כאילו ככה? (מסתכלת על המראיינת) ...") [19], ובקשות הנחיה מפורשת "את לא יכולה להגיד לי?" [3], "אז איך עושים?" [23]. למרות ניסיונותיה של מאיה לחשוף את כללי העל שלה, כללים אלה נותרו בלתי ברורים למראיינת.

המראיינת מצידה פעלה גם היא במספר דרכים לחשיפת פער השיח. דרך אחת היא אבחון הבעיה הספציפית של מאיה, וזאת, על ידי חלוקת המטלה לתת מטלות. היא עשתה זאת על ידי הצעת מטלות כך שכל מטלה דורשת כתיבת מספר גבוה מזה שלפניו. ראשית היא שאלה "אם הייתי אומרת לך 10,000?" [10], לאחר מכן היא מציעה "ואם אני אומרת לך לכתוב 101 אלף?" [14], בהמשך היא שאלה "אם היו אומרים שש מאות אלף, היית יודעת לכתוב את זה?" [20] ולבסוף היא הגישה את המטלה "אם היו אומרים שש מאות ועשר אלף היית יודעת לכתוב את זה?" [24].

דרך נוספת בה נקטה המראיינת היא חשיפה של כללי העל הקנונים לפיהם מאיה מצופה לפעול. לאחר שמאיה ניסתה לכתוב "שש מאות וחמישה אלף" כ- 600,005, המראיינת הדגישה מפורשות את ההבדל בין מה שמאיה כתבה ("בעצם מה שאת כתבת פה (מצביעה על 600,005) זה שש מאות אלף וחמש." [38]) לבין המספר אותו היא נדרשת לכתוב ("ואת רוצה לכתוב שש מאות וחמש אלף" [42]). יחד עם זאת, העמידה על ההבדלים בין האופן שבו מאיה כתבה את המספר לבין המספר המצופה (ע"פ כללי העל הקנוניים של המראיינת) לא עזרה לצמצום פער השיח ולא גרמה למאיה לשנות את כללי העל שלה. כשלון זה ניכר מכך שמיד לאחר מכן, מאיה חוזרת לפעול לפי כללי העל הייחודיים שלה כשהיא אומרת "אבל חמש אלף זה יותר מהאפסים שיש בשש מאות" [47].

עבור צמצום הפער, המראיינת מנסה לברר בצורה מפורשת האם מאיה "מבינה" מדוע היא טועה. לאחר שמאיה טוענת כי מה שכתבה (600,005) אינו נכון, המראיינת שואלת אותה "אוקיי, אז זה לא, אבל את מבינה למה לא?" [40] ומאיה מאשרת שכן. אך אישור זה לא מוביל לפריצת דרך. בשלב הבא, המראיינת מנסה שוב לחלק את המטלה לתת-מטלות. אולם הפעם החלוקה היא לתת המטלה של כתיבת 605 ("אם הייתי אומרת לך לכתוב רק שש מאות וחמש, מה היית כותבת?" [44]) ותת המטלה של כתיבת הפסיק ושלושת האפסים שאחריו ("אוקיי ואם אני אומרת לך לכתוב שש מאות

וחמש (עוצרת) אלף, אז מה את כותבת?" [48]. נראה שהצגת מטלה זו נבעה מכך שהמראיינת איתרה שמאיה נאחזת ב"פסיק" ו"שלושה אפסים" כסימנים שמעידים על "אלף" ולכן היא מציגה מטלה שתאפשר למאיה לעשות שימוש בכלל זה. החלוקה הזו אכן אפשרה למאיה לכתוב 605,000 בצורה קנונית. מהרגע שמאיה הצליחה לכתוב את המספר כך (וקיבלה על כך אישור מהמראיינת) היא המשיכה לכתוב את המספר המלא (16,605,009) ללא קושי. אולם אין עדות לכך שמשוה מהותי השתנה בכללי העל של מאיה כתוצאה מכך שכן שיבוץ ה-16 במקומות ה"מליון" ו-9 במיקום האחדות תואם את כללי העל הייחודיים שלה (שבץ את יתר המספרים במקומות שנותרו על פי סדר המלים).

לסיכום, למרות שמאיה מצליחה לבסוף לבצע את המטלה בצורה קנונית, אין עדות לכך שפער השיח צומצם. זאת ועוד, המראיינת עצמה הצליחה לסייע למאיה להנפיק תשובה קאנונית למרות שלא ירדה לשורשי פער השיח ולא הצליחה, בזמן אמת, לשחזר לעצמה את כללי העל הייחודיים של מאיה.

דיון

במחקר זה שאלנו אודות פערי השיח בין המראיינת והתלמידה, מה עשו המשתתפות על מנת לחשוף ולצמצם את פערי השיח והאם מאמציהן הניבו פרי. מצאנו פערי שיח בכללי העל הנוגעים לכתיבת מספר בתחום האלפים ומעלה. כל אחת מהמשתתפות עשתה מאמצים לחשוף את פער השיח ולצמצמו. מאיה על ידי בקשת עזרה ואישור לנרטיבים שלה והמראיינת בעזרת ניסיון להציג למאיה תת-מטלות שיעקפו את הקושי שלה. אולם למרות מאמציהן המשותפים, פער השיח לא צומצם. המראיינת לא מצליחה להתחקות אחר כלל העל הלא קנוני של מאיה ולפיכך גם לא להכניסה לשיח חדש בו מיקום הספרה נעשית לפי הערך העשרוני של המספר.

חשיבות המחקר היא בהצפה של נושא שאמנם שכיח באינטראקציות מורה-תלמיד אך טרם נחקר דיו. סביר שפערי שיח קיימים בכל כיתה, בכל שיעור. העלאת המודעות לפערים הללו ולדרך בה ניתן לחשוף אותם, היא נקודת המפתח לגישור על הפערים. המחקר מדגים אמפירית את טענותיה של ספרד (2023) בדבר החשיבות שיש לכך שהמשתתפים בשיח, ובעיקר המורה, יהיו מודעים לקיומם של פערי השיח. אולם הכרה בכך שקיים פער שיח אינה מספקת. למעשה, סיטואציה של פער שיח היא כמעט מובנת מאליה במצב למידה, שכן השיח של התלמיד מטבע הדברים לא תואם את שיח המורה. האתגר האמיתי הוא בחשיפת הפערים ובמיוחד את כללי העל המנחים את התלמידה בעת ביצוע הליכים באופן לא-קנוני. מחקר זה הנו צעד ראשון בהבנה מעמיקה יותר של הדרכים שבהם מורים ותלמידים מתמודדים עם פערי שיח וכיצד הם מצמצמים אותם. מחקרי המשך דרושים כדי להבין מהם התנאים שבהם פערי השיח מצטמצמים למרות המכשולים הרבים לחשיפתם.

מקורות

- Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics—teacher–student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 341-368.
- Heyd-Metzuyanim, E., Elbaum-Cohen, A., & Tabach, M. (2022, February). The aRithmetic Discourse Profile as a tool for evaluating students' discourse according to the ritual to explorative continuum. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (No. 06).
- Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 153-176.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press.
- Sfard, A. (2023). The devil's finest trick: routines that make teachers matter against their better judgement. *Journal of Curriculum Studies*, 55(1), 21-36.
- Zieman, G. A. (2012). Participant observation. In *Action research methods: Plain and simple* (pp. 49-67). New York: Palgrave Macmillan US.



מבוא ורקע תיאורטי

המחקר המתואר הוא מתודולוגי עיצובי המציג שיטה לבניית עקרונות מנחים לעיצוב משימות הערכה מעצבת ממוחשבת (Digital formative assessment – DFA). המחקר הוא חלק ממחקר רחב הבוחן את יעילותה של פלטפורמת הערכה מעצבת ממוחשבת לגיאומטריה של בי"ס יסודי. השקפה רווחת על איכות החינוך המתמטי היא תלויה בשלושה מרכיבים הקשורים זה בזה: תוכנית לימודים, פדגוגיה והערכה (Millar, 2017). הערכה, במיוחד הערכה מעצבת, היא בעלת חשיבות רבה (Black et al., 2004) משום שהיא מסייעת לממש את מטרות תוכנית הלימודים על ידי התאמת ההוראה (Millar, 2017). בשנים האחרונות, הוראת הגיאומטריה מסתמכת יותר ויותר על השימוש בטכנולוגיה. על ידי הצעת צורות דינמיות של ייצוג מתמטי של מושגים שונים, סביבות גיאומטריות דינמיות (DGEs) המספקות לתלמידים גישה למושגים מתמטיים שהם לא נתפסו בעבר (Butler et al., 2010). DFA מאתרת, מסווגת, ומנתחת באופן אוטומטי את עבודת התלמידים. שילוב DGE עם DFA מספק סביבה שיכולה להעריך את עבודתו של התלמיד ביחס להבנה ושימוש במושגים מתמטיים, בנוסף לכישורים טכניים, ומאפשר לאתר את האסטרטגיות שבהן הם משתמשים ולא רק להעריך את התוצאה הסופית (Stacey & William, 2013). לאור זאת אמצנו גישה לפיה הערכה צריכה לשקף את הפרקטיקות המתמטיות של התלמידים; אחת האפשרויות של DFA היא משימות יצירת דוגמה (EET), במשימות אלה התלמידים מתבקשים ליצור דוגמאות של אובייקטים מתמטיים באמצעות דיאגרמות אינטראקטיביות המאפשרות גרירה ובנייה של אובייקטים מתמטיים שונים בהקשרים מוגדרים מראש (למשל, גרירת נקודה כדי לבנות גובה של משולש) סוג זה של משימה כרוך בהערכה ממוקדת תלמיד אשר יכולה להעריך את מאפייני העבודה של כל תלמיד בודד המבוססת ניתוח אוטומטי לאובייקטים והקשרים המאפיינים הגשות של דוגמאות (Olsher, 2022). בנוסף, משימות DFA צריכות להיות אותנטיות, להעריך את כישורי התלמידים ויכולותיהם, ולשקף את מה שהתלמידים לומדים ומתרגלים (Stacey & William, 2013). על פי תוכנית הלימודים הישראלית, כמו תוכניות לימודים אחרות בעולם, למידה היא תהליך מתמשך ומצטבר הכולל הבנה של מושגים חדשים, מושגים נלמדים, רחבים, ומעמיקים. הערכת התלמידים חייבת להיות קשורה לתהליכי החשיבה ולשיטות המשמשים לפתרון הבעיה, ולא רק לתוצרים הסופיים (משרד החינוך, 2006).

מתודולוגיה

מחקר זה הינו חלק ממחקר גדול במסגרת עבודת דוקטורט הבוחן יעילות של פלטפורמה ומשימות DFA לגיאומטריה של בי"ס יסודי. מטרתנו בדיווח זה לתאר את תהליך פיתוח עקרונות עיצוב, למשימות DFA יעילות, בהיבטים שונים של למידה גיאומטרית בהתאם לתוכנית הלימודים. כדי להשיג מטרה זו, אנו מתארים עקרונות עיצוב כלליים למשימות במערכת המרא"ה¹ בנושאים בגיאומטריה המתאימים ליחידות הלימוד בתוכנית הלימודים הלאומית הישראלית לכיתה ה', ועונים על שאלת המחקר: כיצד לפתח עקרונות עיצוב של הערכה מעצבת ממוחשבת בגיאומטריה של בית הספר היסודי המתאימה ליחידות לימוד בתוכנית הלימודים הישראלית?

הגדרות מחקר: כדי לחקור את עקרונות העיצוב של יחידת DFA מבוססת תוכנית לימודים ולענות על שאלת המחקר, ערכנו מחקר מתודולוגי מבוסס עיצוב המתמקד בתהליך עיצוב של יחידה הראשונה בנושא גבהים במשולש.

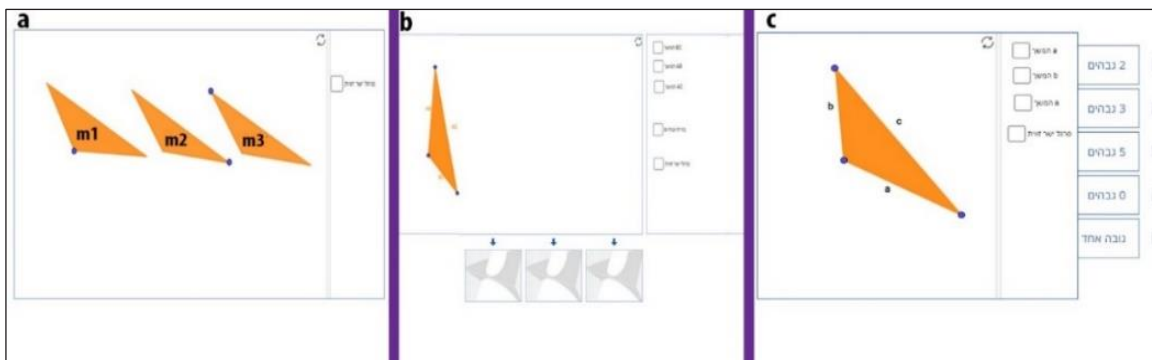
1 סביבת המרא"ה מפותחת באוניברסיטת חיפה, בהובלתם של פרופ' מיכל ירושלמי וד"ר שי אולשר. לקבלת מידע נוסף, בקר באתר <https://step.haifa.ac.il/english>.

כדי להבהיר ולגבש את עקרונות העיצוב, בכל השלבים הצגנו את הפעילויות המתוכננות והתייעצנו עם שלוש קבוצות: (א) צוות המרכז למחקר וחדשנות בחינוך מתמטי, שכלל סטודנטים לתארים מתקדמים, פוסט-דוקטורנטים, מפתחי תוכן וחוקרים- מתמחים במערכת המרא"ה; (ב) מדריכי מורים ממרכז ארצי למורים יסודיים למתמטיקה- מתמחים בדיקטיקה; ו-(ג) שלושה מורים מנוסים למתמטיקה. משימות ההערכה הופעלו בשלוש כיתות, בתי"ס שונים בצפון הארץ.

כלי מחקר

כדי לגבש את עקרונות העיצוב ולשלב את העדפות המורים לסוגי המשימות והתאמתן לתלמידים, השתמשנו בשאלונים, תצפיות כיתתיות, ראיונות מורים ויחידת הערכה שתוכננה במערכת המרא"ה. יחידת הערכה לגובה המשולש, כללה חמש פעילויות. כל פעילות התאימה לתת-נושא כפי שצוין בתוכנית הלימודים, וכללה כשלוש משימות, לדוגמה, פעילות גבהים במשולש קהה זווית, ראה איור 1.

איור 1: 3 משימות של פעילות גובה במשולש קהה זווית: (א) בניית גבהים מהקודקוד המסומן; (ב) לבנות שלוש דוגמאות שונות של משולשים או וגבהים; (ג) כמה גבהים נמצאים מחוץ למשולש?

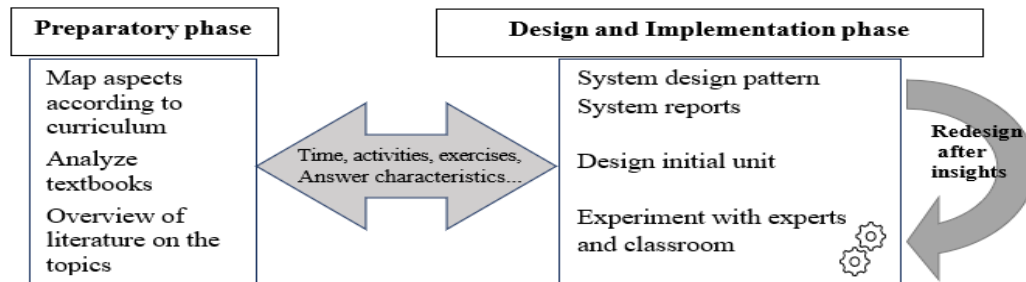


המשימה הראשונה מציגה שלושה מופעים של אותו משולש קהה זווית. בכל אחד מהמקרים, התלמיד מתבקש לגרור את הקודקוד המודגש כדי לבנות גובה מאותו קודקוד. המשולשים סטטיים, והתלמידים יכולים לגרור רק את הקודקוד המודגש (איור a-1). במשימה השנייה (איור b-1), התלמידים מתבקשים לבנות שלוש דוגמאות שונות של משולשי קהה זווית ואחר כך לבנות הגבהים שלהם. במשימה זו מופיע משולש דינמי עם קודקודים הניתנים לגרירה. התלמידים יכולים לגרור את הקודקודים כדי ליצור משולש קהה זווית לבחירתם, ולאחר מכן בוחרים בבניית גבהים, בתיבת סימון מצד ימין, ואז יכולים לגרור הקודקודים לבניית הגבהים (תיבת סימון מסומנת- בניית גבהים גוררים קטע מקודקוד- תיבת סימון לא מסומנת גרירת הקודקודים משנה סוג המשולש). התלמידים מתבקשים להגיש 3 דוגמאות ולבנות גובה לכל דוגמא. במשימה השלישית (איור c-1) התלמידים מתבקשים לציין כמה גבהים ניתן לבנות מחוץ למשולש (קהה זווית) הסטטי, ולבנות אותם. בצד שמאל של כל משימה, לתלמידים יש אפשרות לבחור ולהשתמש בכל כלי עזר, כגון האפשרות להציג המשך צלע או סרגל משולש ישר זווית (תיבת סימון מסומנת- מגלה כלי העזר- תיבת סימון לא מסומנת- מסתירה כלי העזר).

תוצאות

תהליך פיתוח עקרונות העיצוב כלל שני שלבים; לכל אחד מהם שלושה תתי שלבים. הראשון היה שלב ההכנה שכלל שלושה תתי שלבים הקשורים להוראת הנושא הנבחר בכיתה: (א) מיפוי נושאים בתוכנית הלימודים הישראלית; (ב) סקירת ספרות על הוראת הנושאים הנבחרים ולמידתם; (ג) ניתוח ספרי לימוד. השלב השני היה שלב העיצוב והיישום: (א) בחירת תבנית משימות ודוחות במערכת המרא"ה; (ב) תכנון היחידה הראשונית; (ג) ניסוי המשימות עם קבוצות מקצועיות ותלמידים. איור 2 מתאר את תהליך פיתוח ועיצוב. כל מלבן מייצג שלב, ובתוכו מפורטים תתי שלבים. התובנות והעקרונות המועברים משלב לשלב מתוארים באמצעות חצים. בשלבים אלה ערכנו סיעור מוחות, הצגנו, יישמנו והתייעצנו לגבי הפעילויות המתוכננות עם הקבוצות השונות של משתתפי המחקר.

איור 2: תהליך פיתוח ועיצוב משימות ההערכה הממוחשבת



בחלק זה נתאר בפירוט את שלבי פיתוח והעיצוב שהזכרנו קודם. לכל שלב ישנם שלושה תתי שלבים, אנו מסבירים ומדגימים את עקרונות העיצוב שפיתחנו. עבור כל שלב ותת שלב בתהליך העיצוב אנו מתווים את הרציונל, ומדגימים רק עבור תת שלב אחד מכל שלב (בהצגת המחקר נתעמק יותר בדוגמאות). כל נושא בתכנית הלימודים (למשל, גבהים משולשים) מורכב ממספר היבטים (תת-נושאים, למשל, ישרים מאונכים וכו'), וכל פעילות הערכה מורכבת ממספר משימות הערכה. הנושאים מסודרים בסדר רציף, בהתאם להוראת תתי הנושאים (היבטים).

שלב ראשון: הכנה. הוראת הגיאומטריה בבתי הספר היסודיים בישראל מבוססת על משאבים הבאים לידי ביטוי בתהליך ההוראה (כגון תכניות לימודים, ספרי לימוד, זמן וכו') כדי שההערכה תהיה אותנטית, כדאי לנתח משאבים אלה. המטרה העיקרית בשלב הראשון הייתה ליצור הערכה אותנטית של מה שהתלמיד לומד, אותנטי פירושו שההערכה תעריך את המיומנויות הרלוונטיות המצופות מהתלמידים. השלב הראשון היה שלב הכנה והוא כלל שלושה תתי שלבים עיקריים. מטרת שלב זה היו לבחור נושא מתוכנית הלימודים, לאפיין את המשימות הכרוכות במיומנויות הנמצאות בספרי הלימוד, והזמן לכל משימה ולחלק את פעילויות ההערכה בהתאם לתוכנית הלימודים. **תת שלב 1: מיפוי היבטים בתוכנית הלימודים הישראלית.** בישראל, תוכנית הלימודים במתמטיקה לבתי הספר היסודיים מוגדרת על ידי משרד החינוך והיא המקור להוראת מתמטיקה וגיאומטריה ברחבי הארץ, עבור מורים, מדריכים ומפתחי ספרי לימוד. על מנת שיחידות ההערכה יהיו תואמות למטרות תכנית הלימודים, מיפוינו את מטרות תכנית הלימודים. בשלב זה נתחנו את האופן שבו הנושא הנבחר נלמד ומה הזמן הרצוי להוראתו. הדבר השפיע על אורך יחידת ההערכה. חקרנו גם את ההיבטים של נושאים הנבחרים, כדי לחלק את פעילויות ההערכה בהתאם, בחירת נושא עשיר ומורכב אך גם בסיסי מבחינת רצף הלמידה (אחד הנושאים הראשונים ברצף). **דוגמה:** היבטים בגובה המשולש שנותחו על סמך תוכנית הלימודים בכיתה ה' התלמידים לומדים את מושג הגובה, המחולק לחמישה היבטים: (א) ישרים מאונכים; (ב) בנייה וזיהוי גבהים; (ג) למשולש יש שלושה גבהים; (ד) משולש ישר זווית- גבהים מתלכדים עם הניצבים; (ה) משולש קהה זווית- שני גבהים נמצאים מחוץ למשולש (תכנית לימודים 2006, עמ' 113). **תת שלב 2: סקירת ספרות של נושאים.** נושאי הגיאומטריה של בית הספר היסודי נחקרו בהרחבה בספרות המחקרית. על מנת שיחידות ההערכה יהיו מבוססות מחקר קבענו את המאפיינים שיש להעריך בהגשות הסטודנטים לפי הספרות המחקרית. ערכנו סקירה של תפיסות נפוצות ותפיסות מוטעות לגבי הנושא שנבחר והשתמשנו בסקירה זו כדי לעצב את מאפייני ההגשות של התלמידים. **תת שלב 3: ניתוח ספרי לימוד.** מרבית המורים למתמטיקה בבתי הספר היסודיים בישראל מסתמכים על ספרי לימוד כדי ללמד חשבון וגיאומטריה. כל ספרי הלימוד חייבים להיות מפותחים על פי תכנית הלימודים הלאומית ומאושרים על ידי משרד החינוך, אך ישנם הבדלים בין ספרי הלימוד (למשל, סוגי התרגילים, סדרם וכו'). על מנת שיחידות ההערכה יהיו מותאמות לתלמידים ללא קשר לספר הלימוד, ניתחנו שלושה ספרי לימוד כדי למפות את התפלגות המשימות והמיומנויות הקשורות לנושאים.

שלב שני: עיצוב ויישום יחידת ההערכה הראשונה בפלטפורמה הדיגיטלית. תהליך העיצוב כולל פיתוח, יישום ושיפור (עיצוב מחדש). אחרי השלב הראשון אנחנו יודעים מה צריך להעריך. בשלב זה אנו מעצבים ומיישמים את המשימות בפלטפורמה ספציפית, ועל מנת שמשימות ההערכה יותאמו לתלמידים ולנבדקים, עלינו ללמוד את האפשרויות שהפלטפורמה מאפשרת וליישם את המשימות בקבוצות שונות (צוות מקצועי ותלמידים), מטרת השלב השני הייתה לעצב מטלות הערכה רלוונטיות לגיל ולנושא, והוא כלל שלושה תתי שלבים: **תת שלב 1: בחירת תבנית עיצוב המשימות ודוחות במערכת.** במחקר זה השתמשנו במערכת המרא"ה. על מנת לנצל את יכולות הפלטפורמה, לאחר

ניתוח דפוס המשימות השונים והדוחות הקיימים, בחרנו את דפוס עיצוב המשימות, ואת דוחות המערכת שעשויים להתאים לתלמידי ולמורי כיתה ה'. כיוון מגוון משימות בניה ברמות קושי משתנות שיספקו מידע קולקטיבי על הכיתה ועל כל תלמיד בנפרד. **תת שלב 2: תכנון יחידה ראשונה.** לאחר שגיבשנו את הדפוסים למשימות הערכה והסתמכנו על התובנות מהשלב הקודם, עיצבנו את יחידת ההערכה הראשונה הקשורה לנושא שנבחר (גובה במשולש). כל פעילות שייכת להיבט של הנושא כפי שהופיע בתוכנית הלימודים, והיא כללה לרוב שלוש משימות מסוגים שונים ורמות קושי שונות. עבור כל משימה, הפקנו דוחות תלמידים ומורים. **תת שלב 3: יישום פעילויות ועיצוב מחדש.** תהליך העיצוב כולל יישום ושיפור (עיצוב מחדש), ועל מנת לאפשר משוּב ושיפור למשימות ההערכה, יישמנו את המשימות בשלוש קבוצות מומחים שונות, קבוצת א המתמחה במערכת המרא"ה, קבוצת ב צוות ממרכז מורים המתמחה במתמטיקה בבתי"ס יסודי, וקבוצת מורים המתמחות בעבודה עם תלמידים.

סיכום ודיון

בדוח זה, אנו ממליצים על שני שלבים כעקרונות לעיצוב יחידות הערכה מעצבת דיגיטלית, תיארונו עקרונות העיצוב מבוססי מחקר עבור יחידת ההערכה בגיאומטריה לבתי"ס יסודיים. עיצבנו יחידת הערכה המבוססת על רצף הוראה בתוכניות לימודים כדי לשפר את תהליך ההערכה. יחידה זו נועדה לסייע למורים לפרש את הראיות שנאספו ולהשפיע על החלטותיהם בכיתה לגבי הוראת הנושא, להגביר את יעילות הלימודים וההוראה. בעקרונות העיצוב הצענו פעילויות המתאימות לנושאים המופיעים בתוכנית הלימודים (מבחינת עיתויים וסדר הנושאים). יישום ההערכות בכיתה מתוכנן כתהליך מתמשך, המתבצע לאחר הוראת כל היבט (תת נושא), ומתן ניתוח מקיף של עבודת התלמידים לאחר השלמת הנושא כולו. בעקרונות העיצוב של יחידות ההערכה שלנו, הדגשנו את חשיבות ההתאמה בין הוראה להערכת התלמידים, כך שההערכה תהיה אותנטית ותייצג את הידע בנושא המתמטי ולא את כישורי הבדיקה של התלמידים עיקרון עיצוב זה עולה בקנה אחד עם הרעיון של מסלול למידה המבוסס על רצף של פעילויות מתאימות ויעילות מבחינה התפתחותית (Stacey & William, 2013). נקודת המוצא שלנו הייתה תוכנית הלימודים, ולכן הצענו את הצעדים הבאים: ניתוח הנושאים בתוכנית הלימודים (רצף הנושאים שיש ללמד והזמן המוקצב לכל נושא), ניתוח ספרי לימוד (כמות וסוגי התרגילים), ניתוח הנושאים בספרות, מיון וסיווג עבודת התלמידים לפי דרכי העבודה, אסטרטגיות עבודה, בחירת סביבה דיגיטלית מתאימה ודפוס עיצוב המתאימים להערכה, בחירת אילו פעילויות לעצב ולבסוף התייעצות עם מומחים והתנסות בכיתות.

בביוגרפיה

משרד חינוך (2006). תכנית הלימודים למתמטיקה החדשה.

- Black, P., Harrison, C., Marshall, L.B. & William, D. (2004). Working inside the black box: assessment for learning in the classroom. *Phi Delta Kappan*, 86(1), 8–21. <https://doi.org/10.1177/003172170408600105>
- Butler, D., Jackiw, N., Laborde, J. M., Lagrange, J. B., & Yerushalmy, M. (2010). Design for transformative practices. In C. Hoyle & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 425–437). Springer
- Millar, R. (2017). Using assessment materials to stimulate improvements in teaching and learning. In K. Hahl, K. Juuti, J. Lampiselka, A. Uitto, & J. Lavonen (Eds.), *Cognitive and Affective Aspects in Science Education Research* (pp. 31-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-58685-4_3.
- Olsher, S. (2022). Te(a)Ching to collaborate: Automatic assessment-based grouping recommendations and implications for teaching. In *Proceedings of the 15th international conference on technology in mathematics teaching (ICTMT 15)*, (pp. 214–223). Danish School of Education, Aarhus University. <https://doi.org/10.7146/aul.452>
- Stacey, K., & William, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (Vol.27, pp. 721–751). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_23



מבוא

מחקרים רבים מראים שככלל, לתלמידות יש הישגים נמוכים יותר במתמטיקה מתלמידים בעלי יכולת דומה. אחד ההסברים לכך היא תופעה בשם "איום סטריאוטיפי". כלומר, הלחץ שחש מי שמשתייך לקבוצה שיש לגביה סטריאוטיפים שליליים כאשר הוא מבצע משימה שבני קבוצתו נחשבים לחלשים בה. מחקר זה בוחן את ההשפעה של איום סטריאוטיפי מגדרי בהערכת עיפרון ונייר ובסביבת הערכה דיגיטלית ומגלה כי ההשפעה של איום סטריאוטיפי על בנות הייתה חזקה יותר (וביצועים גרועים יותר) בהערכה באמצעות נייר ועיפרון מאשר בהערכה הדיגיטלית. ממצאים אלו מצביעים על כך שמעבר לסביבות הערכה מקוונות עשוי לשפר את הישגי התלמידות ולטפל באי-שוויון מגדרי בחינוך המתמטי.

רקע תיאורטי

אי-שוויון מגדרי בחינוך מתמטי

מחקרים מראים באופן עקבי שיש פערים משמעותיים בהישגיהם של תלמידות ותלמידים במתמטיקה (Lavy & Sand, 2015). בעוד שבגילאי בית הספר היסודי תלמידים ותלמידות מגיעים להישגים שווים, הרי שהחל מחטיבת הביניים ניכרים פערים בהישגים במתמטיקה בין תלמידות לתלמידים בעלי יכולות דומות (Hyde, Fennema, & Lamon, 1990), מה שמעלה דאגות שהמערכות מתייחסות לבנות בצורה לא שוויונית. רוב המחקרים מטילים את האשמה על נסיבות סביבתיות, כולל עמדות חברתיות (Aronson et al., 1998), המשפיעות על הביטחון העצמי והמוטיבציה של התלמידות (Preckel et al., 2008). מקרה חריג ממצבים אלו כרוך ב"פער מגדרי הפוך" בקבוצות מיעוט, כמו המיעוט הערבי בישראל, כאשר תלמידות נמצאות בייצוג יתר ב-STEM ובעלות הישגים גבוהים יותר מתלמידים במקצועות אלו (Rubel et al., 2022).

איום סטריאוטיפי

איום סטריאוטיפי הוא הלחץ שחווים אנשים מקבוצות סובלות מסטריאוטיפים כאשר הם עוסקים בפעילות שעלולה לאשר את הסטריאוטיפ השלילי הזה. האיום המנוסה והלחץ שהוא גורם לירידה בביצועיו של אותו אדם (Koenig & Eagly, 2005). מחקרים רבים בשלושת העשורים האחרונים תיעדו תופעה זו, הקבוצות הסובלות ממנה והמנגנון שבאמצעותו היא נגרמת ומחמירה/מתגברת (Steele et al., 2002). לדוגמה, הקושי של המשימה (Spencer et al., 1999), האתגרים העומדים בפני התלמיד/ה מהמבחן (Hoge, 2016), והאופן שבו המשימה מוצגת (Aronson et al., 1998). בהתחשב בכך שתכנון הערכה יכול להשפיע על חומרת האיום הסטריאוטיפי חשוב לבחון האם פלטפורמות הערכה דיגיטליות משפיעות על האיום הסטריאוטיפי. לפלטפורמות הערכה דיגיטליות יש כמה מאפיינים פוטנציאליים שלפי מחקרים קודמים הנוגעים לאיום סטריאוטיפי, מצביעים על כך שהם עשויים להיות בעלי סיכוי נמוך יותר לגרום לאיום סטריאוטיפי. לדוגמה, הערכה על פלטפורמות חינוכיות דיגיטליות במתמטיקה יכולה להקל על בחינת תהליכי החשיבה של התלמידים ולא רק את נכונות התשובות, כמו גם לשתף את התלמידים במשימות עשירות הדורשות אינטראקציה עמוקה יותר עם הנושא הנבדק, מה שמוביל לפתרונות יצירתיים שיכולים להיות מוערכים מצד המורים.

שאלת המחקר

שאלת המחקר היא: "כיצד שימוש בפלטפורמות דיגיטליות להערכה במתמטיקה משפיע על האיום הסטריאוטיפי המגדרי?"

משתתפי המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה 120 תלמידי כיתה ט' מארבע כיתות (60 תלמידים, 60 תלמידות), מבתי ספר ערביים בצפון הארץ. כל המשתתפים הם תלמידי רמה בינונית ומעלה במתמטיקה ויש להם ניסיון בלמידה דרך הפלטפורמה המקוונת להערכה מעצבת במתמטיקה שנקראת "STEP".

כלי המחקר

התלמידים/ות פתרו מבדקים המורכבים מנושאים המופיעים בשאלות ממבחני מפמ"ר במתמטיקה, אשר נבחרו משנים קודמות מ-תשס"ו עד תשע"ט מכל התחומים (אלגברי, מספרי, גאומטריה, אוריינות). המבדקים בוצעו בשתי תצורות: במערכת המרא"ה להערכה מעצבת במתמטיקה (STEP), בה על התלמיד להגיש יותר מדוגמה אחת, כאשר כל הגשה מורכבת ממכלול דוגמאות העומדות בתנאים המתמטיים הנדרשים במשימה, ובנייר ועיפרון. כל המשתתפים ביצעו שני מבחנים, אחד מבלי להפעיל איום הסטריאוטיפ והשני לאחר הפעלת האיום הסטריאוטיפי.

אופן ניתוח הנתונים

מטרת המחקר הייתה לבחון האם השימוש בסביבת הערכת מעצבת ממוחשבת משפיע על האיום הסטריאוטיפי שתלמידות חוות, וכתוצאה מכך משפיע על הישגיהן במתמטיקה. לשם כך תחילה נבדקה סטטיסטיקה תיאורית עבור משתני המחקר המרכזיים וכמו כן, נבדקו מדדי הסימטריות (Skewness ו-Kurtosis) שהיוו תנאי לשימוש במבחנים פרמטריים בבחינת ההשערות. לבדיקת ההשערות בוצעו ניתוחי שונות מדידות חוזרות (Repeated Measure - ANOVA) במטרה לבדוק את מובהקות האפקטים העיקריים ואינטראקציה בין המשתנים הבלתי-תלויים במחקר לבין המשתנה התלוי – ציון ממוצע במתמטיקה. בכדי לבדוק האם חל שיפור מובהק בציוני המתמטיקה על-פי ארבע קבוצות המחקר נערכו מבחני t למדגמים תלויים.

ממצאי המחקר

ההשערה המרכזית במחקר היא שהפעלת איום סטריאוטיפי משפיעה על הבנות בסביבת נייר ועיפרון, ומשפיעה פחות על הבנות בסביבה ממוחשבת. טרם בחינת ההשערה המרכזית במחקר נבדקה סטטיסטיקה תיאורית וצורת התפלגות של המשתנים הכמותיים במחקר: ציונים במתמטיקה ללא איום ועם איום סטריאוטיפי. טבלה 1 מראה כי הציון הממוצע של כלל התלמידים ללא האיום הסטריאוטיפי (ללא ציון מגדר) הוא פחות מהציון הממוצע של כלל התלמידים אחרי הפעלת האיום הסטריאוטיפי (עם ציון מגדר). ללא הבדל בין בנים לבנות, וללא הבדל גם באיזה סביבה המבחן בוצע. חשוב לציין כי המבחנים שהתלמידים ביצעו מתאימים לרמת היכולת האמיתית של התלמידים - במקרה זה, ציונים התלמידים עשויים להיות גבוהים יותר ממה שצפוי בהתפלגות נתונים נורמלית. במיוחד שראוי לציין כי המדגם אשר התקבל הוא מדגם של התלמידים בכיתות למצוינות או התלמידים שהם הכי חזקים בבית הספר בשכבה שבה בוצע הניסוי והם נבחנו בחומרים אשר למדו בכיתה וביצעו תרגילים ברמה דומה במהלך השיעורים שלהם. לכן, **שגיאה! מקור ההפניה לא נמצא.** מציגה את נתוני סטטיסטיקה תיאורית.

טבלה 1

סטטיסטיקה תיאורית עבור משתני ציונים במתמטיקה (N=120).

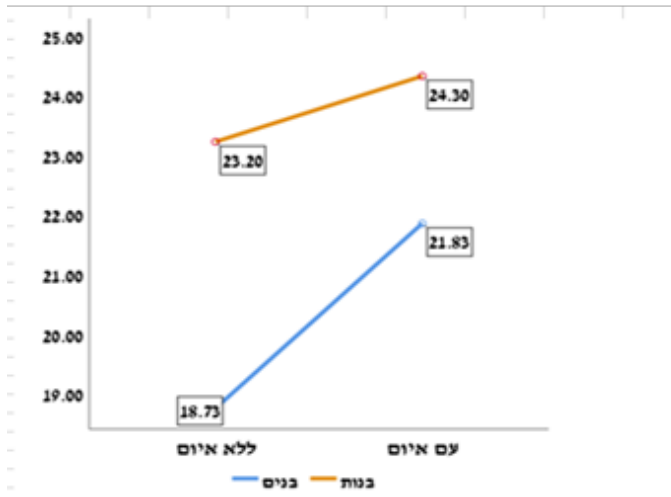
משתנה	M	SD	MIN	MAX	Skewness	Kurtosis
-------	---	----	-----	-----	----------	----------

0.11	0.42	40.00	0.83	8.04	15.93	ציונים במתמטיקה ללא איום
-0.65	0.34	40.00	2.00	10.49	18.44	ציונים במתמטיקה תחת איום

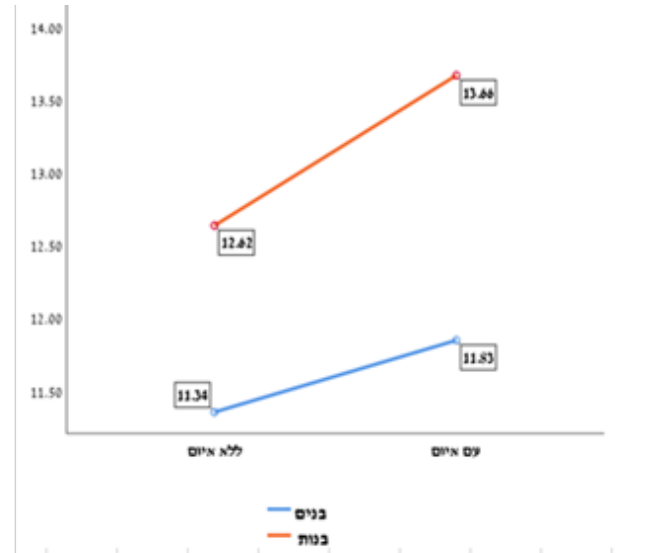
ממצאי המחקר התברר גם כי אין השפעה של שני המשתנים (סביבת המבחן והמגדר) על ציוני התלמידים במתמטיקה (ראה איור 2).

איור 2

האפקטים של מגדר ואיום סטריאוטיפי על הציונים במתמטיקה לפי סביבת ביצוע המבחן.



איור 2: אפקט מגדר ואיום סטריאוטיפי על הציונים במתמטיקה לפי סביבת ביצוע המבחן



איור 2: אפקט מגדר ואיום סטריאוטיפי על הציונים במתמטיקה לפי סביבת ביצוע המבחן

שגיאה! מקור ההפניה לא נמצא. מתארת תוצאות בהן נבדקה ההשפעה של היות קבוצות המחקר תחת איום סטריאוטיפי על בנים ובנות בשתי סביבות שונות - סביבה ממוחשבת וסביבה של בנייר ועיפרון.

טבלה 2

מספר השוואת ממוצעים וערכי מבחן t בציון במתמטיקה ללא איום סטריאוטיפי ועם איום סטריאוטיפי לפי ארבע קבוצות המחקר ($N=120$)

Cohens d	t	תחת איום סטריאוטיפי		ללא איום סטריאוטיפי		
		SD	M	SD	M	
.16	0.907	9.33	12.62	6.00	11.34	בנים בסביבה ממוחשבת
.26	1.813*	7.85	13.66	6.42	11.83	בנות בסביבה ממוחשבת
.50	2.324*	10.73	23.20	6.82	18.73	בנים בנייר ועיפרון
.31	1.651	8.38	24.30	7.62	21.83	בנות בנייר ועיפרון

דיון

ממצאי המחקר מצביעים על כך שלעיצוב הערכות עשויה להיות השפעה מהותית על ביצועי התלמידים במתמטיקה, ולהפחית את רגישותם לאיום סטריאוטיפי מתיש. באופן ספציפי, המחקר מראה בהערכה הדיגיטלית, הבנות השתפרו באופן משמעותי, למרות האיום הסטריאוטיפי, מה שמצביע על כך שבסביבה הדיגיטלית האיום סטריאוטיפי משפיע פחות או שאין לו השפעה כלל, או שההשפעה מתקזזת על ידי יתרונות אחרים הקיימים בצורת ההערכה. מספר הסברים יכולים להיות אחראים לממצאים אלו. ההערכה הדיגיטלית מיועדת לבדוק את האופן שבו התלמידים חושבים, ולא רק את הידע או רמת המיומנות שלהם. לדוגמה, המשימות כוללות פעילויות שדומות למשחקים, כמו גרירת וציור של צורות. על פי מחקרים על איום הסטריאוטיפי, זה יכול להפחית את האיום הסטריאוטיפי. בנוסף, ההערכה הדיגיטלית יוצרת תחושה סובייקטיבית של אנונימיות שעשויה לתרום להפחתת האיום הסטריאוטיפי. הסברים יכולים להסביר ממצא זה. הערכה דיגיטלית נועדה לבחון את הדרך בה התלמידים חושבים ולא רק את הידע או רמת המיומנות שלהם. לדוגמה, המשימות כוללות גרירה וציור. על פי המחקר על איום סטריאוטיפי זה יכול להפחית אותו. בנוסף, הערכה דיגיטלית יוצרת תחושה סובייקטיבית של אנונימיות שעשויה לתרום להפחתת האיום הסטריאוטיפי.

המחקר גם שופך אור על תפקודם של תלמידים גברים במיעוטים מסורתיים, שלא הראו שיפור משמעותי בהערכה הדיגיטלית. הסבר אפשרי אחד הוא שנערים ערבים, כמו גברים המשתייכים למיעוטים גזעיים, סובלים מוטיגמה הקשורה ליכולותיהם האקדמיות, ועלולים לחוות איום סטריאוטיפי הקשור לטכנולוגיה.

אם זה אכן המצב, מצטיירת תמונה מורכבת לפיה אופני הערכה שונים מועילים לבנות ולבנים בחברות מיעוטים. בעוד שדרושים מחקרים נוספים כדי לאשש ממצאים אלה ולהבין טוב יותר את הסיבות שלהם. מחקר זה מצביע על כך כי השוויון עשוי לדרוש גמישות וריבוי שיטות הערכה.

רשימת מקורות

- Aronson, J., Quinn, D. M., & Spencer, S. J. (1998). Stereotype Threat and the Academic Underperformance of Minorities and Women. In *Prejudice* (pp. 83–103).
- Hoge, K. (2016, August 19). Stereotype threat. *TLS - The Times Literary Supplement*.
- Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 107(2), 139-155.
- Koenig, A. M., & Eagly, A. H. (2005). Stereotype threat in men on a test of social sensitivity. *Sex Roles*, 52, 489-496.
- Lavy, V., & Sand, E. (2015). *On the origins of gender human capital gaps: Short and long term consequences of teachers' stereotypical biases* (No. w20909). National Bureau of Economic Research.
- Preckel, F., Goetz, T., Pekrun, R., & Kleine, M. (2008). Gender differences in gifted and average-ability students: Comparing girls' and boys' achievement, self-concept, interest, and motivation in mathematics. *Gifted child quarterly*, 52(2), 146-159.
- Rubel, L., Ayalon, M., Shahbari, J., & Awad, F. (2022). Mathematics as gendered? Views from Palestinian/Arab Israeli high schoolers.
- Spencer, S. J., Steele, C. M., & Quinn, D. M. (1999). Stereotype threat and women's math performance. *Journal of experimental social psychology*, 35(1), 4-28.
- Steele, C. M., Spencer, S. J., & Aronson, J. (2002). Contending with group image: The psychology of stereotype and social identity threat. In *Advances in experimental social psychology* (Vol. 34, pp. 379-440). Academic Press.



מבוא ורקע תאורטי

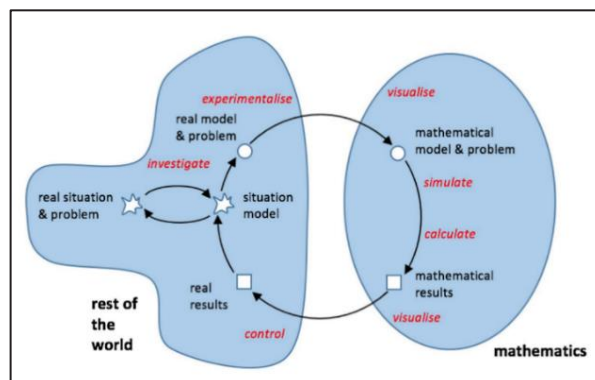
מידול מתמטי, שמשמעותו תרגום בין העולם האמיתי למתמטיקה ובחזרה, הוא מיומנות חשובה שתלמידים בכל הגילאים צריכים לרכוש, כדי להבין טוב יותר את העולם סביבנו. מידול מתמטי מציע שתלמידים אמורים להיות מסוגלים להתמודד עם בעיות הקשורות למציאות באמצעות שימוש במתמטיקה וידע חוץ-מתמטי (Ferri, 2018), ע"י בנייה, שימוש, או ניתוח והערכה באופן ביקורתי מודלים נתונים, תוך לקיחה בחשבון עובדות ושיקולים חוץ-מתמטיים (Blomhøj & Niss, 2021).

במאמר זה נגדיר מודל כמערכת של אלמנטים והיחסים ביניהם, אשר ניתן להשתמש בהם כדי לתאר, להסביר או לחזות את ההתנהגות של מערכת מוכרת אחרת (Doerr & English, 2003). הגדרה זו עולה בקנה אחד עם הגדרתן של שטרנברג וירושלמי (2003) למודל דידקטי כ"אוסף של אובייקטים המוכרים ללומד, ופעולות שהוגדרו עליהם התומכות בבניית הבנה של חשיבה פורמלית יותר לגבי מושגים מתמטיים ועל אודות התכונות החיוניות שלהם". שוורץ (2013) טען שחינוך מתמטי עוסק בלימוד אנשים כיצד לבנות ולהשתמש במודלים יעילים של תופעות, לכן, החינוך צריך להתמקד גם בגיבוש היחסים בין מרכיבי המודלים, המכונים מדדים.

כדי להתמודד עם בעיות מידול, חוקרים רבים מסכימים שתלמידים צריכים לעבור דרך מעגל מידול שמתחיל בפישוט והבנת המצב של בעיה נתונה ומסתיים בפירוש התוצאות המתמטיות בעולם האמיתי כתוצאות אמיתיות (Greefrath et al., 2018).

חוקרים טוענים שטכנולוגיה יכולה למלא תפקיד מרכזי בתמיכה וקידום מודלים מתמטיים (Greefrath et al., 2018), במיוחד שהיא ממחישה את הקשרים בין המרכיבים השונים של המודל הנתון, ומאפשרת לתלמידים לחקור הקשרים שונים ולהגיש יותר מאשר פתרון אחד נכון עבור נתוני קלט שונים (Wilensky & Rand, 2015). גריפראת' (Greefrath, 2011) טוען שניתן להשתמש בטכנולוגיה במספר שלבים במעגל המידול כגון לחקירה, ניסוי, הדמיה וחישוב (ראה איור 1).

איור 1 - מעגל המידול עם השפעה נוספת של כלים דיגיטליים (Greefrath, 2011)



מתודולוגיה

המחקר הנוכחי הוא חלק מפרויקט מחקרי גדול יותר על עקרונות עיצוב פעילויות מידול בסביבה דיגיטלית, בו אנו שואלים אילו עקרונות עיצוב של פעילויות מידול מבוססות מחשב תומכים בתהליכי

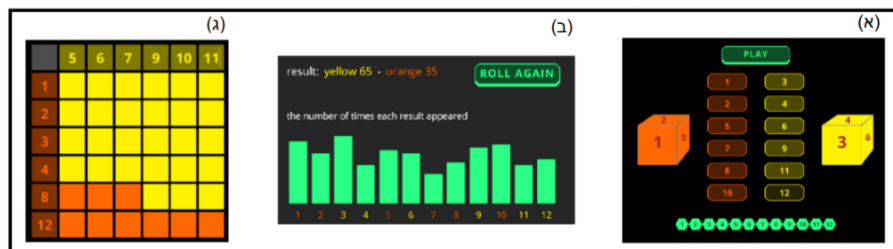
המידול של התלמידים. במחקר הנוכחי שאלנו: מהם עקרונות העיצוב של פעילויות מידול מבוססות מחשב במתמטיקה הכוללות מודלים וסימולציות? כדי לענות על השאלה הזו, ערכנו מחקר מבוסס עיצוב שמסתמך על פיתוח ובדיקה של תיאוריה באמצעות איטרציות המאפשרות לחוקר לפתח, לבחון, להעריך ולבדוק מחדש את הפעילויות כדי להבטיח את איכותן. במאמר זה נתמקד בפעילות "מלחמת קוביות" (מוצגת בהמשך). המחקר נערך בארבעה שלבים: (1) חקרנו את עקרונות העיצוב של פעילויות מידול בספרות וגייבשנו את המרכיבים החיוניים שלנו לפעילויות המידול. על פי עקרונות העיצוב שניסחנו בשלב זה, עיצבנו פעילויות מידול חדשות. (2) הצגנו והתייעצנו לגבי הפעילויות המעוצבות עם אנשי מקצוע בתחום המחקר והפיתוח של חינוך מתמטי, שני מורי מורים ומורים למתמטיקה. במהלך השלב השני, הבהרנו וגייבשנו עוד יותר את עקרונות העיצוב. (3) הפעלנו את הפעילויות בשיעורי מתמטיקה. כתוצאה משלב זה גובשו 5 עקרונות עיצוב נוספים. (4) בדקנו ועיצבנו מחדש את הפעילויות בהתאם לתוצאות השלב השלישי.

גיבוש עקרונות עיצוב ועיצוב פעילויות מידול חדשות תורם לתחום המחקר הפדגוגי, שבתורו יכול להשפיע על תיאוריות ופרקטיקות ההוראה והלמידה. כמו כן, הפעלת הפעילויות בכיתות מאפשרת בדיקה ניסיונית, כך שאיסוף משוב מתלמידים ומורים מספק נתונים אודות יעילותן של העקרונות העיצוביים שפותחו. מידע זה יכול לספק תובנות ודוגמאות לחוקרים אחרים.

אוכלוסיית המחקר: בשלב השני, הצגנו את הפעילויות המעוצבות והתייעצנו עם שלוש קבוצות: (א) צוות המחקר שלנו; (ב) שני מורי מורים בעלי מומחיות בהוראת המתמטיקה; ו- (ג) 30 מורים למתמטיקה בחט"ב שהשתתפו בתכנית לפיתוח מקצועי. בשלב השלישי השתתפו תלמידי כיתות ט' מצוינות שלימדו שני מורים בשני בתי ספר.

כלי המחקר: השתמשנו בשאלונים, תצפיות בכיתה, הקלטת שיעורים ופעילות מידול שעוצבה בסביבה דיגיטלית. פעילות "מלחמת קוביות", שעוסקת בנושא הסתברות, כוללת שש משימות. פעילות זו מתמקדת באסטרטגיות השונות של התלמידים לסימון מספרים על הפאות של שתי קוביות הוגנות, כתומה וצהובה, כדי ליצור מצבים של סיכויים שווים ושונים לניצחון במשחק עבור כל קובייה. פעילות זו עוסקת בתחרות ראש בראש שבה שני שחקנים משחקים זה מול זה. לאחר שביקשו מהתלמידים לכתוב באופן אקראי את המספרים 1 עד 12 על הקוביות (איור 2א), השחקן הראשון בוחר קובייה. כל שחקן בתורו מטיל את הקובייה והשחקן שקובייתו מראה מספר גדול יותר זוכה בנקודה. המנצח במשחק הוא השחקן עם הכי הרבה נקודות. הסימולציה הנתונה מדגימה את מספר ההטלות של הקובייה, מציגה את סך הנקודות עבור כל קובייה והסטוגרמה של התדירות היחסית שבה הופיע כל מספר (איור 2ב). בנוסף, משימות 2-6 כוללות מודל מטריצה דו-ממדית שבה השורה הצהובה הראשונה מייצגת את שש הפאות של הקובייה הצהובה והעמודה הכתומה השמאלית מייצגת את שש הפאות של הקובייה הכתומה (איור 2ג). כשכותבים מספרים על הקוביות, המשבצות במטריצה נצבעות לפי הזוכה בתוצאת ההטלה. למשל אם הקובייה הכתומה מראה 1 והקובייה הצהובה מראה 5 אז המשבצת תצבע בצהוב - מה שאומר שהשחקן עם הקובייה הצהובה מקבל נקודה. מודל זה מאפשר לתלמידים להסתכל על ההסתברויות באמצעות מודל שטח אינטראקטיבי.

איור 2 - פעילות מלחמת קוביות (א) כתיבת מספרים על מודל הקוביות (ב) הסטוגרמת התדירות (ג) מודל המטריצה הדו-ממדית



איסוף וניתוח נתונים: הנתונים למאמר זה מורכבים מתשובות התלמידים (משאלונים, הגשות ותצפית), הערות של צוות המחקר שלנו, משובים של שני מורי המורים והמורים למתמטיקה, והערות שטח של המחבר הראשון שנלקחו במהלך השלבים השונים.

בשלב השלישי הפעלנו את הפעילות בשיעורי מתמטיקה: כל כיתה התבקשה לפתור את פעילות "מלחמת קוביות". התלמידים עבדו ביחידים וההגשות נאספו אוטומטית על ידי הסביבה הדיגיטלית. במהלך התצפית הכיתתית התמקדנו בהערות התלמידים בזמן שהם עובדים על פעילויות המידול, ובהמשך עקבנו אחר האינטראקציה שלהם בדיון בכיתה.

כדי לענות על שאלת המחקר שלנו, חקרנו את עקרונות העיצוב תוך התייחסות לספרות, קודדנו את הנתונים מהשלבים השונים לפי קטגוריות הקשורות ל: מבנה הפעילות, כלים לתלמידים ולמורים, ותפקיד המורה בזמן שהתלמידים עובדים על הפעילות, ולפי שכיחות תופעות שונות בעבודת התלמידים.

ממצאים

שלב ראשון: לאחר בחינת עקרונות העיצוב של פעילויות מידול המדווחים בספרות, גיבשנו את המרכיבים העיקריים של פעילויות המידול שלנו: (א) סימולציה וכלים דיגיטליים בכל משימה המאפשרים אינטראקציה עם מרכיבי המודל השונים; (ב) משימות הדורשות הגשת דוגמאות שונות לפתרון נכון; (ג) מודולריות כך שהמשימות הראשונות משמשות להיכרות עם ההקשר של הפעילות, בעוד שהמשימות המתקדמות דורשות רמת חשיבה עמוקה יותר ומעודדות את התלמידים להכליל.

על פי עקרונות העיצוב שניסחנו בשלב הראשון, תכננו פעילות מידול חדשה: פעילות "מלחמת קוביות".

שלב שני: בשלב זה בדקנו והבהרנו את עקרונות העיצוב עם קבוצת אנשי מקצוע. הניסיון שלהם עם הפעילות הביא לארבע הצעות עיקריות, המתוארות להלן בהקשר שבו הופיעו.

1. משימת היכרות. במהלך מפגשי הפיתוח המקצועי, המורים הביעו צורך במשימת היכרות המסייעת לתלמידים להכיר את ההקשר והכלים השונים של הסימולציה.

2. סרטונים של 5-10 דקות. הוצעו שני סוגי סרטונים: טכניים המדריכים את התלמידים איך להשתמש במודל ובסימולציה בכל פעילות, וסרטונים המסכמים את הפעלת הפעילות בכיתה ואת הדיון הכיתתי.

3. מדריך למורה. מורים רבים הסכימו לגבי הצורך במדריך כתוב לכל פעילות המיועד למורים.

4. גמישות עיצוב. מתן אפשרות למורים לערוך את הפעילות כדי להתאים אותה לצרכי הכיתה שלהם.

שלב שלישי: הפעלנו את הפעילות בשיעורי מתמטיקה ובדקנו את האינטראקציה של התלמידים עם פעילות המידול ועם המורה בדיון הכיתתי: (א) בגלל הקושי בהבנת הבעיה הנתונה, כפי שנצפה בכיתה ודווח על ידי התלמידים, מצאנו כי יש צורך שהמורה יפתור וידון במשימה הראשונה (משימת ההיכרות) יחד עם התלמידים, ולהשתמש בסרטונים קצרים המסבירים כיצד להשתמש במודל הטכנולוגי. (ב) ההגשות והדוחות האישיים של התלמידים הצביעו על כך שהם הצליחו לעשות מעבר מייצוג חזותי (מטריצה דו ממדית) למודל מתמטי בפעילות הקוביות. עם זאת, יש צורך לנהל דיון לאחר כל משימה שבמהלכו התלמידים מעלים רעיונות מתמטיים ומשווים בין הפתרונות השונים. (ג) במהלך התצפית הכיתתית, הצליחו התלמידים לפרש את התוצאות המתמטיות כתוצאות אמיתיות. רוב התלמידים הגישו תשובות נכונות למשימה הרביעית (איור 2ג), בה התבקשו לסמן מספרים על פאות הקוביות באופן שבו לקובייה הכתומה יהיה בדיוק סיכוי של $\frac{1}{4}$ לנצח. איור 2ג מציג תשובה הכוללת 9 משבצות כתומות ($9=36 \times \frac{1}{4}$), כנדרש במשימה. (ד) 83% מהתלמידים דיווחו שהם השתמשו בסימולציה כדי להעריך את התוצאות שלהם, ושהיא חסכה להם חישובים ארוכים רבים. כמו כן, הדיון בכיתה בעקבות הפעילות עזר להם לאמת את תשובותיהם.

שלב רביעי: בהתבסס על תוצאות השלב השלישי, עיצבנו מחדש את הפעילות לפי העקרונות הבאים: **(1) עקרונות הקשורים למבנה הפעילות:** (א) בנוסף למודולריות של המשימות, כל פעילות תכלול משימת היכרות שמטרתה לסייע לתלמידים בהיכרות עם הסביבה הטכנולוגית והכלים השונים של הסימולציה. המשימה תועבר עם תיווך המורה. (ב) המורים יוכלו לערוך את הפעילות (להוסיף, להסיר ולערוך משימות) בהתאם לצרכיהם. **(2) עקרונות הקשורים לכלים הניתנים לתלמידים ולמורים:** (א) סרטונים קצרים למורים ולתלמידים עבור כל פעילות. (ב) מדריך כתוב למורים שיכלול הערות מורים והסבר על הפעילות. **(3) עיקרון הקשור לתפקיד המורה:** המעבר בין המשימות יכלול דיון עם התלמידים להמחשת מטרת כל משימה. זה יצוין במדריך הכתוב למורים.

במאמר זה, תיארונו מחקר המוביל לעקרונות עיצוב של פעילויות מידול ממוחשבות במתמטיקה, תוך מתן דוגמאות המבוססות על פעילות "מלחמת קוביות". כפי שחוקרים מדגישים, תהליך המידול מתחיל בפישוט והבנת המצב של בעיה נתונה (Greefrath et al., 2018). במחקר הנוכחי, התוצאות מצביעות על כך שתלמידים רבים התקשו להבין את בעיית הקוביות, מה שאומר שהם היו זקוקים לעזרה בהתחלת תהליך המידול. זה מצביע על תפקידו החשוב של המורה בהצגת הפעילות, בתיווך המשימה הראשונה ובדיון בתשובות התלמידים לאחר כל משימה. יתר על כן, מצאנו שלטכנולוגיה היה תפקיד חשוב בפתרון המשימות: הסימולציה סייעה בבדיקת תוצאות ההנחות של התלמידים ובפישוט הליכים מורכבים. הטכנולוגיה המחישה את הקשרים בין המרכיבים השונים של המודל הנתון, ואפשרה לתלמידים לחקור הקשרים שונים ולהגיש יותר מפתרון נכון אחד עבור נתוני פתיחה שונים כך שהמודל הנתון שימש ככלי עזר לחשיבה (Wilensky & Rand, 2015). הממצאים שלנו מאששים את הטענה שטכנולוגיה יכולה למלא תפקיד מרכזי בתמיכה ובקידום מודלים מתמטיים (Greefrath, 2011). בנוסף, תהליך גיבוש עקרונות העיצוב של פעילויות מידול מעיד על הערך והצורך בכלי תקשורת (כגון סרטונים קצרים ומדריך כתוב), הן במהלך תהליך הפיתוח כדי לחבר בין המפתחים למורים, והן במהלך השימוש בפעילויות על ידי המורים. מסקנה זו טובא בחשבון בתהליך גיבוש עקרונות העיצוב בהמשך המחקר.

מקורות

- Blomhøj, M., & Niss, M. A. (2021). Decoding, understanding, and evaluating extant mathematical models: What does that take? *Quadrante*, 30(2), 9–36. <https://doi.org/10.48489/quadrante.24129>
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110–136. <https://doi.org/10.2307/30034902>
- Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)*, (pp. 301–304). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_30
- Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM – Mathematics Education*, 50(1–2), 233–244. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6>
- Schwartz, J. L. (2013). Formulating Measures: toward modeling in the K-12 STEM curriculum. In B. M. Brizuela, B. E. Gravel (Eds.) & "Show Me what You Know": *Exploring student representations across STEM disciplines*, (pp. 250–268). Teachers College, Columbia University.
- Shternberg, B., & Yerushalmy, M. (2003). Models of functions and models of situations: On the design of modeling-based learning environments. In H. M. Doerr, & R. Lesh (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education*, (pp. 479–500). Lawrence Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Wilensky, U., & Rand, W. (2015). *An introduction to agent-based modeling: modeling natural, social, and engineered complex systems with NetLogo*. MIT Press.



מבוא ורקע תיאורטי

אחד העקרונות של תוכנית הלימודים במתמטיקה בתחום הגיאומטריה לכיתות ז'-ח' של משרד החינוך הוא: "שילוב אמצעי המחשה, כדוגמת איורים, דגמים, גזירות וקיפולי נייר..." (משרד החינוך, 2009, עמ' 4). זאת ועוד, בתוכנית הלימודים מצוין כי תחום הגיאומטריה "המתבסס על הנלמד בב"ס היסודי, הדגש הוא על לימוד מוחשי המשלב בניות, מדידות וחישובים". הרציונל לגישה הדרגתית זו הוא הקושי הידוע במעבר מחינוך מתמטי יסודי לתיכוני, שעלול לגרום לירידה בעניין של התלמידים, להתנתקות ולביצועים נמוכים (למשל, Attard, 2010). עם זאת, במחקר שנערך לאחרונה על שיטות העבודה של מורים איריים למתמטיקה ע"י אומארה ואח' (O'Meara et al., 2020), נמצא שישנה אי רציפות בשימוש בהמחשות פיזיות מהיסודי לחט"ב. גורם אחד שתורם לכך הוא הכשרה לא מספקת של מורים בחטיבת הביניים בשימוש בהמחשות. בנוסף, מורים מחזיקים לעתים קרובות בדעה שעזרי למידה כאלה מתאימים אך ורק לתלמידים צעירים יותר ולא רואים בשימוש בהם כמכריע ויעיל.

העניין שלנו בשימוש בחושיהם של התלמידים בהוראת הגיאומטריה בחט"ב מבוסס על מחקר רב המראה כי מחוות, מניפולציה של אובייקטים ובנייה חיוניים לחשיבה הגיאומטרית ולפתרון בעיות בבית הספר היסודי (למשל, Kaur & Sinclair, 2014). העניין שלנו גם עונה לקריאה של Sinclair ואח' (2016) למחקר מורחב על חשיבה ויזו-מרחבית ופיתוח מסגרות תיאורטיות רלוונטיות. מבחינה היסטורית, חשיבות השימוש במיומנויות ויזו-מרחביות הודגש על ידי דמויות מפתח בפסיכולוגיה, חינוך ומתמטיקה (למשל, Freudenthal, 1971), וגם ע"י מתמטיקאים בולטים כמו פליקס קליין (Halverscheid, 2019), שדיבר על חשיבות של שילוב המחשות בהוראת הגיאומטריה בכל הגילאים ובכל הרמות. לאחרונה, התפקיד של משאבי לימוד מוחשיים הוזכר כנושא בולט למחקר בגיאומטריה (Brunheira et al., 2022) וקיבל גיבוי תיאורטי מגישת למידה ועיצוב סביבות למידה מעוגנת גוף (Palatnik et al., 2023).

עניין אותנו לחקור את עמדת המורים המלמדים גיאומטריה בחט"ב בישראל כלפי שימוש בהמחשות בהוראה שלהם. בבדיקה ראשונית של ששת ספרי הלימוד הנפוצים ביותר של חט"ב בישראל, כמעט ולא נמצאו משאבים והמלצות לשימוש בהמחשות פיזיות בגיאומטריה, כפי שקיימים בספרי הלימוד לבית הספר היסודי (קריספין, 2023). למיטב ידיעתנו, לא נערך מחקר כדי להבהיר כיצד מורים ישראלים מלמדים גיאומטריה בכיתות המוקדמות של חטיבת הביניים, במיוחד לגבי המחשות. לפיכך, שאלות המניעות את המחקר הן: האם מורים ישראלים בכיתות ז'-ח' משלבים בכיתותיהם "אמצעים מוחשיים וממחשים" (משרד החינוך, 2009, עמ' 4), ובאיזה אופן? איך הם מגדירים "המחשה" בשיעור גיאומטריה?

מתודולוגיה

המחקר הנוכחי התבסס על שיטות מחקר מעורבות, mixed methods research, להשגת הבנה מקיפה של התופעה, ובכך משפר את תקפות הממצאים (Onwuegbuzie, & Johnson, 2012; Ross & Onwuegbuzie, 2004). באופן ספציפי, אימצנו את האסטרטגיה "quan-<QUAL" (Johnson & Onwuegbuzie, 2004, p. 9), החלנו בכמותית ולאחר מכן התעמקנו בטכניקות איכותניות לבחינת תפקידם של שימוש בהמחשות בקרב מורים ישראלים.

בתחילה, הפצנו גרסה מותאמת של השאלון של פאן (Fan, 2014) למורים לגיאומטריה בישראל בצורה מקוונת. להבדיל מפאן שביקש תיאור של שיעור אחד, אחרי שנתן דוגמא

לתיאור השיעור, ביקשנו לתאר שני שיעורים בתחילת השאלון ולא ניתנה דוגמא בהתחלה כדי לא לקבע את החשיבה של המורים וכדי לקבל "תמונה" רחבה יותר על הפדגוגיה של המורה.

על השאלון ענו 60 מורים המלמדים גיאומטריה בבתי ספר שמונה שנתיים או בחטיבות הביניים בכיתות ז'-ח' בישראל. אוכלוסיית המורים הייתה מגוונת מבחינת רמת מומחיות, הכשרה מתמטית, גיל, ותק, מגדר ומגזר. אוכלוסיית המורים כללה רמות מומחיות שונות, החל ממורים ללא או עם הכשרה מתמטית, דרך רכזי מתמטיקה וכלה במדריכים בית ספריים. התחלנו את השאלון בבקשה מהמורים לתאר שני שיעורי גיאומטריה לכיתות ז'-ח' שהציגו נושאים או מושגים חדשים. הבקשה הזו קדמה לשאלות הנוגעות לשימוש ויחסי המורים להמחשות פיזיות, למשל: "כיצד אתה מגדיר המחשה בשיעור גיאומטריה?", "תאר דוגמא להמחשה בגיאומטריה", "עד כמה בשיעורים שלך תלמידים ולא רק המורה משתמשים בהמחשות?". הנתונים הכמותיים הקלו על זיהוי מאפיינים ראשוניים של התופעה הנבדקת. לאחר מכן, נערכו ראיונות עומק עם תת-קבוצה של 10 מורים שהיו מוכנים לדון בגישות הפדגוגיות שלהם לגיאומטריה. שאלות לדוגמא מתוך הריאיון: איך לדעתך כדאי ללמד גיאומטריה בכיתות ז'-ח?, מהו שיעור גיאומטריה מיטבי בעיניך בכיתות אלה?, תוכל לתת לי דוגמא לשימוש בהמחשה?, מה נתפס בעיניך כהמחשה טובה?. שני החוקרים שיתפו פעולה בניתוח נתונים אינדוקטיבי, והשגנו קונצנזוס לגבי קודי הסיווג הקשורים לשיטות ולגישות של המורים לשימוש בעזרים מוחשיים, למשל, מידת השימוש בהמחשות, סיבות לשימוש בהמחשות, כיצד המורים תופסים את המקום של התלמיד בהוראה עם המחשות, כיצד המורים מגדירים המחשה בשיעור.

ממצאים

ראשית, נתייחס לניתוח שני השיעורים מהשאלון. חלק מהמורים תיארו שיעורים שבהם לא נעשה שימוש בעזרים מוחשיים, וגישה פורמלית יחד עם וויזואליזציה בלבד שלטו. כלומר, המורה עומד, מרצה, נותן הגדרות, משרטט על הלוח, וכד'. למשל: "כל מושג חדש חשוב בהתחלה שהתלמידים ילמדו את המושגים בע"פ, ילמדו את ההגדרות. שידעו להעתיק מהלוח / מהספר, ישרטטו, וימלאו את הטבלה הידועה של טענה ונימוק", "(אני מתחיל) במתן ההגדרה המתמטית המדויקת של דלתון: שני זוגות זרים של צלעות סמוכות שוות...", "שרטוט על הלוח צביעת נתונים, סיכום תכונות במחברות".

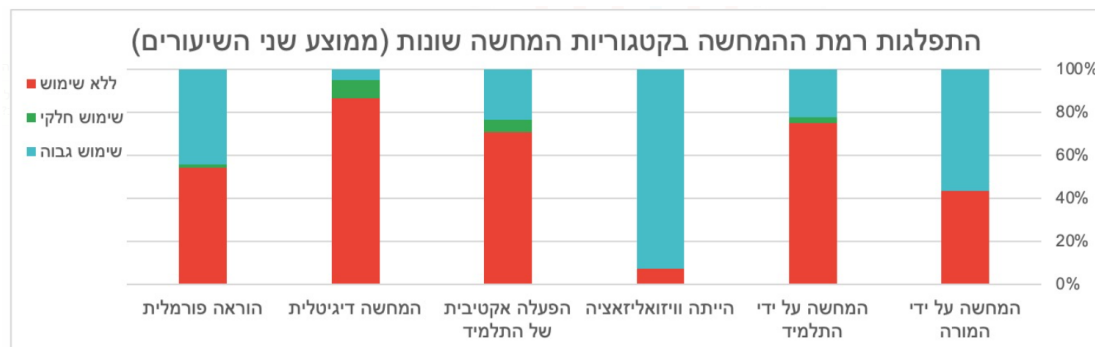
	שימוש בוויזואליזציה	הוראה פורמלית	שימוש ע"י המורה והתלמידים	שימוש ע"י המורה	שימוש בהמחשות
שיעור ראשון	5% (3)	57% (34)	72% (43)	38% (23)	(0) נמוך
	0% (0)	2% (1)	3% (2)	0	(0.5) ביניים
	95% (57)	42% (25)	25% (15)	62% (37)	(1) גבוהה
שיעור שני	10% (6)	52% (31)	78% (47)	48% (29)	(0) נמוך
	0% (0)	2% (1)	2% (1)	0	(0.5) ביניים
	90% (54)	47% (28)	20% (12)	52% (31)	(1) גבוהה

טבלה 1: רמת ואחוז השימוש בהמחשות פיזיות, הוראה פורמלית וויזואליזציה בתיאורי השיעורים. (נמוך-לא היה תיאור של שימוש בהמחשות ע"י המורה או התלמיד, בינוני-תיאור חלקי של שימוש בהמחשות, גבוה-השיעור מתבסס ברובו על שימוש בהמחשות).

אחרים תיארו שיעורים המבוססים על פעילויות עם המחשות פיזיות, למשל: "עבדנו בקבוצות הטרוגניות ויצרנו מצולעים ממקלות. מיינו את המרובעים לקבוצות לפי מאפיינים, וכל קבוצה הציגה תוצרים. כך הגענו למספר הגדרות של המלבן. אילו תכונות נחוצות ואילו לא כדי לקבל מלבן. טבלה 1, איור 1 מסכמים את הממצאים.

גם מהשאלונים וגם מהראיונות העומק עולה כי מרבית המורים מגדירים המחשה בשיעור כהמחשה פיזית שבעזרתה המורה מדגים לתלמידים. למשל: "להראות בצורה מוחשית, ויזואלית את הנושא, התכונות", או "שימוש באביזרים תלת-מימדיים, שאפשר לחוש אותם,

לגעת, לעשות איתם פעולה כלשהי, להבין דרכם את החומר המופשט, להבין דרכם איך דברים נראים ולהסביר דרכם תאוריות ומשפטים", "המחשה מלשון לחוש, כמה שיותר מוחשי עבור התלמיד לגעת ולראות ממש את הנושא הנלמד בגיאומטריה". יחד עם זאת, נמצאה התייחסות מועטה לאינטראקציית התלמידים עם ההמחשה. למשל: "מוחשית בידיים שהתלמידים יכולים לגעת או (לא) רק לראות, לא רק על הלוח אלא מחוץ ללוח". מורה נוספת מציינת: "עבור כל נושא עם המחשות מוכנות מראש, אני אשתמש (בהן). הבעיה היא שלא בכל נושא יש את זה".



איור 1: התפלגות של רמות ההמחשה לפי קטגוריות

השאר הגדירו המחשה כשימוש באמצעים ויזואליים (ראה איור 1): שרטוט על הלוח, הדגשה בצבעים, דגם ביד המורה, יישומן, מצגת. למשל: "לראות את המלבן, ריבוע מול העיניים מצויר", "עזרה לתלמידים לראות ולהמחיש להם את הגיאומטריה בעיניים", נראה שמבחינת המורים המילה הנרדפת להמחשה היא ויזואליזציה, כלומר, אני מראה משמע אני ממחיש.

דיון

ממצאי מחקר זה מראים ששימוש בהמחשות פיזיות הן בידי המורים ובמיוחד ע"י התלמידים בשיעורי גאומטריה בכיתות ז' ו-ח' הוא מועט יחסית. התופעה הזאת יכולה לתרום לקשיי המעבר בלימודי המתמטיקה מהיסודי לחט"ב (השווה עם O'Meara et al., 2020) ולתרום לקשיים של תלמידי ישראל עם גאומטריה (Mevarech, 2018).

מחד גיסא הממצאים מראים שמרבית המורים מגדירים "המחשה בגיאומטריה" כמשהו פיזי. מאידך גיסא, לתפישתם של המורים, המורה הוא זה שמחזיק את האביזר הפיזי ולא התלמיד. טבלה 1 מראה שהתלמיד פעיל רק ב- 20%, 25% מהשיעורים (הראשון והשני). המורה במרכז, אוחד בהמחשה, והתלמידים הם צופים פסיביים, מסתכלים ולא ממחישים לעצמם. אכן, ברוב המוחלט של השיעורים המורים השתמשו בויזואליזציה (ראו טבלה 1, 95% בשיעור הראשון ו-90% בשיעור השני). גם כאשר מורים דיברו על המחשה הם לרוב השתמשו במילים "ראו", "צפו", "הסתכלו", כלומר ציינו את הערך הויזואלי של ההמחשה.

המונח "המחשה" בעברית קשור לשורש "מחש", כלומר חוש. על סמך הממצאים אנחנו טוענים שרוב המורים מצמצמים את מושג ההמחשה לחוש אחד—הראיה. מבחינת המורים המחשה שווה לוויזואליזציה. אם נחזור למשמעות המילונית, להמחיש זה להסביר דבר מופשט באמצעים מוחשיים והדגמות. כשמורים מצמצמים את ההמחשה רק לערוץ הויזואלי או השמיעתי של התלמידים, הם מורידים את פוטנציאל הלמידה הגלום בעירוב מספר רב של חושים. ההמחשה צריכה לפנות ליותר חושים מלבד חוש הראיה, יש לערב את המישוש והקינסטזיה (תפיסת המיקום, התנועה והפעולה של חלקי הגוף). הוראת גאומטריה צריכה להתבסס יותר על היכולת האנושית לתקשר עם הסביבה הפיזית והחברתית באמצעות תנועות תכליתיות, שימוש בכל החושים, ויצירה ושימוש בכלים (Palatnik et al., 2023).

אנו ממליצים, שהמורים ישלבו יותר המחשות פיזיות בהוראה, ושהתלמידים יהיו פעילים, דבר התואם גם את הנחיות משרד החינוך. בנוסף, לבקש מכותבי הספרים להוסיף המחשות פיזיות,

ואף להעמיד לרשות המורים המעוניינים בכך מדריכים לבנייה של המחשות, לדוגמא: [תיכון במשולש – כיתה ז' \(איילת קריספין, 2022\)](#) ולדאוג להכשרת המורים, בנושא שימוש בהמחשות, לקראת תפקידים והן לפיתוח המקצועי תוך כדי תפקיד.

רשימת מקורות

- משרד החינוך. (2009). תוכנית לימודים במתמטיקה לחט"ב. [קישור](#).
- קריספין, א'. (2022). תיכון במשולש – כיתה ז' [וידאו]. YouTube. [קישור](#).
- קריספין, א. (2023). פרקטיקות פדגוגיות של מורים בחטיבת הביניים להוראת גיאומטריה: מיקוד בשימוש בהמחשות (עבודת תיזה). האוניברסיטה העברית.
- Attard C. (2010). Students' experiences of mathematics during the transition from primary to secondary school. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 67–74). MERGA.
- Brunheira, L., Maschietto, M., Palatnik, A. & Papadaki, C. (2022) Introduction to the papers of TWG04: Geometry Teaching and Learning. In G. Bolondi, F. Ferretti, & C. Spagnolo (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, pp. 688–697. Bolzano, Italy: ERME
- Fan, L. (2014). *Investigating the pedagogy of mathematics: How do teachers develop their knowledge?*. Imperial College Press.
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3(3/4), 413–435.
- Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational researcher*, 33(7), 14–26.
- Halverscheid, S., & Labs, O. (2019). Felix Klein's mathematical heritage seen through 3D models. *The Legacy of Felix Klein*, 131–152.
- Kaur, H., & Sinclair, N. (2014). Young children's thinking about various types of triangles in a dynamic geometry environment. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 409–417.
- Mevarech, Z. R. (2018). Math literacy in Israel: What does PISA tell us that we did not know before?. In: Nitsa Movshovitz-Hadar (ed.). *K-12 Mathematics education in Israel: Issues and innovations*, Technion, pp. 359–367.
- O'Meara, N., Johnson, P., & Leavy, A. (2020). A comparative study investigating the use of manipulatives at the transition from primary to postprimary education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(6), 835–857.
- Palatnik, A., Abrahamson, D., Baccaglini-Frank, A., Ng, O., Shvarts, A., & Swidan, O. (2023). Theory and practice of designing embodied mathematics learning. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel., & M. Tabach (Eds.). (2023). *Proceedings of the 46th PME*, (Vol. 1, pp. 159–189). PME 46.
- Ross, A. A., & Onwuegbuzie, A. J. (2012). Prevalence of mixed methods research in mathematics education. *Mathematics Educator*, 22(1), 84–113.
- Palatnik, A., Abrahamson, D., Baccaglini-Frank, A., Ng, O., Shvarts, A., & Swidan, O. (2023). Theory and practice of designing embodied mathematics learning. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel., & M. Tabach (Eds.). (2023). *Proceedings of the 46th PME*, (Vol. 1, pp. 159–189). PME 46.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). *Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report*. ZDM, 48, 691–719.



רקע תיאורטי קצר

אסטרטגיה מוגדרת כתהליך קוגניטיבי אשר יכול להוביל לביצוע המשימה בין אם התשובה נכונה או לא נכונה (Pressley & Harris, 1990). הרבה חוקרים חקרו את האסטרטגיות שהתלמידים משתמשים על מנת לענות על הבעיות מתמטיות בנושא השוואת שברים. הם דווחו על קשיים בקרב התלמידים בנושא זה, הקשיים בעיקר נובעים מהשלכת הידע הקודם של התלמידים על מספרים טבעיים על נושא השברים (Reinhold, Obersteiner, Hoch, Hofer & reiss, 2020). השלכה זו מתבטאת בזה שהתלמידים עלולים לפתח אסטרטגיה מוטעית כאשר הם מתייחסים למונה ומכנה כשני מספרים בלתי תלויים במקום להביא בחשבון את הקשר ביניהם, דבר אשר עלול להוביל לתפיסה מוטעית שהערך של השבר יגדל כאשר המונה, המכנה או שניהם גדלים (גלילי וגוברמן, 2022). על מנת להימנע מקושי זה, התלמידים לומדים אסטרטגיות להשוואת שברים לפי תוכנית לימודים במתמטיקה בשכבות ד-ו (תוכנית הלימודים במתמטיקה ליסודי-ישראל, 2006).

לפי תוכנית הלימודים בישראל ליסודי (2006), בכיתה ד' התלמידים לומדים להשוות שברים לפי מקרים ספציפיים, למשל, השוואת שברים בעלי מונים או מכנים שווים. הם לומדים גם להשוואת שברים על ידי התייחסות לנקודת אחיזה (benchmark) כמו אחד או חצי או על ידי השוואת השברים בהתייחסות לשבר הקרוב יותר לשלם. בכיתה ה' התלמידים לומדים אלגוריתם מתמטי של הרחבה או צמצום שברים על מנת לקבל שבר שקול לשבר הנתון ואז להשוות בין השבר השקול לשבר בעל מכנה משותף. לפעמים, תלמידים משתמשים בחיבור במקום בכפל בהרחבה שברים, דבר אשר עלול להוביל לתשובה לא נכונה (גלילי וגוברמן, 2022). לחלופין, חלק מהתלמידים רואה שכל שהפרש בין מונה למכנה של שבר אחד גדולה מהשבר השני מעידה על יחסי הגודל של השברים. תפיסה זו יכולה לגרום לתפיסות מוטעות אחרות בהשוואת שברים (גלילי וגוברמן, 2022).

הנכונות של תשובת התלמיד לא תמיד משקפת שימוש באסטרטגיה נכונה (Pressley & Harris, 1990). לפעמים אסטרטגיה שגויה יכולה להוביל את התלמיד לתשובה נכונה. על מנת לבחון את האסטרטגיה שהתלמיד השתמש בעת השוואת שברים, רוב המחקרים השתמשו בתצפיות או ראיונות. אבל שיטת מחקר זו לא תמיד מתאימה למדגם גדול עם דטה גדולה. לצורך זה ולאור ההתפתחות הטכנולוגית בשנים האחרונות שמאפשרת לאסוף, לשמור, לנתח ולעקוב אחרי כמות גדולה של נתונים (Stacey & Wiliam, 2012), אנחנו מחפשים דרך אשר תעזור לנו -כחוקרים ומורים כאחד- ללמוד באופן אוטומטי על האסטרטגיות שהשתמש התלמיד להשוואת שברים. ועל כן, במחקר זה השתמשנו בסביבת הערכה אוטומטית- המרא"ה.

סביבת המרא"ה STEP היא סביבת הערכה אוטומטית שמאפשרת למורים לעצב משימות מעוררות דוגמאות (Example-eliciting-tasks). משימות מעוררות דוגמאות הן משימות עשירות שיש להן אינסוף פתרונות אשר דורשות מהתלמיד לתת דוגמאות כמענה לדרישת המשימות, יצירת הדוגמאות מתבצעת על ידי גרירת נקודה באמצעות דיאגרמה אינטראקטיבית. הסביבה גם מספקת הערכה ממוחשבת אוטומטית שכוללת ניתוח מתמטי ומאפיינים דידקטיים בהתבסס על הדוגמאות שהגישו התלמידים (Olsher, Yerushalmy and Chazan, 2016). העיקרון מאחורי משימות מסוג זה הוא שמחקרים רבים בתחום הוראת המתמטיקה מצאו כי לדוגמאות תפקיד מהותי בלמידה והוראה של המתמטיקה, ובעיקר בתהליכי ההצדקה וההנמקה (Olsher, Yerushalmy and Chazan, 2016; Olsher & Lavie, 2021; Leung & Lee, 2013). אלוס וחב' (2019) טענו כי על מנת ללמוד על אסטרטגיות התלמידים בהתבסס על הדוגמאות שלהם, עלינו לבחון את המאפיינים המתמטיים של דוגמאות אלו. המאפיינים המתמטיים במחקר זה מבוססים על הקשרים בין השבר הנתון לבין השבר שנבחר כיותר גדול, קשרים אלו הם נגזרת של האסטרטגיות או התפיסות השגויות שהוזכרו בספרות ובתוכנית הלימודים. בעידן הטכנולוגי, משימות מבוססות דוגמאות אפשרו לחוקרים ללמוד על

תפיסות קולקטיביות או אישיות לנושאים מתמטיים ספציפיים. על ידי זה שאוסף הדוגמאות השתקף כנוף תפיסתי אשר מוגדר כאוסף חזותי- ויזואלי של נקודות אשר מהוות מקום גיאומטרי כמו קו או אזור, וכאשר כל מקום גיאומטרי משקף תפיסה מתמטית או דרך חשיבה שונה (Olsher & Lavie, 2021; Leung & Lee, 2013). ועל כן, בנוסף לזה שאנחנו מחפשים דרך אשר תעזור לנו ללמוד על אסטרטגיות התלמיד להשוואת שברים באופן אוטומטי, המטרה שלנו שהסביבה תאפשר לנו לראות את זה באופן ויזואלי.

מידע מתודולוגי (שאלות המחקר, המשתתפים, כלי המחקר, ואופן ניתוח הנתונים).

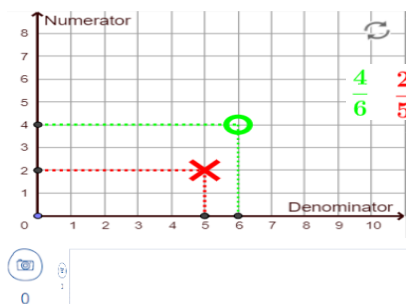
בהתבסס על הרקע הספרותי לעיל, המחקר בא לחקור את האתגר הייחודי שעומד בפני סביבת ההערכה כדי ללמוד על אסטרטגיות התלמיד בעת השוואת שברים באופן אוטומטי וויזואלי. **שאלת המחקר** היא: כיצד סביבת ההערכה STEP יכולה לעזור לנו ללמוד על אסטרטגיות תלמידים בנושא השוואת שברים באופן אוטומטי וויזואלי בהתבסס על מאפייני דוגמאות התלמיד למשימה מעוררת דוגמאות?

זהו רק חלק מתוך מחקר רחב, לשם כך אפרט כאן ואבהיר את מערך המחקר:

משתתפי המחקר הם 75 תלמידים בגילאים 13-14 שנים, אשר למדו את נושא השוואת השברים בבית ספר יסודי על פי תוכנית הלימודים הרגילה במתמטיקה של משרד החינוך בישראל. המשימה של המחקר לא באה ללמד את הנושא של השוואת שברים אלא כמשימת העשרה וחזרה על החומר שהתלמידים כבר למדו. מטרת המשימה היא לאפשר לנו (כחוקרים וגם מורים) ללמוד על האסטרטגיה שהתלמיד השתמש בעת השוואת השברים באופן אוטומטי-ויזואלי.

בטרם ביצע המשימה התלמידים קבלו הנחיות, הסבר ומשימות הכנה לדיאגרמה האינטראקטיבית והסביבה.

המשימה דורשת מהתלמידים לבחור שבר גדול משבר נתון **איור 1** $\left(\frac{2}{5}\right)$ (הנקודה האדומה X). התלמידים מתבקשים לתת 10 הדיאגרמה האינטראקטיבית



דוגמאות כאלה.

בחירת השברים נעשית על ידי גרירת נקודה (יורקה O). כך שכל נקודה מייצגת שבר במערכת הקרטזית, המונה של השבר מיוצג על ידי הערך שנמצא על הציר האנכי והמכנה מיוצג על ידי הערך שנמצא על הציר האופקי. ראשית הצירים והנקודות על הציר האנכי אינם מייצגים שום שבר. הגשת כל שבר נבחר נעשית על ידי לחיצה על אייקון המצלמה.

לאחר הגשת עשר הדוגמאות, התלמיד התבקש לכתוב את האסטרטגיה שהוא השתמש בה על מנת לבחור את הדוגמאות שלו.

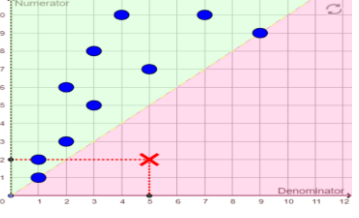
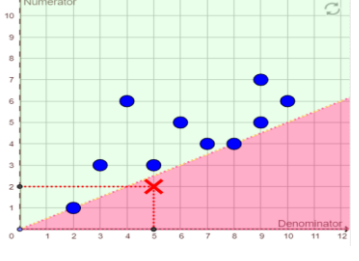
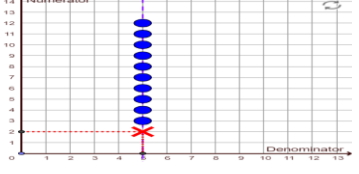
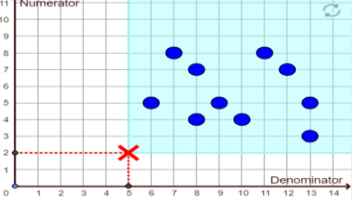
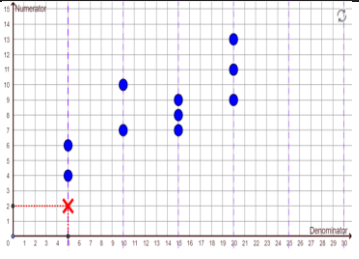
ניתוח הנתונים נעשה על ידי STEP. כל דוגמה שהגיש התלמיד, הסביבה ניתחה לפי מאפיינים מתמטיים שהגדרנו מראש. המאפיינים המתמטיים הם הקשרים בין השבר הנתון לבין כל שבר שנבחר כאשר הקשרים הם נגזרת של האסטרטגיות הנמצאות בספרות ובתוכנית הלימודים במתמטיקה (דוגמאות למאפיינים שמאפשרת הסביבה: השבר שנבחר הוא שבר גדול מאחד כאשר השבר הנתון הוא קטן מאחד; השבר שנבחר הוא הרחבה של השבר הנתון; או השבר שנבחר הוא בעל מכנה שווה לשבר הנתון). בנוסף, הסביבה אפשרה לזהות מאפיין אשר נמצא ברוב הדוגמאות (7 דוגמאות ומעלה), ואז, מאפיין זה השתקף כמיקום גיאומטרי שאמור לשקף את האסטרטגיה שהתלמיד בחר.

על מנת להיות בטוחים כי הסביבה אכן הצליחה לזהות את האסטרטגיה שהתלמיד בחר, התלמידים התבקשו לכתוב את האסטרטגיה שהם השתמשו בה לבחירת השברים במשימה לאחר שהם הגישו את הדוגמאות שלהם. תשובות התלמידים נבדקו מול האסטרטגיה שזוהתה באופן אוטומטי על ידי הסביבה פר תלמיד. חשוב לציין שיש אסטרטגיות שהן תת קבוצה של אסטרטגיה אחרת, הסביבה הוגדרה לבחור בקבוצה המוכללת כאסטרטגיה שהתלמיד השתמש בה.

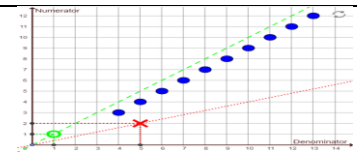
ממצאים (כולל משמעותם)

הסביבה אפשרה לנו לראות באופן אוטומטי- ויזואלי את האסטרטגיות שכל תלמיד השתמש.

טבלה 1 מסכמת את הממצאים של הנוף התפיסתי של כל אסטרטגיה, הפירוש המילולי, מספר התלמידים שהשתמשו בה ומספר התלמידים שהצהירו שאכן השתמשו באסטרטגיה זו.

טבלה 1 אסטרטגיות שזוהו אוטומטית והשתקפות הוויזואלית של כל אסטרטגיה (75 תלמידים)	
פירוש מילולי לאסטרטגיה, מספר התלמידים שהשתמשו בה ומספר תלמידים אשר התאימה בחירתם לאסטרטגיה למה שאפיינה הסביבה	דוגמה לנוף התפיסתי האישי של האסטרטגיה
הסביבה זיהתה כי 10 (13.3%) תלמידים השתמשו באסטרטגיה השוואת שברים ביחס לאחד. זה משתקף כקו ישר לכל השברים השווים לאחד שמפריד בשני אזורים, האזור הירוק של כל השברים הגדולים מאחד ואזור האדום של כל השברים הקטנים מאחד. 10 מתוך התלמידים כתבו שאכן הם השתמשו באסטרטגיה זו.	
הסביבה זיהתה כי 27 (36%) תלמידים השתמשו באסטרטגיה השוואת שברים ביחס לחצי. זה משתקף כקו ישר לכל השברים השווים לחצי שמפריד בין שני אזורים, האזור הירוק של כל השברים הגדולים מחצי ואזור האדום של כל השברים הקטנים מחצי. 19 מתוך התלמידים כתבו שאכן הם השתמשו באסטרטגיה זו. אסטרטגיה זו היא תת קבוצה של אסטרטגית השוואה עם אחד.	
הסביבה זיהתה כי 19 (25.3%) תלמידים השתמשו באסטרטגיה השוואת שברים על ידי אותו מכנה. זה משתקף כקו אנכי שמקביל לציר Y. אסטרטגיה זו היא תת קבוצה של אסטרטגית השוואה בהתבסס על הרחבה. 18 מתוך התלמידים כתבו שאכן הם השתמשו באסטרטגיה זו.	
הסביבה זיהתה כי 1 (1.3%) תלמידים השתמשו באסטרטגיה השוואת שברים על ידי אותו מונה. זה משתקף כקו אופקי שמקביל לציר X. תלמיד זה כתב שאכן הוא השתמש באסטרטגיה זו.	
הסביבה זיהתה כי 3 (4%) תלמידים השתמשו באסטרטגיה השוואת שברים על ידי "שבר בעל מונה ומכנה יותר גדולים הוא השבר בעל הערך הגבוה". זה משתקף כאזור בצבע תכלת. אסטרטגיה זו היא תפיסה מוטעית אשר הוזכרה בספרות. 3 מתוך התלמידים כתבו שאכן הם השתמשו באסטרטגיה זו.	
הסביבה זיהתה כי 5 (6.6%) תלמידים השתמשו באסטרטגיה השוואת שברים על ידי הרחבת השבר הנתון ובחירת שברים בעלי ערך יותר גבוה מהשברים ששווים לשבר הנתון. זה משתקף כקווים אנכיים כאשר הם מספר שלם כפול המכנה של השבר הנתון. אסטרטגיה זו היא תת קבוצה לאסטרטגיה של שבר בעל מונה ומכנה יותר גדולים הוא השבר בעל הערך הגבוה. 4 מתוך התלמידים כתבו שאכן הם השתמשו באסטרטגיה זו.	

הסביבה זיהתה כי 2 (2.6%) תלמידים השתמשו באסטרטגיה השלמה לשלם. זה משתקף כקו מקביל לקו שמשקף את כל השברים ששווים אחד. תלמיד אחד מתוך שני התלמידים כתב שאכן הוא השתמש באסטרטגיה זו.



הסביבה זיהתה כי 6 (8%) תלמידים השתמשו ביותר מאסטרטגיה אחת ול-2 (2.6%) תלמידים הסביבה לא הצליחה לזהות אסטרטגיה מסוימת. שלושה תלמידים בקטגוריה זו הצליחו לקבוע את אסטרטגיות שהם השתמשו בה.

דיון ביחס לספרות

סביבת ההערכה אפשרה לזהות ויזואלית ובאופן אוטומטי האסטרטגיה שכל תלמיד השתמש בה להשוואת שברים. האסטרטגיות שזוהו אוטומטית היו לרוב (78.6% מהמקרים) עקביות עם האסטרטגיה שהתלמידים הצהירו שהם בחרו.

ממצא זה תומך את הספרות אשר דיווחה כי סביבות הערכה טכנולוגיות יכולות לספק דוחות המבוססים על ניתוח אוטומטי שיאפשרו מעקב אחר התקדמות הלמידה של הלומדים (Stacey & William, 2012). התרומה העיקרית של החקירה שלנו מספקת תובנות כיצד ניתוח אוטומטי יכול להיות כלי יעיל ללמידה על האסטרטגיות של כל תלמיד באופן ויזואלי בהתבסס על מאפייני הדוגמאות שלהם וכתגובה לתכנון המשימה. תוצאות המחקר עשויות להביא לאוטומציה שתוריד חלק מעומס התהליך של הערכה מעצבת, אשר נעשית בדרך כלל על ידי המורה; הן גם עשויות להציע כיצד לעצב משימות משקפות אסטרטגיות בנושאים מתמטיים אחרים.

רשימת מקורות

- גלילי, מ'. וגוברמן, ר' (2022). טיפול בקשיי תלמידים בנושא 'השוואת שברים פשוטים' בעזרת הוראה מוכוונת פתרון בעיות. *מספר חזק*, 33, עמ' 28-45.
- משרד החינוך, התרבות וספורט, (2006). תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים. ירושלים.
- Ellis, A. B., Ozgur, Z., Vinsonhaler, R., Dogan, M. F., Carolan, T., Lockwood, E., ... & Zaslavsky, O. (2019). Student thinking with examples: The criteria-affordances-purposes-strategies framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 263-283.
- Leung, A., & Lee, A. M. S. (2013). Students' geometrical perception on a task-based dynamic geometry platform. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 361-377.
- Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). How might the use of technology in formative assessment support changes in mathematics teaching?. *For the learning of mathematics*, 36(3), 11-18.
- Olsher, S., & Lavie, I. (2021). Design of tasks for assessment of generalization abilities of preservice teachers of elementary school mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-19. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1962999>
- Pressley, M., & Harris, K. R. (1990). What we really know about strategy instruction. *Educational leadership*, 48(1), 31-34.
- Reinhold, F., Obersteiner, A., Hoch, S., Hofer, S. I., & Reiss, K. (2020, April). The interplay between the natural number bias and fraction magnitude processing in low-achieving students. In *Frontiers in Education* (Vol. 5, p. 29). Frontiers Media SA.
- Stacey, K., & William, D. (2012). Technology and assessment in mathematics. *Third international handbook of mathematics education*, 721-751.



מבוא

בעקבות התפשטות נגיף הקורונה נסגרה מערכת החינוך הישראלית באמצע מארס 2020 ועברה למתכונת של הוראה היברידית (להלן, ה"ה), הכוללת שילוב של הוראה פרונטלית (פנים אל פנים) עם הוראה מרחוק. תקופה זו חשפה את החשיבות הרבה שיש בהוראה מרחוק ובשילובה בהוראה התוך כיתית (Niranjan, 2020). עם זאת, מעבר זה היווה אתגר למורים שנאלצו להתמודד עמו בפתאומיות. אסטרטגיות ההוראה בהוראה מרחוק שונות מאסטרטגיות ההוראה הפרונטליות (Ewing & Cooper 2021). עם זאת הבנתנו כיצד נחוותה למידת המתמטיקה בתקופה זו על ידי תלמידים מוגבלת מאוד. על ידי חקירת חוויות התלמידים, מחנכים וקובעי מדיניות יכולים להבין טוב יותר את היקף אובדן הלמידה של התלמידים ואת השפעתו על הכישורים והידע המתמטיים שלהם, לעזור לתלמידים להתמודד עם האתגרים אשר התייצבו בפניהם בתקופה זו ולהתאים את שיטות ההוראה והחומרים שלהם כך שיתאימו טוב יותר לצרכי התלמידים, בין אם הם לומדים באופן אישי, מקוון או באמצעות שילוב של שניהם (Ferah-Ozcan & Saydam, 2022). בנוסף, ניתן ללמוד על היבטים חיוביים אשר התעוררו בקרב התלמידים בלמידת המתמטיקה בתקופת ההוראה ההיברידית כגון התעצמות השימוש בכלים טכנולוגיים (Alabdulaziz, 2021). המחקר המוצע כאן מבקש לבחון את העמדות (attitudes) של תלמידים ביחס לה"ה במתמטיקה.

מחקר זה משתמש במודל לאפיון עמדות של תלמידים כלפי המתמטיקה שהוצע על-ידי מרטיו וזן (Di Martino & Zan, 2010) והמתייחס לשלושה ממדים: (1) תפיסת המתמטיקה, למידתה והוראתה (vision of mathematics), (2) תפיסת המסוגלות העצמית במתמטיקה (perceived competence), ו-(3) נטייה רגשית כלפי המתמטיקה (emotional dimension). ממצא עיקרי של המחקר של מרטיו וזן (Di Martino & Zan, 2010) היה שהתחושות כלפי מתמטיקה שמביע תלמיד עשויות לסמן סימנים חשובים עבור המורה המבקש להבין את עמדות התלמיד למתמטיקה ואת תחושת המסוגלות העצמית שלו. המודל הזה נבחר לשימוש במחקר שלנו מכיוון שהשימוש בו יאפשר לנו לחקור את ההיבטים העיקריים שבהם עוסקת שאלת המחקר: עמדות התלמידים כלפי הוראה ולמידה של מתמטיקה, המסוגלות העצמית שלהם ורגשות, כפי שחוו אותם לפני מגפת הקורונה ושימוש בה"ה במהלך המגפה. המחקר מתמקד בשאלה: מה מאפיין את עמדות התלמידים הלומדים מתמטיקה בכיתה י' ב-5 יחידות לימוד ביחס להוראה היברידית במתמטיקה בתקופת מגפת הקורונה לעומת עמדותיהם ביחס להוראה "רגילה" בכיתה כפי שחוו לפני המגיפה? העמדות ייבחנו לגבי שלושת הממדים: המתמטיקה, למידתה והוראתה, המסוגלות העצמית במתמטיקה והנטייה הרגשית כלפי המתמטיקה.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר וכלי המחקר

איתרנו שבעה מורים למתמטיקה שלימדו בתקופת הקורונה כיתות י"א ברמת 5 יחידות לימוד באופן היברידי. מורים אלה בחרו תלמידים לביצוע הראיונות. סך הכל נבחרו על ידי אותם מורים 24 תלמידים אותם ראיינו למחקר. התלמידים נבחרו מרמות הישגים שונות (לפי דעת מוריהם): מתקשים, בינוניים ומצטיינים. בחרנו בתלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה גבוהה מכיוון שנוכחותם בשיעורי מתמטיקה

בתקופת ההוראה ההיברידית הייתה הגבוהה ביותר מבין שלוש רמות הלימוד במתמטיקה בישראל, מה שעשוי לשקף תמונה ברורה יותר של החוויה האישית של התלמידים במהלך התקופה הזאת.

איסוף הנתונים נעשה באמצעות ראיונות אישיים חצי מובנים אשר כללו שאלות המתייחסות אל עמדותיהם של התלמידים כלפי שלושת הממדים (Di Martino & Zan, 2010) (1) המתמטיקה, למידתה והוראתה, (2) מסוגלותם העצמית ביחס למתמטיקה ו-(3) הנטייה הרגשית שלהם כלפי המתמטיקה. השאלות המרכזיות שבהן התמקד הראיון היו: מה מאפיין את שיעורי המתמטיקה, האם התלמיד אוהב מתמטיקה, כיצד התלמיד רואה את המתמטיקה, כיצד התלמיד תופס את חשיבות למידת המתמטיקה, לו היה במקום המורה - מה התלמיד היה משנה בשיעורי המתמטיקה, מה מאפיין את ההשתתפות של התלמיד בשיעורי המתמטיקה, האם התלמיד חושב שהוא מצליח במתמטיקה, ומה התלמיד עושה כאשר הוא מתקשה. ביחס לכל נושא התבקשו התלמידים להשוות בין הוראה "רגילה" של המתמטיקה, כפי שחוו לפני תקופת הקורונה, ובין ההוראה ההיברידית המשלבת הוראה מרחוק עם הוראה תוך כיתתית, כפי שחוו בתקופת הקורונה. כמו כן, לאורך הראיון התבקשו התלמידים להסביר בפירוט את תשובותיהם ולתת דוגמאות מהתנסותם בפועל. הראיונות התבצעו מרחוק ("בזום") וארכו כשעה עד שעה וחצי כל אחד.

ניתוח הנתונים

הראיונות תומללו ונקראו בשלמותם מספר פעמים. ניתוח הנתונים שילב ניתוח מכון וניתוח אינדוקטיבי (Patton, 2002). בניתוח המכון, אמירות התלמידים מוינו בהתאם לשלושת ממדי המודל: [1] אמירות שקודדו כ'עמדות ביחס למתמטיקה, למידתה והוראתה' התמקדו בתפיסות של אופי המתמטיקה, חשיבותה של המתמטיקה בעיניהם, ובתפיסות התלמידים ביחס לתהליכי למידת והוראת המתמטיקה, פעילויות מתמטיות וארגון הלמידה. [2] אמירות שקודדו כ'עמדות ביחס למסוגלות העצמית במתמטיקה' התמקדו בתפיסות התלמידים את היכולת שלהם במתמטיקה, את החוזקות והחולשות שלהם, את יכולת התמודדותם עם קשיים ואת המסוגלות שלהם להשתתף בצורות שונות של למידה (כגון למידה עם עמיתים או למידה אינדיבידואלית). [3] אמירות שקודדו כ'נטייה רגשית כלפי המתמטיקה' התמקדו בהבעת רגשות של התלמידים כלפי מקצוע המתמטיקה, כלפי מופעים שונים של למידה והוראה של המתמטיקה וכיו"ב. בניתוח אמירות התלמידים נערכה הבחנה בין אמירות המתייחסות להוראה ה"רגילה" לפני תקופת הקורונה ובין אמירות המתייחסות להוראה ההיברידית (על מופעה השונים) בתקופת הקורונה. לאחר מכן, נעשה ניתוח תוכן אינדוקטיבי לבנייה של קטגוריות לכל אחד משלושת הממדים. כמו כן זוהו שלושה פרופילים שונים של תלמידים ביחס לשינויים שחלו בעמדותיהם במהלך ההוראה ההיברידית במתמטיקה.

ממצאים ודין

אמירות התלמידים בכל ראיון מוינו בהתאם לשלושת ממדי המודל. ניתוח אינדוקטיבי של אמירות התלמידים זיהה קטגוריות ביחס לעמדות התלמידים במהלך חוויית ההוראה ההיברידית יחסית לחווייתם לפניה. אחד הממצאים החשובים של המחקר קשור בהתעוררות האחריות ללמידת המתמטיקה בתקופת ההוראה ההיברידית בקרב מרבית התלמידים שראיינו (20 מתוך 24). חלק מהתלמידים הסבירו שינוי זה בהכרח לקחת אחריות וללמוד לבדם כדי ל"השלים חומר" שהתקשו ללמוד בשיעורים מרחוק. חלקם שייכו זאת גם לנגישות חומרי הלמידה במתמטיקה אשר לא היתה קודם לכן. ממצא חשוב נוסף קשור בהתעצמות ההסתמכות של התלמיד על עצמו בלמידת המתמטיקה במהלך ההוראה ההיברידית. לפני כן, לדברי רוב התלמידים (19 מתוך 24), הם היו בדרך כלל סומכים על המורה כאשר הם נתקלים בחומר מתמטי קשה או כאשר מתקשים בפתרון שאלה מתמטית כי הם היו מודעים לכך שהם נפגשים עם המורה בשיעור הבא בתוך הכיתה. בתקופת ההוראה ההיברידית, לעומת זאת, הם הרבו לנסות לפתור בכוחות עצמם לפני פנייתם לבקש עזרה מהמורה, מהעמיתים או בבית. לצד התעצמות תחושת האחריות וההסתמכות העצמית, רוב התלמידים (16 מתוך 26) ציינו כי החשיבות שהם מקנים להשקעה בלימוד המתמטיקה גברה במהלך ההוראה ההיברידית. ממצאים אלה דומים לממצאי מחקר שנערך באוניברסיטה (Abrosimova, 2020) לפיהם במעבר להוראה מרחוק, כאשר סטודנטים עמדו בפני קושי בלמידת המתמטיקה, הם נטו להתמודד בעצמם עם הקושי – סימן ללקיחת האחריות על הלמידה על עצמם. לקיחת האחריות בלמידה תורמת להבנה עמוקה יותר לחומר הנלמד ולרכישת מיומנויות ואסטרטגיות למידה (Carpenter & Pease, 2013). יתר על כן,

אחריות על הלמידה מהווה מרכיב חשוב בהצלחת תלמידים מכיוון שלומד אחראי תופס את האחריות על הלמידה שלו ככלי להשגת הצלחה והתקדמות במקצוע (Roper, 2007). באופן דומה, הסתמכות עצמית בלמידה מיוחסת ללומדים המנהלים את הלמידה שלהם, עוסקים בניטור ובקרה, בעלי מוטיבציה פנימית ופעילים בתהליך התלמידה שלהם כדי להשיג את המטרה הלימודית אליה הם שואפים (Ramdass, & Zimmerman, 2008).

לצד המאפיינים החיוביים שחוו התלמידים במהלך ההוראה ההיברידית נמצאו גם עדויות להיבטים שליליים שלה. יותר ממחצית התלמידים (13 מתוך 24) ציינו שהסחות הדעת שהם נחשפים אליהן בשיעורים מרחוק מהבית ואי-נוכחות פיזית של המורה הקשו עליהם להתרכז. לדבריהם, קשר העין עם המורה ושפת הגוף שלה הם גורמים קריטיים לריכוז שלהם בשיעורים, דבר שהשפיע לרעה על הבנתם את החומר. בקשר למעורבות והשתתפות התלמידים בשיעורים, כשליש מהתלמידים העידו שהמעורבות שלהם בשיעורי המתמטיקה גברה בתקופת ההוראה ההיברידית, יותר משליש (10 תלמידים) ציינו שהיא פחתה והשאר (6 תלמידים) ציינו שהמעורבות וההשתתפות בשיעורי המתמטיקה בתקופת הקורונה נשארה באותה מידה יחסית למה שהיה לפני המגפה. סיבה אחת, לדבריהם, קשורה בקושי בריכוז ופספוס חומר שהפחית אצלם את הביטחון העצמי להשתתף בשיח הכיתתי. סיבה נוספת קשורה לבושה לפתוח את המיקרופון ולחשוף בכך את רעשי הרקע בבית.

ניתוח הראיונות זיהה שלושה פרופילים שונים של תלמידים ביחס לשינויים שחלו בעמדות כלפי המתמטיקה ולמידתה במהלך ההוראה ההיברידית: הפרופיל הראשון ("החיובי", תשעה תלמידים מתוך ה-24) מאופיין בשינוי חיובי בעמדות התלמידים במהלך ההוראה ההיברידית ביחס למרבית הקטגוריות. הפרופיל השני ("המשולב", 11 תלמידים) מאופיין בשינוי חיובי אצל כל תלמיד, ביחס לחלק מהקטגוריות, לצד חוויה שלילית ביחס לקטגוריות אחרות. הפרופיל השלישי ("השלילי", ארבעה תלמידים) מאופיין בחוויות שליליות יותר יחסית לשני הפרופילים האחרים, ביחס למספר קטגוריות אצל כל תלמיד. טבלאות 1-3 מציגות את שלושת הפרופילים. הצבע הירוק מייצג עלייה בחיוביות העמדה של התלמיד; הצבע האדום מייצג ירידה בחיוביות העמדה של התלמיד; הצבע הלבן מייצג שימור בחיוביות העמדה של התלמיד; הצבע הלבן מייצג קטגוריות אשר לא עלו בראיון עם התלמיד.

טבלאות 1-3

דוגמאות של תפיסות שלושה תלמידים שכל אחד שייך לאחד משלושת הפרופילים ביחס לשינויים שחלו בעמדותיהם במהלך ההוראה ההיברידית

תפיסות התלמיד השייך לפרופיל השלילי				תפיסות התלמיד השייך לפרופיל המשולב				תפיסות התלמיד השייך לפרופיל החיובי			
נטייה	מסוגלות עצמית	תפיסת המתמטיקה		נטייה	מסוגלות עצמית	תפיסת המתמטיקה		נטייה	מסוגלות עצמית	תפיסת המתמטיקה	
		הוראתה ולמידתה	למידת המתמטיקה			הוראתה ולמידתה	למידת המתמטיקה			הוראתה ולמידתה	למידת המתמטיקה
רגשית כלפי מתמטיקה		התמודדות עם קשיים	אחריות ללמידה	רגשית כלפי מתמטיקה		התמודדות עם קשיים	אחריות ללמידה	רגשית כלפי מתמטיקה		התמודדות עם קשיים	אחריות ללמידה
מידת החיבור למתמטיקה		קבלת משוב	הסתמכות עצמית בלמידה	מידת החיבור למתמטיקה		קבלת משוב	הסתמכות עצמית בלמידה	מידת החיבור למתמטיקה		קבלת משוב	הסתמכות עצמית בלמידה
			ריכוז בלמידה				ריכוז בלמידה				ריכוז בלמידה
			חשיבות החשקעה במקצוע				חשיבות החשקעה במקצוע				חשיבות החשקעה במקצוע
			מידת נגישות וזמינות החומר				מידת נגישות וזמינות החומר				מידת נגישות וזמינות החומר
			השתתפות בלמידה				השתתפות בלמידה				השתתפות בלמידה

למחקר זה מספר תרומות אפשריות. מבחינה תיאורטית, המחקר מצביע על הערך המוסף שהקנתה ההוראה ההיברידית ללמידה של התלמידים: התעוררות האחריות ללמידת מתמטיקה ולהשלמת החומר המתמטי שבו התקשו, והתעצמות ההסתמכות העצמית בלמידת המתמטיקה בקרב התלמידים. ממצאים אלו נמצאו בקרב רוב משתתפי המחקר הנוכחי. לקיחת אחריות על למידת המתמטיקה מעודדת את התלמידים לפתח הרגלי לימוד ואסטרטגיות יעילות מה שיכול להביא להבנה עמוקה יותר ולשימור של הידע המתמטי, בנוסף לכך הם הופכים למשתתפים פעילים בתהליך הלמידה

שלהם, מה שיכול להוביל לתחושת הישג ומוטיבציה גדולה יותר להצטיין במתמטיקה. ההסתמכות העצמית בלמידת מתמטיקה מעודדת את התלמידים לחשוב בצורה ביקורתית, לנתח בעיות ולפתח פתרונות יצירתיים, שניתן ליישם במצבים שונים בחיים האמיתיים. יתר על כן, הם לומדים כיצד לרכוש ידע חדש באופן עצמאי ולהסתגל לסביבות למידה משתנות (Lau et al., 2018). כיוון אפשרי למחקר המשך הינו לחקור לעומק יותר ובקנה מידה גדול יותר באילו מובנים ובאילו הקשרים ה"ה מעצימה את האחריות וההסתמכות העצמית, והאם ניתן לתרגם ידע זה להוראה והלמידה כיום. שלושת הפרופילים המסתמנים בקרב התלמידים מהווים בסיס להמשך חקירה ולניסיון לחפש קשרים בין מאפיינים שונים של תלמידים והשלכות של למידה במסגרת ה"ה. למשל, מה מאפיין תלמידים שההוראה ההיברידית תרמה להם במכלול ההיבטים? מה מאפיין תלמידים שההוראה ההיברידית היוותה עבורם התנסות מורכבת בהיבטים מסוימים? **מבחינה מתודולוגית**, הקטגוריות שעלו בניתוח הראיונות ביחס לשלושת הממדים המרכיבים את המודל של די מרטינו וזאן (Di Martino & Zan, 2010) ובנית שלוש הפרופילים ביחס לשינויים שחלו בעמדות התלמידים כלפי המתמטיקה, למידתה והוראתה במהלך ההוראה ההיברידית, יכולים לשמש חוקרים אחרים בניתוח עמדות של תלמידים כלפי ה"ה במתמטיקה. **מבחינת התרומה לשטח**, ממצאי המחקר מצביעים על יתרונות וחסרונות שחוו התלמידים בהוראה ההיברידית של המתמטיקה. אומנם בשלב זה הממצאים מוגבלים למספר קטן של תלמידים, עם זאת מסתמנת הכדאיות לחשוב על שילוב של הוראה פרונטלית עם הוראה מרחוק בהוראה השגרתית של המתמטיקה ולא רק במצבי חירום. כמו כן, הקטגוריות שזוהו והפרופילים שנבנו עשויים לשמש בסיס לדיון עם מורים ומורי מורים על ה"ה שתוכל לספק מענה לתלמידים שונים.

רשימת מקורות

- Alabdulaziz, M. S. (2021). COVID-19 and the use of digital technology in mathematics education. *Education and Information Technologies*, 26(6), 7609-7633.
- Abrosimova, G. A. (2020). Digital literacy and digital skills in university study. *International Journal of Higher Education*, 9(8), 52-58.
- Carpenter, J. P., & Pease, J. S. (2013). Preparing students to take responsibility for learning: The role of non-curricular learning strategies. *Journal of Curriculum and Instruction*, 7(2), 38-55.
- Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 27-48.
- Ewing, L. A., & Cooper, H. (2021). Technology-enabled remote learning during Covid-19: Perspectives of Australian teachers, students and parents. *Technology, Pedagogy and Education*, 30(1), 39-54. <https://doi.org/10.1080/1475939X.2020.1868562>
- Ferah-Ozcan, A., & Saydam, E. N. (2022). The Opinions of Classroom Teachers on Mathematics Learning Losses During the Pandemic Period. *Journal of Qualitative Research in Education*, (30).
- Lau, C., Kitsantas, A., Miller, A. D., & Drogin Rodgers, E. B. (2018). Perceived responsibility for learning, self-efficacy, and sources of self-efficacy in mathematics: a study of international baccalaureate primary years programme students. *Social Psychology of Education*, 21, 603-620.
- Niranjan, P., (2020). Corona virus Pandemic impact on Global Education: A Blessing in disguise. *Sustainable Humanosphere*, 16, (2).
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. sage.
- Ramdass, D., & Zimmerman, B.J. (2008). Effects of Self Correction Strategy Training on Middle School Students' Self-Efficacy, Self-Evaluation, and Mathematics Division Learning. *Journal of Advanced Academics*, 20, 18-41.
- Roper, A.R. (2007). How students develop online learning skills. *Educause Quarterly*, 30(1), 62-64.



אחת המטרות המרכזיות בהכשרת מורים היא פיתוח מיומנויות הוראה לקידום החשיבה המתמטית של התלמידים (Jacobs et al., 2010). מטרה נוספת היא לגשר על הפער בין התיאוריה לפרקטיקה (Kennedy, 2016). אחד האמצעים להשגת מטרות אלו הינו שימוש באירועי הוראה קריטיים במתמטיקה, המוגדרים במחקר זה כרגעים שבהם החשיבה המתמטית של התלמידים מתבטאת בשיעור ובכך יכולה לספק הזדמנויות למורים להעמיק יותר ברעיון המתמטי הנידון בשיעור (Rotem & Ayalon, 2018). מחקרים מצביעים על מיומנויות ה'נוטיסינג', הכוללות את הזיהוי, הפרשנות והתגובה של המורה לאירועי הוראה קריטיים, כמיומנויות המהוות מרכיב מרכזי בהוראה ממוקדת תלמיד (Jacobs et al., 2010). במסגרת הנוטיסינג, המורה נדרשת לגלות רגישות לדרכי החשיבה של התלמידים הבאות לידי ביטוי בשיעור, ולהשתמש בתובנות העולות מהן כדי לקדם את ההבנה והלמידה (Van Es & Sherin, 2008).

אחת הדרכים המשמשות לפיתוח של מיומנויות הנוטיסינג בקרב מורים הינה ניתוח אירועי הוראה קריטיים כתובים. האירועים מוצגים למורים בצורת דיווח על התרחשויות משמעותיות בשיעורי מתמטיקה, בהם נדרש הנוטיסינג של המורה למתרחש באירוע, למתן פירוש לסיטואציה, מתן הסבר להזדמנויות ללמידה ומתן אלטרנטיבה לתגובת המורה. ניתוח איכותי של האירוע הקריטי על-ידי המורה יכול לביסוס לפרשנויות שהיא נותנת לסיטואציה ולניתוח היתרונות והחסרונות של האלטרנטיבות שהיא מציעה לפעולות המורה באירוע, תוך התייחסות למתמטיקה הספציפית הרלוונטית לאירוע (Ayalon & Rotem, 2018; Santagata, 2007). בספרות המחקרית קיימת התייחסות לחשיבותם של אירועי הוראה קריטיים, אך חסרה התייחסות לקשרים אפשריים בין מאפיינים של אירועים לבין הנוטיסינג אליהם. ההנחה העומדת בבסיס מחקר זה היא שאירועים בעלי רמת פירוט שונה יזמנו הזדמנויות שונות לנוטיסינג, מכיוון שהרכיבים של האירוע, כמו פירוט האינטראקציה בכיתה, ישפיעו על מה שהמורה שמה לב אליו ועל הפרשנות שלה לאירוע. מכיוון שלא מצאנו התייחסות בספרות לקשר אפשרי בין רמת פירוט של אירוע כתוב ובין ההזדמנויות לנוטיסינג של מורים, הנחה זו אינה מבוססת על ספרות, אלא על "הגיון בריא" (common sense).

מטרת המחקר ופרספקטיבה תיאורטית

מטרת המחקר הינה לבחון קשרים אפשריים בין נוטיסינג של מורים לאירוע קריטי כתוב לבין רמת פירוט התיאור של האירוע. שאלת המחקר היא: מה דומה ומה שונה בנוטיסינג של מורים לאירוע קריטי בין גרסתו המצומצמת לבין גרסתו המורחבת? לצורך מחקר זה השתמשנו במסגרת האנליטית לאפיון אירועים מתמטיים קריטיים בכיתה, שהוצעה על-ידי סטוקרו וחב' (Stocker et al., 2020). במאמר המוצע כאן, **תיאור מצומצם של אירוע** יכול את הרכיבים המינימליים הכרחיים כדי שהאירוע יוכל להיקרא אירוע קריטי על-פי המסגרת של סטוקרו וחב' (Stocker et al., 2020): הקשר האירוע, המשימה המתמטית, אמירת התלמיד ואמירת המורה. **תיאור מורחב של אירוע** כולל את הרכיבים הנ"ל בתוספת תיאור האינטראקציה בכיתה. במסגרת האינטראקציה נחשפים לאמירות נוספות של תלמידים ו/או המורה וניתן לקבל תמונה רחבה יותר על האירוע, להבין את ההקשר של האמירות ולהבין בצורה טובה יותר את החשיבה המתמטית של התלמידים שעמדה מאחוריהן. לכן ניתן לשער שהנוטיסינג לגרסה המורחבת יהיה שונה מזו של הגרסה המצומצמת.

לשם בחינה של שאלת המחקר נבנו שתי גרסאות לשלושה אירועים קריטיים שונים. האירועים נבחרו מסוגים שונים של אירועים קריטיים כדי לבחון את הנוטיסינג במגוון של אירועים שונים. **הגרסה הראשונה הינה מצומצמת** יותר ומכילה רכיבים הכרחיים ומינימליים כדי שהאירוע יכלול את רכיבי

מודל ה-MOST: הקשר האירוע, המשימה המתמטית עליה עובדים, אמירת התלמיד/ה ואמירת המורה. הגרסה השנייה של אירוע ההוראה הינה מורחבת ומכילה את הרכיבים הנ"ל בתוספת תיאור האינטראקציה בכיתה.

מתודולוגיה

המשתתפות במחקר הן שבע מורות (חן, הניה, רות, עדן, נעמה, דינה וזוהר; שמות בדויים) המלמדות בכיתות העל-יסודי, בעלות ותק של 5 שנים ומעלה, ובעלות תארים אקדמאים בחינוך. רוב המורות מגישות את תלמידיהן לבגרות במתמטיקה 3, 4, 5 יח"ל. המחקר נערך בשני שלבים. בשלב הראשון, הוקדשו שלושה מפגשים שבועיים עם המורות לאיסוף נתוני המחקר. בכל מפגש המורות קיבלו טופס דיווח המתאר אירוע קריטי אחד שהתרחש בשיעור מתמטיקה והנחיות לניתוח (תיאור האירוע, פרשנות, והצעות לאלטרנטיבות הוראה). תחילה הן קיבלו את האירוע בגרסתו המצומצמת והתבקשו לנתחו. לאחר שסיימו והגישו את הניתוח, קיבלו את אותו האירוע בגרסתו המורחבת והתבקשו לנתח גם את הגרסה השנייה. כך מידי שבוע ניתחו אירוע אחד על שתי גרסאותיו. כל מורה עבדה באופן עצמאי. בסה"כ התקבלו 42 ניתוחים של המורות לאירועים הקריטיים. בשלב השני, נערכו ראיונות חצי-מובנים עם כל אחת מהמורות שהשתתפו בשלב הראשון במטרה להבין את דרכי החשיבה של המורות כאשר הן ניתחו את האירועים. הראיון כלל שאלות כגון: מה היה דומה ומה היה שונה, מנקודת מבט, בניתוחים שלהן בשתי הגרסאות? אילו רכיבים באירוע עזרו להן בהבנת החשיבה המתמטית של התלמיד/ה? מה היה חסר להן כשניתחו את האירוע?

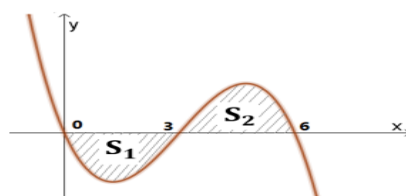
מאמר זה מתמקד בחלק הפרשנות שניתנו לאמירות התלמיד/ה ולאמירות המורה באירוע. ניתוח הנתונים נערך בחמישה שלבים: (1) ניתוח הפרשנות על-פי שני קריטריונים: א. **מהות הפרשנות**, כלומר תוכן הפרשנות לאירוע, ב. **רמת הפרשנות**, שהוגדרה על-פי קריטריונים להערכת ניתוח שנבחרו על בסיס עבודתן של איילון ורותם (Ayalon & Rotem, 2018): ככל שהמורה המנתחת את האירוע נותנת ביסוס לפרשנותה ומעגנת את הסבריה בהקשר מתמטי ספציפי כך היא תקבל ציון גבוה יותר בניתוח (0-3). (2) בדיקה האם היה שינוי במהות הפרשנות בשתי הגרסאות; (3) בדיקה של שינוי רמת הפרשנות בין הגרסאות לפי המחווה; (4) קביעה האם היתה ירידה/ עליה/ לא היה שינוי במהות וברמת הפרשנות; (5) זיהוי פרופילים על-פי מהות ורמת הפרשנות מתוך הנתונים.

ממצאים ודיון

בתום תהליך הניתוח זוהו שלושה פרופילים של פרשנות:

פרופיל מס' 1- **מהות הפרשנות ורמת הפרשנות נשארו זהות בשתי הגרסאות של האירועים** (31 ניתוחים מתוך 42). פרופיל זה הופיע אצל כל שבע המורות. יש לציין כי אופי הביסוס לפרשנות היה שונה: בגרסה המצומצמת המורות הסתמכו על הניסיון שלהן בהוראה ובגרסה המורחבת הן הסתמכו על האירוע עצמו. הראיונות עם המורות לאחר ניתוח האירועים לימדו אותנו כי העמידה אל מול גרסה מצומצמת של אירוע איפשרה להן להיות בעמדת חקר בניסיון "להשלים" את האירוע ולהעלות שאלות והשערות ביחס לגורמים שהובילו לאמירות התלמידים והמורה באירוע. מתוך מאמרו של ואן אס ושרין (2021) נובע שעמדת חקר מפתחת את מיומנות הפרשנות של המורים בכך שהם שואלים שאלות ומנסים לברר עוד פרטים על האירוע.

פרופיל מס' 2- **מהות הפרשנות השתנתה בגרסה המורחבת, אך רמת הפרשנות נותרה זהה** (7 ניתוחים מתוך 42). פרופיל זה הופיע אצל 3 מורות מתוך 7 המורות שהשתתפו במחקר. בפרופיל זה רמת הפרשנות נותרה זהה אך מהות הפרשנות השתנתה. לדוגמא: באירוע 2 בגרסתו המצומצמת, שעסק בשטח של פונקציה מעל ומתחת ציר ה-x, התלמידים התבקשו לענות על השאלה:



המשימה המתמטית: בצויר מתואר גרף הפונקציה

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x$$

הגרף חותך את ציר ה-x בנקודות

$$(0,0), (3,0), (6,0)$$

$$א. הוכח: \int_0^6 f(x) dx = 0$$

$$ב. היעזר בנתונים ובסעיף א' והוכח: S_1 = S_2$$

באירוע שלמה מבצע נכון את סעיף א' אך לא מבין את התשובה: הוא חושב שהוא חישב שטח, והרי שטח לא יכול לצאת אפס. המורה נעמה כתבה בפרשנות שלה לחשיבת התלמיד: "שלמה לא ידע בהתחלה שצריך לחלק את שני השטחים ולהסתכל על כל אחד לחוד ואז לחבר. התלמידים ידעו שהשטח מתחת ציר ה-x הוא שלילי, הם יכלו גם לפתור בצורה מספרית ולמצוא את שני השטחים אבל הם פתרו בדרך גרפית ובעזרת ידע קודם, זה היה בהכוונת המורה. ואז עשו כמו שהוסבר בסעיף א'."

מהות הפרשנות של נעמה: המורה מסבירה שהטעות של שלמה הייתה בכך שלא חילק לשני שטחים. המורה לא הבחינה ששלמה חישב נכון לפי המשימה בסעיף א, אך הטעות שלו הייתה שהוא קרא לזה חישוב שטח במקום אינטגרל מסוים. **רמת הפרשנות:** רמה 1. המורה מפרטת את החשיבה המתמטית של התלמיד.

בגרסה המורחבת בתוספת האינטראקציה בכיתה, כותבת אותה מורה: "אורטל שמה לב שיש שטח מתחת לציר ה-x וידעה שצריך לשים אותו בערך מוחלט כדי לקבל את השטח. אביב אשר לא הסכים ששטח יכול להיות שלילי... הוא לא ידע את ההסבר לערך השלילי שמקבלים כאשר השטח מתחת לציר ה-x. השיח המתמטי בין התלמידים בהכוונת המורה הצליח להוביל את התלמידים למסקנה ולהראות להם מה ההבדל בין הערך המספרי שנותן האינטגרל לבין הערך של השטח."

מהות הפרשנות - האמירות האחרות של התלמידים גרמו למורה לשים לב ולהבחין בעקרון החשוב כאן להבדל בין אינטגרל מסוים לחישוב שטח. המידע שנוסף למורה בעקבות קריאת האינטראקציה עם תלמידים נוספים בכיתה גרמה לשינוי תוכן הפרשנות שלה. יחד עם זאת, **רמת הפרשנות:** נשארה זהה ולא מפורטת או מעמיקה יותר.

פרופיל מס' 3- **מהות הפרשנות השתנתה בגרסה המורחבת, ורמת הפרשנות עלתה** (4 ניתוחים מתוך 42). פרופיל זה הופיע אצל שלוש מורות מתוך השבע. מכיוון שלא נמצא קשר בין מורה מסוימת לפרופיל מסוים אז לא ניתן להסביר את המקרים אך זה מראה שלא תמיד הפרשנויות זהות. מעניין להמשיך לחקור זאת מתי הפרשנויות יהיו זהות בין שתי הגרסאות ומתי שונות ובעיקר לחקור זאת עם מורים עם פחות ניסיון בהוראה, שיהיה להן קשה להשלים את האירוע מניסיונם ויתכן ורמת פרשנותם תעלה ברוב המקרים.

בתחילת המחקר המחשבה הייתה שיימצאו הבדלים משמעותיים בפרשנות המורות בין הגרסה המצומצמת למורחבת. אמנם אין מחקרים שבחנו קשרים אפשריים בין מאפיינים של אירועים לבין הנוטיסינג אליהם, אך ניתן היה להניח בהתבסס על מחקרם של סטוקרו וחב' (Stocker et al., 2020) שהאינטראקציה תעלה את רמת הפרשנות של האירוע. לבסוף ראינו שרק בחלק קטן מהמקרים האינטראקציה אכן העלתה את רמת הפרשנות. על-סמך הראיות עם המורות מצאנו שניסיון בהוראה אפשר להן להעלות השערות ביחס למתרחש באירוע המצומצם ולהציע פרשנויות, שקיבלו חיזוק ואוששו בהמשך, בניתוח האירוע המורחב. במגבלות המחקר המצומצם, ממצאים אלה תורמים לגוף הידע התיאורטי במספר מישורים. ראשית, זהו המחקר הראשון, למיטב ידיעתנו, שניסה לבדוק קשרים אפשריים בין מאפיינים של אירועים לבין הנוטיסינג אליהם. מחקר זה מציע, בהקשר של מורים מנוסים, שמידת הפירוט של אירוע אינה קשורה בהכרח לפרשנות "טובה" יותר, שכן המורים משתמשים בניסיונם כדי "להשלים" את פרטי האירוע ולתת פרשנות מבוססת. אחת השאלות העולות ממחקר זה הינה מה יימצא במחקר דומה עם מורים חדשים או סטודנטים להוראה, שלהם פחות ניסיון בהוראה. האם, למשל, הם יעלו שאלות והשערות כפי שהעלו המורים המנוסים במהלך ניתוח האירוע המצומצם? ואם כן, מה יאפיין השערות אלו?

תרומה נוספת לגוף הידע התיאורטי קשורה במחווה המשמש חוקרים להעריך פרשנות של מורים לאירועי הוראה. מחקרים העוסקים בנוטיסינג של מורים עד כה התייחסו לרמת ביסוס הפרשנות ללא הבחנה ביחס לסוג הביסוס, כלומר: ביסוס על האירוע עצמו, התנסות קודמת בהוראה ו/או הספרות המחקרית. ממחקר זה רואים שישנה משמעות לסוג הביסוס של האירוע: הסתמכות על ניסיון בהוראה בניתוח של אירוע מצומצם, או הסתמכות על האירוע עצמו, כאשר האירוע כולל גם את האינטראקציה בכיתה. זה השפיע על האם הפרשנות היא בצורת שאלות והשערות המפתחת את הנוטיסינג או פרשנות בצורה וודאית. השפיע על מהות הפרשנות ושינה את ההבנה של האירוע. מומלץ גם לבחון קשרים אפשריים בנוטיסינג של מורים לאירוע מצומצם ולאירוע מורחב בקרב מספר רב יותר של מורים

כדי לבחון בבירור יותר את המקרים שבהם הפרשנות השתנתה ושבהם שעלתה רמת הניתוח. במחקר הנוכחי אלה הופיעו במעט מקרים ויתכן כי מדגם רחב יאפשר להבין תופעות אלה בצורה ברורה יותר. מבחינת התרומה לפרקטיקה, ממצאי המחקר יכולים לסייע למורי מורים המעוניינים להשתמש באירועים קריטיים בהכשרת מורים, בבחירה של האירועים שימשו לניתוח, ובהתאם לאוכלוסייה: האם ירצו לבחור באירוע מצומצם כדי לתת מקום להעלאת שאלות והשערות ביחס למתרחש באירוע, ואף לעירור של הפתעה וסקרנות, או באירוע מורחב, כדי לאפשר ניתוח המבוסס על סיטואציית ההוראה הנתונה. ייתכן גם שירצו להשתמש במערך הפעילות שאנו הצענו למורים, כלומר, לנתח אירוע מצומצם, לדון בפרשנויות השונות, ואז לנתח את האירוע המורחב, כדי לעמת את הפרשנויות שניתנו קודם לכן עם הפרשנויות העולות בהקשר לאירוע המפורט יותר. מערך כזה יכול לאפשר עמדת חקר, היכולה לפתח את מיומנות הנוטיסינג (Van Es & Sherin, 2021), וכן דיון בהשערות השונות ובביסוסן: על סמך האירוע הספציפי, על סמך ניסיון בהוראה, או אף על סמך ידע ממחקר. מבחינת התרומה המתודולוגית, המחקר מציע מחוון מעודן להערכה ולבחינה של פרשנות של מורים לאירוע הוראה, כפי שתואר למעלה.

ביבליוגרפיה

- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Kennedy, M. (2016). Parsing the practice of teaching. *Journal of Teacher Education*, 67(1), 6-17.
- Rotem, S.H & Ayalon, M. (2018). Using critical events in pre-service training: Examining the coherence level between interpretations of students' mathematical thinking and interpretations of teacher's responses. *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Umea, Sweden.
- Santagata, R., Zannoni, C., & Stigler, J. W. (2007). The role of lesson analysis in pre- service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video- based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(2), 123- 140.
- Van Es, E. A. & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24, 244-27.
- Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM-Mathematics Education*, 53(1), 17-27.
- Stockero, S. L., Leatham, K. R., Ochieng, M.A. et al. (2020) Teachers' orientations toward using student mathematical thinking as a resource during whole-class discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 237–267.



רקע תיאורטי

על אף ההתקדמות החברתית להשגת שוויון מגדרי, תפיסות הרואות את המתמטיקה כתחום גברי עדיין נמצאות אצל מורים באופן מרומז ומפורש (Jaremus et al., 2020). דוגמא לכך, מורים מעריכים את היכולת המתמטית של הבנים כגבוהה מזו של הבנות בהתייחסות לאותה עבודה מתמטית (Mccoy et al., 2020). בנוסף, מורים נוטים להעריך ולייחס סוגים שונים של חשיבה מתמטית באופן מגדרי. בפרט מייחסים לבנים חשיבה לוגית, חשיבה יצירתית וחשיבה אלגוריתמית ואנליטית יותר מבנות (Gallagher et al., 2000; Tiedemann, 2002), ואילו יוחס לבנות חשיבה סטנדרטית ואינטואיטיבית (Sumpter, 2016). תפיסות מגדריות אצל מורים בנוגע לסוגי חשיבה, עלולות להשפיע על תהליכי הוראה ואינטראקציה כיתתית, כמורים הם בעלי השפעה גדולה על התפתחות התלמידים ובחירתם האקדמית בעתיד (Tiedemann, 2002).

מדינת ישראל היא מדינה רב תרבותית, הבולטים בה פערים מגדריים במתמטיקה. בחברה היהודית, בדומה לרוב המדינות בעולם, פערים במתמטיקה הם לטובת הבנים. פערים הנמשכים בכל תקופת הלימודים בבית הספר, ואף יותר, עד בחירת מסלול הלימודים באקדמיה (ראמ"ה 2017). מנגד, התמונה בחברה הערבית שונה באופן חלקי, כך שבנות מצליחות במבחנים הארציים והבינלאומיים כמו מבחני הפיזה והמיצ"ב יותר מאשר בנים במהלך הלימודים הבית ספריים (ראמ"ה, 2017). אבל באקדמיה ייצוג הבנים בלימודי מקצועות עתירי מתמטיקה כמו מחשבים והנדסה גבוה באופן משמעותי מייצוג של בנות (Fuchs & Wilson, 2018), והבנות יותר פונות ללימודי חינוך (Arar & Haj-Yahia, 2016). במחקר הנוכחי אנו מתבססים על הפרספקטיבה שפערים מגדריים אינם מולדים (Joel et al., 2015) אלא הן תוצר של החברה. מחקר זה בוחן את תפיסות המורים בחברה הערבית וינסה לענות על השאלה: האם מורים למתמטיקה המלמדים בבתי ספר תיכוניים בחברה הערבית, מייחסים פתרונות המייצגים סוגים שונים של חשיבה מתמטית באופן מגדרי? אם כן, כיצד?

מתודולוגיה

המחקר נערך בקרב 123 מורים ומורות למתמטיקה, מבתי ספר תיכוניים בחברה הערבית. (86, 70%) מהם מורות ו- (37, 30%) מורים. כלי המחקר התבסס כמעט על שאלון של סמפטר (Sumpter, 2016), הכולל שמונה פתרונות לשתי בעיות מתמטיות. הבעיה הראשונה מתייחסת למציאת ערך מקסימלי לפונקציה, והבעיה השניה דורשת פתרון משוואה ממעלה ראשונה. שישה פתרונות (א'-ו') אומצו ממחקרה של סמפטר תורגמו לעברית ונוסחו בהתאם לתכנית הלימודים. שני פתרונות (ז'-ח') נוספים נבחרו מפתרונות תלמידי החוקרת הראשונה אשר התמודדו עם אותן שתי הבעיות בשאלון סמפטר. פתרונות (א', ה', ח') מייצגים חשיבה אלגוריתמית סטנדרטית לפי מה שנלמד בכיתה, פתרונות (ב', ו') מייצגים חשיבה יצירתית, והפתרונות (ג', ד', ז') מייצגים חשיבה אלגוריתמית עם הרבה אסטרטגיות (דוגמאות מוצגות באיור 1). עבור כל פתרון, המשתתפים התבקשו לבחור אחד מחמש האפשרויות עבור מי סביר יותר שפתר: 1. בהחלט בנים פותרים כך יותר מאשר בנות, 2. סביר להניח כי בנים פותרים כך יותר מאשר בנות, 3. בנים ובנות יכולים לפתור את התרגיל כך, 4. סביר להניח כי בנות פותרות כך יותר מאשר בנים, 5. בהחלט בנות פותרות כך יותר מאשר בנים. השאלון הופץ באופן דיגיטלי, קישור השאלון הופץ בקבוצות וואטסאפ של מורים

למתמטיקה בחברה הערבית והדרוזית עם הזמנה להשתתף (קבוצות מורים למתמטיקה וקבוצות פיתוח מקצועי). חלק מהנתונים נאספו במהלך השתלמויות של מורים שנעשו מרחוק וכללו מורים מכלל האזורים הערבים בישראל. לצורך ניתוח הנתונים קיבצנו את תגובות המורים לשלוש קטגוריות: בנים, בנות ואין הבדל. תחילה, בדקנו כמה מורים ענו באופן קבוע "אין הבדל" לאורך כל השאלון, לעומת המורים שבחרו מגדר כלשהו לפחות פעם אחת. בסוף, התמקדנו במורים שענו באופן מגדרי, בכל אחד משמונת הפתרונות. חישבנו את הסתברות ההתפלגות שיצאה בין ייחוס המורים את הפתרון לבנות או לבנים. בדקנו לפי מבחן הבינום את השערת האפס שמורים שמייחסים מגדר כלשהו עשויים לבחור באותה מידה שהפתרון שייך לבן או לבת, עם הסתברות בחירה 0.5.

איור 1

דוגמאות לפתרונות המייצגים סוגים שונים של חשיבה מתמטית

פתרון ו' המייצג חשיבה עם יותר מדריך אחת

מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר לפונקציה $y = 7 + 3x - x^2$ בקטע $[-1, 5]$.

כאשר גוזרים ומשווים לאפס. ניתן למצוא את המקסימום והמינימום, או למחות אחד מהם (גוזרים, משווים לאפס ומקבלים $y = 9.25$ עבור $x = 1.5$) מממ... הנגזרת שווה לאפס והכוננה היא שהשיפוע שווה לאפס.

אנזור את הפונקציה ואשווה לאפס:

$$0 = 3 - 2x$$

פתרתי את המשוואה וקיבלתי:

$$x = 1.5$$

רגע... (נמחכה 40 שניות) הפתרון לא הגיוני!

הפונקציה היא ריבועית וצריך לקבל שני ערכים. אחד חיובי ואחד שלילי כדי לקבל ערך מקסימלי וערך מינימלי.

אם אקח את הפתרון השלילי אקבל פתרון אחר לגמרי.

לכן התשובה $x = 1.5$ לא נכונה.

פתרון ו' המייצג חשיבה עם יותר מדריך אחת

מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר לפונקציה $y = 7 + 3x - x^2$ בקטע $[-1, 5]$.

כאשר גוזרים ומשווים לאפס. ניתן למצוא את המקסימום והמינימום, או למחות אחד מהם (גוזרים, משווים לאפס ומקבלים $y = 9.25$ עבור $x = 1.5$) מממ... אני תוהה מדוע!! חשבתי שאגיע לשני ערכים. מה עשיתי לא בסדר!!

אנסה לחשב במחשבון ערכי y עבור ערכי x בתחום הנתון.

קיבלתי:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	3	7	9	9	7	5	3

לפי טבלת הערכים, הערך הגדול ביותר הוא 9 והערך הקטן ביותר הוא 3.

אח הבנתי מה קרה... יש לי הערך 9.25 מהגזירה שעשיתי. הבנתי באמת וח חכם!!

או הערך הגדול 9.25 והערך הקטן 3.

פתרון ה' המייצג חשיבה יצירתית

פתרון ה' המייצג חשיבה יצירתית

פתרון המשוואה: $4 - x = 3x + 14$

אוקי, אני אפתור את המשוואה ע"י שרטוט שני גרפים. שתי המשוואות הן קו ישר, לכן נקודת החיתוך של שני הישרים היא התשובה, כי בנקודת החיתוך יש להם אותו ערך של x.

על מערכת הצירים אצייר את $4 - x$ (נכאשר $x = 0$ ערך הפונקציה 4. והשיפוע הוא שלילי לכן זה קו ישר יורד).

אם נסתכל על משוואה $3x + 14$ (משרטטים סקיצה לישר) נרד אקס חייב להיות שלילי!

אם $x = -2$ אציב באגף השמאלי וזה שווה ל 6, ואציב באגף הימני אקבל שזה שווה 8, והם לא שווים.

גם אם אציב $x = -3$ לא יהיו שווים. לכן אנסה מספר באמצע, עבור $x = -2.5$ קיבלתי באגף השמאלי והימני 6.5 וזו התשובה הנכונה.

ממצאים עיקריים

טבלה 1 מציגה ממצאי ייחוס המורים את הפתרונות לפי המגדר בשלוש קטגוריות של תגובות (בנים, בנות ואין הבדל). בנוסף מוצג ממוצע התגובות, תוצאות מבחן הבינום שמחשב את ההסתברות לבחור מגדר מסויים מתוך כלל התגובות של המורים שבחרו שיש הבדל מגדרי בהנחה עם הסתברות בחירה 0.5. דוגמה לחישוב עבור פתרון ב': ההסתברות לבחור בן פתר את הבעיה (37 מורים בחרו בבן) מתוך המורים שענו שיש הבדל מגדרי (51 מורים ענו בן או בת) היא $p = 0.001$. הסתברות זו מספיק קטנה כדי לדחות את השערת האפס ולטעון שסביר להניח שמורים ייחסו את הפתרון למגדר מסוים, מהנתונים מספר המורים שענו בן גדול ממספר המורים שענו בת נוכל להסיק כי פתרון זה יוחס לבנים.

התפלגות וממוצע תשובות המורים לשאלון (n=123)

סוג החשיבה בפתרון מתמטי	אחוז ההתאמה בין הפתרון וחשיבה	n (%) מספר המורים שענו אין הבדל (3)	n (%) מספר המורים שענו בת (4 או 5)	n (%) מספר המורים שענו בן (1 או 2)	p-value
א'. סטנדרטית	69%	85 (69%)	22 (18%)	16 (13%)	p=.209
ב'. סטנדרטית	93%	92 (75%)	13 (10%)	18 (15%)	p=.237
ג'. סטנדרטית	93%	82 (67%)	25 (20%)	16 (13%)	p=.106
ד'. יצירתית	53%	72 (59%)	14 (11%)	37 (30%)	***p<.005
ה'. יצירתית	69%	61 (50%)	21 (17%)	41 (33%)	**p=.008
ו'. אלגוריתמית	72%	76 (62%)	27 (22%)	20 (16%)	p=.19
ז'. אלגוריתמית	91%	73 (60%)	14 (11%)	36 (29%)	***p<.005
ח'. אלגוריתמית	95%	96 (78%)	11 (9%)	16 (13%)	p=.221
סה"כ		637 (65%)	147 (15%)	200 (20%)	

*p<0.05, ** p<0.01, *** p<0.001

לפי טבלה 1, עולה כי 65% מכל תגובות המשתתפים (8*123) וללא קשר לסוג החשיבה, בחרו באופן ניטרלי שאין הבדל בייחוס פתרונות מתמטיים באופן מגדרי. בקבוצת המשתתפים שבחר מגדר כלשהו, 20% בחרו בבן ו-15% בחרו בבת. עוד נמצא כי 40% משתתפים (33%) ענו באופן קבוע שאין הבדל בייחוס שמונת הפתרונות למגדר כלשהו. לפיכך, רוב המשתתפים תופסים שאין הבדל מגדרי בייחוס סוגי פתרונות מתמטיות, למשל בחמישה מתוך שמונת הפתרונות יותר מ-60% מהמורים בחרו שאין הבדל מגדרי. בשלושת המקרים שבהם הוצגו פתרונות עם חשיבה סטנדרטית (א', ב', ג') רוב המשתתפים בחרו שאין הבדל מגדרי בייחוס הפתרון דבר המעיד על כך שפתרון עם חשיבה סטנדרטי יכול לאפיין בנים וגם בנות ללא הבדל. עוד נמצא, ששני הפתרונות (ו', ח') המייצגים חשיבה אלגוריתמית עם אסטרטגיות שונות יוחסו ללא הבדל בין בנים ובנות.

יחד עם זאת עולה כי 83 מורים (67%) בחרו כי קיים הבדל מגדרי לפחות פעם אחת. מתוך ה-83 מהמשתתפים שבחרו פתרון באופן מגדרי, 39% ייחסו לפחות ארבעה מתוך שמונת הפתרונות למגדר כלשהו. פתרון ז' האלגוריתמי שהתאפיין בשימוש ביותר מדרך אחת לפתרון, יוחס על ידי משתתפי המחקר לבנים (p=.008). בשני הפתרונות (ד', ה') אשר מאופיינים בחשיבה יצירתית המשתתפים גם כן נטו לבחור בנים עם מובהקות סטטיסטית (פתרון ב' p=.001, פתרון ו' p=.008).

דיון

משתתפי המחקר אכן ייחסו חלק מהפתרונות באופן מגדרי, והחלק האחר ניטרלי המאפיין בנים ובנות ללא הבדל, באופן דומה למחקרה של סמפטר (Sumpter, 2016). בפרט פתרונות אשר מבוססים על חשיבה סטנדרטית נמצאו ניטרליים מבחינה מגדרית. בניגוד לממצא זה, חלק מהספרות יחסה חשיבה סטנדרטית באופן ישיר וברור לבנות שיש להן נטייה לעקוב אחרי אלגוריתם מסוים ומוגדר מראש (Cimpian et al., 2016). מתוך המורים שבחרו באופן מגדרי, רובם ייחסו את שני הפתרונות המייצגים פתרונות יצירתיים לבנים, בדומה למחקרם של גלאגר ודה לים (Gallagher & De Lisi, 1994) שהעלו סבירות גבוהה אצל בנים להשתמש בשיטות לא שגרתיות ולא נלמדו בכיתה ובניגוד לממצאה של סמפטר (Sumpter, 2016) שדווחה שחשיבה יצירתית לא יוחסה למגדר מסוים. חשיבה אלגוריתמית המבוססת על פתרון לפי אסטרטגיות שונות, יוחסה רק במקרה אחד מתוך שלושת המקרים לבנים, וזה תואם חלקית את ממצאי המחקר של סמפטר (Sumpter, 2016) שמצאה שחשיבה זו יוחסה לבנים. לסיכום, תפיסות מורים המשקפת

ייחוס החשיבה מתמטית מסדר גבוה לבנים אינה מסבירה פערים בבתי ספר לטובת הבנות, אך יכולים לשפוך אור למה ההצלחה שלהן לא משתקפת בייצוג הולם במקצועות עתירי מתמטיקה באקדמיה.

הערה: מחקר זה (מס' 21/2747) נתמך על-ידי הקרן הלאומית למדע.

רשימת מקורות

הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך (2017). תמונת מצב: לימודי המתמטיקה בישראל, מגמות וממצאים ממערכת החינוך בישראל, דוח מספר 2.

- Arar, K., & Haj-Yahia, K. (2016). Higher education and the Palestinian Arab minority in Israel. Palgrave Macmillan.
- Bell, K., & Norwood, K. (2007). Gender equity intersects with mathematics and technology: Problem- solving education for changing times. In D. Sadker & E. S. Silber (Eds.), Gender in the classroom (pp. 225–258). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cimpian, J. R., Lubienski, S. T., Timmer, J. D., Makowski, M. B., & Miller, E. K. (2016). Have Gender Gaps in Math Closed? Achievement, Teacher Perceptions, and Learning Behaviors Across Two ECLS-K Cohorts. *AERA Open*, 2(4), 233285841667361. <https://doi.org/10.1177/2332858416673617>
- Fuchs, H., & Wilson, T. F. (2018). Arab Israeli Women Entering the Labor Market: Higher Education, Employment, and Wages. *Taub Center, March*, 1–15. http://taubcenter.org.il/wp-content/files_mf/arabisraeliwomeninthelabormarket.pdf
- Gallagher, A. M., & De Lisi, R. (1994). Gender differences in Scholastic Aptitude Test: Mathematics problem solving among high-ability students. *Journal of Educational Psychology*, 86, 204–211.
- Joel, D., Berman, Z., Tavor, I., Wexler, N., Gaber, O., Stein, Y., Shefi, N., Pool, J., Urchs, S., Margulies, D. S., Liem, F., Hänggi, J., Jäncke, L., & Assaf, Y. (2015). Sex beyond the genitalia: The human brain mosaic. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 112(50), 15468–15473. <https://doi.org/10.1073/pnas.1509654112>
- Mccoy, S., Connor, P. O., Mccoy, S., Byrne, D., & Connor, P. O. (2020). *Gender Stereotyping in Parents' and Teachers' Perceptions of Boys' and Girls' Mathematics Performance in Ireland*.
- Sumpter, L. (2016). Investigating Upper Secondary School Teachers' Conceptions: Is Mathematical Reasoning Considered Gendered? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 347–362. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9634-5>
- Tiedemann, J. (2002). Teachers' Gender Stereotypes As Determinants of. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1), 49–62.



דווחי מחקר קצר



מבוא

עקב התפרצות נגיף הקורונה במרץ 2020, הודיע משרד החינוך בישראל על סגירת בתי הספר וניהול הוראה מקוונת, זאת בדומה למתרחש בכל העולם. המעבר המהיר, הבלתי צפוי וה"כפוי" מהוראה פנים-אל-פנים להוראה מרחוק עורר אתגרים ואילוצים רבים, אך גם הזדמנויות לשינוי ולחדשנות פדגוגית (Drijvers et al., 2021). באוגוסט 2021 הצהיר משרד החינוך בישראל ששנת הלימודים תנוהל לפי מתווה ההוראה ההיברידית עקב המשך ההתפשטות של מגפת הקורונה.

ההוראה ההיברידית מרחיבה את האפשרויות החינוכיות הן עבור המורים והן עבור התלמידים (Garrison & Kanuka, 2004). זאת בזכות האינטראקציה הישירה בין מורה לתלמיד האופיינית להוראת פנים-אל-פנים, יחד עם הגמישות במקום ובזמן הלמידה ובשילוב הכלים הטכנולוגיים שמאפשרת ההוראה המקוונת (Tang & Chaw, 2016). בעשורים האחרונים, חוקרים הדגישו את הפוטנציאל של שילוב כלים טכנולוגיים ופדגוגיה המתאימה לתמוך בהוראת המתמטיקה (Viberg et al., 2023), אך למרות זאת, תוצאות סקירה עדכנית של מחקרים מדגישות כי השימוש בכלים טכנולוגיים לפני התפרצות המגפה נעשה בעיקר בדרכים התומכות בפעילויות כמו מעקב אחר ציוני התלמידים ופרקטיקות הוראה מסורתיות כגון הרצאות או הצגה (Li et al., 2019) ובכך אינו מממש את הפוטנציאל שלהם לשנות את איכות הלמידה (Viberg et al., 2023).

בעקבות האילוץ לעבור במהירות ללמידה מקוונת בתקופת הקורונה, נאלצו המורים "לפרק", לתכנן מחדש ולשנות את פרקטיקת ההוראה שלהם במטרה להתאימה להוראה מרחוק (Mailizar et al., 2020). למשל, מורים למתמטיקה בתיכון נאלצו לצמצם ולפשט תכנים ולהאט את קצב ההוראה הרגיל (Rodríguez-Muñiz et al., 2021). מעבר פתאומי זה נחקר רבות לאחרונה. נתוני המחקרים נאספו ברובם באמצעות העברת שאלון דיגיטלי ללא ביצוע ריאיון עומק. מעט מאוד דווח על אופן השילוב של כלים טכנולוגיים במסגרת ההוראה ההיברידית בהוראת מתמטיקה, ועל התנהלות המורים למתמטיקה בתיכון שנאלצו לנהל את הוראתם בסביבות דיגיטליות בעקבות המשך התפשטות המגפה. בפרט לא נמצא מחקר שאפיין את שילוב הכלים הטכנולוגיים בהוראת המורים למתמטיקה במדינת ישראל.

מטרת המחקר הנוכחי הינה לבחון את מאפייני ההוראה ההיברידית בתקופת מגפת הקורונה בהקשר של שילוב כלים טכנולוגיים בהוראת המתמטיקה. המחקר המוצג כאן הינו חלק ממחקר רחב יותר בנושא הוראה ההיברידית של המתמטיקה בתקופת התפרצות מגפת הקורונה מנקודת מבטם של תלמידים ושל מורים. שאלות המחקר הנוכחי:

1. באילו דרכים שולבו כלים טכנולוגיים בהוראת המתמטיקה בתיכון במסגרת ההוראה ההיברידית בצל מגפת הקורונה, מנקודת מבטם של המורים?
2. מהם התנאים המוקדמים לשילוב כלים טכנולוגיים בהוראת המתמטיקה בתיכון מנקודת מבטם של המורים?

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר וכלי המחקר

הראיונות נערכו באופן פרטני עם 15 מורים למתמטיקה בתיכון. מורים אלה הם מורים מובילים בקהילת החינוך המתמטי הנושאים תפקידים שונים ומגוונים, כגון רכזים, מדריכים, מעבירי השתלמויות, רכזי

תקשוב עם שנות ותק רבות ומורים בתחילת דרכם במערכת. בחירת המורים המגוונת נעשתה לצורך קבלת נקודות מבט שונות לאפיון הוראת המתמטיקה במהלך התפרצות מגפת הקורונה.

במסגרת המחקר בוצעו ראיונות חצי מובנים בני 90-120 דקות. הריאיון הורכב משאלות המתייחסות לאפיון הוראת המתמטיקה לפני פריצת מגפת הקורונה בהשוואה לתקופה של ההוראה מרחוק וההוראה ההיברידית בתקופת המגיפה, במהלך השנים תש"פ ותשפ"א. השאלות התבססו על מודל 'שלושת ההוראה' של ז'בורסקי (Jaworski, 1992) המורכב משלושה היבטים של הוראת מתמטיקה: ניהול הלמידה (ML) management of learning; רגישות לתלמידים (SS) sensitivity to students; ואתגר מתמטי (MC) mathematical challenge, בהקשר להוראה ההיברידית.

ניתוח הנתונים

ניתוח הנתונים כלל שילוב של ניתוח מכון וניתוח אינדוקטיבי (Patton, 2002). הניתוח המכון נעשה לפי מסגרת 'שלושת ההוראה' של ז'בורסקי (Jaworski, 1992). בשלב השני בוצע ניתוח אינדוקטיבי בגישת התאוריה המעוגנת בשדה (Grounded Theory), שבה המחקר מתעצב תוך כדי ביצועו (Glaser & Strauss, 1967). בשלב זה זוהו באמירות המורים תמות עיקריות אשר חולקו לקטגוריות ולתת-קטגוריות. התמות שעלו בשלב הניתוח הממפה נבחרו בזיקה לסקירת המחקרים בנושא המחקר ובהתאם לשאלות המחקר. ניתוח הנתונים עבור המחקר הנוכחי כלל מספר שלבים: (1) ניתוח מכון של כלל הנתונים לפי מסגרת 'שלושת ההוראה' של ז'בורסקי (Jaworski, 1992). (2) ניתוח אמירות המורים בקטגוריית העל 'ניהול למידה'. זהו שלוש תת-קטגוריות מרכזיות: ארגון הסביבה הלימודית, פיתוח נורמות חברתיות ודרכים בהן מאפשר המורה את מעורבות התלמידים בפעילות מתמטית. (3) בתת הקטגוריה 'ארגון הסביבה הלימודית' זהו שלוש תת-קטגוריות: שילוב כלים טכנולוגיים, מתן שיעורים פרטניים וארגון הכיתה. (4) בניתוח אמירות המורים בתת הקטגוריה 'שילוב כלים טכנולוגיים', בתשובה לשאלת המחקר הראשונה, זהו ארבע קטגוריות עיקריות לשילוב כלים טכנולוגיים מנקודת מבטם של המורים הן בהוראה פנים-אל-פנים והן בהוראה מרחוק במהלך ההוראה ההיברידית בתקופת מגפת הקורונה. כמו כן, בתשובה לשאלת המחקר השנייה, זהו שלוש קטגוריות לגורמים שאפשרו או הגבילו את השימוש בכלים טכנולוגיים לפני ובמהלך הקורונה מנקודת מבטם של המורים הן בהוראה היברידית והן בהוראה "רגילה". מחקר זה מתמקד בממצאים הקשורים בשילוב כלים טכנולוגיים בשיעורי מתמטיקה בהוראה ההיברידית בתקופת הקורונה.

ממצאים ודיון

ניתוח הנתונים זיהה ארבע דרכים בהן המורים שילבו כלים טכנולוגיים הן בהוראה פנים-אל-פנים והן בהוראה מרחוק במהלך ההוראה ההיברידית בתקופת הקורונה (שאלת מחקר 1):

1. **שילוב תוכנות מתמטיות דינמיות.** השילוב כלל בעיקר כלים מהסביבות GeoGebra ו-Desmos. מנקודת מבטם של המורים שילוב כלים מתמטיים דינמיים עלה בתקופת הקורונה בזכות הנגישות לכלים הטכנולוגיים במהלך ההוראה מרחוק שנוהלה בסביבות דיגיטליות, דבר שאפשר להם לשלבם בקלות במהלך השיעור. השילוב היה בשני אופנים: הראשון כאמצעי המחשה בזכות הוויזואליות להצגת אובייקטים מתמטיים. השני, ככלי חקר למקרים שונים ו/או מעבר ממקרה פרטי למקרים כלליים בזכות הדינמיות, דבר שסייע להם בהעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים.

2. **שילוב פלטפורמות למידה עצמאית של תלמידים.** מנקודת מבטם של המורים, הצורך בשילוב סביבות דיגיטליות ללמידה עצמאית הפך להיות נפוץ יותר בעקבות התפרצות נגיף הקורונה למרות קיומן של סביבות אלה לפני התפרצות המגיפה. המורים שילבו את הסביבות הדיגיטליות והאתרים לצורך למידה עצמאית (פרסונלית) של התלמיד בשלושה אופנים. אופן ראשון, שילוב סביבות אשר מציעות סרטונים לחומר הנלמד כמו האתר של GOOL, אתגר ה-5, קמפוס IL והסרטונים המוצעים באתרים הדיגיטליים לספרי הלימוד. הסביבות האלה מהוות מקור נוסף ללמידה בזכות זה שהחומרים מותאמים לפריסות של תוכנית הלימודים ומובנים במיוחד לתמוך בלמידה עצמאית לתלמידים. אופן שני, שילוב סביבות המאפשרות תיעוד המורה לשיעורים שלו, תיעוד כתוב כמו OneNote או Padlet ותיעוד מוקלט כמו Zoom, Google Meet, Microsoft Teams, כדי לאפשר לתלמידים השלמה

וחזרה על החומר הנלמד. אופן שלישי, שילוב סביבות כגון Classroom ומודל, המאפשרות למורה ארגון של החומר הנלמד, העלאת הקלטות השיעורים ומטלות להגשה.

3. **שילוב כלים טכנולוגיים לגיוון ההוראה.** מנקודת מבטם של המורים, הצורך בשילוב סביבות דיגיטליות לגיוון ההוראה במהלך שיעורי המתמטיקה עלה בעקבות התפרצות נגיף הקורונה במיוחד בגלל הייחודיות של ההוראה מרחוק והצורך להשאיר את התלמידים מרוכזים ומעורבים בשיעורי המתמטיקה. לשם כך, השילוב שיעורי המתמטיקה נעשה בשני אופנים: הראשון שילוב מצגות, תיעודים של שיעורים קודמים וסרטונים בהתאם למטרות השיעור. האופן השני, שילוב שאלונים דיגיטליים מוכנים המוצעים באתרים שונים ברשת כמו האתר של GOOL, אתגר ה-5, קמפוס IL ו-Desmos Teachers, להעלאת המעורבות של התלמידים בשיעורים.

4. **שילוב פלטפורמות דיגיטליות המאפשרות הערכה ומעקב הן אחר הבנה מתמטית והן אחר היבטים רגשיים.** המורים עיצבו את ההוראה שלהם בהסתמך על הנתונים של הסביבות הדיגיטליות המאפשרות משוב וכלי מעקב להתקדמות התלמיד ללא השקעה נוספת מהמורה. סביבות אלו הציעו למורה מגוון אמצעים להערכת הביצועים האישיים של התלמיד ו/או ביצועים קבוצתיים. המורים השתמשו בסביבה הטכנולוגית כדי לאסוף מידע לא רק על מידת ההבנה של החומר הלימודי, אלא גם אמדו היבטים רגשיים בהתאם לנסיבות של התקופה ואילווציה הסוציו-לימודיים. המורים ראו חשיבות גדולה בהתייחסות לממד הרגשי שבחן והתעניין בשלומם של התלמידים בעקבות הריחוק החברתי המאולץ שהיה בתקופת התפרצות המגפה.

מדברי המרואיינים עלה גם שהמורים שילבו כלים טכנולוגיים לפני הקורונה בדרכים 1 ו-3 ובעקבות התפרצות המגפה והמעבר להוראה מרחוק תדירות השימוש בהן עלתה בזכות עליית הנגישות של המורים לשילוב כלים טכנולוגיים כאשר ניהלו את ההוראה מרחוק מהמחשבים הניידים שלהם. כמו כן, לדברי המורים, דרכים 2 ו-4 לשילוב כלים טכנולוגיים לא היו נפוצות לפני התפרצות נגיף הקורונה, בעקבות התפרצות המגפה החשיבות של הסביבות ללמידה עצמאית עלתה בכך שנתנו מענה לסיטואציה הפתאומית והמאתגרת שנקלעו בה המורים והתלמידים. ממצאי המחקר מראים שאף על פי שדרך 2 ו-4 - התוכנות ללמידה עצמאית ומעקב, התקיימו לפני התפרצות המגפה, השימוש בהם השתנה בעקבות התפרצות המגיפה והמעבר להוראה מרחוק. ההערכה המסכמת שהייתה נהוגה לפני פרוץ המגיפה הפכה להערכה מעצבת מכורח ובזכות השימוש בכלים הטכנולוגיים. דבר זה אפשר מצד אחד, טיפוח לומד עצמאי והערכה מעצבת שהייתה נחוצה במהלך הוראת המתמטיקה בתקופה זו. מצד שני, הספרות המחקרית הדגישה ששילוב סביבות הלימוד העצמאית חייב להיות מונחה על ידי המורה בכדי להוביל בסופו של דבר לשיפור תוצאות הלמידה עבור התלמידים (Viberg et al., 2023).

שלוש קטגוריות זוהו בראיונות ביחס לגורמים שאפשרו או הגבילו את השימוש בכלים טכנולוגיים הן בהוראה היברידית והן בהוראה ה"רגילה" (שאלת מחקר 2):

1. **היבטים הקשורים המורה.** מנקודת מבטם של המורים זוהו שלושה תנאים הקשורים למורה אשר אפשרו או הגבילו שילוב של כלים טכנולוגיים. הראשון זה ידע דיגיטלי של המורה. השני, פרקטיקות ההוראה של המורים. שלישי, העמדה של המורה לגבי שילוב כלים טכנולוגיים.

2. **היבטים הקשורים בטכנולוגיה.** מנקודת מבטם של המורים זוהו ארבעה תנאים הקשורים לטכנולוגיה אשר אפשרו או הגבילו שילוב של כלים טכנולוגיים. הראשון, נגישות לכלים טכנולוגיים במהלך השיעורים. השני, מידת האמינות של ההערכה בשילוב כלים טכנולוגיים (למשל, חשש מהעתקות). השלישי, המגבלות הטכניות של הסביבות הדיגיטליות. ואחרון, ההלימה בין שיטת העבודה בסביבות דיגיטליות לבין שיטת ההיבחנות הארצית (מבחני הבגרות).

3. **היבטים הקשורים בקונטקסט (הקשר) ההוראה.** מנקודת מבטם של המורים זוהו ארבעה תנאים הקשורים לקונטקסט ההוראה אשר אפשרו או הגבילו שילוב של כלים טכנולוגיים. ראשון, התשתיות בבתי הספר. שני, תשתיות בבתים של התלמידים. שלישי, הידע הדיגיטלי של התלמידים. רביעי, פריסות ההוראה של משרד החינוך בתקופת הקורונה אשר כללו קישורים לכלים טכנולוגיים.

היבטים הקשורים באמונות פדגוגיות ובעמדות המורה כלפי טכנולוגיה מצוינים בספרות כגורמים המשפיעים על שימוש מורי תיכון בטכנולוגיה (Li et al., 2019). המחקר הנוכחי מצא שבנוסף לגורמים

אלה, יש גורמים נוספים התורמים או מעכבים את השימוש בכלים טכנולוגיים, הקשורים בטכנולוגיה, כגון נגישות המורים לכלים טכנולוגיים, ובקונטקסט ההוראה, כגון הידע הדיגיטלי של התלמידים.

המחקר המוצע כאן הינו ייחודי מכיוון שזו הפעם הראשונה בארץ שהתנהלה הוראה היברידית במצב חירום בקנה מידה רחב וללא הכנה מוקדמת מספקת. ממצאי המחקר יכולים לשמש בסיס לשיח בקרב אנשי חינוך מתמטי וקובעי מדיניות כהכנה לקראת מצבי חירום עתידיים, וכן לגבי ייעול שילוב כלים טכנולוגיים בהוראת מתמטיקה היברידית או קונבנציונלית שלא במצבי חירום. הממצאים מצביעים על כך שמצב החירום, שהניע מורים לשמר את למידת המתמטיקה עד כמה שניתן ולתמוך רגשית בתלמידים, ביחד עם סיוע של המערכת, הגברה של הנגישות לטכנולוגיה, ושיתוף בחומרי הוראה ולמידה – כל אלה אפשרו למורים להשתמש בסביבות דיגיטליות באופנים חדשים המעודדים טיפוח לומד עצמאי והעלאת המעורבות של תלמידים בתהליך ההערכה ובעיצוב ההוראה. לצד זאת, זהו גורמים המגבילים את שילוב הכלים הטכנולוגיים שיש לתת עליהם את הדעת, כגון שיפור המיומנויות של תלמידים – בנוסף לאלה של המורים – של התנהלות בסביבות דיגיטליות, והגברת ההלימה בין שיטות העבודה בסביבות דיגיטליות לבין מבחני הבגרות. ממצאים עתידיים ממחקרנו הרחב יותר בנושא הוראה ההיברידית של המתמטיקה בתקופת התפרצות מגפת הקורונה, הן מנקודת מבטם של מורים והן מנקודת מבטם של תלמידים, ירחיבו את מידת הבנתנו ביחס לאתגרים, ובעיקר להזדמנויות ללמידה והוראה, שהציבה לפנינו ההוראה ההיברידית בתקופת הקורונה.

רשימת מקורות

- Drijvers, P., Thurm, D., Vandervieren, E., Klinger, M., Moons, F., van der Ree, H., ... & Doorman, M. (2021). Distance mathematics teaching in Flanders, Germany, and the Netherlands during COVID-19 lockdown. *Educational Studies in Mathematics*, 108(1), 35-64.
- Garrison, D. R., & Kanuka, H. (2004). Blended learning: Uncovering its transformative potential in higher education. *Internet and Higher Education*, 7, 95-105.
- Glaser, B., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory*. Aldine.
- Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 8-14.
- Li, Y., Garza, V., Keicher, A., & Popov, V. (2019). Predicting high school teacher use of technology: Pedagogical beliefs, technological beliefs and attitudes, and teacher training. *Technology, Knowledge and Learning*, 24, 501-518.
- Mailizar, A., Abdulsalam, M., & Suci, B. (2020). Secondary school mathematics teachers' views on e-learning implementation barriers during the COVID-19 pandemic: The case of Indonesia. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 16(7) 1-9.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research and Evaluation Methods*. Sage.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Burón, D., Aguilar-González, Á., & Muñoz-Rodríguez, L. (2021). Secondary mathematics teachers' perception of their readiness for emergency remote teaching during the COVID-19 pandemic: A case study. *Education Sciences*, 11(5), 228.
- Tang, C. M., & Chaw, L. Y. (2016). Digital Literacy: A Prerequisite for Effective Learning in a Blended Learning Environment? *Electronic Journal of E-learning*, 14(1), 54-65.
- Viberg, O., Grönlund, Å., & Andersson, A. (2023). Integrating digital technology in mathematics education: a Swedish case study. *Interactive Learning Environments*, 31(1), 232-243.



מבוא ורקע תאורטי

מושג הנגזרת הוא מושג בסיסי בלימודי אנליזה בתיכון, והבנתו היא תנאי מקדים ללימוד של מושגים אחרים ברמה של תואר ראשון. כמו כן הוא מופיע ברבים מקורסי המתמטיקה באוניברסיטה. עם זאת, תלמידים רבים מתקשים בהבנת המושג (Greefrath et al., 2016), ובעוד שמחקרים רבים עוסקים בתפיסות של תלמידים את מושג הנגזרת, רק מעטים מתמקדים בהוראתו. המחקר הנוכחי ניגש לנושא זה, ומתמקד באפיון גישות הוראה של מושג הנגזרת. בשלב קודם של המחקר נבנה מודל ראשוני בשם 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת'. מטרות ההוראה משפיעות על תכנון ההוראה של המורה, ולכן הגדרתן היא שלב ראשון והכרחי בתהליך ההוראה. גם הפעולות להשגת המטרות מרמזות על גישות ההוראה של המורה (Westbroek et al., 2017). המודל נבנה בצורה תאורטית ואמפירית על סמך ראיונות עם מורים מובילים למתמטיקה, והוא נועד להציע המשגה, שפה וכלים לדיון במטרות ובפעולות של מורים למתמטיקה ביחס להוראת מושג הנגזרת, לערוך השוואה בין גישות הוראה של מורים ולהעלות השערות ביחס להזדמנויות הלמידה הניתנות לתלמידים בכל גישה. במאמר זה נציג גישות הוראה למושג הנגזרת של שתי מורות. בעזרת ההשוואה בין שתי גישות ההוראה השונות של המורות נדגים את שימושיות המודל על ידי שיוך כל שלב משלבי רצף הוראת המושג לאחת מהשקפות העולם המתמטיות המוזכרות בספרות (Grigutsch & Törner, 1998); העולם הסכמתי, העולם הפורמלי, העולם היישומי, העולם התהליכי.

המודל 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת'

המודל נבנה על סמך ראיונות אישיים שכללו שאלות המבקשות ללמוד על מטרות המורים בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת ועל הפעולות שממששות אותם כדי להשיגן. (רפרנס למאמר בכנס קודם ולמאמר PME) לזיהוי המטרות השתמשנו במסגרת תיאורטית 'הפוטנציאל המתמטי' (Leikin, 2009) ולזיהוי הפעולות השתמשנו במסגרת תיאורטית 'שלושת ההוראה' (Jaworski, 1992; Potari & Jaworski, 2002).

'מטרות ההוראה' – זוהו מטרות משלושה סוגים: (1) מטרות המכוונות לפיתוח היכולות המתמטיות של התלמידים הקשורות ללמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה פיתוח דימוי למושג הנגזרת; (2) מטרות המכוונות להזדמנויות למידה לתלמידים במהלך ההוראה והלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה: בניית תשתית מתמטית חזקה שתאפשר לתלמידים להעמיק בלמידה ולהתקדם בה; (3) מטרות שיעודן פיתוח גורמים רגשיים של התלמידים כלפי ההוראה והלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה פיתוח עניין, הנאה והגברת המוטיבציה ללמידה בקרב התלמידים.

'פעולות להשגת המטרות' – זוהו פעולות הקשורות לשלוש קטגוריות עיקריות: (1) פעולות הקשורות לאתגר המתמטי בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה יצירת דילמות ובניית הצורך בנגזרת ככלי חדש; (2) פעולות הקשורות לרגישות לתלמידים בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה יצירת הקשר בהוראה של מושג הנגזרת עם חוויות חיוביות קודמות; (3) פעולות הקשורות לניהול הלמידה בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה יצירת אווירה בטוחה ונעימה.

במאמר זה נתמקד במטרות המכוונות לפיתוח היכולות המתמטיות של התלמידים הקשורות ללמידה של מושג הנגזרת ובפעולות הקשורות לאתגר המתמטי בלמידה של מושג הנגזרת ונתאר גישות הוראה של המושג על בסיס מסגרת ארבע השקפות העולם המתמטיות (Grigutsch & Törner, 1998).

מתמטיקה היא תחום רב-גוני, המוביל לעמדות מורכבות ומגוונות כלפיו. 'השקפת עולם מתמטית' כוללת את מכלול הגישות הקשורות למתמטיקה: מחשבות, רגשות ועמדות לגבי הנושא (Grigutsch & Törner, 1998). ארבע השקפות המעצבות את התפיסות, ההבנה והרגשות כלפי מתמטיקה זוהו: (1) העולם הפורמלי: המתמטיקה מאופיינת בלוגיקה החזקה שיש בה והפורמליות; (2) העולם הסכמתי: המתמטיקה מייצגת סט של חוקים ופרוצדורות במטרה לפתור בעיות שגרתיות; (3) העולם התהליכי: המתמטיקה מיוצגת כפעילות יצירתית המאפשרת פתרון בעיות דרך שימוש בשיטות שונות ואינדיבידואליות; (4) העולם היישומי: המתמטיקה מייצגת כלי שימושי לפתרון בעיות מחיי היום יום. במתודולוגיה נראה דוגמא לשימוש בהגדרות הנ"ל כדי לשייך פעולה/מטרה להשקפת העולם המתאימה לה.

מתודולוגיה: אוכלוסיית המחקר, כלי המחקר, איסוף נתונים וניתוח נתונים

במחקר הנוכחי השתמשנו במודל ככלי לניתוח של ראיונות עם שתי מורות: (1) יסמין – מורה למתמטיקה עם 30 שנות ותק ותואר שלישי בחינוך מתמטי. (2) עדן – מורה למתמטיקה עם 20 שנות ותק ודוקטורנטית בחינוך מתמטי. כל ראיון נמשך כשעתיים, הוקלט ותומלל. בניתוח הראיונות התמקדנו באיתור עדויות אמפיריות המעידות על מטרות הוראה, על פעולות להשגת המטרות, ועל רצף ההוראה של כל אחת מהמורות. בשלב הבא השתמשנו בהגדרות של השקפות העולם המתמטיות כדי לשייך כל פעולה/מטרה להשקפת העולם המתאימה, לדוגמא: הפעולות 'אזכור של מושגים שמכירים מעולם הפונקציות שנלמדו לפני הצגת הנגזרת' ו'תרגול של גזירת פונקציות פולינום בעבודה אישית' והמטרה 'פיתוח הבנה אינסטרומנטלית (פרוצדורלית) של המושג' שויכו להשקפת העולם הסכמתי. לעומת זאת, הפעולות 'יצירת דילמות כמנוף להצגת הנגזרת' ו-'שימוש במושגים שמכירים מעולם הפונקציות שנלמדו לפני הצגת הנגזרת לצורך גרפים' שייכות להשקפת העולם התהליכית. איתור ושיוך העדויות נעשה בנפרד על ידי כל אחד מהחוקרים ונדונו ביחד כדי להגיע למסקנות אחידות.

מלבד המטרות והפעולות שזוהו בראיונות נמצא כי כל המורות השתמשו ברצף הוראה דומה של מושג הנגזרת, הכולל שלושה שלבים: (1) 'לפני ההגדרה הפורמלית' של הנגזרת, המתייחס להוראה עד להגעה להגדרה פורמלית של נגזרת לפי גבול מנת הפרשים; (2) 'ההגדרה הפורמלית', המתייחס להצגת ההגדרה הפורמלית של הנגזרת וההגעה לחוקי הגזירה; (3) 'אחרי ההגדרה הפורמלית', המתייחס ליישום מושג הנגזרת בחקירת פונקציות ובמציאת משוואת משיק. השלבים נבדלים באורכם: שלב נחשב לקצר אם נמשך פחות משני שיעורים, שלב נחשב לבינוני אם הוא נמשך יותר משני שיעורים ופחות מארבעה שיעורים. ושלב נחשב לארוך אם נמשך יותר מארבעה שיעורים. השלב השלישי שזה שלב היישום של הנגזרת איננו מוגבל בזמן.

ממצאים

ניתוח הראיונות עם יסמין ועדן העלה נקודות דמיון ושוני בין גישות ההוראה שלהן. להלן מתואר חלק מהממצאים על פי שלושת שלבי רצף ההוראה שנמצאו:

שלב א: 'לפני ההגדרה הפורמלית של הנגזרת'

עדן	יסמין	
פיתוח הבנה אינסטרומנטלית של מושג הנגזרת	פיתוח הבנה קונספטואלית של מושג הנגזרת	מטרת ההוראה
אזכור של מושגים שמכירים מעולם הפונקציות שנלמדו לפני הצגת הנגזרת	יצירת דילמות כמנוף להצגת הנגזרת/ שימוש במושגים שמכירים מעולם הפונקציות שנלמדו לפני הצגת הנגזרת לצורך גרפים	פעולות ההוראה
בינוני	ארוך	זמן

כפי שרואים, לגבי שלב א' נמצא שוני במטרות של שתי המורות, בפעולות להשגת מטרות אלו ובאורך הזמן המוקצה לשלב זה. מבחינת יסמין שלב א' הוא מרכזי וחשוב לה שהתלמידים יהיו שותפים בתהליך בניית הידע. מבחינת עדן, זהו שלב של חזרה על נושא קדם-אנליזה שהתלמידים למדו בכיתה

ט'. ככל הנראה יסמין יוצרת עניין ובונה את הצורך בנגזרת ומקדישה זמן רב לעבודה זו, ואילו עדן מקדישה פחות זמן ועוברת ישירות לשלב ב', שלב ההגדרה הפורמלית. להלן ציטוטים מהראיונות עימן הממחישים זאת.

עדן: "קודם כול אני מלמדת מבוא לאנליזה, ודי מהר אני עוברת להגדרה הפורמלית של הנגזרת לפי גבול מנת הפרשים".
יסמין: "אני קודם כול בונה את הצורך ואני משקיעה הרבה מאוד זמן ביצירת צורך. זאת הקדמה שלוקחת יותר משני שיעורים כפולים. אז אנחנו יכולים לצאת לדרך של חיפוש הנגזרת".

שלב ב': 'ההגדרה הפורמלית של הנגזרת'

מטרת ההוראה	יסמין	עדן
פיתוח הבנה אינסטרומנטלית של המושג	פיתוח הבנה אינסטרומנטלית של המושג	פיתוח הבנה אינסטרומנטלית של המושג
פעולות ההוראה	רשימת פעולות הקשורות להגדרה הפורמלית והן זהות אצל יסמין ועדן דוגמאות: (1) שימוש בטבלת ערכים לחישוב השיפוע בין שתי נקודות תוך כדי התקרבות (2) הפחתת חשיבות רמת הדיוק המתמטי	
זמן	קצר	ארוך

כפי שרואים, לגבי שלב ב' נמצא כי ליסמין ולעדן יש מטרות ופעולות זהות. יחד עם זאת, מבחינת עדן שלב זה הוא מרכזי והיא מקצה לו זמן ארוך ומבחינת יסמין זה שלב משני בלבד, שבו התלמידים לא נחשפים למושג הגבול והיא מקצה לו זמן קצר. שלב ג': 'אחרי ההגדרה הפורמלית של הנגזרת'

מטרת ההוראה	יסמין	עדן
מטרת ההוראה	פיתוח הבנה קונספטואלית של המושג או הקשר שלה עם הבנה אינסטרומנטלית (פרוצדורלית) של המושג	פיתוח הבנה קונספטואלית של המושג או הקשר שלה עם הבנה אינסטרומנטלית (פרוצדורלית) של המושג
פעולות ההוראה	פיתוח יכולת יישום/מיומנות שימוש פיתוח גישות אלטרנטיביות לעיסוק בנגזרת – גישה נקודתית (מקומית) וגישה גלובלית	פיתוח יכולת יישום/מיומנות שימוש פיתוח גישות אלטרנטיביות לעיסוק בנגזרת – גישה נקודתית (מקומית) וגישה גלובלית
זמן	לא מוגבל	לא מוגבל

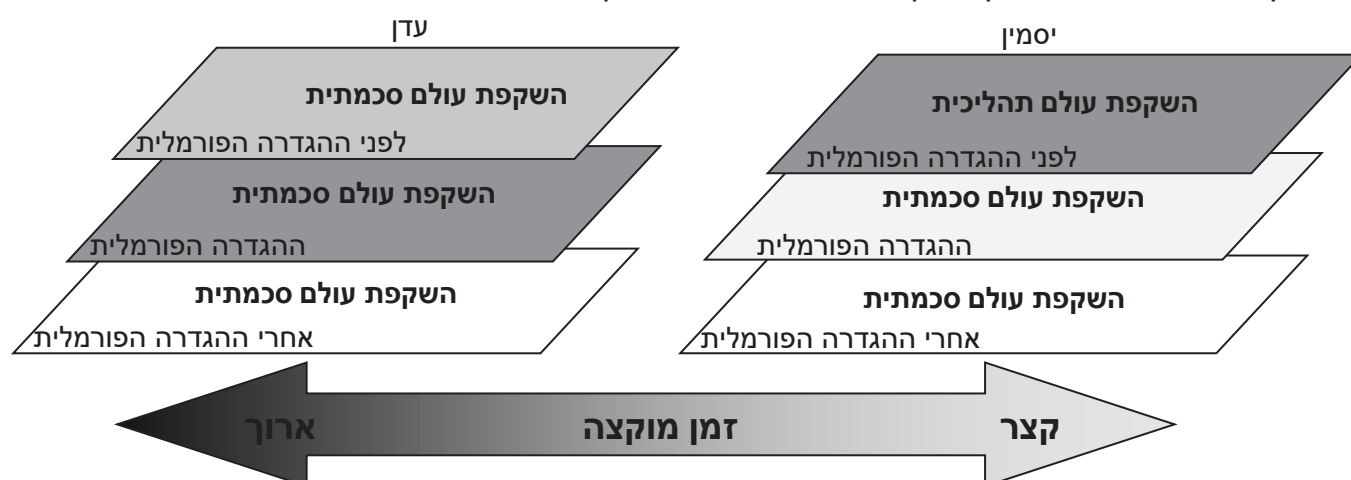
כפי שרואים, לגבי שלב ג' נמצא כי ליסמין ולעדן יש מטרות ופעולות זהות. שלב זה איננו מוגבל בזמן כי זהו שלב היישום והשימוש בנגזרת ככלי לפתרון בעיות באנליזה.

דיון

המודל 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת' שימש במחקר זה ככלי לניתוח ראיונות עם שתי מורות. הדגמנו את שימושיות המודל בעזרת ההשוואה בין גישות ההוראה של המורות בשלושת שלבי רצף הוראת מושג הנגזרת. בשלב הראשון (לפני ההגדרה הפורמלית) ובשלב השני (ההגדרה הפורמלית) נמצא הבדל בין שתי המורות בחשיבות שהן מייחסות לכל שלב ברצף ההוראה, ובהתאם לזמן שהן מקדישות לכל שלב. מבחינת המורה יסמין השלב הראשון הוא שלב חשוב ביותר ברצף ההוראה, ולכן היא מקדישה לו זמן רב, ומבחינת המורה עדן זהו שלב משני בחשיבותו. במונחים של 'השקפות העולם המתמטיות', ניתן לומר כי לכל מורה הייתה השקפת עולם שונה מהשנייה, עדן השתמשה בפעולות ששייכות לעולם הסכמתי (לדוגמא: הפעולה "אזכור של מושגים שמכירים מעולם הפונקציות שנלמדו לפני הצגת הנגזרת" היא פעולה ששייכת להשקפת העולם הסכמתי כי היא מהווה שינוי ושחזור של ידע קודם), לעומת יסמין, שהשתמשה בפעולות ששייכות לעולם התהליכי (לדוגמא: הפעולה "יצירת דילמות כמנוף להצגת הנגזרת" היא פעולה ששייכת להשקפת העולם התהליכי כי היא מהווה פעילות יצירתית בתהליך רכישת מושג הנגזרת).

השלב השני ברצף ההוראה נחשב לשלב מרכזי בהוראה של עדן והיא מקדישה לו זמן יותר מהשלב הראשון. לעומת זאת, מבחינת יסמין, זהו שלב משני בחשיבותו והיא סבורה שהתלמידים לא חייבים להבין את מושג הנגזרת כגבול מנת הפרשים. שתי המורות משתמשות בפעולות ששייכות לעולם הסכמתי (לדוגמא: הפעולה "שימוש בטבלת ערכים לחישוב השיפוע בין שתי נקודות תוך כדי התקרבות" היא פעולה ששייכת להשקפת העולם הסכמתי כי היא מהווה סט של חוקים ופרוצדורות).

בשלב השלישי והאחרון ברצף הוראת מושג הנגזרת (אחרי ההגדרה הפורמלית), שתי המורות מפתחות בכיתה יכולות יישום ומיומנויות שימוש בנגזרת באמצעות פעולות שונות המשתייכות להשקפת העולם הסכמתי: הן רוצות שהתלמידים שלהן ישתמשו בנגזרת כדי למצוא את משוואת המשיק בנקודה וגם ככלי לשרטוט גרף של פונקציה (לדוגמא: הפעולה "תרגול של גזירת פונקציות פולינום בעבודה אישית" היא פעולה ששייכת להשקפת העולם הסכמתי כי היא מהווה סט של חוקים ופרוצדורות במטרה לפתור בעיות שגרתיות). איור 1 ממחיש את השוני והדמיון בין גישת ההוראה של יסמין וגישת ההוראה של עדן לאורך שלושת השלבים של רצף הוראת מושג הנגזרת.



איור 1. תרשים הממחיש את הדמיון והשוני בין גישת ההוראה של יסמין לבין גישת ההוראה של עדן לאורך שלושת שלבי רצף הוראה

ההבדלים בין שתי הגישות מבחינת הזמן המוקצה והשקפת העולם אליה משתייך כל שלב מצביעים על הזדמנויות שונות הניתנות לתלמידים של כל מורה ביחס ללמידה של מושג הנגזרת. למשל, מורה שהגישה שלה מאופיינת בהשתייכות המטרות/הפעולות לעולם הסכמתי (עדן), סביר להניח שהנגזרת תילמד כסט של חוקי גזירה ופרוצדורות, במטרה לפתור בעיות שגרתיות. לעומת זאת, מורה שהגישה שלה מאופיינת בעיקרה בהשתייכות המטרות/הפעולות לעולם התהליכי (יסמין), סביר להניח שהנגזרת תילמד ככלי יצירתי המאפשר פתרון בעיות דרך שימוש בשיטות שונות. בכנס נרחיב על המודל ועל הפוטנציאל הטמון בו, הן לחוקרים והן למורי מורים ולמפתחי תכניות לימודים, לאפיון גישות הוראה והעלאת השערות ביחס להזדמנויות הלמידה הניתנות לתלמידים הקשורות במושג הנגזרת.

רשימת מקורות

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). Aspects and "Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 99–129.
- Grigutsch, S., & Törner, G. (1998). *World views of mathematics held by university teachers of mathematics science*. UD, Fachbereich Mathematik.
- Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What Is It? *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 8–14.
- Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 383–409). Sense Publishers.
- Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 351–380.
- Westbroek, H., Janssen, F., & Doyle, W. (2017). Perfectly reasonable in a practical world: Understanding chemistry teacher responses to a change proposal. *Research in Science Education*, 47(6), 1403–1423.



רקע תאורטי

אסטרטגיית ההוראה בכיתה הרווחת כיום היא עדיין הוראה על פי רמת התלמיד הממוצע, אסטרטגיה שעלולה להשאיר מאחור את התלמידים המתקשים, להוביל לחוסר עניין עבור התלמידים המתקדמים ולא לנצל את הזמן כהלכה (Vainas et al., 2019), לעומת זאת, הגישה המותאמת אישית רואה לנגד עיניה במרכז הליך ההוראה והלמידה את התלמידים בכך שהיא מאפשרת לכל תלמיד ללמוד לפי הרמה המתאימה לו.

מערכות למידה אדפטיביות נותנות מענה ללמידה מותאמת אישית ובעלות פוטנציאל לאפשר למורה להתאים את ההוראה לכל תלמיד או לקבוצת תלמידים בעלי צרכים זהים, כפי שעולה מהנתונים המוצגים למורים בלוח המחוונים (דשבורד – DASHBOARD) בכל רגע נתון שבו התלמידים לומדים עם מערכת אדפטיבית. ניצול נכון של הטכנולוגיה יכול להביא לשיפור בהישגי התלמידים ויאפשר לכל תלמיד הזדמנות שווה ללמוד לפי הרמה המתאימה לו (Grant & Basye, 2014). כפתרון אפשרי חוקרים הציעו שימוש בטכנולוגיית בינה מלאכותית שתדמה את הידע ואת הניסיון של המורה כדי לספק לכל תלמיד תמיכה או הדרכה המותאמת לו באופן אישי (Pai et al, 2020). הבינה המלאכותית מדמה את הבינה האנושית וכך שופטת מצבים ומקבלת החלטות מותאמות אישית עבור התלמידים (Akerkar, 2014); זאת תוך כדי יצירת תהליך למידה ייחודי המסתמך על ביצועים ומאפייני התלמיד כדי להשיג מטרות למידה שונות (Yaghmaie and Bahreininejad, 2011).

למידה אדפטיבית (הסתגלותית) מעניקה ללומדים שליטה בהקשר, בקצב ובהיקף חוויית הלמידה שלהם, דבר המתאפשר על ידי מעורבות של מערכת אדפטיבית הסתגלותית (Martin & Whitmer, 2016). יכולות ההסתגלות של מערכות אלה נובעת מיכולתן להגיב לכל משתמש בודד בהתאם למידע שהמערכת עיבדה ואספה עליו (Johanes, 2017). מחקר על מערכת למידה אדפטיבית הציג משוברים של המורים בעקבות העבודה במסלול זה. המורים העידו שכאשר המנוע דילג על משימות, התלמידים פירשו זאת כחיזוק חיובי, דבר שהניע אותם ללמוד, לחשוב ולהקדיש זמן לפני מענה על משימה, כך שהתשובה שלהם תהיה נכונה (Vainas et al., 2019).

במהלך תכנון שיעורים מורים רבים שמים דגש על תהליך העבודה שלהם ועל האינטראקציה עם תוכנית הלימודים והחומרים השונים, בעוד שמעט מורים מתכננים את השיעורים שלהם ומקבלים החלטות על סמך החשיבה של התלמידים (Lloyd & Behm, 2005). במהלך השיעור על המורה להגיב ולקבל החלטות שונות בהתאם להתנהלות השיעור. קבלת החלטות מתרחשת על בסיס יומיומי בכיתה כאשר ילד מציע הסבר בעל פה או בכתב. סוג זה של קבלת החלטות באותו הרגע מנוגד לקבלת החלטות (או תכנון) ארוכות טווח של המורים לאחר שעות הלימודים, כשהם לא באינטראקציה עם תלמידים. מכיוון שמורים אינם יכולים לתכנן מראש תגובות ברגע, אלתור זה כחלק מההוראה מחייב אותם לנתח ולחבר כל הזמן סיטואציות ספציפיות למה שהם יודעים על ההתפתחות המתמטית של תלמידים. שיקול נוסף שהיה על המורים לבצע בזמן השיעור הוא בחירת הבעיה הבאה. מומחיות זו דורשת לא רק ידע בטיפול באסטרטגיות של תלמידים ובפירוש הבנות של תלמידים, אלא גם ידע על התפתחות מתמטית של תלמידים, כדי לזהות מהו הצעד הבא שיהיה מותאם לתלמידים ואף יקל על השלב הבא בעזרת בחירת בעיה שתהיה נגישה אך גם מאתגרת את התלמידים (Childress & Benson, 2014). בסביבת הלימודים "שברים בדרך שלי" המנוע האדפטיבי מחליט עבור התלמידים מה תהיה הבעיה הבאה, ולא המורה. בעוד המנוע האדפטיבי מתאים את מסלול הלמידה האישי לכל

תלמיד, אנו יכולים לזהות שיקולים והתאמות שהוגדרו מראש על ידי אנשי הפיתוח, ספי הצלחה, רמות קושי, אופי של משימות ועוד. אולם יש התאמות רבות שבוצעו בהתאמת מסלול למידה מותאם אישית שלא אופיינו והוגדרו עבור המנוע האדפטיבי. התאמות אלה של המשימות שאליהן התלמידים נחשפים נוצרו בעקבות למידה של המנוע באמצעות מאגר נתונים שנאסף במהלך התנסויות של תלמידים, למידה המתעדכנת ככל שמתווספים נתונים מתלמידים חדשים. במחקר זה אנו מבקשים לבחון מהם השיקולים שפיתח וביצע המנוע האדפטיבי בהתאמת מסלולי הלמידה השונים לתלמידים, ולתת להם פרשנות מנקודת מבט דידקטית.

שאלות המחקר

1. כיצד ניתן לתאר את השיקולים של המנוע האדפטיבי בעודו מתאים לתלמידים את מסלול הלמידה האישי מנקודת מבט דידקטית?
2. כיצד ניתן לתאר את מסלולי הלמידה המוצעים על ידי המנוע האדפטיבי ביחס למסלול למידה לינארי?

מתודולוגיה

מחקר זה בוצע בסביבת "שברים בדרך שלי" שפותחה במרכז לטכנולוגיה חינוכית. במסגרת המחקר נבחרו באופן אקראי שנים עשר מסלולי למידה. כל מסלול למידה מייצג את רצף הלמידה המותאם אישית של תלמיד ספציפי בתוך סביבת הלמידה. מסלולי הלמידה נבחרו על פי ארבעה טווחי הצלחה (באחוזים). לצורך מחקר זה, בשלב הראשון הונפק קובץ מהמערכת שכלל את הנתונים האלה: מספר השאלה, שם השאלון, שם הפרק, נושא השאלה, מיומנות מתמטית לכל שאלה, סוג השאלה (פתוחה/סגורה/רב ברירה/גרירה ועוד), אופי השאלה (חוב/העשרה/תרגול), מדדי הקושי ומדד אבחנה לכל שאלה ואת שנים עשר מסלולי הלמידה השונים שחקרנו. בשלב השני בוצע קידוד מסלולי הלמידה של שנים עשר התלמידים שאפשר את השוואתו של כל מסלול בנפרד למסלול הלמידה הלינארי המלא (הכולל משימות חובה, העשרה ותרגול). בשלב השלישי נותחו כל מסלולי הלמידה כדי לבחון את השיקולים מאחורי קבלת ההחלטות של המנוע האדפטיבי ולאחר ממצאים שיתמכו בפרשנות שאנו מציעים, ובהם דילוגים משמעותיים, שינוי רצף המשימות ועוד.

ממצאים

בפרק זה אציג את עיקרי הממצאים שעלו מתוך ניתוח הנתונים כמענה על שאלות המחקר. אתאר את הממצאים שעלו מתוך ניתוח הנתונים, אציג דוגמאות לאותם הנתונים ואציע פרשנות מנקודת מבט דידקטית. במהלך ניתוח הנתונים נמצאו מסלולי למידה שבהם היה שינוי ברצף המשימות. השינויים ברצף המשימות בכל מסלול נובעים מהצלחתו או אי הצלחתו של הלומד ברצף המשימות, הגוררים דילוגים שונים.

בחינה של המסלולים השונים מנקודת מבט דידקטית ומתוך התחקות אחר התאמת המסלולים האישיים עבור התלמידים העלתה מצבים שבהם המנוע מבצע דילוג לתלמיד אך לאחר משימה או מספר משימות המערכת מחזירה את התלמיד למשימה שהוא דילג עליה. בסיום המשימות שהוא דילג עליהן המערכת מקפצה אותו חזרה למקום שבו הוא היה, וכך נוצר מצב שבו ה"אזור" שבו התבצע דילוג הפך ל"אזור" שבו התלמיד ביצע את כל המשימות אך בסדר שונה מהרצף הלינארי. הסיבה לכך שהמערכת שינתה את רצף הלמידה באותו "אזור" עבור התלמיד שונה בין תלמיד לתלמיד.

דוגמה לכך אפשר לראות באחד המסלולים שבהם הגיע התלמיד לאמצע הפרק "שברים שהמכנים שלהם שונים" וחווה דילוג בעקבות הצלחה. התלמיד לא הצליח באחת המשימות אך במשימות קודמות הראה ידע ושליטה בנושא הזה. המערכת החזירה את התלמיד למשימות הסמוכות שעליהן דילגה קודם. משימות אלה היו מאותו הסוג כמו המשימה שהתלמיד התקשה בה. כשהתלמיד נדרש לכתוב את השבר המתאים לציור הנתון, התלמיד שגה בכך שכתב את השבר הלא צבוע באופן עקבי, ולמעשה התייחס לחלק הלבן ולא לחלק הצבוע. דבר זה מצביע על כך שהתלמיד יודע לזהות ולכתוב את

השבר, אך זיהה את השבר הלא נכון. לאחר שהתלמיד ביצע את המשימות שאליו החזיר אותו המנוע והבין את העיקרון בעזרת שימוש במעבדה, הוא חזר למקום שממנו הפסיק, והמשיך להתקדם.

מתוך המשך התחקות אחר שיקולי המנוע ברצף משימות שביצע התלמיד במלואן אך בסדר שונה, נבחנו גורמים שונים אשר העשויים להשפיע על שיקולי המנוע. אחד הגורמים עסק בתשובתו של התלמיד ונועד לזהות אם התלמיד אחז בתפיסה שגויה ולבחון אם המערכת זיהתה תפיסה זו והגיבה אליה. תיאור מקרה שהיה בנושא "השוואת שברים", כאשר התלמיד הגיע למשימות השוואה בין שברים הוא חווה שתי קפיצות בעקבות הצלחה חלקית. בשלב זה התלמיד הגיע לאמצע נושא השוואת שברים. באיור 1 אפשר לראות משימה שבה הוצגו בפני התלמיד שני שברים השווים זה לזה אך מחולקים למספר חלקים שונה. התלמיד בחר את השבר שיוצג במספר הגדול ביותר - 4. טעות זו חזרה על עצמה ואפשרה לנו להסיק כי התלמיד זקוק לחיזוק במשמעות השבר וכי הדילוג שבוצע אינו תואם את רמתו בשלב.

איור 1:

שאלה 4

בחרו $<$ או $>$ או $=$.
אפשר להיעזר במעבדת השוואת השברים.

$\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$

נקה בדיקה ✓

בעקבות תשובותיו של התלמיד, המנוע החזיר אותו לתרגול השוואת שברים, לתרגילים העוסקים בהשוואה של שברי יחידה - תשיעית לעומת עשירית. שאלה זו כללה מעבדה (איור 2) לצורך חקר והתנסות.

איור 2:

שאלה 2

בחרו $<$ או $>$ או $=$.
אפשר להיעזר במעבדת השוואת השברים.

$\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$

נקה בדיקה ✓

מעבדת השוואת השברים

הצג מספר
מספר עשרוני אחוזים שבר

נקה ?

גם במשימה זו התלמיד לא התייחס למהות אלא בחר את השבר שבו הופיע המספר הגדול יותר, אף שמספר זה הופיע במכנה וייצג חלק קטן יותר. המנוע ניסה לסייע לתלמיד שוב והחזיר אותו עוד משימה אחורה למשימה שבה המונה זהה והמכנים שונים. גם כאן התלמיד היה יכול להיעזר במעבדה המצורפת. לו היה התלמיד מייצג את השברים במעבדה, ייתכן שהיה מזהה את השבר הנכון ומצליח להפנים את משמעות השבר. בתיאור מקרה זה אפשר לראות כי המערכת מחזירה את התלמיד ספציפית למשימות שעשויות לסייע לו להתגבר על הקושי ולא לכל המשימות שעליהן דילג, שכן היו משימות נוספות הקשורות לאותו הנושא אך לא תואמות את סוג השגיאה הזו של התלמיד.

אולם למרות המענה שהוצע לתלמיד, התלמיד לא הצליח בשלב זה, והמנוע דילג להמשך הפרק כדי למנוע תסכול.

לסיכום

בסביבת הלימודים "שברים בדרך שלי" המנוע האדפטיבי מחליט עבור התלמידים מה תהיה הבעיה הבאה, ולא המורה. במחקר זה בחנו מהם השיקולים שפיתח וביצע המנוע האדפטיבי בהתאמת מסלולי הלמידה השונים לתלמידים, ונתנו להם פרשנות מנקודת מבט דידיקטית. ממצאי המחקר מראים כי מסלול הלמידה המותאם כולל דילוגים המותאמים ליכולות של התלמיד, דילוגים מבוקרים ותיקונים שלהם במידת הצורך, דילוגים על שאלות העשרה לתלמידים מתקשים, דילוגים על שאלות תרגול לתלמידים מתקדמים ואף דילוגים על שאלות חובה אם הן בעלות פוטנציאל לתסכל את התלמיד או קלות באופן משמעותי ביחס לרמתו.

למחקר חשיבות רבה בעניין מערכות למידה אדפטיביות מונחות בינה מלאכותית, שכן יש שיקולים והתנהגויות של המנוע שאינם ברורים לנו ולא הוגדרו על ידי אנשי הפיתוח. העמקת המחקר בפרשנות שיקולים אלה בנושאים מתמטיים נוספים עשויה להעשיר את ידיעותינו גם באופן ספציפי לנושא המתמטי.

רשימת מקורות

- Akerkar, R. (2014). *Introduction to artificial intelligence*. PHI Learning Pvt. Ltd..
- Barbieri, C. A., Rodrigues, J., Dyson, N., & Jordan, N. C. (2020). Improving fraction understanding in sixth graders with mathematics difficulties: Effects of a number line approach combined with cognitive learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, 112(3), 628.
- Grant, P., & Basye, D. (2014). *Personalized learning: A guide for engaging students with technology*. International Society for Technology in Education.
- Johanes, P., & Lagerstrom, L. (2017, June). Adaptive learning: The premise, promise, and pitfalls. In *2017 ASEE Annual Conference & Exposition*.
- Lloyd, G. M., & Behm, S. L. (2005). Preservice elementary teachers' analysis of mathematics instructional materials. *Action in Teacher Education*, 26(4), 48-62.
- Martin, F., & Whitmer, J. C. (2016). Applying learning analytics to investigate timed release in online learning. *Technology, Knowledge and Learning*, 21(1), 59-74.
- Pai, K. C., Kuo, B. C., Liao, C. H., & Liu, Y. M. (2021). An application of Chinese dialogue-based intelligent tutoring system in remedial instruction for mathematics learning. *Educational Psychology*, 41(2), 137-152.
- Vainas, O., David, Y. B., Gilad-Bachrach, R., Ronen, M., Bar-Ilan, O., Shillo, R., ... & Sitton, D. (2019). Staying in the Zone: Sequencing Content in Classrooms Based on the Zone of Proximal Development. In *EDM*.
- Yaghmaie, M., & Bahreininejad, A. (2011). A context-aware adaptive learning system using agents. *Expert Systems with Applications*, 38(4), 3280-3286.

מבוא ובסיס תאורטי

מחקרים רבים מראים על כך שתהליכים רגולטיביים, או תהליכי הכוונה עצמית, חשובים ביותר להצלחת הלמידה (Zimmerman & Schunk, 2001; Schoenfeld, 2016). בפרט, צימרמן (Zimmerman, 2002) הציע שלוש פעולות מרכזיות בפעילות הרגולטיבית: ציפייה (anticipating) של התוצר ותכנון הליך הביצוע, ניטור הביצוע, ורפלקציה או הערכת התוצר. מחקרים רבים בתחום ההכוונה העצמית עסקו בהכוונה עצמית בעת פתרון בעיות מורכבות (Schoenfeld, 2016) או במתאם בין יכולות הכוונה עצמית והישגים לימודיים (Zimmerman & Schunk, 2001). פחות ידוע על האופן שבו הליכים רגולטיביים באים לידי ביטוי בזמן עשייה מתמטית "יום-יומית", של פתרון תרגילים בית-ספריים, ברמה המיקרו-אנליטית.

מחקרים שנערכו בעבר במסגרת הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) הראו את התועלת שיש בהסתכלות מיקרו-אנליטית על שיח מתמטי לצורך הבנת תהליכי למידה, ובפרט, לצורך הבנת האינטראקציות ההדדיות בין תהליכים קוגניטיביים, רגשיים וחברתיים במהלך הלמידה. יחד עם זאת, עד כה, בקומוגניציה לא הוגדרו כלים מושגיים מובחנים לעיסוק בפעולות רגולטיביות.

מטרתו של מחקר זה היא המשגת עשייה רגולטיבית באמצעות התאוריה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008), ובחינת מה שניתן ללמוד מהמשגה זו. קומוגניציה מגדירה למידת מתמטיקה כשינוי באופן ההשתתפות של הלומדים בשיח המתמטי, כאשר המושג "שיח" מוגדר כאירוע תקשורת (או אוסף של אירועים) בעל כללים ומאפיינים ייחודיים. אחד ממאפייני השיח הוא רוטינה (או שגרה). רוטיות הן דפוסי פעולה שחוזרים על עצמם כאשר מבצע הפעולה מזהה סיטואציות זהות לסיטואציות שמוכרות לו, והן מורכבות משני חלקים: מטלה והליך, כאשר המטלה היא מה הלומד רוצה להשיג, וההליך הוא איך הלומד רוצה להשיג זאת (Lavie et al., 2019). תוצר הרוטינה הוא נרטיב שעשוי להתקבל על-ידי מומחים בשיח או להידחות על-ידם. כמו-כן, רוטיות בנויות באופן פרקטלי, כך שהליך יכול להתפרק לתת-רוטינה שמורכבת כאמור ממטלה והליך (אלבוים-כהן, נחליאלי, וספרד, 2022). בסיום כל הליך, מתקבל לרוב נרטיב. למשל, ההליך במטלה של חיבור $2+3$ יכול להיות ספירת שתי אצבעות, הוספת 3 אצבעות וספירת המשך (3, 4, 5). הנרטיב המתקבל הוא "5" או "2 ועוד 3 הם 5".

הפעילות שמתוארת לרוב במחקרים על רגולציה היא כזו שעד היום תוארה במחקרים קומוגניטיביים כ"שיח-על" (או שיח מטה). שיח-על מציין שיח שמושאו הוא השיח המתמטי (Sfard, 2008). למשל "אני חושבת ש 2 ועוד 3 שווה 5" הוא היגד ברמת העל שכן הוא אומר משהו ("אני חושבת ש") על נרטיב מתמטי (2 ועוד 3 שווה 5). יחד עם זאת, לא קיימת הגדרה מדויקת לעשייה רגולטיבית במסגרת התיאוריה הקומוגניטיבית. לפיכך, במחקר זה נגדיר **שיח רגולטיבי** כשיח-על שמכווין את השיח המתמטי של הלומד, כלומר, **שיח-על שמתייחס לרוטיות ונרטיבים מתמטיים ומטרתו השגת המטלה המתמטית**. שאלת המחקר היא אם-כן: **מהן הרוטיות הרגולטיביות שניתן לזהות בשיח התלמידים?**

שיטת המחקר

נתוני המחקר נלקחו מתוך בסיס נתונים הכולל ראיונות מתמטיים עם כעשרים תלמידי כיתה ז' מקבוצות לימוד ברמות שונות, מבתי ספר ברחבי הארץ. הראיונות נערכו על ידי אחת או אחד מחברי קבוצת המחקר אשר מחקר זה הוא חלק ממנו, והוקלטו באמצעות מצלמת וידאו ואייפד או מכשיר "עט חכם". כלל הראיונות תועדו ותוכתבו במלואם. שמות התלמידים המופיעים כאן הם שמות בדויים.

מתוך בסיס הנתונים בחרנו את הביצוע של שלושה תלמידים לשתי בעיות. בחירה זו התבססה על בחינת השיח של התלמידים ובחירת החלקים בהם ניכר השיח הרגולטיבי על מאפייניו השונים.

ניתוח השיח התבצע באופן הבא: ראשית מיפינו את הרוטינות המתמטיות בבעיה. לאחר מכן בחנו את חלקי השיח שהם כשלעצמם אינם שיח מתמטי אך מושאם הוא שיח מתמטי, ושתפקידם הכוונת השיח המתמטי עצמו לעבר השגת המטלה המתמטית (לדוגמה: "כאן כדאי לעשות..." או "זה יהיה מסובך מדי"). לבסוף בחנו לאיזה מחלקי הרוטינה המתמטית (מטלה, הליך, נרטיב) מתייחס שיח-העל הרגולטיבי, וכיצד הוא הכווין את השיח המתמטי.

ממצאים

בהצגת הממצאים נדגים שלושה סוגים של רוטינות רגולטיביות שנמצאו בשיח התלמידים: רוטינות על מטלה, רוטינות על הליך ורוטינות על נרטיב. ראשית נציג את פתרונה של שחף לבעיית הכללה, לה קראנו "בעיית העיגולים" (ראו איור 1). פתרונה של שחף כולל בתוכו את שלושת סוגי הרוטינות הרגולטיביות שמצאנו. להלן הבעיה, קטע התכתוב ותצלום הפתרון של שחף לסעיף ג' בבעיה. על מנת למקד את ההתייחסות שלנו לכתוב, חילקנו את קטע התכתוב למקטעים אותם מספרנו (#):

איור 1

בעיית העיגולים ופתרונה של שחף לסעיף ג'

ג. כמה עיגולים נמצאים בציר מספר 42 בסדרה? הסבירו.

לפניכם סדרה של ציורים המורכבים מעיגולים:

א. ציירו את שני הציורים הבאים בסדרה זו.
 ב. כמה עיגולים נמצאים בציר מספר 10 בסדרה? הסבירו.
 ג. כמה עיגולים נמצאים בציר מספר 42 בסדרה? הסבירו.
 ד. נסחו כלל שבאמצעותו תוכלו לחשב כמה עיגולים נמצאים בציר מספר כלשהו בסדרה.

שחף: (1) אהממ כמה עיגולים נמצאים בציר מספר 42 בסדרה? הסבירו. (2) אוי ואבוי לי... (3) אוקיי קודם כל שלוש ועוד שתיים כפול 41 (4) אבל אולי אפשר אממ לעשות נגיד אממ כ... (5) לא אבל אז זה סתם יותר מדי, יותר מדי חישובים (...) (6) אוקיי. אז אני לא אעשה את זה כי זה יותר מדי אבל אני אבדוק אם זה יוצא אותו אהה זה... (7) אז אהה קודם כל שתיים כפול ארבעים ואחת שמונים ושתיים ועוד שלוש שמונים וחמש. (8) בואי נראה אם פה זה יוצא אותו דבר (9) אז קודם כל שתיים כפול עשרים ארבעים ועוד שלוש ארבעים ושלוש כפול שתיים.. שמונים ושש פחות אחד, (10) כן זה יוצא אותו דבר.

קל לראות שהקטע לעיל עשיר בשיח-על. שחף מדברת על מה היא תעשה ("אפשר אולי לעשות" [4]) ועל מה היא לא תעשה ("אז אני לא אעשה את זה" [6]). הקטע כולל גם מספר רוטינות מתמטיות, למשל כפל 2 ב-41, הוספת 3 וקבלת הנרטיב 85 [7]. נעבור כעת לבחון לאילו חלקים של הרוטינות המתמטיות מתייחסים ההיגדים הרגולטיביים. ראשית, אנו רואים כאן היגד על המטלה: "אוי ואבוי לי" [2]. אנו קובעים שהוא מתייחס למטלה בשל הסמיכות של היגד זה לקריאת השאלה עצמה, ובשל העובדה שהוא מובע טרם תחילתו של ביצוע ההליך ("אוקיי קודם כל..." [3]). אנו מסיקים מכך שהמטלה הרגולטיבית בה עוסקת שחף היא "מה המטלה דורשת ממני?".

היגד רגולטיבי נוסף מופיע מיד לאחר מכן, כאשר שחף בוחנת באיזה הליך מתמטי להשתמש ("אולי אפשר לעשות" [4]) מבין שני הליכים מתמטיים, ומחליטה כי אחד ההליכים מכיל "יותר מדי חישובים" [5], אבל שהיא תשתמש בו לבדיקת התוצאה [6]. כאן, מושא הרוטינה הרגולטיבית הוא ההליכים המתמטיים האפשריים לביצוע המטלה וכיצד הם משרתים את השגתה.

לאחר ששחף מבצעת שני הליכים מתמטיים שונים למציאת מספר העיגולים במקום ה-42 (ראו איור 2) היא מציינת כי "זה יוצא אותו דבר" [10]. המושא של היגד זה הוא הנרטיב המתמטי "85", או ליתר

דיוק, העובדה שאותו הנרטיב יצא כתוצאה משני הליכים שונים. עובדה זו מסייעת לשחף לקבוע שהפתרון נכון [10] בהתבסס על כך ששני הליכים שונים הובילו לתוצאה זהה. מכלל הראיונות שאספנו, הריאיון עם שחף היה ייחודי יחסית, שכן השיח של שחף היה עשיר בביטויים רגולטיביים גלויים וברורים. יחד עם זאת, במרבית הראיונות האחרים השיח הרגולטיבי היה סמוי, ונדרשה עבודת ניתוח שיח עדינה יותר כדי לזהות היגדים ופעולות רגולטיביות השזורים בשיח המתמטי סביב פתרון הבעיה. על-מנת להדגים מקרים מסוג זה נביא את שלושת המקרים הבאים לפי החלוקה של רוטינה רגולטיבית על המטלה, על ההליך ועל הנרטיב.

רוטינה רגולטיבית על המטלה המתמטית

הדוגמה הבאה לקוחה מתוך פתרונו של גלעד לבעיה הבאה: "חשבתי על מספר מסוים. אם אכפול אותו ב-7 ואחסר מהמכפלה 54, אקבל את המספר שעליו חשבתי. מהו המספר שעליו חשבתי? הסבירו כיצד פתרתם". גלעד החל לקרוא את הבעיה ותוך כדי קריאה דיבר בקול רם: גלעד: או קיי. חשבתי על מספר מסוים אם אכפול אותו בשבע ואחסר מהמכפלה חמישים וארבע (ממלמל את קריאת המשך השאלה). אוקיי... מספר... שניה... זה שאלה להפעיל את הראש. שניה..

ההיגד "זו שאלה להפעיל את הראש" מתייחס ל"שאלה" וקובע כי היא מסוג שאלה שדורשת "להפעיל את הראש". מתוך כך, אנחנו מסיקים שהמטלה הרגולטיבית שבה גלעד עוסק, בדומה לשחף שהגיבה ב"אוי ואבוי לי" על קריאת השאלה, היא לענות על השאלה "מה המטלה המתמטית דורשת ממני?". בניגוד לשחף, תגובתו המיידית של גלעד להערכת השאלה של "מה המטלה המתמטית דורשת ממני" חיובית ("להפעיל את הראש") ואיננה כרוכה בהבעת רגשות שליליים.

רוטינה רגולטיבית על ההליך המתמטי

הדוגמה הבאה מובאת מתוך פתרונו של תלמידה בשם מיקה, לסעיף ב' במשימת העיגולים שהובאה לעיל:

מיקה: (1) כמה עיגולים נמצאים בציור 10 בסדרה. (2) אוקיי, אם זה 11 (3) אז נשאר עוד... (4) זה החמישי (מצביעה על הציור החמישי) (5) נשאר עוד חמש, (6) אז (7) עוד עשר, 10 ועוד 11, (8) לא. (9) אוקיי, זה הציור החמישי (10) יש לנו עוד חמש ציורים, (11) כל ציור מתווסף... (12) אהה אז כן (13) עשר, (14) אז זה (הציור העשירי) יהיה (15) 21.

העדויות לקיומן של רוטיות רגולטיביות בשיח של מיקה עדינות למדי. הן נמצאות במילות הבקרה ("לא" [8], "אז כן" [12]). יחד עם זאת, בכדי להבין את הרוטינה הרגולטיבית במלואה, יש ראשית לנתח את הרוטינה המתמטית שבה היא משוכנת. מטלת הרוטינה המתמטית של מיקה היא מציאת מספר העיגולים בציור העשירי. ההליך שבו היא נוקטת מתפרק לתת-הרוטיות הבאות: (א) ציון מספרו הסידורי של הציור המחושב האחרון ("זה החמישי" [4]); (ב) ציון מספר העיגולים בציור החמישי ("אם זה 11" [2]); (ג) חישוב ההפרש בין המספר הסידורי של הציורים שבין הציור החמישי לציור המבוקש ("נשאר עוד חמש" [5]). (ד) הכפלת מספר הציורים שבין הציור החמישי לעשירי בהפרש הסדרה ("אז עוד עשר" [6-7]); (ה) הוספת המכפלה למספר העיגולים בציור החמישי ("10 ועוד 11" [7]). בשלב זה [8] מתחילה הרוטינה הרגולטיבית של מיקה שמוסבת על תת-ההליך שתוצאתו 10. רוטינה זו מתבטאת ב"לא" [8] המופיע מיד לאחר ההליך של חיבור ה-10 ל-11 טרם קבלת הנרטיב הנגזר מכך ("10 + 11 = 21"). לפיכך, נראה כי שיח העל מתייחס כאן להליך, לא לנרטיב הסופי. לאחר ה"לא", מיקה מבצעת מחדש את ההליך [9-11], אך הפעם היא ממלילה את מספר העיגולים שמתווספים בכל ציור ("כל ציור מתווסף" [11]) כך שה-2 בהליך 2×5 הופך עבודה כנראה ליותר מפורש. מכך אנו מסיקים שהרוטינה הרגולטיבית של מיקה סביב הליך ההוספה של 10 ל-11 מורכבת ממטלה רגולטיבית שהיא לענות על השאלה "האם התוספת של 10 מוצדקת?".

רוטינה רגולטיבית על הנרטיב המתמטי

הדוגמה הבאה מובאת מתוך פתרונו של מיקה לסעיף ג' במשימת העיגולים. להלן קטע התכתוב: מיקה: (1) כמה עיגולים נמצאים בציור מספר 42 בסדרה? (2) אוקיי, בציור מספר 10 יש לנו 21, (3) נשאר לנו עוד 32... (4) 32 כפול 2 (5) שווה 64. (6) 64 ועוד 21 (7) שווה 86. (8) אהה לא, (9) איך הגעתי ל-86? (10) 85 (11) אז 85 בציור אהה 42.

הרוטינה המתמטית של מיקה דומה לרוטינה המתמטית שלה מהסעיף הקודם: הצבעה על מקומו של הציור האחרון שחושב ועל מספר העיגולים בו [2], ציון ההפרש בין מקום הציור המבוקש למקום הציור האחרון שחושב [3], הכפלת ההפרש בשתיים [4-5], וחיבור בין התוצאה [5] למספר העיגולים בציור האחרון שחושב [6]. הנרטיב המתמטי המתקבל על-ידי מיקה להליך החיבור בין 64 ל-21 הוא 86. כלומר בשלב זה, הנרטיב המתמטי הוא שבציור ה-42 יש שמונים ושישה עיגולים. בשלב זה [8] מופיע ההיגד הרגולטיבי של מיקה "אהה לא" [8] שמוסב על הנרטיב 86 כמהווה את תוצאת ההליך $21+64$. מטלת הרוטינה הרגולטיבית, אם-כן, היא "האם הנרטיב המתמטי $21+64=86$ הוא נרטיב נכון?" כאשר המסקנה הנגזרת מכך היא שלא [8]. בהתאם לכך, מיקה מתקנת את הנרטיב מ"86" ל-"85" [10].

דיון

במחקר זה מטרתנו הייתה לאפיין שיח-על מסוג רגולטיבי, שיח שטרם הוגדר באופן מדויק תחת המסגרת הקומוניטיבית, באופן שיאפשר בחינה מיקרו-אנליטית של תהליכי רגולציה המתבצעים בשיח המתמטי של תלמידים. החידוש במסגרת המושגית המוצעת הוא שהיא מאפשרת ניתוח היבטים סמויים יחסית של רגולציה. בנוסף, ניסיונו לנתח שיח רגולטיבי העלה ששיח זה אינו ניתן לניתוח כשיח עצמאי אלא רק כשיח-על השזור בשיח המתמטי. כלומר, עדויות לקיומן של רוטינות רגולטיביות בשיח של תלמידים נמצאות לעיתים במילים בודדות ("כן", "לא"), וחשיפתן כרוכה בשחזור מדוקדק של ההליכים המתמטיים שבהם נקטה התלמידה. בשלבים הבאים של המחקר, נרצה להשתמש במסגרת המושגית המוצעת בכדי לנתח באופן השוואתי את השיח הרגולטיבי של תלמידים שונים, או של תלמידה מסוימת בזמנים שונים (מחקר התפתחותי). בנוסף, נרצה לנתח את האופן שבו השיח הרגולטיבי של תלמידים כרוך באופן שבו הם מזהים את עצמם כלומדים ובמאפייני השתתפות אחרים שלהם בשיח המתמטי. בפרט, אנו סבורים כי יש טעם לחקור את הקשר בין שיח רגולטיבי לבין מאפייני השתתפות ריטואליים וחקירותיים (Lavie et al., 2019), וכיצד קשר זה מתפתח בתהליך הדה-ריטואליזציה של השיח המתמטי.

תודות

המחקר המדווח נתמך על ידי הקרן הלאומית למדע, מענק מס' 744/20.

מקורות

- אלביום-כהן, א', נחילאלי, ט' וספרד, א' (2022). רוטינות מורה כאבני בניין של תהליכי הוראה. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, 9, 121-126.
- Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2). <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4>
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1–38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Zimmerman, B.J., & Schunk, D.H. (Eds.). (2001). Self-regulated learning and academic achievement: Theoretical perspectives (2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Zimmerman, B. J. (2002). Becoming a self-regulated learner: An overview. *Theory into practice*, 41(2), 64-70.



מבוא ורקע תיאורטי

תלמידים בעלי הישגים נמוכים במתמטיקה מנסים להימנע ממתמטיקה פורמלית, למשל הם נוטים לעשות חישובים בעל פה, משתמשים בשפה יומיומית ולא בשפה מתמטית, ההסקה מבוססת על הגיון פשוט וקשה להם לכתוב באופן מתמטי את מה שהם מסבירים בעל פה (Karsenty et al., 2007). מחקרים מצאו שעבודה בסביבה טכנולוגית יכולה לקדם תלמידים עם קשיים במתמטיקה, למשל בעבודה עם ביטויים אלגבריים (Robotti & Baccaglini-Frank, 2017). עוד נמצא (למשל Tabach et al., 2008) שעבודה עם גיליון אלקטרוני (כדוגמת אקסל) מאפשרת מעבר הדרגתי משיח חשבוני לשיח אלגברי - כתיבת ביטויים בגיליון אלקטרוני יכולה לעודד התפתחות של שפת סמלים אלגברית. אולם מחקרים אלה נעשו על כיתה שלמה ולא התמקדו בתלמידים בעלי הישגים נמוכים.

כדי להבין האם וכיצד עבודה בגיליון אלקטרוני יכולה לקדם גם תלמידים בעלי הישגים נמוכים, ניתחנו עבודה של זוג תלמידים בעלי הישגים נמוכים. הניתוח נעשה לפי התאוריה הקומוגניטיבית של Sfard (2008), הרואה במתמטיקה שיח, ובלמידה – שינוי באחד או יותר ממאפייני השיח. אחד ממאפייני השיח הוא רוטיות - תבניות מוגדרות החוזרות על עצמן במצב מסוים. רוטיות מוגדרות כמטלה והליך (Lavie et al., 2019): מטלה כפי שרואה אותה מבצע הרוטיות במצב מסוים, והליך שהוא אוסף הפעולות שנועד לבצע את המטלה. על פי התאוריה הקומוגניטיבית, למידה מתרחשת בתהליך של דה-ריטואליזציה, כאשר הלומדים מחליפים בהדרגה רוטיות שהחלו כריטואליות (מבוצעות באופן נוקשה ונשענות על סמכות חיצונית) ברוטיות חקירתיות המבוצעות באופן גמיש ותוך סמכות פנימית (Lavie et al., 2019). בתהליך הזה הלומדים עוברים לדבר בהדרגה על עצמים בשיח, ולא רק על מתווכים סימבוליים שניתן לתפעל באופן סינטקטי (לדוגמה, כפל שברים על ידי כפל מונה במונה ומכנה במכנה). התהליך הזה מצריך האחדה (saming) של מימושים שונים של העצם (Sfard, 2008). למשל בכניסה לשיח על שברים, תלמידים בתחילה מתייחסים למימושים שונים של שבר כחלק משלם ("רבע פיצה") ושבר כחלק מכמות ("רבע של 12") כאל שני דברים שונים. תהליך העיצום של שברים כולל בתוכו האחדה של שני המימושים האלה ושל רבים נוספים, כגון 0.25, 25%, מימושים ויזואליים של שבר ועוד. בנוסף, תהליך העיצום של שברים כולל שימוש חדש באופרטורים חשבוניים מוכרים (חיבור, כפל, וכו') על גבי העצמים הללו (Heyd-Metzuyanim, 2015).

השימוש המחודש באופרטורים חשבוניים מוכרים, על עצמים בלתי מוכרים, מצריך מה ש-Sfard (2008) מכנה כ"למידה ברמת-על". זאת, בניגוד ללמידה ברמת האובייקט. למידה ברמת אובייקט היא הרחבת השיח – למשל אימוץ נרטיבים חדשים על בסיס רוטיות מוכרות המבוצעות על עצמים מתמטיים מוכרים. לדוגמה, לאחר שתלמידים למדו לכפול מספרים דו-ספרתיים באמצעות כפל במאונך, יישום ההליך על מספרים תלת-ספרתיים מהווה למידה ברמת האובייקט, משום שהוא לא מצריך כללים חדשים. לעומת זאת, למידה ברמת-על מתרחשת כאשר יש שינוי בחוקי העל של השיח. לדוגמה, הכלל שפעולת הכפל מגדילה את המספר נכון תמיד במספרים טבעיים, אבל אינו נכון בשיח על שברים. מצבים שבהם לומדים נתקלים ב"מעבר קריטי" הדורש למידה ברמת-על ידועים כקשים מאוד להתמודדות ללא מומחה או מורה (Ben-Zvi & Sfard, 2007). במחקר זה ניסינו להבין האם התרחשה למידה אצל זוג התלמידים, האם הלמידה היא ברמת אובייקט או ברמת-על, ומה מקומו של הגיליון האלקטרוני בתהליך הלמידה. שאלת המחקר: האם עבודה בגיליון אלקטרוני מקדמת למידה אצל תלמידים בעלי הישגים נמוכים, העוסקים בפעילויות בנושאים מראשית האלגברה, ואם כן, כיצד?

מחקר זה הוא חלק ממחקר גדול יותר המנסה להבין באילו דרכים יכולות משימות הניתנות בסביבת גיליון אלקטרוני לתמוך בלמידת ראשית האלגברה אצל תלמידים בעלי הישגים נמוכים. במחקר השתתפו זוג תלמידים בעלי הישגים נמוכים בכיתה ז', עידו ואורי (שמות בדויים) אשר נבחרו בהמלצת המורה שלהם. הם נפגשו עם הכותבת הראשונה עשר פעמים, פעם בשבועיים בשעות אחר הצהריים. כל פגישה ארכה כשעה. התלמידים עבדו על משימות בסביבת גיליון אלקטרוני, בנושאים מתמטיים הנלמדים בכיתה ז'. החוקרת השתדלה לא להתערב בזמן שהתלמידים עבדו, אלא אם הם נתקעו ולא ידעו איך להמשיך. הפגישות צולמו ותומללו במלואן. בניתוח הנתונים התמקדנו במשימה אחת בה התלמידים היו צריכים לכתוב ביטוי בגיליון אלקטרוני לחישוב שני שליש של מספר. ניתחנו את הרוטינות שביצעו התלמידים בזמן שעבדו, וניסינו לזהות היכן התרחשו שינויים בשיח ומה גרם להם.

ממצאים

בחלק זה נציג את תהליך העבודה של עידו ואורי במשימה של חישוב מחיר מבצע של בקבוקי מים: "בחנות-רחוב יצאו במבצע: על כל בקבוק מים שקונים משלמים רק שני שליש ממחירו." המחיר של בקבוק אחד היה 6 ש"ח. באפיזודה 1 מוצג השיח בין התלמידים בניסיון לכתוב ביטוי מתאים בגיליון האלקטרוני.

אפיזודה 1 – חיפוש ביטוי לחישוב שני שליש של מספר

עידו:	437	חלקי, אנחנו נעשה חלקי שתיים, שתיים חלקי שלוש נראה לי, נראה לי, נכון?
אורי:	438	כן.
עידו:	439	חלקי שלוש (כותב את הביטוי " $C2/2/3$ ", בתא C2 כתוב המספר 6), אנטר, (רואה את המספר 1 בתא) שלוש לחלק לשתי שליש כמה זה?
אורי:	440	שלוש... ?
עידו:	441	לא, זה לא הגיוני בעצם. נראה לי...
אורי:	442	כן, זה כן.
...		
עידו:	453	שליש של שש, זה שתיים, שתי שליש זה ארבע, שתי שליש של שש זה ארבע, צריך להגיע למצב פה שיש ארבע, חלקי, אז חלקי... שש, חלקי שתי שליש, איך כותבים את זה?

מאפיזודה 1 עולה שהתלמידים מסכימים שההליך שיש לכתוב בגיליון האלקטרוני הוא 6 לחלק לשני שליש [437-439], אך כשהם רואים את המספר המתקבל בתא, את התוצאה של ההליך, עידו מביע ביקורת: "זה לא הגיוני" [441]. עוד עולה שלעידו יש הליך דבור למציאת שני שליש של שש, שמביא אותו לתוצאה 4 [453]. נראה שהוא בטוח בעצמו, אך לא יודע איך לכתוב זאת בגיליון האלקטרוני.

במקביל לעידו, גם אורי מנסה לייצר הליכים שונים לחישוב של "שני שליש מ-6". יחד עם זאת, ההליכים של אורי סינטקטיים, כלומר הוא מנסה לשלב מספרים ואופרטורים שונים כך שתתקבל תוצאה מצופה, ללא קשר לעצם "שני שליש". בתחילה, התוצאה המצופה מבחינת אורי היא 4 (משום שזו התוצאה שייצר ההליך של עידו). עבודה, הוא מייצר בגיליון האלקטרוני את ההליך 24 לחלק ל-6. לאחר מכן, אורי מנסה על הדף הליך אחר, ההליך שהם כתבו בגיליון האלקטרוני בתחילה: $6 \times \frac{2}{3}$. גם הליך זה מחושב סינטקטית וללא קשר למשמעות השבר כעצם או כאופרטור. כך, אורי מחשב את $6 \times \frac{2}{3}$ באמצעות הליך דומה מאוד להליך המתאים ל- $6 \times \frac{2}{3}$ והוא חלוקת המספר השלם במספר שמעל קו השבר ($6:2=3$), וחלוקת התוצאה במספר שמתחת לקו השבר ($3:3=1$). למרות הסינטקטיות והיעדר הקישוריות בהליך, אורי מצליח לשכנע את עידו בנכונות ההליך שלו, אולי משום שהנרטיב שיוצא ממנו זהה למה שהחזיר הגיליון האלקטרוני, אולי משום שאורי מבצע את ההליך בביטחון או אולי בגלל

הדמיון של ההליך להליך הכפל בשבר, ואולי בגלל שילוב של כל אלו. מכל מקום, הדגמת ההליך השגוי של אורי בפני עידו מובילה לכך שעידו מאמץ את ההליך שכתבו קודם בגיליון האלקטרוני ("אהה, באמת? אז כל הזמן הזה צדקנו?" [497]). עידו ואורי כותבים שוב את הביטוי במחשב ("C2/2/3") ומקבלים את המספר 1. כאן הם כנראה היו מסיימים, אילולא התערבות החוקרת, ששואלת "כן, זה טוב?" [512], וגורמת להם להמשיך לחפש הליכים.

מניתוח קטע זה עולה, אם כן, שבשלב זה, לעידו ולאורי אין הליך מוסכם לחישוב "שני שליש מ-2/3" באמצעות אופרטור חשבוני שפועל על המספר 6 באמצעות המספר 2/3. האופרטור שנראה להם המתאים ביותר הוא אופרטור החילוק, והם מנסים בדרכים שונות לשלב אותו כך שיתאים לתוצאה 4, אך כשתוצאה זו לא מתקבלת בגיליון האלקטרוני לאחר מספר ניסיונות עם הליכים שונים, הם מקבלים את ההליך שמוביל לתוצאה 1. הקושי של עידו ואורי נעוץ ככל הנראה בכך שעבור שניהם, האובייקט 2/3 לא יכול לתפקד כאופרטור על מספר אחר, ובמיוחד לא ככזה המקטין אותו. מבחינת אורי, לא נראה שלאובייקט 2/3 יש משמעות כלשהי מלבד ספרות מעל ומתחת לקו שבר, שניתן לעשות עליהן מניפולציות חשבוניות שונות (כגון כפל וחילוק). מבחינת עידו, יש לשבר 2/3 מימוש של "שליש ועוד שלישי", בעוד למימוש "שליש של מספר" יש האחדה (saming) עם "לחלק את המספר לשלוש". עידו מתקדם מעט יותר מבחינת העיצום של שברים (הוא מתייחס לשליש כעצם וכאופרטור, אך לא כך ל-2/3), בעוד אורי לא מראה סימנים שהוא עיצם שברים כלל. בשלב זה, האקסל הוא זה שמייצר את הצורך בהאחדה, אך נראה שההאחדה עצמה מהווה עבור שני התלמידים מעבר קריטי (מטה-דיסקורסיבי) שהם אינם מסוגלים לבצע בעצמם. ספציפית, כלל-העל שחומק מעיניהם הוא "שבר כפול מספר הוא החלק היחסי של השבר מהמספר" ואולי אף כלל-על כללי יותר (הידוע כנסתר עבור תלמידים רבים) והוא "שבר כפול מספר מקטין את המספר".

תפקוד התלמידים לאחר התערבות החוקרת

לאחר עוד מספר ניסיונות, כאשר אחד ההליכים מוביל את עידו לתוצאה שלישית (9), עידו נשבר, מרכין ראש על היד לרגע, מחייך ואומר "אין לי מושג כבר" [529]. בשלב זה, החוקרת מתערבת שוב ומציעה: "נגיד בלי האקסל, אם אתם צריכים לעשות שני שליש של שש, איזה תרגיל עושים?" [530]. ההדגשה הקלה של המילה "של" בתוספת המילה "תרגיל" מניעה את אורי לפעולה מיידית "אההה... נראה לי אני יודע..." [531], תוך שהוא מבקש את העט בכדי לבצע חישוב על הדף.

באופן מעניין, החידוש בדבריה של החוקרת לא מובהק לחלוטין. עידו השתמש בצירוף "שני שליש של שש" כבר כמה פעמים קודם [495, 489]. הוא גם הזכיר ש"צריך לעשות תרגיל" [485, 473]. יחד עם זאת, רק בעקבות ההתערבות של החוקרת, אולי משום השילוב של הסמכות שלה, יחד עם הצירוף של "תרגיל" ו"של" במשפט אחד, אורי מציע אופרטור חדש, כפל: "לדעתי שש כפול שתי שליש" [538]. ההצעה מאוד מהוססת, ומיד הוא מבטל אותה: "אה, לא" [538]. רק התגובה של החוקרת "ואז מה יוצא?" [539], המרמזת כנראה לאורי שהוא בכיוון הנכון, גורמת לו לקחת את הדף, לבצע הליך של כפל המספר במונה וחלוקה במכנה (באופן זהה להליך שהוא ביצע עם אופרטור החילוק), ולקבל את המספר 4 [550]. עידו אמנם לא מבצע את החישוב בכתב, אבל עוד לפני שאורי מקבל את התוצאה המצופה, קרי 4, עידו כבר מקבל את ההליך באומרו "אהה נכון... כי כאילו 'של' זה כפול, אני זוכר שלמדנו על זה" [547]. מהרגע שהליך הכפל הודגם על ידי אורי והוביל לנרטיב המצופה על ידי עידו, היישום של ההליך במחשב כבר לא מהווה שום בעיה עבור עידו. הוא מיד פונה למחשב, כותב את הביטוי "C2*2/3" (בתא C2 כתוב המספר 6), לוחץ "אנטר", מקבל את המספר 4 וגורר את העמודה [556]. הוא מסכם ואומר "שכחתי שכפול זה בעצם של" [558].

נראה, אם כן, שהתפקיד העיקרי של החוקרת היה בלסייע לתלמידים לעבור את המעבר הקריטי הכרוך בשימוש באופרטור הכפל כמציין "שבר של מספר" (או "שבר ממספר"). נציין כי על אף הסיום המוצלח של המטלה, התלמידים לא בהכרח ביצעו את המעבר הקריטי באופן שהשיח שלהם השתנה ברמת העל. גם בסוף, משתמע מאמירתו של עידו "שכחתי שכפול זה בעצם של" שזהו חוק שרירותי שהיה עליו לזכור, לא משהו שהוא יכול להצדיק באמצעות הסמכות שלו. בשיח של אורי יש עוד פחות סיכוי למעבר ברמת העל משום שאין אינדיקציות לעיצום שברים כלל. יחד עם זאת, מהרגע שהמעבר הקריטי נעשה, הגיליון האלקטרוני מסייע לתלמידים לבצע בכוחות עצמם ויחסית בקלות את המטלה בשיח החדש (שבו לכפל ולשבר יש תפקיד משולב של "חלק מ").

במחקר זה עקבנו אחרי עבודה של זוג תלמידים בעלי הישגים נמוכים על משימה בגיליון אלקטרוני – כתיבת ביטוי לחישוב שני שלישי של מספר. כפי שהצגנו בפרק הממצאים, המאבק של עידו ואורי בכתיבת ביטוי מתאים בגיליון האלקטרוני הוביל אותם למעבר קריטי (מטה-דיסקורסיבי) בין שיחים – הם הכירו בכך שהכללים הידועים להם אינם מספיקים ושהם נדרשים לכללים חדשים כדי לכתוב את הביטוי. הגיליון האלקטרוני לבדו לא סייע לתלמידים לצלוח את המעבר הקריטי ולאמץ כלל חדש. לצורך כך נדרש תיווך של החוקרת, שסייעה וכיוונה את התלמידים. אולם מרגע שהמעבר הקריטי נעשה והתלמידים אימצו כלל חדש לפעול לפיו, גם אם אימוץ הכלל אינו מושלם, הגיליון האלקטרוני סייע לתלמידים ליישם את הכלל החדש שלמדו.

כדי שתהיה למידה ברמת-על, דרושה לרוב נוכחות של מומחה, מורה. Tabach and Nachlieli (2015) מצאו שלמידה ברמת-על יכולה להתרחש גם באמצעות מתווך המביא את קולו של המומחה. אפשר היה להניח שהגיליון האלקטרוני, הנותן משוב לעבודת התלמידים בדמות המספר שהוא "מחזיר" לכל ביטוי שהתלמידים כותבים, יכול לשמש סוג של מתווך כזה. אולם המחקר הנוכחי הראה שלא כך הוא, לפחות עבור תלמידים בעלי הישגים נמוכים. לגיליון האלקטרוני יש תפקיד בהבאת התלמידים להכרה בצורך בכללים חדשים, ולאחר המעבר הקריטי - במימוש של הכללים החדשים, אך לצורך ביצוע המעבר הקריטי עצמו, דרוש מומחה בעל סמכות.

תודות

המחקר המדווח נתמך על ידי הקרן הלאומית למדע, מענק מספר 744/20.

מקורות

- Ben-Zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, daedalus' wings and the learners autonomy. *Éducation et Didactique*, 1(3), 73–91.
- Heyd-Metzuyan, E. (2015). Vicious cycles of identifying and mathematizing: A case study of the development of mathematical failure. *Journal of the Learning Sciences*, 24(4), 504–549. <https://doi.org/10.1080/10508406.2014.999270>
- Karsenty, R., Arcavi, A., & Hadas, N. (2007). Exploring informal mathematical products of low achievers at the secondary school level. *The Journal of Mathematical Behavior*, 26(2), 156–177. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.003>
- Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 153–176. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4>
- Robotti, E. & Baccaglini-Frank, A. (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In E. Faggiano, F. Ferrara and A. Montone (Eds.), *Innovation and technology enhancing mathematics education. Mathematics education in the digital era 10*, 77–106. Springer.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. New York: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>
- Tabach, M., Hershkowitz, R., & Arcavi, A. (2008). Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 27(1), 48–63.
- Tabach, M. & Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: The case of function. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 163–187. doi:10.1007/s10649-015-9624-0.



רקע תיאורטי

הנושא בעיות קיצון מופיע בתוכנית הלימודים של החטיבה העליונה ברמת 5 יחידות לימוד, ובהן נדרש התלמיד לקשר בין מספר תחומים מתמטיים: אלגברה, גיאומטריה וחשבון דיפרנציאלי (דביר וטבח, 2017), וכן להפגין מיומנויות של חשיבה מסדר גבוה, אוריינות מתמטית ויכולת לנתח את הבעיה בכפוף לאילוצים הנתונים בה (מל"מ טכניון, 2014). בשל כך נחשבת ההוראה והלמידה של בעיות קיצון לאחד הנושאים המורכבים הן למורה והן לתלמיד.

בעיות קיצון ניתנות להתרה באמצעות אלגוריתם מן החשבון הדיפרנציאלי, המספק הליך טכני ושיגורתי לפתרון רב בעיות הקיצון (דביר וטבח, 2017). יחד עם זאת בעיות קיצון ניתנות להתרה בדרכים שאינן שגרתיות הדורשות תחכום ושימוש בידע מקיף מתחומיה השונים של המתמטיקה כגון: אלגברה וגיאומטריה (מוגילובסקי וסטופל, 2004). מתחום האלגברה, למשל, ניתן להתיר חלק מבעיות הקיצון על ידי שימוש באי-שוויון הממוצעים ומתחום הגיאומטריה על-ידי עקרון הרון למציאת המרחק הקצר ביותר. פתרון בעיות קיצון בכלים שהם לא דיפרנציאליים ניתן למצוא אצל מוגילובסקי וסטופל (2006), הלין ורוס (Allen & Ross, 2017), טיחומירוב (2000) וכן אצל אוקסמן ואחרים (Oxman et al., 2019).

צורת ההוראה הרווחת להתרת בעיות קיצון, בקרב רוב מורי המתמטיקה, מסתמכת באופן בלעדי על האלגוריתם מן החשבון הדיפרנציאלי המספק כלי יעיל, שיטתי ונוח להתרת כל בעיות הקיצון המופיעות בתוכנית הלימודים של 5 יחידות לימוד, ואינה חושפת את התלמידים לקיומן של דרכי פתרון בכלים הלא דיפרנציאליים. צורת הוראה זו גורמת לכך שבפועל, במקום שהתלמיד יתבונן בבעיה ויבצע מהלכים מקדימים של חקר וניתוח מעמיק שלה, הוא לומד לבצע אלגוריתם הפועל כמעין מכונה הפולטת פתרון נומרי, הממסכת מיומנויות חשובות שעשויות לתרום לפיתוח החשיבה וההבנה המתמטית שלו. בנוסף, בדרך פתרון זו התלמיד לא נחשף למיומנות מתמטיות אחרות, הדרושות להתרת הבעיות הספציפיות הללו כגון: הבנת הדינאמיות של הבעיה, אופן הגדרת המשתנים שלה והבנת מהלך הפתרון ותוצאותיו. כתוצאה מכך נוצר אצלו קושי להתמודד עם בעיות קיצון ברמת 5 יחידות לימוד, הדורשות חשיבה שהיא מעבר לביצוע הטכני (דביר וטבח, 2017). עורך המחקר, ער להתגברות קושי זה יותר ויותר בשנים האחרונות, עת שינוי המגמה שעברו בחינות הבגרות במתמטיקה בכלל ובמסלול 5 יח"ל בפרט – "הפחתת הערך הטכני בפתרון השאלות והדגשת ההבנה" (משרד החינוך, 2023).

מחקרים מראים שהוראת מתמטיקה המעודדת גיוון בדרכי פתרון לא שגרתיות מסייעת להתפתחות החשיבה המתמטית של הלומד, מטפחת חשיבה מתמטית יצירתית ומטפחת לומד עצמאי, ביקורתי שמגלה שליטה בתהליך הפתרון והבנת המשמעות של התוצר שהתקבל (מוגילובסקי וסטופל, 2004; Leikin & Lev, 2007). לעומת זאת, הוראת מתמטיקה ששמה דגש על הבנה אינסטרומנטלית כלומר, ביצוע טכני של אלגוריתם, ללא הבנה (סקאמפ, 1991), חוסכת מהתלמיד מיומנות חשובות אלו שנאבדות בזמן הביצוע הטכני (גרונהט ויאנקובסקי, 2021; דביר וטבח, 2017).

במטרה לספק מענה לקושי דנן, פותחה במסגרת המחקר יחידת לימוד ניסיונית - "בעיות קיצון לומדים אחרת" המציגה גישת הוראה ייחודית וחדשנית לנושא בעיות הקיצון ברמת 5 יחידות לימוד בשני מישורים תוכן לימודי וגישה דידקטית בשילוב טכנולוגיה. מטרת מחקר זה, היא להתחקות אחר אסטרטגיות הפתרון של התלמידים, לעקוב ולחקור את תפיסותיהם ומחשבותיהם בעניין בעקבות לימוד ביחידה.

כיצד חווים תלמידי 5 יחידות מתמטיקה יחידת לימוד המעודדת גיוון בגישות לפתרון בעיות קיצון? כדי לענות על שאלה זו יענה המחקר על שלוש השאלות:

1. כיצד מתמודדים התלמידים עם דרכי פתרון מגוונות של בעיות הקיצון המופיעות ביחידה?
2. כיצד תופסים התלמידים את הדינאמיות של המשתנה בבעיות קיצון בעקבות הלמידה ביחידה?
3. כיצד תופסים התלמידים את משמעות פתרון הבעיה המתקבל בעקבות הלמידה ביחידה?

מתודולוגיה

המחקר נערך בבית-ספר תיכון בעיר פריפריאלית בצפון הארץ. במחקר השתתפו שמונה תלמידים בכיתה י"א הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יחידות לימוד. רוב המשתתפים שנבחרו הם תלמידים המתקשים בהתמודדות עם סעיפי חשיבה אינטגרטיבית מסדר גבוה הבודקים את הבנת המשמעות של הפתרון.

המחקר נעשה בכלי המחקר האיכותני, יחידת הלימוד "בעיות קיצון לומדים אחרת" וניתוח תוצרי הפעילות של התלמידים ביחידה.

יחידת הלימוד "[בעיות קיצון לומדים אחרת](#)" ממקדת את ההוראה של נושא בעיות קיצון ברמת 5 יחידות לימוד בשני מישורים: תוכן לימודי וגישה דידקטית. במישור התוכן מספקת היחידה אסטרטגיות שונות לפתרון בעיות קיצון הכוללות שימוש בכלים אלגבריים (אי-שוויון ממוצעים) גיאומטריים (עקרון הרון למציאת המרחק הקצר ביותר) וכמובן, דיפרנציאלים (באמצעות הפונקציה הנגזרת). במישור הדידקטי סדר ההוראה יהיה כזה שבתחילה ההוראה יחשפו התלמידים לכלים הלא דיפרנציאליים שיוציאו אותם מן ה"סביבה האינסטרומנטלית", הסביבה הטבעית בה רובם מורגלים, דבר שיצריך מהם "לעבוד קשה" וכך לחדד ולפתח להם את החשיבה. לאחר מכן יחשפו לאלגוריתם הדיפרנציאלי שפותר את הבעיה בצורה יעילה קצרה ושגרתית. יתרה מזאת, כדי לסייע לתלמיד להתמודד עם הדינמיות של הבעיות וחידוד יכולת החקר שלו מכילה היחידה משימות חקר מלוות ביישומונים, מסביבת GeoGebra, שנבנו באופן ייעודי לבעיות שיש ביחידה ומותאמים לעולם התוכן שלהן ובאמצעות יכולת התלמיד לשוטט במרחבי הבעיה באופן דינאמי.

ניתוח הנתונים נעשה באמצעות תהליך של חלוקה לתמות (שקדי, 2003). הנתונים המצטברים חולקו לשלוש תמות בהתאם לשאלות המחקר: א. אופן ההתמודדות עם דרכי פתרון מגוונות של בעיות קיצון ב. תפיסת הדינאמיות של המשתנה בבעיות קיצון ג. אופן ההתמודדות עם משמעות הפתרון שמתקבל.

ממצאים

ממצאי המחקר מצביעים על כך שהדרך להתרת בעיות קיצון על-ידי אלגוריתם לגראנז' היא הדרך שהתלמידים מעדיפים. לדבריהם הסיבה לכך היא שדרך זו עובדת כמעט בכל המקרים ובשל יעילותה בפתרון רוב בעיות הקיצון תלמיד 1: "ברגע שאת בונה את פונקציית המטרה הכל נהיה קל – גוזרים משוים לאפס ובעקרון הפתרון מאחוריק". אולם יחד עם זאת התלמידים העריכו את תרומתן של הדרכים האחרות לפיתוח החשיבה המתמטית שלהם: תלמיד 1: "[...] הדרכים האחרות שבאות לפני השיטה פותחות לך את השכל. הבלבלה" שזה יוצר לך במוח גורם לך לחשב, אתה מבין?"; תלמיד 2: "היחידה היא לא רק יעד, היא דרך ליעד. ביחידה לא ישר למדנו את האלגוריתם שנותן לך פתרון לבעיה בקלות אלא למדנו דרכים, בוא נגיד, פרמיטיביות, לא משוכללות כמו האלגוריתם כדי לפתור בעיה. כל הזמן צריך לחשוב על צורה אחרת של פתרון. אבל אני אגיד לך מה המורה, אני חושב שדרכים אלה חזקו אצלי את החשיבה להבין מה אני עושה ואיך לעשות". עוד עולה מן הממצאים שהדרכים הלא שגרתיות לפתרון בעיות קיצון, כפי שהן מוצגות ומוסברות ביחידה, מסוגלות לסייע בטיפול מיומנותי מתמטיות חשובות כגון: הבנת הבעיה והכלים לפתרונה, פיקוח על מהלך הפתרון והבנת המשמעות בתוצר נומרי שהתקבלה, גם כזה מתקבל באמצעות ההליך

הטכני של אלגוריתם לגראנז': תלמיד 3: "[...] הדרכים המשונות, (הלא שגרתיות), הן אלו שעושות את השכל. הן אלו שעושות אותך חד ומרגילות אותך לחשוב ולהבין את משמעות של מה שיצא, גם אם משתמשים באלגוריתם". תלמיד 4: "סביר להניח שהוא, (תלמיד אחר שלא נחשף ליחידת הלימוד), יגזור את הפונקציה ישווה לאפס ויעבוד כמו רובוט בלי בדיקה... ואז יכול להיות שיהיה סעיף שדורש מחשבה שעליו התלמיד יתקשה לענות" ממצא נוסף שעלה הוא שהיישומונים סיעו לתלמידים להתמודד עם הקושי להבין את בעיית הקיצון כבעיה דינאמית, כלומר להבין שחלקים ממנה יכולים לזוז ולנוע גם בעוד שהיא מוצגת באופן סטטי (על דף): תלמיד 4: "אני חושבת על סליידר דמיוני (הכוונה לסרגל הגרירה שיש בתוכנת Geogbra) ואני מזיזה את הנקודה בתחום ההגדרה של פונקציית המטרה ואז אני מסתכלת על הערכים שאני מקבלת". תלמיד 5 הוסיף: "אני מדמיין את הנקודה זזה על הגרף ואיך זה משפיע על צלעות המלבן, שטחו והיקפו". תלמידה 6 האדירה את כוחו של הסימון במשתנה ויתרונה של האלגברה כמתמטיקה מוכללת, ותלתה את ההבנה שלה ביישומון הדינאמי: "הסליידר עוזר לך להבין את הכוח של הסימון במשתנה... ברגע שאני מסמנת את הנקודה במשתנה אני מבינה שהיא לא במקום ספציפי אלא שהיא יכולה לנוע ולהיות איפה שבא לה בהתחשב במגבלות הבעיה"

דין

מחקר זה בחן שימוש ביחידת הוראה ללמידה והוראה של בעיות קיצון שפותחה במטרה לעזור לתלמידים להבין את הדינאמיות שיש בבעיות קיצון, להבין את משמעות הגדרת המשתנים וכן לבצע פיקוח ובקרה על התוצר שהתקבל.

התלמידים ראו באלגוריתם דרך קלה, בטוחה ומהירה בשל ההליך השיטתי והאחיד שהוא מספק: מציאת פונקציית המטרה ושימוש בנגזרת למציאת ערכי הקיצון שלה. אולם יחד עם זאת, הם מבקרים את משמעות התוצאה שהם קיבלו בעזרתו. ממצא זה מתיישב עם מחקרם של גרונהט ויאנובסקי (2021) הטוענים כי החשבון הדיפרנציאלי מספק כלי חזק ושיטתי להתמודד עם בעיות, לכן גם אם התלמידים בוחרים לפתור בדרך הטכנית שאותה הוא מספק זה "יכול להרגיע אותנו" ובתנאי שיעברו על תובנות שנעלמו מעיניהם בזמן הביצוע הטכני. למרות אי הוודאות וחוסר הביטחון שעוררו הדרכים הלא שגרתיות בקרב התלמידים בשלבי הלימוד ההתחלתיים נמצא כי הן עשויות לשפר את ההבנה הדרושה לפתרון הבעיה, כגון: ביקורת על התוצאה שהתקבלה והבנת הדינאמיות של המשתנה. ממצאים אלו עומדים בקנה אחד עם הספרות המקצועית שטוענת כי לפתרון בעיות מתמטיות באמצעות דרכים לא שגרתיות יתרונות חשובים שהתלמיד זקוק להם, מעבר לפתרון הנומרי ה"יבש" של הבעיה. הן תורמות לפיתוח החשיבה המתמטית של הלומד, מעודדות לחשיבה ביקורתית ומטפחות לומד עצמאי שמבין את משמעות התוצר שהתקבל (מוגילובסקי וסטופל, 2004; Leikin & Lev, 2007).

בנוגע לשימוש ביישומונים נמצא כי סרגל הגרירה שיש ביישומון אפשר לתלמידים לשנות את ערכי המשתנה ולראות מיד את ההשפעה שיש לו על שאר מרכיבי הבעיה באופן ויזואלי ומוחשי, דבר שהגביר בהם את הסקרנות, ומשך אותם לחקור את הבעיה באופן עצמאי. התלמידים דיווחו כי גם בעת פתרון של בעיית קיצון המוצגת בצורה סטטית (על דף), הם נזכרים ביישומון הדינאמי וחושבים על "סליידר דמיוני", דבר המסייע להם לדמיין את תזוזות האובייקטים של הבעיה ובכך מסייע להם להבין את הקשרים בין המשתנים שלה. ממצא זה עולה בקנה אחד עם ממצאים הקיימים בספרות המחקר המקצועית לפיה היתרון העיקרי של התוכנה הדינאמית טמון באפשרות שהן מקנות על-ידי שינוי האובייקטים בצורה רציפה ובחינה של השפעת השינוי על שאר נתוני הבעיה (דביר וטבח, 2017; סגל ואחרים, 2016). בנוסף, התלמידים מדווחים כי בטרם נחשפו ליישומונים הדינאמיים, היה להם קשה להבין את תפקיד המשתנה בבעיה וכיצד עליהם להגדיר אותו, למשל, איך צלע של מצולע יכולה להשתנות (להתארך או להתקצר) כאשר היא חלק ממצולע המוצג בצורה סטטית. ממצא זה תואם למובא בספרות המחקר, שגורסת כי הקושי לראות סרטוטים המופיעים בנתוני השאלה כסרטוטים דינאמיים, הוא ייחודי לבעיות קיצון והוא גורר קושי בהבנת הקשרים בין המשתנים (מל"מ טכניון, 2014; סגל ואחרים, 2016). לעומת זאת, לאחר שהתלמידים נחשפו, באמצעות יחידת הלימוד, ליישומונים הדינאמיים שצורפו לחלק מן הבעיות, הם מעידים כי הם מבינים טוב יותר את מושג המשתנה בהיותו מופקד על הדינאמיות של הבעיה. ממצא זה עולה בקנה אחד עם מחקרים הטוענים כי שילוב יישומונים בהוראת מתמטיקה תורמים להבנה מושגית, הבנה של התוכן הפדגוגי ומפתחות מיומנות חשיבה מדר גבוה (Kepple et al., 2015).

לסיכום, התלמידים העידו כי בעקבות התמודדות עם הדרכים הלא שגרתיות אליהן נחשפו ביחידת הלימוד, הם למדו לחשוב ולפתח דפוסי חשיבה אלו. ממצא זה מתיישב עם מחקרם של דביר וטבח (2017) לפיו הפתרון המתקבל על ידי ההסתמכות הבלעדית על אלגוריתם לגראנז' מזקק את תהליך העיסוק בבעיות קיצון לביצוע פרוטוקול טכני שמונע מהתלמידים לשוטט במרחבי הבעיה ולהבין את משמעות התוצאה שהם קיבלו והסיבות שהובילו אליה.

רשימת מקורות

- גרונהט, א' ויאנובסקי, ל' (2021). בעיות קיצון גיאומטריות עם פתרון בנייה, על"ה, 59, 43-51.
- דביר, א' וטבח, מ' (2017). הבניית ידע בנושא פתרון בעיות קיצון גיאומטריות ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי בסביבה טכנולוגית. חיבור לשם קבלת תואר מוסמך. אוניברסיטת תל-אביב.
- טיחומירוב ו.מ' (2000), סיפורים על מקסימום ומינימום. (תרגום: א' שמוקלר ונ' מושקוביץ הדר). חיפה: קשר חם.
- מוגילובסקי, ר' וסטופל מ' (2004). מציאת ערכי קיצון: מינימום / מקסימום ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי, שנתון שאנן, ט', 387-402.
- מוגילובסקי, ר' וסטופל מ' (2006). מפלאי אי-השוויונים של הממוצעים. חיפה: שאנן.
- משרד החינוך. מל"מ טכניון. (2014). ללמוד וללמד אנליזה. חיפה: המחבר.
- משרד החינוך. (2023) חוזר מפמ"ר תשפ"ג אוחר מתוך <https://meyda.education.gov.il/files/matmatika/Chativa-Elyona/hozer-mafmar.pdf>
- סגל, ר', סטופל, מ' ואוקסמן ו' (2016). חקר דינמי של מקומות גיאומטריים בשילוב הוכחות מתמטיות בדרכים שונות, שנתון שאנן, כ"א, 121-140.
- סקמפ, ר' (1991). הבנה רלציונית (Relational) והבנה אינסטרומנטלית (Instrumental) חלקים א', ב'. על"ה, 8, 24-29.
- שקדי, א' (2003). מילים המנסות לגעת: מחקר איכותני תיאורי ויישום. תל-אביב: רמות
- Allen, G. D. (2017). Optimization without Calculus. In G.D. Allen & A. Ross (Eds.), *Pedagogy and Content in Middle and High School Mathematics* (pp. 57-66). Rotterdam: Sense Publishers.
- Kepple, M., Campbell, L. O., Hartshorne, R., & Herlihy, C. (2015). An introductory examination of factors influencing K-12 teachers perceptions and use of emerging technological tools in the classroom. Paper presented at the *proceedings of Society for Information Technology & Technology & Teacher Education International Conference*, 2154-2156.
- Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Wo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31 st International Conference for the Psychology of Mathematics*
- Oxman et al., Cogent Education (2018), 5: 1551299. <https://doi.org/10.1080/2331186x.2018.1551299>



מבוא ורקע תיאורטי

ביולי 2018 אישרה הכנסת את תיקון מס' 11 ל"חוק החינוך המיוחד" (2018). בתיקון הוגדרה הבחנה בקרב תלמידים המשולבים בכיתות הרגילות, בין תלמידים עם מוגבלויות המוגדרות בשכיחות נמוכה (ובהן אוטיזם, הפרעות נפשיות, מוגבלות בשמיעה ובראייה, שיתוק מוחין ונכות פיזית קשה, מחלות ותסמונות נדירות ומוגבלות שכלית-התפתחותית בינונית וקשה), לבין תלמידים עם מוגבלויות בשכיחות גבוהה (הפרעות למידה, הפרעות התנהגותיות, הפרעות קשב, ריכוז והיפראקטיביות, עיכוב התפתחותי בתחום השפתי והתפקודי ומוגבלות שכלית-התפתחותית קלה). לפי תיקון זה, תלמידים עם מוגבלויות המוגדרות בשכיחות הנמוכה והגבוהה ישולבו בכיתות הרגילות.

בעשור האחרון, נושא שילוב תלמידים עם צרכים מיוחדים (צח"מ) בשיעורי מתמטיקה נחקר רבות. Gervasoni & Lindenskov (2010) מצאו כי הגורם המרכזי לכך שתלמידי צח"מ לא מצליחים ללמוד מתמטיקה כראוי בבית הספר הוא חוסר מיצוי מלוא הפוטנציאל. הן פונות לקהילת המתמטיקה הבינלאומית במטרה להבטיח גישה לחינוך מתמטי איכותי לתלמידים הללו, באמצעות ביצוע תוכניות מחקר ופיתוח באמצעותם קהילת המורים יבינו את הפוטנציאל גישות שונות להוראה, למידה והערכה של התלמידים. הבדלים שונים בגישות להוראה, וכן בגישה השוויונית ובסיס הידע של מורים וחוקרים המגיעים מאסכולות שונות (חינוך מתמטי וחינוך מיוחד) מוצגים במאמרם של Sheppard & Wieman (2000). לדוגמה, מחד גישה הרואה את הקושי בתלמיד, לתלמיד יש מצב מסוים שמפריע לו ללמוד. לפי גישה זו, תפקידו של המחקר הוא לזהות את מצבו האישי של התלמיד, ולפתח טכניקות כדי לסייע לאותו תלמיד. מאידך, גישה המזהה את הקושי במערכת החינוכית והפדגוגית, שמעדיפה קבוצה אחת על פני אחרת. גישה זו רואה בתלמידים מתקשים כמתן הזדמנות למחנכים לבחון מחדש את המערכת הפדגוגית ולתקן אותה כך שתהיה נגישה לכולם. Lambert & Tan (2019) סקרו מחקרים רבים בנושא שילוב תלמידי צח"מ בהוראת המתמטיקה. בסקירתם הם מציגים את הוויכוח בשיטות ההוראה הנהוגות כלפי תלמידי צח"מ. מצד אחד הוראה פרוצדורלית המתמקדת במיומנויות מתמטיות בסיסיות וגישות צרות לתוכן מתמטי, ומצד שני הוראה העוסקת בשיח מתמטי ואסטרטגיות פתרון שונות, שבהן הלמידה בנויה סביב עושר חוויות, פרקטיקות תרבותיות, ידע ותחומי עניין. כל זה מצריך מהמורה ידע מתמטי וידע פדגוגי תכני עמוק ורחב (Loewenberg Ball, 2008).

בנוסף לידע, אספקטים אפקטיביים הם גם גורמים חשובים בהוראה. אמונות שיש למורים למתמטיקה ביחס לאופי המתמטיקה, הוראת המתמטיקה ולמידת המתמטיקה יכולות להשפיע על הפרקטיקות שלהם בהוראה ועל סביבת הכיתה (Beswick, 2008). גורם נוסף שיכול להשפיע על תהליך ההוראה-למידה מקורו בתחושת המסוגלות של המורים. מסוגלות עצמית של מורה הינה מערכת האמונות האישיות שלו ביכולותיו לבצע הוראה ספציפית, ולתת משימות ברמה מסוימת במהלך סיטואציה מסוימת (Dellinger et al., 2008). ככל שתחושת המסוגלות של המורה גבוהה יותר, כך משתפר תפקודו ומשתבחת איכות ההוראה שלו (Tsamir et al., 2014). צמיר ושות' (2014) בחנו במחקרן היבטים שונים של ידע (ידע במתן פתרונות, ידע בהערכת פתרונות, ידע לגבי תפיסות אופייניות של ילדים) והתאמה בינם ובין תחושת המסוגלות העצמית ככלי שיסייע לפיתוח תוכניות קידום מקצועי של אנשי חינוך. שאלות המחקר הן: מהי מידת המסוגלות העצמית של מדריכות למתמטיקה כלפי ידע על דרכי חשיבה ופעולה של תלמידי צח"מ? מהי מידת המסוגלות העצמית של מדריכות למתמטיקה כלפי ידע על הוראה ותוכנית הלימודים לתלמידי צח"מ? מהן אמונות מדריכות למתמטיקה כלפי שילוב תלמידי צח"מ בשיעורים רגילים? מטרת המחקר הנוכחי, לבחון את מידת האמונות והמסוגלות העצמית של מדריכות למתמטיקה, כלפי שילוב והכלה של תלמידים עם צרכים מיוחדים בכיתות רגילות כאשר הקונטקסט המתמטי הוא כפל וחילוק, במטרה לבנות בהמשך תכנית פיתוח מקצועי למורים.

במחקר הנוכחי השתתפו 23 מדריכות למתמטיקה מאחד המחוזות ברחבי הארץ. המשתתפות מילאו שאלונים ממוחשבים, שנבנו בהתבסס על מחקרה הכמותי של ברנט (Barnett, 2015). במחקרה Barnett (2015) מצאה קשר חיובי מובהק בין גישתם ואמונותיהם של פרחי הוראה לגבי שילוב והכלה של תלמידי צח"מ בשיעורי מתמטיקה, לבין יכולתם להתאים דרכי הוראה ללקויות למידה ספציפיות וללמד מתמטיקה. בשאלוני המחקר הנוכחי הוצגו 31 היגדים, שלגבי כל אחד מהם משתתפות המחקר סימנו את מידת המסוגלות העצמית או האמונה שלהן בסולם 1-9. השאלונים עברו תיקוף על ידי ארבע מדריכות בתחום המתמטיקה ומדריכה מהחינוך המיוחד וכן פיילוט של חמש מורות, לפני העברתם.

חשוב לציין כי כל המשתתפות במחקר הן נשים בעלות השכלה בחינוך המתמטי, מעל 95% בעלות וותק של 6 שנים ומעלה בהוראה. כ-75% הצהירו כי הן משלבות תלמידי צח"מ כבר למעלה מ-6 שנים. כ-74% הצהירו כי הן משלבות תלמידים בעלי מוגבלות על רצף האוטיזם, כ-57% הצהירו כי הן משלבות תלמידים בעלי הפרעה התנהגותית רגשית וכ-57% הצהירו כי הן משלבות תלמידים בעלי לקות למידה רב בעייתית. 54% מהמשתתפות הצהירו כי לא עברו כלל קורסים שקשורים להוראת תלמידים עם צרכים מיוחדים.

ממצאים ודיון

לגבי המסוגלות העצמית כלפי ידע על דרכי חשיבה ופעולה של תלמידי צח"מ, הממצאים הראו (טבלה 1) שממוצע התשובות של הנחקרות גבוה יחסית (7 בסולם 1-9) פרט למסוגלות שלהן לחזות את אסטרטגיות הפתרון של תלמידים עם צרכים מיוחדים בפתרון תרגילים ושאלות בכפל ובחילוק.

טבלה 1

מסוגלות עצמית כלפי ידע על דרכי חשיבה ופעולה של תלמידים עם צרכים מיוחדים

ההיגד (כל ההיגדים מתייחסים לכפל וחילוק)	ממוצע	ס.ת.
אני מכירה שגיאות אופייניות של תלמידים עם צרכים מיוחדים.	7.22	2.11
אני יודעת לחזות את דרכי החשיבה של תלמידים עם צרכים מיוחדים בפתרון תרגילים ושאלות.	7.13	1.89
אני יודעת לחזות את אסטרטגיות הפתרון של תלמידים עם צרכים מיוחדים בפתרון תרגילים ושאלות.	6.74	1.94
אני מודעת ליכולת של תלמידים עם צרכים מיוחדים לקחת חלק פעיל בזמן דיון כיתתי.	7.70	1.74
אני מודעת ליכולת של תלמידים עם צרכים מיוחדים להישאר מרוכזים לאורך שיעור.	7.87	2.10
אני מודעת ליכולת של תלמידים עם צרכים מיוחדים להישאר מרוכזים בעת ביצוע מטלה.	8	1.54
אני מכירה קשיים של תלמידים עם צרכים מיוחדים בזיהוי נכון של סמלים או ספרות (קריאת מספרים).	7.57	1.80
אני מכירה את הקשר שבין יכולות הזיכרון של תלמידים עם צרכים מיוחדים ולימודים.	7.61	1.95
אני מכירה את יכולות החישוב (מסוגל לחשב ולהגיע לתשובה הנכונה) של תלמידים עם צרכים מיוחדים בלימודים.	7.43	1.88
אני מכירה את היכולות בתקשורת בעל פה ובכתב (לדוגמה: מתן הסבר בע"פ/ פתרון תרגיל בכתב) של תלמידים עם צרכים מיוחדים בלימודים.	7.57	2.00

בנוגע למסוגלות עצמית שלהן כלפי ידע על הוראה ותוכנית הלימודים לתלמידי צח"מ, ניתן לראות (טבלה 2) שממוצע התשובות של הנחקרות גבוה יחסית (6-7 בסולם 1-9), אולם הממוצע נמוך (5 בסולם 1-9) בנוגע למסוגלות לעצמית שלהן לגבי היכרות עם תכנית הלימודים לתלמידי צח"מ ובניית תכנית מותאמת אישית שתתאים לתלמידים אלו. גם סטיית התקן גדולה לגבי ההיגדים הללו.

טבלה 2

מסוגלות עצמית כלפי ידע על הוראה ותוכנית הלימודים לתלמידים עם צרכים מיוחדים (צח"מ)

ההיגד (כל ההיגדים מתייחסים לכפל וחילוק)	ממוצע	ט.ו
אני יודעת לבצע תכנית התערבות שתסייע לתלמידי צח"מ.	6.96	1.74
אני יודעת להתאים אמצעי המחשה עבור תלמידי צח"מ.	7.96	0.93
אני יודעת לבנות משימה לפי רמת קושי לתלמידי צח"מ.	7.61	1.20
אני יודעת לבנות את רצף ההוראה עבור תלמידי צח"מ.	7.57	1.44
אני יודעת לקיים דיון כיתתי לגבי היבטים שונים ולשלב בו תלמידי צח"מ.	7.74	1.21
אני יודעת להשתמש בדרכי פתרון מגוונות לתלמידי צח"מ בעת ההוראה.	7.70	1.58
אני יכולה לגרום לתלמידי צח"מ. להגיע לידי שליטה בלימודים.	6.83	1.50
אני יודעת לעורר עניין / סקרנות עבור תלמידי צח"מ בעת ההוראה.	7.17	1.40
אני יכולה להשתמש במגוון אסטרטגיות הערכה כלפי תלמידי צח"מ בעת ההוראה.	7.39	1.88
אני מכירה את תכנית הלימודים לתלמידי צח"מ.	5.35	2.71
אני יכולה לשלב בהוראה בין תכנית הלימודים במתמטיקה למסמך ההתאמות (תוכנית הלימודים לתלמידי צח"מ).	6.09	2.11
אני יודעת לבנות תכנית מותאמת אישית (תח"י - תכנית חינוכית יחידנית) שתתאים ל תלמידי צח"מ.	5.61	2.76

בנושא אמונת הנחקרות לגבי שילוב תלמידי צח"מ בשיעורי מתמטיקה, מטבלה 3 ניתן לראות שיש פיזור לגבי ממוצע התשובות (4-7 בסולם 1-9), סטיית התקן גבוהה מאוד וניתן להסיק כי האמונות אינן אחידות. כמו כן, הממוצע נמוך מאוד (4 בסולם 1-9) בנוגע לאמונה של המדריכות לגבי האופן היעיל שבו מיישמים בתי ספר תוכניות לשילוב תלמידים עם צרכים מיוחדים בכיתות הרגילות.

טבלה 3

אמונות מדריכות כלפי שילוב תלמידי עם צרכים מיוחדים בשיעורי מתמטיקה רגילים

ההיגד	ממוצע	ט.ו
יש לאפשר לתלמידי צח"מ הזדמנות ללמוד מתמטיקה עם תלמידי החינוך הרגיל.	7.70	1.55
תלמידי צח"מ לומדים מתמטיקה בצורה הטובה ביותר בכיתות רגילות המשלבות אותם.	5.57	1.34
לתלמידי צח"מ שלומדים מתמטיקה בכיתות רגילות, יהיה סיכוי טוב יותר להצליח בחברה מאשר לתלמידי צח"מ הלומדים בכיתות חינוך מיוחד.	6.04	1.87
לתלמידי צח"מ שלומדים מתמטיקה בכיתות רגילות, יש סיכוי טוב יותר להצליח בלימודי מתמטיקה, מאשר לתלמידי צח"מ הלומדים בכיתות חינוך מיוחד.	5.52	1.68
לתלמידי צח"מ קשה להבין את הנלמד בשיעורי מתמטיקה.	5.09	2.45

- 2.13 אין קושי מיוחד לתלמידי צח"מ לזכור את הנלמד בשיעורי מתמטיקה ולכן הדבר 5 אינו מהווה גורם לכישלונות רבים.
- 2.28 תלמידי צח"מ אינם גורמים לרוב הבעיות ההתנהגותיות בשיעורי מתמטיקה, 7.13 בכיתות רגילות המשלבות אותם.
- 2.69 לרוב, בתי ספר יסודיים מיישמים ביעילות תוכניות לשילוב תלמידי צח"מ בכיתות 4.13 הרגילות.
- 2.53 שיעורים פרטניים יעילים במתן מענה לצרכי למידה במתמטיקה של תלמידי 7.13 צח"מ.

לסיכום, ממצאי המחקר מראים כי האמונות של המדריכות כלפי שילוב תלמידי צח"מ בשיעורי מתמטיקה נמוכות באופן יחסי למסוגלות העצמית שלהן כלפי ידע על דרכי חשיבה ופעולה של תלמידי צח"מ. יחד עם זאת המדריכות העידו כי יש להן קושי לחזות את אסטרטגיות הפתרון של תלמידי צח"מ בפתרון תרגילים ושאלות בכפל ובחילוק. ממצא זה עלול להדאיג לאור מחקרה של Beswick (2008) שבחנה את הקשר בין אמונותיהם של מורים לגבי מסוגלותם ותפקודם בכיתות המשלבות ומצאה קשר בין האופן שבו מורים מקיימים אינטראקציה עם תלמידיהם לבין האמונות שלהם לגבי היכולת של אותם תלמידים וכן לגבי תפקידם בטיפול הלמידה. כמו כן, מהמחקר עולה כי אין היכרות מספקת עם תוכנית הלימודים לתלמידי צח"מ בהוראת הכפל והחילוק וכי ישנו קושי בבניית תח"י לתלמידים הללו. המחקר הנוכחי אומנם מצמצם, שכן הוא חקר 23 מדריכות באמצעות שאלונים וללא ראיונות. יחד עם זאת, התובנות שהתקבלו מניתוח זה יוכלו בעתיד לסייע לבנות פיתוח מקצועי למורי מתמטיקה בנושא אמונות ומסוגלות עצמית כלפי שילוב תלמידים עם צרכים מיוחדים בשיעורי מתמטיקה.

רשימת מקורות

- הכנסת העשרים (2018). חוק חינוך מיוחד (תיקון מס' 11), התשע"ח-2018. ירושלים.
- צמיר, פ., תירוש, ד., ברקאי, ר., לוינסון, א., טבח, מ. (2014). ידע תוכן, ידע פדגוגי-תוכני ותחושת מסוגלות להוראה: המקרה של גנות והנדסה. *מעוף ומעשה*, 16, 19-42.
- Barnett, S. H. (2015). Pre-service elementary teachers' perceived ability to teach mathematics in inclusive classrooms (Doctoral dissertation), Saint Louis University.
<https://www.proquest.com/docview/1712387219?pq-origsite=primo>
- Beswick, K. (2008). Influencing teachers' beliefs about teaching mathematics for numeracy to students with mathematics learning difficulties. *Mathematics Teacher Education and Development*, 9, 3–20. <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ822098.pdf>
- Dellinger, A. B., Bobbett, J. J., Olivier, D. F., & Ellett, C. D. (2008). Measuring teachers' self-efficacy beliefs: development and use of the TEBS-Self. *Teaching and Teacher Education*, 24(3), 751–766. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2007.02.010>
- Gervasoni, A., & Lindenskov, L. (2010). Students with 'Special Rights' for mathematics education. *Mapping Equity and Quality in Mathematics Education*, 307–323.
https://doi.org/10.1007/978-90-481-9803-0_22
- Lambert, R., & Tan, P. (2019). Does disability matter in mathematics educational research? a critical comparison of research on students with and without disabilities. *Mathematics Education Research Journal*, 32(1), 5–35. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00299-6>
- Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2014). Preschool teachers' knowledge and self-efficacy needed for teaching geometry: are they related? Pepin, P., & Roesken-Winter, B. (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education*, 319–337. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4_16



מבוא

תפקודים ניהוליים של הפרט הם אוסף של יכולות ותהליכים השולטים ומנחים את עיבוד המידע של הפרט, לצורך השגת מטרה (Cragg et al., 2017). יכולות אלו כוללות אינהיביציה, גמישות, שליטה ברגשות, בקרה, תכנון וארגון, ארגון-סביבה וחפצים, זיכרון-עבודה וסיום משימה (Guy, Gioia & Isquith, 2004). קיימות עדויות מחקריות עקביות לקשר שבין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה (Lenes et al., 2020; Ten Braak et al., 2022). קשר זה הוא כללי, אינו תלוי בזמן ודומה לאורך כל תקופת ההתפתחות (Duncan et al., 2016; Kahl et al., 2021). בשנים האחרונות אף הצטבר ידע מחקרי על הקשר שבין תפקודים ניהוליים לבין הישגי בגרות במתמטיקה בזיקה לרמות לימוד (תנעמי ועלים, 2021א; 2021ב; תנעמי, 2021; תנעמי וצוריאלי, 2022).

לצד ידע זה, מחקרים מצביעים שלצורך הוראה אפקטיבית של מורה בכיתה, הוא נדרש להיות בעל ידע בתהליכים קוגניטיביים הקשורים ללמידה ותפקוד התלמיד בכיתה מעבר לידע בתחום הדעת. כמו כן, הידע שלו במדעי המוח ותפיסותיו בנושא ההתפתחות הקוגניטיבית של התלמיד, משפיעים על שיטות ההוראה שלו (Daniels & Shumow, 2003; Dubinsky et al., 2013). מאידך, הידע שלו בהיבט החינוכי של תחומים אלו הוא בדרך כלל מועט מאוד (Dekker et al., 2012). לאור זאת, מחקר זה בא להעריך את תפיסות מורים המלמדים תלמידים לקראת בחינות בגרות במתמטיקה, לגבי חשיבות התפקודים הניהוליים, להצלחה בתהליך ההוראה-למידה ובבחינת הבגרות.

שאלת המחקר

מהי תפיסת המורים לגבי חשיבות התפקודים הניהוליים של התלמידים, להצלחה בתהליך ההוראה-למידה במתמטיקה ובבחינות הבגרות? השאלה תיבחן בזיקה לרמות הלימוד השונות.

מתודולוגיה

משתתפים: מורים שלימדו מתמטיקה לקראת בגרות בשנת 2022 ($n = 180$), במגזר היהודי (91%) והערבי (6%) ברחבי הארץ. המורים בגיל 22-74, עם וותק בהוראה של עד 45 שנים.

כלי המחקר

לצורך מחקר זה נבנה שאלון ובו החלקים הבאים:

א. מאפיינים סוציו-דמוגרפיים כמו מגדר, גיל, וותק, מגזר בו מלמד

ב. הגדרות של תפקודים ניהוליים

למשתתפים הוצגו שמונה תפקודים ניהוליים מלווים בהסבר למשמעות התפקוד. התפקודים מתבססים על התפקודים הניהוליים בשאלון The Behaviour Rating Inventory of Executive Function–Self Report - BRIEF-SR (Guy, Gioia & Isquith, 2004), הכוללים אינהיביציה, גמישות, שליטה ברגשות ובקרה על התנהגות, זיכרון עבודה, תכנון/ארגון, סיום משימה וכן ארגון סביבה וחפצים. כל ההיגדים בשאלון הם בסולם של 5 דרגות מ-1 לא חשוב עד 5- חשוב במידה רבה מאוד, באמצעותם נבדקה תפיסת רמת החשיבות של כל תפקוד, להצלחה בבחינת הבגרות במתמטיקה, בזיקה ליחידות הלימוד השונות.

המורים התבקשו לבחור לאיזו רמת לימוד הם יתייחסו במילוי השאלון: 3 יח"ל - 36%, 4 יח"ל - 22%, 5 יח"ל - 42%. חלוקה זו תהווה בסיס לניתוח הנתונים.

הליך: נשלח למורים שאלון מקוון באמצעות אנשי קשר אישיים ומקצועיים של המחבר, אשר הפיצו את השאלון במעגלים שונים ובקהילות מורים במחוזות השונים. נשמרה האתיקה בביצוע המחקר על פי הוראות המדען הראשי.

אופן ניתוח הנתונים

ממוצעים וסטיות תקן, ניתוח שונות, t-test.

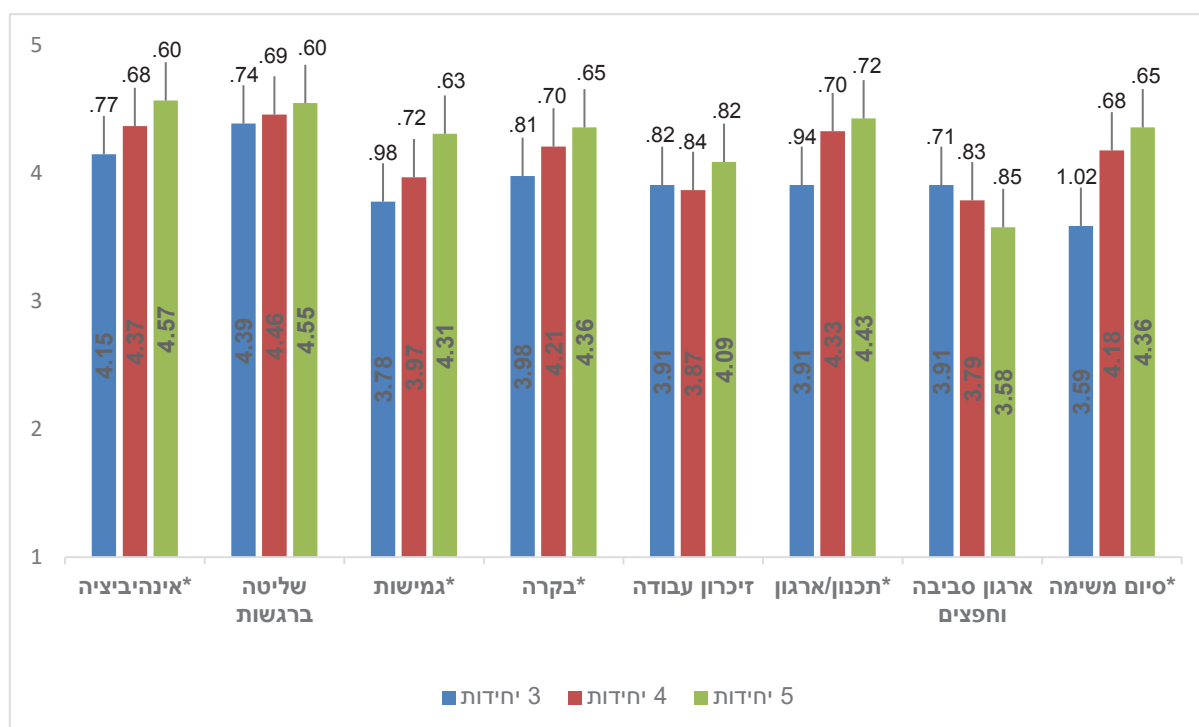
ממצאים

88% מכל המורים ביחידות הלימוד השונות נותנים חשיבות גבוהה (דירוג 4-5) לתפקודים הניהוליים בתהליך ההוראה-למידה ($M=4.25$, $SD=.65$) ולהישגי בחינות הבגרות במתמטיקה ($M=4.21$, $SD=.70$). בדיקת הקשר בין תפיסת חשיבות התפקודים הניהוליים לבין מאפיינים אישיים או מקצועיים של המורים הראתה כי תפיסת חשיבות התפקודים הניהוליים להוראה-למידה ולהישגי הבגרות היא בעלת אופי גורף ואינה תלויה לא במגדר, לא בוותק בהוראה ולא אם המורה מגיש לבגרות.

בדיקת ההבדלים בתפיסות המורים בזיקה ליח"ל השונות במתמטיקה, נערכה באמצעות ניתוח שונות חד כיווני (One Way Anova) כשהמשתנים התלויים היו הערכת המורים את חשיבות שמות התפקודים הניהוליים להצלחה בבחינת הבגרות. בניתוח נמצא אפקט מובהק של יחידות לימוד ($F(2, 173) = 6.60$, $p < .002$), כמובא באיור 1.

איור 1

ממוצעים וסטיות תקן של תפיסות המורים את חשיבות התפקודים הניהוליים בזיקה ליח"ל



*הבדל מובהק בין רמות הלימוד בתפיסת התפקוד הניהולי

מבדיקת מקור ההבדלים בחשיבות התפקודים הניהוליים בזיקה לשלוש רמות הלימוד עולה, כי א. שליטה ברגשות, זיכרון עבודה וארגון סביבה וחפצים חשובים באותה מידה בכל יחידות הלימוד.

ב. כל חמשת התפקודים האחרים (עיכוב תגובה, גמישות, בקרה על התנהגות, תכנון/ארגון, סיום משימה) נתפסים כחשובים יותר בעיני מורי חמש יח"ל לעומת תפיסת מורי שלוש יח"ל. המיקום היחסי של תפיסות מורי ארבע יח"ל משתנה בחמשת התפקודים הללו.

דיון

במחקר זה מצאנו דמיון בתפיסות המורים ביחידות הלימוד השונות את חשיבות התפקודים הניהוליים לתהליך ההוראה-למידה וההיבחות בכל יחידות הלימוד. סביר להניח שממצא זה קשור לתהליכי שינוי שחלו בעשור האחרון במערכת החינוך בארץ במתן מענה למגוון תלמידים בכיתה הרגילה, כפי שבאו לידי ביטוי למשל בקידום תוכנית הכלה והשתלבות (משרד החינוך, 2021) כמו גם בתוכניות להגדלת מספר התלמידים הלומדים בקבוצות של 4-5 יח"ל (משרד החינוך, 2015).

ממצאי מחקר זה מרחיבים את הידע הקיים

- מצאנו שהמורים במחקר הנוכחי תופסים שמגוון תפקודים ניהוליים תורמים להצלחה בלמידה והיבחות של תלמידים במתמטיקה ולא רק תפקודים ספציפיים הנחשבים כקשורים יותר למתמטיקה כמו גמישות, זיכרון עבודה ואינהיביציה.

- במחקר הנוכחי יש הסכמה בין המורים ששליטה ברגשות, זיכרון עבודה וארגון סביבה וחפצים, חשובים בכל יחידות הלימוד. יש להניח שמבחינת המורים אלו שלוש מיומנויות בסיסיות ללמידה ותלמיד שתפקודו בהן יהיה נמוך, יתקשה לתפקד ביעילות בלימוד מתמטיקה בכל יחידת לימוד.

- במחקר הנוכחי נמצאה דיפרנציאציה בין המורים ביחידות הלימוד השונות, לגבי החשיבות של חמשת התפקודים האחרים – גמישות, אינהיביציה, בקרה, תכנון/ארגון, סיום משימה. לעומת ממצא זה, במחקר קודם שבדק תפיסות מורים נמצא שמבין שלושת התפקודים הניהוליים שנחשבים קשורים יותר למתמטיקה מורים דרגו את אינהיביציה וגמישות כחשובים יותר להישגים במתמטיקה לפני זיכרון עבודה (Gilmor & Cragg, 2014). ניתן להסביר את הדיפרנציאציה שנמצאה במחקר הנוכחי, בהסכמה הקיימת בספרות, שמתמטיקה נחשבת כתחום דעת מתפתח: ככל שעולים ברמת הלימוד המשימות מורכבות יותר, ודורשות מהתלמיד יכולות קוגניטיביות גבוהות יותר, כך שנדרשים תפקודים ברמה גבוהה על מנת להצליח במשימות אלו (Ten Braak et al., 2022).

למעשה, ממצאי מחקר זה מצביעים על מודעות המורים לחשיבות התפקודים הניהוליים לתהליך הלמידה וההיבחות ברמות הלימוד השונות המשקפות רמות ידע שונות. סביר להניח כי מודעות זו עם ידע עדכני על התפקודים הספציפיים המשמעותיים להישגי בגרות ביחידות הלימוד השונות, יכולים להשפיע וליעל את דרכי ההוראה של המורים. אלו יכולים לבוא לידי ביטוי, בתיווך התכנים המתמטיים ובמתן מענה לשונות בכיתה, ובכך לסייע ליותר תלמידים להתמודד בהצלחה ביחידות לימוד גבוהות יותר.

התרומה התיאורטית של מחקר זה מתייחסת לתרומת הידע בתחום הפסיכולוגיה ההתפתחותית וחקר המוח למורים למתמטיקה, כמו גם להכשרת מורים בכלל. ההשלכות היישומיות מתייחסות לתרומה בפיתוח המקצועי של המלמדים מתמטיקה, ולטיוב תהליך ההוראה ברמות הלימוד השונות למגוון התלמידים שבהן.

משרד החינוך (2015). התוכנית הלאומית לחיזוק לימודי המתמטיקה. נדלה ביום 8.1.17 מתוך

<https://edu.gov.il/heb/programs/subjects/Pages/give-me-five-math.aspx>

משרד החינוך (2021). חוזר מנכ"ל לקידום ההכלה במערכת החינוך. נדלה ביום 31.5.22

https://apps.education.gov.il/Mankal/Horaa.aspx?siduri=359#_Toc25600002

0

תנעמי, י' (2021). "הקשר בין תפקודים ניהוליים ויכולת מתמטית בקרב תלמידי כיתה י"ב, בזיקה להפרעת

קשב". [חוקרים@החינוך המיוחד](mailto:hachinuch@mankal.gov.il), 1, 151-120.

תנעמי, י', עילם, א' (2021). "הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב".

[מחקר ועיון בחינוך מתמטי](#), 8, 73-81.

תנעמי, י', עילם, א' (2021). "ניבוי הישגי בגרות במתמטיקה על פי תפקודים ניהוליים, מסוגלות עצמית

ומגדר בקרב תלמידי כיתה יב". "קֶצֶת" – כתב עת לענייני חינוך חברה ותרבות, ו', 49-67.

תנעמי, י', צוריאל, ד' (2022, 9-10 בפברואר). "תרומה ישירה ועקיפה של תפקודים ניהוליים ספציפיים

להישגים במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב, בזיקה לרמות לימוד" [הרצאה בכנס]. כנס

ירושלים העשירי למחקר בחינוך מתמטי, המרכז האקדמי לב, ירושלים.

Cragg, L., Keeble, S., Richardson, S., Roome, H. E., & Gilmore, C. (2017). Direct and indirect influences of executive functions on mathematics achievement. *Cognition*, 162, 12-26.

Daniels, D. H., & Shumow, L. (2003). Child development and classroom teaching: A review of the literature and implications for educating teachers. *Journal of applied developmental psychology*, 23(5), 495-526.

Dekker, S., Lee, N. C., Howard-Jones, P., & Jolles, J. (2012). Neuromyths in education: Prevalence and predictors of misconceptions among teachers. *Frontiers in psychology*, 429.

Duncan, R., Nguyen, T., Miao, A., McClelland, M., & Bailey, D. (2016). Executive Function and Mathematics Achievement: Are Effects Construct-and Time-General or Specific? *Society for Research on Educational Effectiveness*.

Dubinsky, J. M., Roehrig, G., & Varma, S. (2013). Infusing neuroscience into teacher professional development. *Educational Researcher*, 42(6), 317-329.

Gilmore, C., & Cragg, L. (2014). Teachers' understanding of the role of executive functions in mathematics learning. *Mind, Brain, and Education*, 8(3), 132-136.

Guy, S. C., Gioia, G. A., & Isquith, P. K. (2004). BRIEF-SR: Behavior Rating Inventory of Executive Function--self-report Version: Professional Manual. Psychological Assessment Resources.

Kahl, T., Grob, A., Segerer, R., & Möhring, W. (2021). Executive functions and visual-spatial skills predict mathematical achievement: Asymmetrical associations across age. *Psychological Research*, 85(1), 36-46.

Lenes, R., McClelland, M. M., ten Braak, D., Idsøe, T., & Størksen, I. (2020). Direct and indirect pathways from children's early self-regulation to academic achievement in fifth grade in Norway. *Early Childhood Research Quarterly*, 53, 612-624.

Ten Braak, D., Lenes, R., Purpura, D. J., Schmitt, S. A., & Størksen, I. (2022). Why do early mathematics skills predict later mathematics and reading achievement? The role of executive function. *Journal of Experimental Child Psychology*, 214, 105306.



מבוא

הידע על האופן שבו פרקטיקות ההוראה של מורים מושפעות משימוש בטכנולוגיות חדשות, והאופן שבו מורים מטמיעים טכנולוגיות אלו בכיתותיהם עדיין מוגבל, כאשר מעט מחקר התמקד בנושאים אלה (Bozkurt & Ruthven, 2017). בנוסף, קידום פרקטיקות של מורים בשילוב טכנולוגיה עדיין מאתגר את קהילת החוקרים. הגישה של "קהילות חוקרות" (Jaworski, 2020) הוצעה כמסגרת אפקטיבית לתוכניות התפתחות מקצועית, שמטרתן לפתח ידע ופרקטיקות של מורים בשילוב טכנולוגיה (Thomas & Palmer, 2014). מטרת מחקר זה היא לתאר פרקטיקות של מורים מומחים בשילוב טכנולוגיה בהוראה, ולנתח התפתחות פרקטיקות אלה במהלך השתתפות המורים בתוכנית לאורך שלושה שיעורים.

רקע תיאורטי

מסגרות תיאורטיות שונות הוצעו בכדי לתאר ידע ופרקטיקות של מורים בשילוב טכנולוגיה. במחקר זה נעשה שימוש במסגרת התיאורטית של רותבן (Ruthven, 2014), The Structuring Features of Classroom Practices (SFCP framework). מסגרת זו מתייחסת לפרקטיקות ההוראה בשילוב טכנולוגיה כאל הידע המקצועי של המורים. הכוונה בידע מקצועי היא לידע שמורים מבנים באמצעות ההתנסות המעשית שלהם בכיתה. לפי מסגרת תיאורטית זו, הידע המקצועי מתבטא בחמישה היבטים הקשורים לפרקטיקות בכיתה: סביבת העבודה (Working environment), מערכת המשאבים (Resource system), פורמט הפעילות (Activity format), מערך השיעור (Curriculum script) וניצול הזמן (Time economy). נפרט להלן על כל היבט.

סביבת העבודה. השימוש בטכנולוגיות חדשות מצריך לרוב שינוי בסביבת העבודה. שינוי זה יכול להתבטא בשינוי בסביבת העבודה בכיתה המסורתית או במעבר למעבדת מחשבים. בנוסף, מרכיב זה כולל את התשתית הטכנולוגית הזמינה בכיתה.

מערכת המשאבים. כלים מתמטיים ומשאבים קוריקולריים אשר כוללים כלים טכנולוגיים וכלים לא טכנולוגיים (כמו משאבים מודפסים- ספרים, דפי עבודה,...).

פורמט הפעילות. סגנונות האינטראקציה בין מורה, תלמידים ומשאבים. פורמטים שונים של פעילות זוהו בעבר במחקרים שונים, כמו Discuss-the-screen, Work-and-walk-by (Drijvers, 2019).

מערך השיעור. היבט זה כולל את הרעיונות אשר יתפתחו, הפעילויות אשר יבוצעו, הייצוגים אשר יעשה בהם שימוש וקשיים צפויים במהלך השיעור. היבט זה כולל ציפיות שונות של תרחישים אשר עלולים להתרחש בשיעור ודרכי פעולה אלטרנטיביות.

ניצול הזמן. ניהול יעיל של זמן השיעור אשר נותן למורה הזדמנות להפוך את זמן השיעור לזמן דידקטי המנוצל להתפתחות הידע של התלמידים.

המסגרת המתוארת לעיל מחדדת את המרכיבים של הידע המקצועי שעל המורים לפתח כדי לשלב בהצלחה טכנולוגיות חדשות בפרקטיקות שלהם בכיתה. האתגר בפני החוקרים הוא להנגיש ידע מקצועי זה למורים. מחקר זה עושה זאת בהקשר של מורים מומחים בשילוב טכנולוגיה.

שאלת המחקר

כיצד התפתח הידע המקצועי של מורים מומחים, בשילוב טכנולוגיה בפרקטיקה שלהם בכיתה, במהלך השתתפותם בתוכנית להתפתחות מקצועית המבוססת על גישת קהילות חוקרות?

המחקר נערך בהקשר של תוכנית להתפתחות מקצועית, במטרה לפתח ולייעל את השימוש בטכנולוגיה בכיתת המתמטיקה. תוכנית ההתפתחות המקצועית התבססה על גישת "קהילה חוקרת" והשתמשה במעגל החקירה אשר כלל את התהליכים: תכנון, ביצוע, התבוננות, רפלקציה וניתוח (Jaworski, 2020). בתוכנית השתתפו ארבעים ותשעה מורים. המורים נפגשו עשר פעמים, אחת לשבועיים למשך שתיים אקדמיות. המורים עבדו בקבוצות ועברו שלושה מעגלי חקירה. כל המורים מאותה קבוצה לימדו אותו שיעור לאותה שכבה, כל אחד/אחת בבית ספר/ה. למחקר זה נבחרו שלוש מורות מומחיות בשילוב טכנולוגיה: מאריה, סונדוס ורזאן (שמות בדויים). הבחירה במורות אלה התבססה על רמת הידע הפדגוגי הטכנולוגי, שנמדד לפני תחילת התוכנית, על פי שאלון מתאים אשר פתחו תומאס ופאלמר (Thomas & Palmer, 2014).

במחקר נעשה שימוש בארבעה כלים לאיסוף נתונים: שאלון למדידת ידע טכנולוגי פדגוגי של מורים (מולא לפני תחילת התוכנית), מערכי שיעורים מתוקשבים כתובים (כל מורה הגישה שלושה מערכי שיעורים מתוקשבים), רפלקציות כתובות (כל מורה הגישה שלוש רפלקציות כתובות, אחת אחרי ביצוע כל שיעור), וכן שיעורים מוקלטים (כל מורה הגישה שלוש הקלטות לשלושה שיעורים אשר יישמה בהתאם למערכי השיעורים שתוכננו).

תיאור וניתוח הידע המקצועי בשילוב טכנולוגיה בהוראה של מורים מומחים התבסס על מסגרת SFCP (Ruthven, 2014). נערכה השוואה מתמדת (constant comparison method) בין הנתונים שנאספו על מנת לזהות קטגוריות מתאימות ולשייך אותן למרכיבי הידע המקצועי שהוגדרו במסגרת התיאורטית (הגדרות אופרטיביות למרכיבי הידע יוצגו בכנס).

ממצאים

נציג להלן ממצאים הקשורים לכל אחד מחמשת מרכיבי הידע המקצועי של המורות המומחיות בשילוב טכנולוגיה.

סביבת העבודה

שלושת המורות המומחיות יישמו את שיעורי המתמטיקה המתוקשבים במעבדת מחשבים. שתיים מהן (סונדוס ורזאן) ניהלו את הסביבה הפיזית במעבדות המחשבים שלהן כדי להקל עליהן לתקשר עם התלמידים, ובמיוחד כדי לנוע במהירות ובקלות בין התלמידים. הן עשו את זה על ידי ארגון השולחנות בצורת U. היתרון של ארגון המעבדה בצורת U דווח על ידי סונדוס, שאמרה: "השימוש במעבדה בצורת U היה נוח יותר לגישה לתלמידים בעת הצורך". במקביל, המורה המומחית השלישית (מאריה) יישמה את השיעורים המתוקשבים במעבדת מחשבים המאורגנת בשורות.

במהלך החלקים השונים של השיעורים (פתיחה, גוף, הערכה וסיכום), המורות השתמשו בשיטות שונות לארגון עבודתן עם הכיתה. במהלך פתיחת וסיכום כל שיעור, שלושת המורות השתמשו בטכנולוגיה דרך המחשב שלהן ועבדו עם מליאת הכיתה. לעומת זאת, במהלך גוף השיעור ובמהלך חלק ההערכה, המורות נתנו לתלמידים לעבוד בצורה עצמית כיחידים או בקבוצות קטנות, כאשר כל תלמיד/קבוצה משתמשת בטכנולוגיה דרך המחשב שלה. בנוסף, במהלך גוף השיעור ובעת "הצורך", המורות העבירו את העבודה של התלמידים מעבודה בקבוצות/יחידים לעבודה במליאה.

בנוסף, שתי מורות מומחיות (סונדוס ורזאן) ניהלו את אופן הגישה של התלמידים לכלים הדיגיטליים על ידי הוספת קישורים לכלים אלה באתר הבית ספרי. המורה המומחית השלישית (מאריה), שהייתה מורה חדשה יחסית, בקשה מהתלמידים בשיעור הראשון לגשת לכלים הדיגיטליים על ידי שימוש במנוע החיפוש Google. מאריה התקדמה אחר כך, בשיעורים השני והשלישי היא הוסיפה את הקישורים לכלים הדיגיטליים בדפי החקר שהכינה לשיעורים אלה.

פורמט הפעילות

פורמטי פעילות שונים יושמו על ידי המורות במהלך החלקים השונים של השיעורים (פתיחה, גוף, הערכה וסיכום). בפרט, בפתיחת וסיכום השיעורים, בדרך כלל שלושת המורות יישמו את הפורמטים

Discuss-the-screen\Explain-the-screen בכדי לדון עם התלמידים במרכיבי ידע קודמים\חדשים שרלוונטים לתהליכי ההבנייה החדשים. לגבי גוף השיעור, שלושת המורות יישמו את הפורמט Work-and-walk-by, שמאפשר למידת חקר עצמית\בקבוצות.

יישום הפורמט Work-and-walk-by התאפיין ביישום פורמטים קולקטיביים שונים לפניו ולא אחריו. פורמטים כאלה היו פורמטים של Not-use-tech, Discuss-the-screen ו-Collective-technical-demo. דרך יישום הפורמטים הללו לפני יישום Work-and-walk-by המורות המומחיות התכוונו להנחות את התלמידים לשקול רעיונות מתמטיים ספציפיים או להסביר סוגיות טכניות הקשורות ליישומן שהתלמידים ישתמשו בו אחר כך בגוף השיעור. מצד שני, יישום פורמטים אלה לאחר פורמט Work-and-Walk-by המורות המומחיות התכוונו לסכם עם התלמידים רעיונות מתמטיים שהבנו במהלך גוף השיעור וזה לפני תחילת פעילות ההערכה.

ממצאי המחקר הנוכחי מראים שהמורות המומחיות יישמו פורמטים חדשים של פעילות המתאימים לחלק ההערכה של שיעור מתמטיקה מבוסס טכנולוגיה. הפורמטים הללו היו: Link-teacher's-Screen-and-students'-screens, Student-work-teacher-evaluate ו-Student-work-student-evaluate (התיאור של פורמטים אלה יוצג בכנס).

לפעמים, מורות מומחיות עברו בין פורמטים שונים של פעילות במהלך גוף השיעור. מורה מומחה אחת (רזאן) עברה בין הפורמטים Work-and-walk-by ו-Discuss-the-screen כאשר היא הבחינה בקשיים של התלמידים. שינוי זה אפשר לה לשפוך אור על רעיונות מתמטיים ספציפיים הצפויים לסייע לתלמידים אלו להתגבר על הקשיים שלהם. בנוסף, שאר המורות המומחיות עברו מפורמט Work-and-Walk-by לפורמט Discuss-the-screen עקב חוסר זמן.

מערכת המשאבים

המורות המומחיות השתמשו במשאבים דיגיטליים שונים במהלך החלקים השונים של השיעורים (פתיחה, גוף, הערכה וסיכום). שלושת המורות השתמשו לרוב במצגות פאור-פוינט בפתיחת ובסיכום כל השיעורים המתוקשבים שיישמו. מורה מומחית אחת השתמשה מהשיעור הראשון בפעילויות חקר עם יישומונים\סימולציות מתאימות בגוף השיעורים. שתי המורות המומחיות האחרות התקדמו לקראת שימוש בפעילויות חקר עם יישומונים\סימולציות מתאימות בגוף השיעורים החל מהשיעור השני.

מערכי השיעורים

בפתיחה ובסיכום של השיעורים שלושת המורות, לרוב, ניצלו את השימוש במצגות פאור-פוינט ובוידאו לשלוש מטרות. הראשונה הייתה שימוש במצגת פאור-פוינט בכדי להזכיר לתלמידים מבני ידע קודמים לצורך ההבנייה החדשה שתוכננה או לצורך סיכום מבני ידע חדשים אשר נבנו. המטרה האחרת הייתה לקשר בין נושא השיעור לבין תופעות יומיומיות דרך הצגת וידאו. והמטרה השלישית הייתה שימוש במצגת פאור-פוינט כדי להציג אירוע מתמטי הקשור לידע שרצוי להבנות. בזה, המורות רצו לדון עם התלמידים בנושאים מתמטיים ספציפיים במליאה.

בגוף השיעורים, שלושת המורות ניצלו את השימוש ביישומונים\סימולציות בכדי לבצע משימות חקר אשר תכננו במסגרת קהילות החקירה. שלושת מורות לא ניצלו את ספרי הלימוד, אלא בנו את פעילויות החקר שהחליפו את הספרים והתאימו ליישומונים\סימולציות אשר השתמשו בהן.

לפעמים, המורות המומחיות לא זיהו מגבלות\איפשוורים של היישומון וכיצד מגבלות\איפשוורים אלה ישפיעו על הבנת תלמידיהן לנושא המתמטי. זה קרה בשני השיעורים הראשונים. למשל, מאריה השתמשה ביישומון בעל פונקציית עיגול אשר שיבשה את תהליך החקירה של הנושא "שיפוע של קו ישר". בנוסף, אחת המורות לא ניצלה את האפשרות של היישומון שמיועד לשיעור "שטח של מקבילית". ביישומון הנבחר, היה אפשר להראות את שני הגבהים של המקבילית, האורך של צלעותיה ושטחה. להשאיר את אורכי הצלעות קבועים ולשנות את הזוויות שלה, ולחקור מה קורה לשטח המקבילית אז?

ניצול הזמן

שתי מורות ניהלו את אופן הגישה של התלמידים לכלים הדיגיטליים על ידי הוספת קישורים לכלים אלה באתר הבית ספרי, דבר שהביא לניצול יעיל של זמן השיעור. בנוסף, המורות הראו יישום אסטרטגיות

ופורמטים של פעילות אשר מביאות לניצול זמן יעיל. למשל, השימוש של שלושת המורות בפורמט-Technical-demo, שקידם את השימוש שלהן בפורמט Work-and-walk-by, ואפשר לתלמידים להתמקד בפעילות ולא בסוגיות טכניות הקשורות לכלי הדיגיטלי.

דיון

מחקר זה מתאר את הידע המקצועי של מורות מומחיות בשילוב טכנולוגיה. בנוסף, המחקר מתאר התפתחות ידע זה במהלך השתתפות המורות בתוכנית התפתחות מקצועית המבוססת על גישת "קהילות חוקרות". הממצאים הראו התפתחות מרכיבי הידע המקצועי של המורות בשילוב טכנולוגיה. ממצא זה מראה שההתנסות היא מניע להתפתחות ידע מקצועי של מורים (Ruthven, 2014).

הממצאים מראים ששלושת המורות המומחיות יישמו את כל השיעורים במעבדות מחשבים ושהם התקדמו למעבדת מחשבים המאורגנת בצורת U. ממצא זה עולה בקנה אחד עם טענת החוקרים שסביבת עבודה מתאימה, כמו מעבדות מחשבים, היא תנאי לפרקטיקות טכנולוגיות מתקדמות של מורים ושארגון החדר בצורת U הינו נוח להוראה עם טכנולוגיה (Bozkurt & Ruthven, 2017). בנוסף, ממצאים הקשורים לפורמטי הפעילות הראו שמורות מומחיות יישמו פורמט Work-and-Walk-by במהלך גוף השיעור ושהן אופייין ביישום של פורמטים קולקטיביים שונים לפניו ו/או אחריו. בנוסף, לפעמים המורות המומחיות עברו בין פורמטים שונים של פעילות כאשר הבחינו בקשיים של התלמידים או כאשר הרגישו חוסר זמן. דבר שמראה שמגבלות מסוגים שונים משפיעות על בחירת פורמטי הפעילות (Aygüner & Broutin, 2022).

הממצאים הראו שמורים מומחים לפעמים לא זהו את המגבלות של יישומן מסוים ולפעמים לא ניצלו את האפשרויות שיישומן מסוים נותן. זה מראה שאכן מורים "מומחים" זקוקים להכשרה לצורך פיתוח הידע המקצועי שלהם בשילוב טכנולוגיה. במיוחד, לפתח את המודעות שלהם לדרך שבה הטכנולוגיה עשויה להשפיע על פעילויות אפשריות בהוראת מתמטיקה.

רשימת מקורות

- Aygüner, E., & Broutin, M. S. T. (2022). Investigation of Teaching in the Technological Environment in terms of Orchestration in the Mathematics Teaching Process. *Turkish Journal of Mathematics Education*, 3(1), 29-40.
- Bozkurt, G., & Ruthven, K. (2017). Classroom-based professional expertise: A mathematics teacher's practice with technology. *Educational Studies in Mathematics*, 94(3), 309-328.
- Drijvers, P. (2019). Head in the clouds, feet on the ground—A realistic view on using digital tools in mathematics education. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht, & P. Scherer (Eds.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht* (pp. 163–176). Wiesbaden: Springer.
- Jaworski, B. (2020). Communities of inquiry in mathematics teacher education. *Encyclopedia of mathematics education*, 102-104.
- Ruthven, K. (2014). Frameworks for analysing the expertise that underpins successful integration of digital technologies into everyday teaching practice. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 373–393). Dordrecht: Springer.
- Thomas, M.O.J. & Palmer, J.M. (2014). Teaching with digital technology: obstacles and opportunities. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (pp. 71-89). Dordrecht: Springer.



מבוא ורקע תיאורטי

ההבנה של תהליכי הבניית ידע מתמטי מופשט, אשר מתרחשים בהקשרים השונים היא מטרה מרכזית במחקרים העוסקים בחינוך מתמטי. הפשטה של ידע בהקשר (Abstraction in Context) מוגדרת על ידי דרייפוס, הרשקוביץ ושוורץ (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2001) כתהליך של ארגון אנכי מחדש של מבנים מתמטיים קודמים שנמצאים אצל הלומד, שמוביל למבנה חדש עבורו. מודל ההפשטה בהקשר (AiC) מגדיר שלושה שלבים בתהליך ההפשטה: הצורך במבנה ידע חדש, הופעתו וגיבושו. לתיאור תהליך הופעתו של מבנה ידע חדש פותח מודל ה- RBC: זיהוי (Recognizing), בנייה-עם (Building-with), הבנייה (Constructing). זיהוי היא פעולה שבה הלומד מזהה מבנה ידע קיים כרלוונטי לסיטואציית הבעיה. בניה-עם היא פעולת בנייה, המתבססת על מבני ידע שזוהו, כדי להשיג מטרה, כחלק מההתמודדות עם סיטואציית הבעיה. הבנייה היא הפעולה שמתרחשת כאשר הלומד מחבר פיסות ידע מוכרות ויוצר מבנה ידע חדש עבורו.

הפשטה של ידע מתמטי מתרחשת ומושפעת מהקשרים שונים, כמו: סביבת הלמידה, ידע קודם של התלמידים, הפעילות ואינטראקציות עם לומדים אחרים. מחקר זה מתאר תהליך הפשטת ידע מתמטי אשר מתרחשים בסביבת תכנות הנקראת סקראץ' (Scratch). סקראץ' מוגדרת כשפת תכנות ויזואלית המאפשרת למשתמשים לתכנת עם בלוקים של קוד. חוקרים מצאו ששימוש בסקראץ' בהוראת מתמטיקה מעודד למידה שיתופית ומקדם תהליכים לפתרון בעיות מתמטיות (Taylor et al., 2010). בנוסף, רודריגז ועמיתיו (Rodriguez-Martinez et al., 2020) מצאו שתלמידי כיתה ו' יכלו לפתח חשיבה מתמטית וחשיבה חישובית באמצעות סקראץ', אך יחד עם זאת, מחקרים מעטים חקרו את תהליכי הבניית הידע בנושא מערכת הצירים. לכן, מחקר זה התחקה אחר תהליכי הבניית ידע מתמטי מופשט של תלמידים מכיתה ו', שפתרו מטלות בנושא של מערכת הצירים הקרטזית, בסביבת הסקראץ'. המחקר מראה כיצד סביבת תכנות כמו סקראץ' משפיעה על תהליכי הבניית ידע מתמטי כמו מערכת צירים.

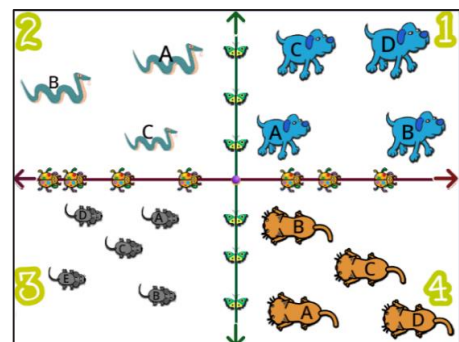
שאלת המחקר

מהם תהליכי הבניית ידע מתמטי בנושא של מערכת צירים קרטזית אשר מתרחשים בסביבת סקראץ'?

מתודולוגיה

איור 1

הבמה של סקראץ' במשימות השונות



במחקר השתתפו תשעה תלמידים מכיתה ו'. כל התלמידים שייכים לאותה כיתה. התלמידים והוריהם הסכימו שהם ישתתפו במחקר.

לצורך המחקר, חולקה הבמה של סקראץ' לארבעה חלקים על ידי ציר ה-X וציר ה-Y, כאשר בחלקי הבמה השונים הוצבו בעלי חיים מסוגים שונים (ראה איור 1).

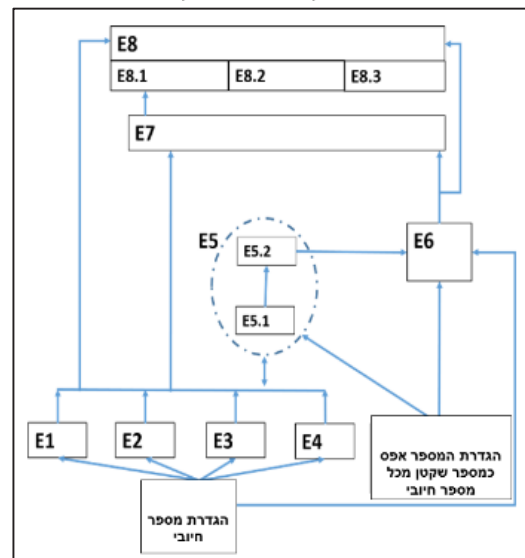
שתי משימות חקר תוכננו כדי לאפשר לתלמידי כיתה ו' להבנות ידע מתמטי בנושא מערכת הצירים. המשימה הראשונה עוסקת במאפייני ערכי ה-X וה-Y של נקודות אשר נמצאות בכל אחד מארבעת הרביעים של מערכת הצירים. המשימה השנייה עוסקת במאפייני ערכי ה-X וה-Y של נקודות אשר נמצאות על

כל אחד מהצירים. בפירוט, במשימה הראשונה, התלמידים התבקשו לזהות ערכי X ו-Y עבור כל אחד מבעלי החיים אשר ממוקמים בכל אחד מארבעת הרביעים. לאחר מכן, הם התבקשו לאפיין מה מייחד את הנקודות בכל אחד מהרביעים. במשימה השנייה, התלמידים התבקשו לאפיין את ערכי X ו-Y עבור בעלי החיים אשר ממוקמים על הצירים.

במהלך המשימות, התלמידים עבדו בארבע קבוצות: שלוש קבוצות של 2 תלמידים ובקבוצה אחת של 3 תלמידים. לאחר ביצוע כל אחת מהמשימות, נערך דיון במליאת הכיתה סביב מרכיבי הידע הרלוונטיים.

עבודת התלמידים והדיונים במליאה הוקלטו בוידאו ותומללו במלואם. פתרונות התלמידים למשימות נאספו גם הן. במחקר הנוכחי, נותחו הדיונים אשר התרחשו במליאת הכיתה. תהליכי הבניית הידע נותחו על ידי שימוש בתאוריית AiC (Abstraction in Context). לצורך ניתוח תהליכי הבניית הידע נערך ניתוח מקדים לפעילויות לגבי מבני ידע חדשים. נבנתה מפה (איור 2) שמראה את מרכיבי הידע החדשים שאמורים להבנות במהלך הפעילויות והקשר ביניהן, וכן מחוון והגדרה אופרטיבית למבני הידע. כמו כן, "הגדרת המספר אפס כמספר שקטן מכל מספר חיובי" ו- "הגדרת המספרים החיוביים" נחשבו כמבני ידע קודמים שחיוניים לתהליכי ההבניה החדשים.

איור 2
מפת מרכיבי הידע בנושא מערכת צירים



E1\2\3\4: מאפייני ערכי ה-X וה-Y של הנקודות אשר נמצאות ברביע הראשון\השני\השלישי\הרביעי בהתאמה.

E5: הגדרת מספר שלילי

- E5.1: המספר השלילי כמספר בעל הסימן "-".

- E5.2: המספר השלילי כמספר שקטן מאפס.

E6: המספר אפס הוא מספר שאינו חיובי ואינו שלילי

E7: המיקום של הנקודה (0,100) במערכת הצירים.

E8: מאפייני הנקודות אשר נמצאות על הצירים

- E8.1\E8.2: מאפייני הנקודות אשר נמצאות על ציר Y\ציר X

- E8.3: מאפייני נקודת ראשית הצירים

ממצאים

התוצאות מראות כי התלמידים בנו בהצלחה את מרכיבי הידע שהיו צפויים להיבנות במסגרת המחקר. להלן, נתאר את התהליכים של הבניית הידע לאחר ביצוע המשימה הראשונה בסביבת Scratch. נתייחס למרכיבי הידע (elements) כמבנים (constructs), ולכן נקרא להם C-ים במקום E-ים. נתאר תחילה את תהליכי ההבניה של C5-C6. לאחר מכן, נתאר תהליכי בניית C7 ו-C8.1 (מאפיינים של ערכי ה-X וה-Y של נקודות שנמצאות על ציר Y) ונציג אפיזודות מתאימות.

אחרי ביצוע המשימה הראשונה בקבוצות, המורה ניהלה דיון עם התלמידים על מרכיבי הידע C1-C4. בדיון סביב C1 (מאפייני ערכי X ו-Y ברביע הראשון) התלמידים טענו שלערכי ה-X וה-Y של הנקודות ברביע הראשון אין סימן "-". דבר שגרם למורה לדון בהגדרתם של המספרים השליליים (C5.1 ו-C5.2) והחיוביים. דיון זה אפשר לתלמידים לבנות C6 (האפס כמספר שאינו שלילי ואינו חיובי). בתהליך הבניית C6 הסימן "-", המאפיין רק מספרים שליליים, וה-'לא סימן' של המספרים החיוביים (כפי שהם מופיעים בסביבת סקראץ') הפריע לחלק מהתלמידים להבנות את מושג ה"אפס" החדש.

תלמידים אלה חשבו שאפס אינו שלילי כי אין לו את הסימן "-". עם זאת, הם התקשו להסיק שאפס אינו חיובי כי האפס והמספרים החיוביים מופיעים 'ללא סימן'.

אחרי הדיון הכיתתי סביב מאפייני הנקודות הנמצאות ברביע הראשון (C1) וסביב הגדרת האפס (C6), המורה העלתה את סוגיית מיקום הנקודה (0,100). כפי שמוצג באפיזודה 1 למטה.

אפיזודה 1- הופעתו של המרכיב C7 (מיקום הנקודה (0,100) במערכת הצירים)

- 1 המורה: האם הנקודה (0,100) יכולה לייצג את המיקום של דמות הנמצאת ברביע הראשון של הבמה (מצביעה על במת Scratch)?
- 2 מאי: לא
- 3 המורה: למה?
- 4 סלם: בגלל ערך האפס של X.
- 5 מאי: האפס הוא מספר לא חיובי כמו הערכים ברביע הראשון.
- 6 קוטיבה: אני מסכים.
- 7 המורה: איפה תמוקם דמות שערך ה-X שלה הוא 0 וערך ה-Y שלה הוא 100?
- 8 תאלין: באמצע, בין הפרפרים לחיפושיות. אולי כאן [מצביעה על הצד החיובי של ציר X] או כאן [מצביעה על הצד השלילי של ציר X].
- 9 ודיע: דמות זו אין לה מקום בבמה.
- 10 רגד: המורה [היא הלכה ללוח]. כאן [הצביעה על ציר Y].
- 11 תאלין: בתחתית [מצביעה על ציר Y].
- 12 מאי: בראש הקו הירוק [מצביעה על ציר Y].
- 13 ודיע: ערך ה-X הוא אפס, אז איך הדמות תתקיים?
- 14 קוטיבה: אי-אפשר.
- 15 תאלין: נכון, לא יתכן.
- 16 המורה: בסדר. נחזור לענות על שאלה זו לאחר שנדון במאפיינים של הנקודות הנמצאות ברביעים האחרים

[המורה דנה עם התלמידים וסיכמה אתם את מאפייני הנקודות הנמצאות ברביעים האחרים].

המרכיב C7 התחיל להופיע כאשר חלק מהתלמידים טענו כי הנקודה (0,100) אינה נמצאת ברביע הראשון [2, 4-6]. מאי הסבירה את זה תוך התייחסות לערכי X ו-Y של הנקודות ברביע הראשון, ואמרה שהם מספרים חיוביים בעוד שהאפס אינו מספר חיובי [5]. בנוסף, נראה שחלק מהתלמידים תפסו ש-(0,100) נמצאת על ציר Y [10-12], בעוד שתלמידים אחרים לא יכלו להעלות על הדעת שלנקודה זו יש "מקום" בבמת ה-Scratch [9, 13-15]. המורה עצרה את הדיון וביקשה מהתלמידים לדון ב-C1-C4 [16]. כנראה שהמורה חשבה שמרכיבי הידע C1-C4 חיוניים לבניית C7.

אחרי הבניית מרכיב הידע C7, התלמידים התקדמו להבנות את C8.1 (מאפייני ערכי X ו-Y של הנקודות הנמצאות על ציר ה-Y), כפי שאפיזודה 2 מראה.

אפיזודה 2- הכללה מ-C7 ל-C8.1

- 35 מורה: מי יכול להגיד לנו מה משותף לכל הנקודות שממוקמות על הקו הירוק?
- 36 מאי: מפרידות
- 37 תאלין: הם מפרידות בין המספרים החיוביים לבין השליליים.
- 38 המורה: מה זה מזכיר לכם? איזה מספר?
- 39 ודיע: האפס.
- 40 המורה: אז מה המשותף לכל הנקודות על הקו הירוק?

- 41 התלמידים: האפס.
- 42 המורה: בואו נעבוד עם Scratch ונבחן את המסקנה שלנו [התלמידים עבדו עם Scratch].
- 43 המורה: מה המסקנה שלכם?
- 44 קוטיבה: ערכי X ברביע הראשון הם חיוביים וברבע השני הם שליליים, הקו הירוק מפריד בין המספרים החיוביים והשליליים. זה אומר שערך X של כל אחת מהנקודות על קו זה שווה לאפס.

אפיזודה 2 מראה שהגדרת האפס כמפריד בין המספרים החיוביים והשליליים [36, 37] עזרה לתלמידים לבנות את C8.1 [למשל ב-44]. בנוסף, אחרי עבודת התלמידים בסביבת סקראץ', אחד מהם (קוטיבה) השתמש במבני ידע אשר נבנו קודם (C1-C2) כדי להצדיק את הטענה שערך X של כל אחת מהנקודות הנמצאות על ציר Y שווה ל-0 [44].

דיון

מחקר זה מתאר תהליכי הבניית ידע מתמטי בנושא של מערכת צירים בקרב תלמידים מכיתה ו' שעבדו בסביבת סקראץ'. תוצאות המחקר הראו שהתלמידים הצליחו לבנות את מרכיבי הידע הצפויים. נראה כי המאפיינים של סביבת סקראץ' תמכו בתהליכי הבניית הידע. ספציפית, האפשרות הקיימת בלצפות בערכי X ו-Y שמייצגים מיקום של דמות מסוימת הנמצאת על הבמה של סקראץ' עזרו לתלמידים לבנות ידע מתמטי בנושא מערכת צירים. זה מצביע על כך שהכלי הטכנולוגי, כאן Scratch, יכול לתמוך בהבניית מושגים מדעיים מורכבים (Calder, 2018).

הממצאים הראו כי C6 (האפס אינו מספר חיובי ואינו מספר שלילי) היה קריטי בתהליך הבניית C7-C8 (מאפייני ערכי X ו-Y של הנקודות על הצירים). בעת הבניית המושג C6 התלמידים שינו את תפיסת מושג האפס שלהם. לפני המשימות והדיונים הם ציינו את אפס כ-'כלום' וכ-'קטן יותר מכל מספר חיובי' ולאחר ביצוע המשימות הם ציינו כי האפס הוא מספר שאינו שלילי ושאינו חיובי ושהוא מפריד בין שני סוגים של מספרים. שינוי זה נתמך על ידי הדיון במליאת הכיתה שהנחתה המורה (Johnny & Abdullah, 2020). דיון כיתתי זה גרם להרחבת הידע הקולקטיבי של קבוצת התלמידים בכיתת המתמטיקה (Towers et al., 2013).

רשימת מקורות

- Calder, N. (2018). Using Scratch to facilitate mathematical thinking. *Waikato Journal*, 23(2), 43–58. <https://doi.org/10.15663/wje.v23i2.654>
- Towers, J., Martin, L. C., & Heater, B. (2013). Teaching and learning mathematics in the collective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 424-433.
- Johnny, J., & Abdullah, T. (2020). Asking the Right Questions: Insights from a Mathematics Teacher Support Programme. *Asia Pacific Journal of Educators and Education*, 35(1), 173-182.
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2001). Abstraction in Context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly*, 1(3/4), 307-368.
- Taylor, M., Harlow, A., & Forret, M. (2010). Using a computer programming environment and an interactive whiteboard to investigate some mathematical thinking. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 561-570.
- Rodríguez-Martínez, J., González-Calero, J. & Sáez-López, J. (2020). Computational thinking and mathematics using Scratch: an experiment with sixth-grade students. *Interactive Learning Environments* 28(3), 316-327.



רקע תאורטי

בתוכנית הלימודים במתמטיקה, קיימים לא מעט רגעים בהם כללי המשחק משתנים והתלמיד מתבקש להרחיב את דימוי המושג שהכיר ולהפעיל פרוצדורות חדשות. הכללים החדשים עלולים להתנגש במידה מסוימת עם הישנים, ולגרום לקונפליקט אצל התלמיד ולטעויות (Cooper & Lavie, 2021). בהצגה זאת אתייחס לשינוי כללי המשחק המתרחשים במעבר מטריגונומטריה במשולשים לטריגונומטריה במעגל. מעבר זה מייצג שני שינויים משמעותיים: האחד בהגדרה של זווית מגודל סופי לאינסופי, והשני במעבר מתחום גאומטרי לתחום של פונקציות אלגבריות.

קיימות בספרות שתי גישות עיקריות ללימוד הפונקציות הבסיסיות של טריגונומטריה: גישת היחסים במשולש ישר זווית וגישת מעגל היחידה (Weber, 2005). מעניין לראות כי יש חוסר הסכמה בקרב החוקרים לגבי סדר ההוראה הנכון להצגת נושא הטריגונומטריה לתלמידים. קנדל וסטייסי מצאו במחקרם על סדר ההוראה כי תלמידים שלמדו קודם טריגונומטריה במשולש ישר זווית, הגיעו לתוצאות טובות יותר מאשר תלמידים שלמדו טריגונומטריה דרך מעגל היחידה (Kendal & Stacey, 1996). לעומתם, וובר מצא במחקרו כי יש יתרון להכיר לתלמידים את מעגל היחידה תחילה (Weber, 2005). אלבוים – כהן במאמרה, מציעה לבחון מחדש את סדר ההוראה של פרק הטריגונומטריה לאור הקשיים הנלווים לכל אחת מדרכי ההוראה המקובלות ואף מציעה לבחון גישה שלישית (אלבוים-כהן, 2022).

בספרי הלימוד המקובלים בישראל, סינוס מוגדר תחילה בצורה מצומצמת דרך יחסי צלעות במשולש ישר זווית, ורק בהמשך מופיעה הגדרת סינוס מורחבת דרך מעגל היחידה. תלמידים הלומדים את הגדרת סינוס במשולש ישר זווית נחשפים לתכונות האובייקט הנגזרות מיחס צלעות: למשל, סינוס זווית הינו גודל חיובי ולמשוואה קיים רק פתרון אחד (Weber, 2005). כאשר נלמדת ההגדרה המורחבת של סינוס במעגל היחידה, משתנים כללי המשחק, ונוצר קונפליקט בין התכונות שנלמדו לתכונות החדשות הנגזרות מההגדרה המורחבת. כעת סינוס קיים לא רק עבור משולשים, יכולים להיות אינסוף פתרונות וטווח הערכים כולל גם ערכים שליליים.

בספרות תועדו קשיים רבים בקרב תלמידים הלומדים טריגונומטריה, ובפרט תועד הקושי לקשר בין סינוס במשולש לפונקציות טריגונומטריות (Demir & Heck, 2013). מכאן חשיבות המחקר, הבוחן את תהליך איחוד השיחים לגבי סינוס במשולש ישר זווית עם זה של סינוס במעגל היחידה, הרגעים בהם הקשר בין ההגדרות המנוגדות חלקית מתחיל להתבהר. לפיכך, מטרת מחקר זה הינה לבדוק את תהליך הרחבת השיח לגבי מושג הסינוס מהגדרתו כיחס במשולש ישר זווית להגדרתו המורחבת במעגל היחידה, בקרב תלמידי 4 יחידות במתמטיקה, באמצעות פעילות חקר מעוצבת בסביבה טכנולוגית. (פרלמוטר, 2022).

מתודולוגיה

מחקר זה עסק במספר שאלות, השאלה בה נתמקד בהצגה זאת הינה : אילו נרטיבים ינסחו התלמידים בהקשר של פונקציית הסינוס במעגל היחידה?

על מנת לענות על שאלות המחקר נבנו שלוש פעילויות חקר מדורגות בליווי יישומי GeoGebra תואמים. פעילות ראשונה התמקדה במשולש ישר זווית, פעילות שנייה עסקה בהרחבת מושג הסינוס

להגדרתו במעגל היחידה, ופעילות שלישית התמקדה בתכונות המחזוריות ובשרטוט פונקציית סינוס במערכת צירים. ארבעה זוגות תלמידים, כולם מהקבוצה של 4 יחידות לימוד השתתפו בפעילויות. הפעילויות הוקלטו במצלמה שעקבה אחרי השימוש של התלמידים ביישומונים. דפי הפעילות שמילאו התלמידים, צילומי הפעילות ביישומונים ותמלולי השיח בין הזוגות היוו את נתוני המחקר.

הנתונים נותחו בהתאם לגישה הקומוניטיבית (Sfard, 2007), שנבחרה כמסגרת התאורטית של מחקר זה. בהתאם לגישה זאת, כאשר יש למידה יהיה שינוי בשיח המתמטי שעשוי להתבטא בכל אחד מארבעת המאפיינים: מילים, מתווכים ויזואליים, רוטינות ונרטיבים. בהתאם לגישה זאת, נרטיב הינו כל טקסט, כתוב או מדובר, המתאר אובייקטים או יחסים בין אובייקטים או פעולות בין אובייקטים. במתמטיקה הגדרות הוכחות ומשפטים הם נרטיבים מקובלים. לכן במחקר זה נבחרו מילות מפתח אשר נגזרו מתוך שאלות המחקר ונבדק אופן השימוש במילים אלו כדי להגדיר את האובייקט סינוס.

ממצאים

בניתוח הממצאים התברר כי כל התלמידים שהשתתפו במחקר שינו את השיח המתמטי שלהם אודות האובייקט סינוס. בחלק זה נציג אפיזודות הלקוחות מתוך תמלולי השיח בין יונתן ויהב [שמות בדויים]. דרך הדוגמאות נתאר את התפתחות מושג הסינוס.

התלמידים למדו את הגדרת הסינוס דרך יחס צלעות במשולש ישר זווית לפני ביצוע המחקר. בתחילת המחקר נשאלו התלמידים מהו סינוס. אפיזודה 1 מראה עד כמה תלמידים מתקשים להגדיר אובייקט מתמטי זה.

אפיזודה ראשונה – מהו סינוס של זווית

66	יונתן	בסדר, טוב. (מקריא) 'מהו סינוס של זווית?' את זה אני לא יודע.
72	מנחה	תחשבו אם נחת עכשיו חיזר ממאדים והוא צריך שתגידו לו מה זה סינוס.
73	יונתן	אני אסביר לו כהדבר הזה במחשבון שאתה פותר איתו תרגילים. אני לא יודע...
76	יהב	אז איך שאולי פותרים את זה. צריך להשתמש בצלע כזאת וצלע כזאת כדי למצוא את הזווית הזאת.
77	מנחה	איזה צלע ואיזה צלע? אתם זוכרים?
78	יהב	בשביל סינוס זה... זה עם היתר, נכון?
79	מנחה	כן, תצייר לנו ואז זה יזכיר לך.
80	יהב	כאילו עוד פעם... טריגו זה לא הפורטה שלי....
81	יונתן	בוא נאמר זה אלפא, אז צריך את זה חלקי זה. סליחה, זה חלקי זה, זה היתר.
83	יונתן	אבל זה רק במשולש ישר זווית.
84	מנחה	אוקי, אז מה קורה שהזווית היא לא במשולש ישר זווית?
85	יונתן	הייתי אומר דברים... אני הייתי בשיעורים בחיים לא הסבירו לנו מה זה סינוס. פשוט אמרו לנו זה הסינוס במחשבון, ככה אתם פותרים איתו תרגילים. אין לי מושג מה זה סינוס, מה הוא אומר. אני רק יודע איך להשתמש בו.

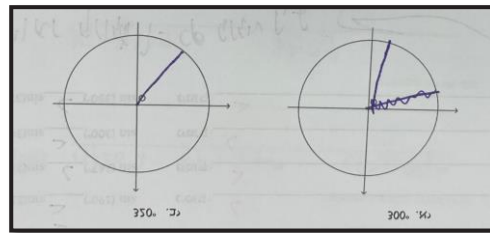
מניתוח האפיזודה רואים כי זוג זה מתקשה לנסח נרטיב אודות סינוס במשולש ישר זווית. יונתן טוען שאינו יודע (66). שני התלמידים פונים לרוטינה המוכרת להם כדי לענות (73, 76). אמנם הם מגיעים לנרטיב המקובל לסינוס במשולש ישר זווית (81) אך ניתן להניח שההתייחסות היא לרוטינה וככל הנראה אין הבנה של סינוס כמייצג פונקציית יחסים בין צלעות. חיזוק להשערה זאת ניתן למצוא במשפט של יונתן "אין לי מושג מה זה... אני רק יודע להשתמש בו" (85). יונתן מבצע הבחנה שהגדרה זאת תקפה רק במשולש ישר זווית (83).

בהמשך המחקר התלמידים מתבקשים להשוות בין גדלים של סינוסים של זוויות שונות לאחר שציירו את הזוויות על גבי מעגל היחידה. מטרת המשימה של השוואת גדלים של סינוסים הינה להוביל את

התלמידים להגיע לנרטיב שקושר בין ערך Y של נקודה על המעגל לבין ערך סינוס זווית. באמצעות מתווך וויזואלי של דיאגרמות של מעגלים נעשה קשר וויזואלי ראשוני של מושג הסינוס למעגל. באיור 1 שלהלן דוגמה לצירוף של זוויות מתוך דפי המטלה של יונתן ויהב.

איור 1

שרטוט זוויות על מעגל היחידה כהכנה להשוואת גדלים של סינוסים



התלמידים מתקשים מאוד בביצוע המשימה של השוואת ערכים של סינוסים שונים. הם מפתחים רוטינה שגויה ומגיעים לתשובות שגויות. באפיזודה 2 נעזרים התלמידים במתווך וויזואלי של אפליקציית GeoGebra כדי לבדוק את התשובות שלהם במשימה של השוואת סינוסים של זוויות. עד לרגע זה התלמידים בטוחים שערך סינוס יכול להיות חיובי בלבד. באפיזודה הבאה נראה כיצד מגיב זוג זה לתובנה ששגו. בפרט כיצד מגיבים לעובדה שיש ערכי סינוס שליליים, וכיצד גילוי זה תורם להתפתחות הנרטיב אודות סינוס זווית במעגל.

אפיזודה שנייה - גילוי

1423 יהב	טעינו.
1424 יונתן	טעינו בכל תרגיל. כי עשינו את המינוס הגדול יותר. (צוחקים)
1426 מנחה	בואו ננסה להבין רגע...
1429 יונתן	הזווית עדיין פלוס.
1430 מנחה	נכון, אז למה הסינוס הוא מינוס?
1431 יונתן	אני מעוצבן! אנחנו... אוקי. לפרוטוקול, אנחנו ידענו שזאת התשובה אבל היינו תחת המחשבה שצדקנו מקודם.
1433 מנחה	לפרוטוקול שתלמידים מתעצבנים ככה אחר כך הם רוכשים ידע והם זוכרים אותו.
1434 יהב	בגלל שה- Y הוא מינוס אני חושב.
1436 מנחה	כי ה- Y הוא מינוס! יפה יהב!
1437 יונתן	רגע מה?
1438 יהב	אנחנו ברביע השלישי והרביעי ה- Y הוא מינוס, בעוד שברביע הראשון והשני הוא לא. אז בעצם שאנחנו יורדים לרביע השלישי והרביעי, בגלל שה- Y הוא מינוס אז גם הקוסינוס... אה... הסינוס הוא...
1439 יונתן	הגיוני. ברביע השני והשלישי הקוסינוס הוא השלילי... אה הוא המינוס.
1440 מנחה	נכון.
1456 יונתן	אז אם זה 370 אז זה 300... אה כן, אז כן זה (מצביע על 370) יותר גדול מזה.
1457 מנחה	כן, יופי. אז בעצם...
1458 יהב	ותרשום שהסיבה זה בגלל שה- Y הוא מינוס.

באפיזודה זאת ניתן לראות שהגילוי העיקרי מבחינת התלמידים הינו שיכול להיות סינוס שלילי. יהב מקשר בין ערך סינוס לערך Y (1434) ונותן הסבר נכון לגבי ערכי סינוס ברביעים שלישי ורביעי (1438). יונתן משתכנע ומספק הסבר נכון לגבי ערכי קוסינוס זווית במעגל ברביעים שני ושלישי (1439). השינוי הזה בתכונת האובייקט של הרחבה לערכים שליליים יסייע לתלמידים בהמשך

להתקרב לנרטיב המקובל לסינוס זווית במעגל. בהצגה נראה אפיזודה נוספת שתדגים כיצד התלמידים הרחיבו את המושג סינוס והגיעו לנרטיב המקובל.

דיון

מטרת מחקר זה הייתה לבדוק את תהליך הרחבת מושג הסינוס בקרב תלמידי 4 יחידות במתמטיקה, דרך פעילות חקר מעוצב בסביבה טכנולוגית. מהתבוננות על השיח של כל ארבעת הזוגות ניתן לראות כי תלמידים מתקשים לנסח הגדרה לאובייקט מתמטי. מסקנה זאת מתכתבת עם הממצאים של טבח ונחליאלי (Tabach & Nachlieli, 2015) שמצאו במחקרן כי לומדים מתקשים להבין את המבנה הלוגי של הגדרה של אובייקט מתמטי. אולם לקראת סוף המחקר, כאשר התבקשו התלמידים לנסח מהו סינוס במעגל, שבעה מתוך שמונת התלמידים, הגיעו לנרטיב המקובל לסינוס במעגל היחידה: כערך γ של הנקודה על מעגל היחידה. תלמיד אחד לא הגיע להגדרה המורחבת בצורה מפורשת בשיח שלו, אך כן הצליח לצייר בהמשך את המתווך הוויזואלי המקובל לפונקציית סינוס בצורה יפה. כלומר, ניתן להסיק שגם הוא הרחיב את מושג הסינוס.

לפי ספרד (Sfard, 2007), כדי תתרחש למידה ברמת על, כלומר כאשר יש שינוי בנרטיב המגדיר את האובייקט, כך שנוצר שיח חדש ובו כללים שעשויים לעמוד בסתירה לשיח הקודם, יש לחשוף את התלמידים לאפשרות של כללי משחק חדשים. מניתוח הסיבות לשינוי בשיח ברמת על, ניתן לראות כי היו כמה גורמי סמכות שסייעו להרחבת המושג בקרב התלמידים. עיצוב המטלה כמשימת חקר בסביבה ממוחשבת גרמה לכך שהחשיפה של התלמידים לשיח חדש קרתה תוך כדי ביצוע המטלות. בחלק מהמקרים גורם הסמכות הייתה מנחת המחקר, לעיתים התלמיד העמית, ולעיתים הייתה הסביבה הטכנולוגית בצורת יישומי GeoGebra. מסקנה זאת מתכתבת עם הממצאים במחקרן של טבח ונחליאלי (2015), שהראו שלמידה ברמת על יכולה להתרחש בקבוצות גם ללא נוכחות מורה ועם ההצעות של אלבוים-כהן (2022) ואחרים לשלב יישומים בהוראת טריגונומטריה.

לסיום נציין כי התלמידים הביעו הנאה מתהליך הלמידה, כך שכלי המחקר המוצג במחקר יכול לשמש מורים נוספים בהוראת מושג הסינוס בכיתה.

רשימת מקורות

- אלבוים - כהן, א. (2022). הרדיאן תחילה. על"ה 60, עמ' 7.
- פרלמוטר, ת. (2022). הרחבת מושג הסינוס מיחס במשולש לפונקציה מחזורית בסביבה טכנולוגית. (עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח"). אוניברסיטת תל-אביב.
- Cooper, J., & Lavie, I. (2021). Bridging incommensurable discourses—A commognitive look at instructional design in the zone of proximal development. *The Journal of Mathematical Behavior*, 61, 100822.
- Demir, Ö., & Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. In *Proceedings of the 11th international conference on technology in mathematics teaching* (pp. 119-124).
- Kendal, M., & Stacey, K. (1996). Trigonometry: Comparing ratio and unit circle methods. In *Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics education Research group of Australasia* (pp. 322-329).
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The journal of the learning sciences*, 16(4), 565-613.
- Tabach, M., & Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 163-187.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.



מבוא ורקע תאורטי

ידע במתמטיקה נבנה דרך השתתפות בשיח חברתי בהקשרים שונים. בבתי הספר הוראת המתמטיקה מופעלת באמצעות סיטואציות הוראה מתוכננות (Ernest, 1994). ניתן לאפיין את השיח בכיתה על פי מידת המונולוגיות או הדיאלוגיות שלו. בשיח דיאלוגי כל אמירה ניתנת להבנה בהקשר והוא מרמז ליחסים שוויוניים, פתיחות אינטלקטואלית, ביקורת וחשיבה יצירתית. בשיח מונולוגי לעומת זאת לכל אמירה יש משמעות אחת נכונה, והוא מקושר עם מסירה של רעיונות שאינם בני שינוי ואי שוויון בין הדוברים (Wegerif et al., 2019).

Alrø & Skovsmose (2003) מתארים את דרך ההוראה המסורתית בכיתה המתמטיקה כהדגמה ותרגול. לטענתם שולטת בה פרדיגמת התרגול המבוססת על מספר עקרונות: המידע בתרגיל הוא מדויק, הכרחי ומספיק לשם פתרון התרגיל. בהינתן תרגיל המטרה היא לפתור אותו, ואין טעם לשאול שאלות על טבעו. הנתונים המדויקים וההנחה שהמידע בשאלה מתאר כל מה שצריך לדעת משמר את ההנחה שקיימת תשובה-נכונה-אחת-ויחידה לכל תרגיל מתמטי. התרגול מלווה בפרקטיקה של תיקון וסילוק טעויות, וטעויות נתפסות כאבסולוטיות. השיח בכיתה מחלק את האמירות לאמיתות ושגויות, דיכטומיה אשר משמרת את האובייקטיביות של המתמטיקה. דרך ההוראה המתוארת היא מונולוגית, והתקשורת בכיתות מתוארת כמערכת יחסים לא סימטרית, שבה המורה שואל שאלה שתשובתה ידועה לו מראש, התלמיד עונה ומשלים את המונולוג של המורה, והמורה מעריך את תשובתו. תהליך זה מדגיש את קיומה של סמכות, ומסמן שלכל שאלה מתמטית יש תשובה אחת נכונה.

כדי לשנות את דפוס התקשורת הללו יש לעבור מפרדיגמת התרגול למה ש-Alrø & Skovsmose (שם) מכנים חקירה. תהליך של חקר הוא תהליך פתוח, שבו תוצאות ומסקנות אינן נקבעות מראש. התרגילים הסגורים מוחלפים בשאלות פתוחות, בתלמידים המנסחים שאלות בעצמם ומתכננים דרכי חקר שונות. חקירה היא לכן תהליך של גילוי והתלמידים עסוקים במציאת הסברים למה שגילו. חקר איננו פעילות כפויה, אלא מזמין את התלמידים להיות משתתפים פעילים ואחראים על התהליך. חקירה כזו מאפשרת דפוס תקשורת אחר, המכונה בפי Alrø & Skovsmose (שם) דיאלוג. הם מפרטים שמונה פעולות דיאלוגיות במסגרת מודל ה-Inquiry-Cooperation (IC) שפיתחו: יצירת קשר היא התכוונות, הקשבה אקטיבית למה שהאחר אומר; איתור משמעו גילוי והעלאת דברים חדשים שלא עלו בשיח קודם לכן; זיהוי משמעו זיהוי הנושא או הרעיון המתמטי העומד בבסיס; הגנה משמעה לספק טיעונים בעד אמירה מסוימת; חשיבה בקול רם מתרחשת כאשר משתתף אחד משתף את החשיבה שלו עם השאר; ניסוח מחדש משחק תפקיד חשוב בניסיונות להבין טוב יותר האחד את השני; איתגור משמעו להטיל ספק באמירה או פרספקטיבה מסוימת מבלי לתקוף את מי שאמר אותה; הערכה מסייעת ברפלקציה על הצעדים שנעשו בשיח (Skovsmose, 2001). דיאלוג כולל מגוון עשיר של פעולות דיאלוגיות המופיעות במקבצים שונים במהלך החקר השיתופי.

מתודולוגיה

מחקר זה הוא חלק מפרויקט מחקר גדול שמטרתו לתאר את המאפיינים הדיאלוגיים של עבודת חקר בקבוצות קטנות בכיתת המתמטיקה. למטרה זו הוקלטו שיעורי מתמטיקה שתוכננו במסגרת

השתלמות מורים ייעודית כשיעורים בעלי פוטנציאל דיאלוגי, אשר הופעלה בהם עבודת חקר בקבוצות. מאמר זה מציג ממצאים מתוך עבודתן של שש קבוצות של תלמידים בכיתה ח', סביב בעיה בגאומטריה. בכל קבוצה היו 2-4 תלמידים אשר עבדו על מטלה בדמיון משולשים (איור 1). הנתונים המתארים את סדרת המשולשים הם הכרחיים ומספיקים לצורך פתרון סעיפים א' ו-ב'. ניסוח שתי השאלות בסעיף א' הוא סגור ומכוון לתשובה אפשרית נכונה אחת ויחידה. שאלות מסוג זה מוכרות לתלמידים ולכן הן שייכות לפרדיגמת התרגול. המקום הריק של משולש ד' עשוי לטמון בחובו פוטנציאל לחקר בכך שהוא מזמין את התלמידים לחשוב על האופן שבו יש לסדר את המשולשים כדי ליצור אותו. סעיף ב' מנוסח כשאלה פתוחה המזמינה את התלמידים לחקור את הקשר בין משולשי הסדרה, אולם מתן אפשרויות התשובה הופך אותה לסגורה. סעיף זה מכוון לתשובה נכונה אחת ויחידה, והוא שייך לפרדיגמת התרגול שכן למרות שהתלמידים נדרשים להסביר את תשובתם, זהו הסבר שהם מתורגלים בו. בסעיף ג' מובעת טענה שגויה על אודות הקשר בין יחס הדמיון ויחס השטחים של משולשים דומים. התלמידים אינם מכירים את המשפט העוסק בקשר זה ועל כן שאלה זו מזמנת להם תהליך של גילוי. התלמידים נדרשים להבין את הטענה המובעת בשאלה – לאתר את נכונותה לגבי משולשים א' ו-ב', לאתר את הצורך לבדוק את הכללתה לגבי שני משולשים דומים כלשהם, לאתר דוגמאות נוספות בין משולשים אחרים בסדרה ולזהות כי הטענה אינה נכונה עבור כל שני משולשים אחרים בסדרה. לאחר מכן עליהם לנסות לגלות קשר אחר בין שטחי משולשים דומים. לשם כך עליהם לאתר מספר דוגמאות לקשר זה, לזהות מהו הקשר המתמטי המשותף לכל הדוגמאות ולנסות להגן על הקשר שזיהו.

איור 1

מטלה בדמיון משולשים - (המשימה היא וריאציה על מתמטיקה משולבת, כיתה ח' חלק א', עמ' 280, צוות מכון ויצמן, 2014)

נתונה סדרה של משולשים. כל משולש מורכב ממספר משולשים קטנים חופפים.

משולש א משולש ב משולש ג משולש ד

א. מה יהיו אורכי הצלעות של המשולש הבא בסדרה? כמה משולשים קטנים נדרשים כדי לבנות אותו?

ב. מה תוכלו לומר על הקשר בין המשולשים בסדרה? חופפים/דומים/אין קשר מיוחד הסבירו.

ג. גליה אמרה: "הצלע של משולש ב' גדולה פי 2 מהצלע של משולש א'. השטח של משולש ב' גדול פי 4 מהשטח של משולש א'. לכן לדעתי היחס בין שטחי משולשים דומים (כלשהם) הוא פי 2 מהיחס בין הצלעות". האם גליה צודקת? אם כן – הוכיחו. אם לא – מצאו קשר אחר בין יחס השטחים לבין יחס הצלעות.

העבודה של כל קבוצות התלמידים הוקלטה ותומללה במלואה. ניתוח השיח נעשה באמצעות מודל ה-IC (Alrø & Skovsmose, 2003): כל תור דיבור אופיין במונחים של שמונה פעולות הדיבור הדיאלוגיות המאפיינות את המודל. דוגמאות מתוך ניתוח השיח מוצגות בממצאים.

ממצאים

עבור סעיפי התרגול וסעיף החקירה מוצגת אפיזודה העוסקת בסעיפים הרלוונטיים, ניתוח של האפיזודה במונחי מודל ה-IC וטבלאות המתארות את שכיחות הפעולות הדיאלוגיות בסעיפים אלו. להלן אפיזודה 1 מתוך עבודתה של אחת הקבוצות ביחס לסעיף התרגול:

2 ר: אז אוקי, הצלעות הן $4a, 4b, 4c$... כי אתה מוסיף...

3 א: כן, כי זה כאן...

- 4 ר: כמה משולשים קטנים נדרש כדי לבנות אותו?
- 5 א: אהה... שניה..
- 6 ר: זה 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. זה לדעתי הסדרה של 1, 4, 9, 16.
- 7 א: אהה..
- 8 ר: אז 16 נגיד... משולשים קטנים ועוד... 16

באפיזודה זו ניתן לראות כי התלמידים יוצרים קשר באמצעות הקשבה האחד לשני והקראת השאלה (#3, 5, 7). הם מאתרים את הנשאל בשאלה (#4) ואת השטח כמספר המשולשים הקטנים הבונים כל משולש בסדרה (#6). הם מזהים את החוקיות של צלעות סדרת המשולשים (#2) ואת חוקיות שטחי המשולשים בסדרה (#7). הם מגלים על הזיהוי שלהם (#2, 3) ומנסחים מחדש את התשובה (#8). טבלה 1 מתארת את שכיחות הפעולות הדיאלוגיות בסעיפי התרגול.

טבלה 1

שכיחות הפעולות הדיאלוגיות בעבודה המשותפת בסעיפי התרגול (באחוזים)

% N – תורי דיבור	יצירת קשר	איתור	זיהוי	הגנה	חשיבה בקול רם	ניסוח מחדש	איתגור	הערכה
קבוצה 1 (32)	19	22	16	25	9	16	9	3
קבוצה 2 (15)	33	27	33	27	0	20	0	0
קבוצה 3 (66)	26	24	12	17	3	11	11	5
קבוצה 4 (72)	32	31	11	11	13	7	4	4
קבוצה 5 (38)	26	24	11	8	5	11	3	0
קבוצה 6 (20)	30	40	15	10	5	10	5	5

הפעולות הדיאלוגיות של יצירת קשר ואיתור הן הפעולות השכיחות ביותר בסעיפי התרגול, וזיהוי והגנה הן הבאות בשכיחותן. פעולות דיאלוגיות נוספות מופיעות בשכיחות נמוכה או לא מופיעות כלל.

להלן אפיזודה 2 מתוך עבודתה של אחת הקבוצות ביחס לסעיף החקירה:

- 42 א: זה נכון.
- 43 ג: בטוח? בואו נבדוק, צריך לבדוק קודם. לא, לא נכון ביחס ל-א' ו-ג'.
- 44 א: אה א' ו-ג', שניה.
- 45 ג: א' ו-ג' למשל. היחס...
- 46 א: אבל לא דיברו על א' ו-ג', דיברו על א' ו-ב'.
- 47 ג: לא, היא אמרה 'שטחי משולשים'. כל המשולשים הדומים. הנה – משולשים דומים כלשהם!
- 48 א: זה פי 2 מיחס הצלעות. מה זאת אומרת השטח? הוא פי 2 מיחס הצלעות.
- 49 ג: כן, השטח הוא פי 2. עכשיו בוא נבדוק את זה. בין משולש ג' ל-א' יש שטח של 3, נכון?
- 50 א: לא, תספור את המשולשים, זה כל השטח.

אפיזודה 2 מדגימה את חשיבות פעולת האיתור בחקירה: התלמידים איתרו את הצורך לבדוק את הטענה לגבי משולשים א' וג' ואף איתרו כי הטענה אינה נכונה לגבי משולשים אלו (#43), הם איתרו כי משולשים א' ו-ג' מהווים דוגמא אחת (#45), הם איתרו בשאלה עצמה כי הטענה של גליה נכונה רק עבור משולשים א' ו-ב' (#46) וכן איתרו את העובדה שהטענה של גליה היא כללית (#47).

בהמשך הם איתרו באמצעות שאלה (#48) ותשובה (#50) את משמעות השטח כסכום המשולשים הקטנים המרכיבים את המשולש. טבלה 2 מתארת את שכיחות הפעולות הדיאלוגיות בסעיף החקירה.

טבלה 2

שכיחות הפעולות הדיאלוגיות בעבודה המשותפת בסעיף החקירה (באחוזים)

% N – תורי דיבור	יצירת קשר	איתור	זיהוי	הגנה	חשיבה בקול רם	ניסוח מחדש	איתגור	הערכה
קבוצה 1 (102)	8	37	8	10	14	13	8	9
קבוצה 2 (55)	20	25	11	11	2	25	4	9
קבוצה 3 (84)	27	23	6	8	17	23	11	12
קבוצה 4 (125)	14	31	5	11	12	5	6	6
קבוצה 5 (99)	21	33	6	7	6	10	8	7
קבוצה 6 (127)	14	38	5	18	13	9	11	5

בחקירה הופיעו כל שמונה הפעולות הדיאלוגיות. הפעולה השכיחה ביותר היא איתור (נכון לכל הקבוצות למעט קבוצה 3), אחריה יצירת קשר וניסוח מחדש המופיעות גם הן בשכיחות גבוהה.

דיון

באופן כללי, עבודת החקר של התלמידים בקבוצות העלתה כי כלל הפעולות הדיאלוגיות הופיעו בשכיחות כזו או אחרת במהלך השיח. בדומה לרעיונות שהציגו Alrø & Skovsmose (2003) נמצאו דפוסי תקשורת שונים בין תרגול לחקירה. בסעיפי התרגול הופיעו בעיקר ארבע פעולות דיאלוגיות: יצירת קשר ואיתור הן השכיחות ביותר, זיהוי והגנה בשכיחות בינונית. התלמידים איתרו כיווני חקירה במהירות, זיהו את הרעיונות המתמטיים הנדרשים וידעו להגן ולהסביר אותם. בתרגול לא נדרשו פעולות דיאלוגיות רבות ולא נמצא מגוון עשיר של פעולות דיאלוגיות. פעולות מסוג הערכה או איתגור לדוגמא כמעט שלא נדרשות בפתרון התרגיל. בסעיף החקירה, בו נדרשו התלמידים לתהליך של גילוי תכנון התלמידים דרכי חקר שונות וכיווני חקירה רבים: הם איתרו נקודות מבט שונות על הבעיה, זיהו את הרעיון המתמטי העומד בבסיסם, ובאמצעות פעולות דיאלוגיות נוספות הגיעו לתובנות. פעולת האיתור נמצאה כפעולה השכיחה ביותר בעת עיסוק בחקירה. יצירת קשר נמצאה אף היא כפעולה שכיחה, שכן בכל שלב נדרשו התלמידים לוודא שכולם מבינים את הנאמר. הפעולות הדיאלוגיות הנותרות מופיעות כולן בחקירה בשכיחות דומות. בסעיף זה נמצא עושר של פעולות דיאלוגיות בכלל הקבוצות, כלומר התקיימה בהן למידה דיאלוגית על פי הגדרתם של Alrø & Skovsmose (שם).

רשימת מקורות

- צוות מכון ויצמן (2014). *מתמטיקה משולבת לכיתה ח', חלק א'*. המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן.
- Alrø, H., & Skovsmose, O. (2003). *Dialogue and Learning in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
- Ernest, P. (1994). Conversation as a metaphor for mathematics and learning. In *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics Day Conference held at Manchester University* (pp. 58–63). Manchester: BSRLM.
- Skovsmose, O. (2001). Landscapes of Investigation. *ZDM Mathematics Education*, 33(4), 123-132.
- Wegerif, R., Mercer, N., & Major, L. (2019). Introduction to the Routledge International Handbook of Research on Dialogic Education. In N. Mercer, R. Wegerif, & L. Major (Eds.), *The Routledge International Handbook of Research on Dialogic Education* (pp. 1–8).



מבוא ורקע תיאורטי

יכולת מרחבית (Spatial ability) היא מרכיב חשוב להצלחה במגוון תחומי דעת, במיוחד במדע, טכנולוגיה, דיסציפלינות הנדסה ומתמטיקה (Shriri et al., 2017). ואכן תוכניות לימודים רבות בעולם מדגישות את חשיבותה של למידת גיאומטריה במרחב כחלק מהותי מהאוריינות המתמטית וכאמצעי לפיתוח יכולת חשיבה מרחבית. גם בישראל, בה נערך המחקר, נושאים בגיאומטריה מרחבית נמצאים בתוכניות הלימודים מיסודי ועד תיכון. על אף זאת, ניתוח של מבחני PISA עפ"י התוכן הראה כי ההישגים הנמוכים ביותר לתלמידי ישראל היו בבעיות הקשורות למרחב וצורה (Mevarech, 2018).

הישגים בגיאומטריה מרחבית מיוחסים לעיתים קרובות ליכולותיו של הלומד לדמיין את האובייקט התלת ממדי מן הסקיצה הדו ממדית (Gutierrez, 1996). השימוש בסקיצות דו ממדיות לתיאור אובייקטים תלת ממדים מסתמך על ההנחה כי ללומד יש יכולת גבוהה של זיהוי תבניות וסינתזה המאפשרת להשלים אינפורמציה שאבדה במעבר מתלת ממד לדו ממד. אך ישנם לומדים רבים שאינם מצליחים לדמיין את האינפורמציה החסרה שאבדה במעבר מתלת ממד לדו ממד (Christou et al., 2005; Gutierrez, 1996) והם מצויים תחת תפיסה שגויה שהסקיצה הדו ממדית מייצגת נאמנה את האובייקט התלת ממדי (Parzys, 1988). אתגר זה מתחדד במשימות חיתוך שידועות כמפתחות חשיבה מרחבית. משימות אלו מצריכות סוג של "חדירה חזותית" (Kali & Orion, 1996).

לפי לבורדה ולבורדה, שילוב הטכנולוגיה בשיעורי גאומטריה מרחבית תאפשר לפתח את התפיסה המרחבית אצל הלומד, באמצעות הטכנולוגיה אנו מביאים את הייצוגים לפעילות דינאמית מתמטית, דיאגרמה אינה עוד ייצוג סטטי המייצג מופע גיאומטרי של אובייקט, אלא מערך של שרטוטים, המייצגים יחסים בלתי משתנים בין אלמנטים משתנים (Laborde & Laborde, 2014).

במחקר זה נבחן האם הטכנולוגיה המדמה תמונה תלת ממדית מסייעת או פוגמת בתפיסה המרחבית של הלומד ובזיהוי צורות וגופים במרחב. מטרתנו לחקור את השפעת הממשקים הנלווים למשימה בנושא חיתוך גופים. לצורך כך נבחן שני ממשקים שונים: תמונה סטטית המתארת סיטואציה של חיתוך בגוף תלת ממדי ויישומון דינאמי הממחיש חיתוך של גוף תלת ממדי באמצעות סיבוב והפרדה.

השאלות המרכזיות המובילות את מחקר זה הן:

- מהי השפעתו של יישומון המדמה גוף תלת ממדי בפתרון משימות חיתוך?
- האם כיוון החתך במשימות חיתוך משפיע על רמת הקושי של המשימה? וכן האם לשימוש ביישומון יש השפעה כל שהיא על פתרון משימות מסוג זה?

מתודולוגיה

לאור המטרות ושאלות המחקר, המחקר יתבסס על שיטות מחקר מעורבות, שילוב של שיטות מחקר כמותניות ואיכותניות (Ross & Onwuegbuzie, 2012). צורת מחקר זו מאפשרת הבנה מעמיקה ומקיפה לגבי ההתמודדות של תלמידים במשימות בגיאומטריה במרחב תוך התנסות ביישומונים, כאן נדווח על המחקר שיתבצע בקרב 134 תלמידים משישה בתי ספר שונים, בכיתות וז' (100 תלמידים ו24 תלמידים בהתאמה). 66 תלמידים ענו על השאלון הסטטי ו68 תלמידים ענו על השאלון האינטראקטיבי. אוכלוסיית המחקר התחלקה מגדרית באופן שוויוני. בדיווח זה לא נכללו ראיונות אישיים של 10 תלמידים שיבחרו על מנת לבחון לומדים עם הישגים שונים בפתירת המשימות בשאלון.

המחקר יתבצע באמצעות שאלון דיגיטלי שפותח במיוחד עבור מחקר זה. השאלון עסק בפתרון משימות חיתוך בגופים. לשאלון הדיגיטלי שתי גרסאות, בגרסה מספר 1 השאלון לווה בתמונות דו ממדיות ובגרסה מספר 2, השאלון לווה ביישומן אינטראקטיבי.

היישומן מבוסס GeoGebra ומאפשר ללומד ליצור אינטראקציה עם האיור וזאת על ידי תפעול הגוף התלת ממדי באמצעות שימוש בציר פעולה ולחיצה על העכבר תוך כדי הזזתו, שימוש בציר הפעולה מאפשר פיצול של הגוף לאורך המישור החותך (איור 1-א). לחיצה על העכבר תוך כדי הזזתו נגיעה בגוף מאפשרת סיבוב של הגוף ב360 מעלות. (איור 1-ב)

איור 1

צורות אינטראקציה ושאלת רב ברירה כדוגמה



השאלון בנוי משני חלקים, חלק א' שאלות על זהותו של הלומד, ושאלות של ידע קודם, חלק ב' מורכב משאלות של משימות חיתוך בגופים. השוני בין גרסה סטטית ואינטראקטיבית היה ניכר רק בחלקו השני של השאלון. לצורך בחינת הנתונים השאלון חולק לשלושה תת-שאלונים: (1) שאלון ידע קודם; (2) זיהוי צורת החתך במשימות חיתוך (איור 1ג); (3) זיהוי הגופים שנוצרו בעקבות החיתוך (איור 1ד). כמו כן, במשימות החיתוך בשאלון השתמשנו בשלושה סוגי חתכים שונים: אנכיים ומאוזניים למישור שעליו ניצב הגוף, וכן חתכים אקראיים שאינם מאונכים או מאוזנים למישור עליו ניצב הגוף (טבלה 1).

טבלה 1

סוגי חתכים שונים

חתך מאוזן	חתך מאונך	חתך אקראי

שיטת הניקוד הינה שיטה המותאמת לסוג השאלה. בשאלון היו שני סוגי שאלות, שאלות רב ברירה בהן יש תשובה אחת נכונה ושאלות רב ברירה בהן יש יותר מתשובה אחת (איור 1ג). בשאלות מהסוג הראשון התלמיד קיבל את מלוא הניקוד כאשר ענה נכון על השאלה ולהפך. בשאלות מן הסוג השני 75% מהניקוד ניתן על סימון של התשובות הנכונות, והיתר על אי סימון המסיחים (טבלה 2).

טבלה 2

השוואה בין שיטות ניקוד

מלבן	משושה	מרובע	מחומש	מקבילית שאינה מלבן	טרפז	ניקוד-שיטה קלאסית	ניקוד-שיטת במחקר
V		V				10	10
		V				8.33	6.25
			V			5	1.87
						6.66	2.5

הצורך בשיטת הניקוד התואמת למחקר הייתה לצורך מניעת נקוד גבוה לתלמידים אשר לא עונים כלל, או חלקי, כפי שניתן לראות תלמיד שלא ענה כלל בשיטת הניקוד הקלאסית יקבל 6.66 נקודות (מתוך 10) ואילו בשיטת הניקוד במחקר זה התלמיד יקבל רק 2.5 נקודות (מתוך 10), באמצעות שיטה זו תלמיד שזיהה את הצורה אך שגה באחד המסחים נוכל לזהות אותו באמצעות דירוג של ציון גבוה.

ממצאים

נערך מבחן T (one-sample t-test) למדגמים בלתי תלויים עבור ציוני התלמידים בשאלון המקדים בקרב כלל התלמידים לצורך בדיקת הידע הקודם של התלמידים שענו על השאלון הסטטי בהשוואה לתלמידים שענו על השאלון האינטראקטיבי, השוואה זו נעשתה לצורך שלילת קיום פערי ידע קודם בין הקבוצות. תוצאות המבחן הן כדלהלן: קיימים הבדלים בין שתי הקבוצות, כאשר התלמידים שענו על השאלונים האינטראקטיבי קיבלו ציון גבוה יותר מחבריהם שענו על השאלון הסטטי ($\text{Mean_Static}=77.6 < \text{Mean_Interactive}=79.6$). מבדיקת המובהקות עולה כי, ($P=.34 > .05$) לא קיימים הבדלים סטטיסטיים משמעותיים בידיע הקודם של שני קבוצות הנבדקים.

נערך מבחן T (one-sample t-test) למדגמים בלתי תלויים עבור ציוני התלמידים בשאלון העוסק בצורת החתך שנוצרה בעקבות החיתוך. המבחן בדק האם יש הבדלים מובהקים בין ציוני התלמידים שענו על השאלון האינטראקטיבי לבין אלו שענו על השאלון הסטטי. תוצאות המבחן הן כדלהלן: קיימים הבדלים בין שתי הקבוצות, כאשר התלמידים שענו על השאלונים האינטראקטיבי קיבלו ציון גבוה יותר מחבריהם שענו על השאלון הסטטי. ($\text{Mean_Static}=67.06 < \text{Mean_Interactive}=73.58$). מבדיקת המובהקות עולה כי, ($P=.041 < .05$) קיימים הבדלים סטטיסטיים משמעותיים בין ציוני הנבדקים.

נערך מבחן T (one-sample t-test) למדגמים בלתי תלויים עבור ציוני התלמידים בשאלון העוסק בזיהוי הגופים שנוצרו בעקבות החתך. המבחן בדק האם יש הבדלים מובהקים בין ציוני התלמידים שענו על השאלון האינטראקטיבי לבין אלו שענו על השאלון הסטטי. תוצאות המבחן הן כדלהלן: קיימים הבדלים בין שתי הקבוצות, כאשר התלמידים שענו על השאלונים האינטראקטיבי קיבלו ציון גבוה יותר מחבריהם שענו על השאלון הסטטי. ($\text{Mean_Static}=64.14 < \text{Mean_Interactive}=70.91$). מבדיקת המובהקות עולה כי, ($P=.058 > .05$) כלומר, לא ניתן להסיק באופן מובהק כי קיימים הבדלים סטטיסטיים משמעותיים בין ציוני הנבדקים. אך הממצאים מאד קרובים למובהקות ויתכן שבמחקר המשך ובאמצעות הגדלת המדגם נוכל לזהות כי קיימים הבדלים משמעותיים בין הנבדקים.

בנוסף נערך מבחן T -Test למדגמים תלויים (Dependent Samples T-Test) לצורך בדיקת השפעת כיוון החתך על רמת הקושי של השאלה, המבחן בדק האם יש הבדלים בציוני התלמידים בשאלות שהחתך הוא אופקי או אנכי לבין שאלות שהחתך בהם אקראי. ($\text{Mean_Random}=61.03 < \text{Mean_Vertical and Horizontal}=69.83$). מבדיקת המובהקות עולה כי, ($P=.002 < .05$) ניתן להסיק באופן מובהק כי רמת הקושי בשאלות בהן החתך אקראי גבוהה יותר.

בדיקת המשך למבחן זה נערכה על מנת לזהות האם ליישומן יש השפעה על פתירת שאלות מסוג זה. נערכו מבחני T (one-sample t-test) למדגמים בלתי תלויים לכל אחד מסוגי החתכים (מאוזן, מאונך ואקראי) המבחנים בדקו האם יש הבדלים בין ציוני התלמידים שנעזרו ביישומן לבין אלו שהשתמשו בתמונה סטטית. מן המבחנים עולה כי יש הבדלים מובהקים בין ציוני התלמידים שענו על השאלון האינטראקטיבי לבין אלו שענו על השאלון הסטטי בשאלות בהם סוג החתך היה אקראי והתלמיד נדרש לזהות את צורת החתך. ($\text{Mean_Static}=65.08 < \text{Mean_Interactive}=75.17$). מבדיקת המובהקות עולה כי, ($P=.029 < .05$) ועל כן יש להסיק כי קיימים הבדלים סטטיסטיים משמעותיים בין ציוני הנבדקים. התלמידים אשר ענו על השאלון האינטראקטיבי והסתייעו ביישומן זיהו את הצורות הגיאומטריות שנוצרו בעקבות החתך האקראי באופן נכון יותר. בשאר המבחנים לא זוהתה מובהקות.

דיון

שאלת המחקר הראשונה בדקה את השפעתו של יישומן המדמה גוף תלת ממדי בפתרון משימות חיתוך, מתוך הממצאים עולה כי היישומן מסייע במשימות חיתוך תלת ממדיות כאשר התוצר הוא דו ממדי, כלומר הולמד צריך לזהות את צורת החתך. לעומת זאת, אין יתרון מובהק לשימוש ביישומן כאשר התוצר הוא תלת ממדי והתלמיד נדרש לזהות את הגופים שנוצרו בעקבות החיתוך.

אחד האתגרים המרכזיים במשימות חיתוך בגיאומטריה מרחבית הוא הצורך 'לתקן' את המידע שהתעוות בעקבות ייצוג של תלת מימד ב-2D מימד. הלומד לעיתים אינו מזהה את צורת החתך הדו ממדי בפרספקטיבה תלת ממדית. כמענה לאתגר זה, היישומן הדיגיטלי מאפשר ללומד לצפות באובייקט מפרספקטיבות שונות המסייעות לו לזהות נכונה את הצורה (Parzysz, 1988). כמסקנה ממחקרו של בימובה, מומלץ לשלב טכנולוגיה דיגיטלית בפתרון בעיות הקשורות למישורים וגופים תלת-ממדיים, אך לאור המורכבות של חלק מהמשימות, ייתכן שיהיה ראוי להשלים זאת באמצעות חפצים קונקרטיים או באמצעות טכנולוגיית מציאות וירטואלית או רבודה (Bímová et al., in press).

שאלת המחקר השנייה בחנה האם כיוון החתך משפיע על רמת הקושי וכן האם לשימוש ביישומן יש השפעה כל שהיא על פתרון משימות מסוג זה. לאור הממצאים עולה כי רמת הקושי גבוהה באופן מובהק במשימות בהם החתך אקראי על פני משימות בהם החתך הוא אורטוגוני. בנוסף נמצא כי קיים יתרון מובהק לשימוש ביישומן במשימות הדורשות את זיהוי צורת החתך כאשר החתך אקראי.

שאלות בהן החתך אקראי הן שאלות ברמת קושי גבוהה יותר מפני שיש קושי לתכנן ולדמיין את הפתרון מראש. היישומן מסייע לתלמיד לפרק את הגוף ולצפות בצורת החתך, דבר זה מאפשר ללומד לחדור לגוף ולהנמיך במעט את רמת הקושי של המשימה. ממצאי המחקר עשויים לתרום למפתחי תוכניות לימודים ולמעצבי פעילויות דיגיטליות בתחום המתמטיקה, באמצעות מיפויי הפוטנציאל הטמון בשילוב אמצעים ויזואליים וטכנולוגיות חדשות. וכן מיקוד במשימות בהם לא ניתן להסתפק באמצעים אלו.

רשימת מקורות

- Bímová, D., Břehovský, J., Pirklová, Eichler, K.P., Seibold, M., Mushtaq, A. (in press). Developing students' visuospatial abilities in geometry using various tangible and virtual 3D geometric models. In *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*. ERME .
- Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N., & Jones, K. (2005). Developing 3D dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design. In F. Olivero & R. Sutherland, (Eds.), *Visions of mathematics education: Embedding technology in learning*, 69–77. University of Bristol
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3–19. Universidad de Valencia
- Kali, Y., & Orion, N. (1996). Spatial abilities of high-school students in the perception of geologic structures. *Journal of Research in Science Teaching*, 33(4), 369–391.
- Kozhevnikov, M., Motes, M. A., & Hegarty, M. (2007). Spatial visualization in physics problem solving. *Cognitive Science*, 31(4), 549–579 .
- Laborde, C., & Laborde, J.-M. (2014). Dynamic and tangible representations in mathematics education. In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation: A fundamental idea of mathematics education* (pp. 187–202). Springer.
- Mevarech, Z. R. (2018). Math literacy in Israel: What does PISA tell us that we did not know before?. In: Nitsa Movshovitz-Hadar (Ed.). *K-12 Mathematics education in Israel: Issues and innovations* (pp. 359–367). Technion.
- Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79–92.
- Ross, A. A., & Onwuegbuzie, A. J. (2012). Prevalence of mixed methods research in mathematics education. *Mathematics Educator*, 22(1), 84–113.
- Shriki, A., Barkai, R., & Patkin, D. (2017). Developing mental rotation ability through engagement in assignments that involve solids of revolution. *Mathematics Enthusiast*, 14(1–3), 541–562.



מבוא

הדמיה מרחבית, שהינה חלק מחשיבה גיאומטרית תלת ממדית, היא יכולת מכרעת להבין ולפתור בעיות בעולם האמיתי (Quintero et al., 2015). ההחלטה האם ניתן להשתמש בשרטוט כפריסה לבניית גוף, הינה אחת מהיכולות המאפיינות את החשיבה הגיאומטרית התלת ממדית. יכולת זו דורשת מן התלמיד מעבר בין ייצוג דו ממדי לתלת ממדי, והיא כרוכה בתהליכים קוגניטיביים אשר יכולים להתפתח אצל התלמיד באמצעות הוראה ותיווך מתאימים (Pittalis et al., 2010). על פי הספרות, קיים קושי בקרב תלמידים במעבר בין דו ממדי לתלת ממדי ולהפך. מעבר זה דורש חשיבה מופשטת ועריכת מניפולציות. ישנם ניסיונות להתגבר על קשיים אלו באמצעות כלים מגוונים. לאחרונה השימוש בטכנולוגיית מציאות רבודה (AR) נעשה נפוץ יותר. טכנולוגיה זו מאפשרת שילוב בין הסביבה הפיזית לוירטואלית. יתרונה הבולט של טכנולוגיית AR הוא הדמיה של מבנים תלת ממדיים במרחב של התלמיד, והאפשרות לקיים איתם אינטראקציה בעזרת מחוות ותנועות ידיים. מחוות אלו בונות ומשמרות ידע גיאומטרי אצל התלמיד (Le & Kim, 2017). על כן טכנולוגיית AR נבחרה למחקר זה, הבודק תהליכי הבניית ידע במעבר מדו ממדי לתלת ממדי ולהפך. שאלת המחקר היא: מה מאפיין את תהליכי המעבר של תלמידים מפריסה דו ממדית לגוף תלת ממדי ולהפך כאשר לומדים באמצעות מציאות רבודה? למחקר זה חשיבות רבה בהבנת תרומתה של מציאות רבודה להבניית הידע במעבר בין הגופים והפריסות בקרב תלמידים.

מסגרת תיאורטית

מעבר בין פריסה דו ממדית לגוף תלת ממדי מתאפיין באסטרטגיות חזותיות או אנליטיות. אסטרטגיה חזותית מתייחסת לניסיון של התלמיד לדמיין את הקיפול הפיזי של הפריסה, על מנת לקבוע האם ניתן לקפל אותה לגוף. אסטרטגיה אנליטית מתייחסת לניתוח מאפייני ומרכיבי הפריסה והגוף (Wright, 2016). אסטרטגיות אנליטיות מעידות על הבנה ומומחיות בתחום (Kospentaris et al., 2016).

גופים הינם אובייקטים תלת ממדיים, ה"תופסים מקום במרחב". הצגה דו ממדית שלהם על דף נייר, או אפילו על צג של מסך מחשב, עלולה להוות מכשול עבור התלמידים הנדרשים לבצע מניפולציות על הגוף, או לשרטט את פריסתו (Gutiérrez, 1996). קיים אובדן מידע בעת מעבר מייצוג תלת ממדי לשרטוט שלו. עם זאת, ייצוגים מישוריים שכיחים לייצוג גופים תלת ממדיים בתהליך הלמידה בבתי הספר, אף כי תלמידים עלולים לקרוא אותם לא נכון (Fujita et al., 2017; Pittalis et al., 2010).

פתרון אפשרי לבעיית המעבר מגופים לפריסות ולהצגת גופים תלת ממדיים הינו טכנולוגיית מציאות רבודה (AR), המאפשרת הוספה של מידע וירטואלי על המציאות הפיזית הקיימת בעולם האמיתי בזמן אמת (Carmigniani & Furht, 2011). היא קשורה באופן מהותי לתלת ממדי, ועל כן השימוש בה בלימודי הגיאומטריה יכול לשפר באופן משמעותי את תהליך הלמידה (Kramarenko et al., 2019). יכולת הדמיה מרחבית עשויה להתפתח בעקבות אינטראקציה עם אובייקטים אמיתיים או וירטואליים (Quintero et al., 2015). באמצעות AR התלמיד יכול לפרוס את הגוף למספר פריסות שונות, בשונה מפריסת גוף המורכב מנייר או קרטון מקופל, אשר פריסתו תוביל את התלמיד לפריסה אחת ויחידה. AR מאפשרת ביתר קלות זיהוי של תכונות הגוף ופריסותיו בגלל המניפולציות הווירטואליות שהיא מאפשרת וכן בגלל השילוב בין הסביבה האמיתית לסביבה הווירטואלית (İbili et al., 2020). יתרונה

הבולט של AR הוא הדמיה של מבנים תלת ממדיים במרחב של התלמיד, והאפשרות לקיים איתם אינטראקציה בעזרת מחוות, הבונות ומשמרות ידע גיאומטרי אצל התלמיד (Kramarenko et al., Bujak et al., 2019; Le & Kim, 2017), על כן AR מעודדת יצירת דימויים מעוגני גוף למושגים (2013). לפי גישת קוגניציה מעוגנת גוף, המייחסת לאברי הגוף המגוונים תפקיד מרכזי בחשיבה האנושית, אפיון המחוות כמוהו כאפיון החשיבה, ומכאן חשיבותו הגדולה: המחוות הן מבעים גופניים של הבניית הידע (Novack & Goldin-Meadow, 2015). מקנייל (1992) חלק את המחוות לשלושה סוגים עיקריים: מחווה אייקונית, שהיא תנועת ידיים המדמה את האובייקט המתואר; מחווה אינדקסית, שתפקידה להצביע על אובייקט מסוים; ומחווה מטאפורית, שתפקידה לתאר מושג מופשט. מאינטגרציה של הספרות על למידת גיאומטריה לפי קוגניציה מעוגנת גוף, ניתן להסיק כי המחוות האייקוניות בעיקרן ישמשו את התלמיד במהלך אסטרטגיות חזותיות המשלבות תהליכי הדמיה מרחבית, היות והן מדמות פעולות של קיפול ופריסה. המחוות האינדקסיות, לעומת זאת, יהיו דומיננטיות בעיקרן במהלך אסטרטגיות אנליטיות. מחוות אלו, המסייעות בשימת לב לקיום דבר מה, משמשות להצבעה על מיקומים של פאות בפריסה ובכך שותפות באסטרטגיות אנליטיות.

מתודולוגיה

במחקר זה השתתפו 4 תלמידים בבית הספר היסודי בכיתה ה'. כל תלמיד השתתף בנפרד בניסוי שאורכו כשעתיים, ומורכב משלושה שלבים. שלב א': ראיון בעל פה על גופים ופריסותיהם והמעברים ביניהם. מטרת הראיון היא לבדוק את התפיסה הגיאומטרית והמרחבית של התלמיד והיכרותו עם הגופים ותכונותיהם טרם ההתנסות באפליקציית מציאות רבודה. שלב ב': התנסות במציאות רבודה. בשלב זה התלמיד מתנסה בתהליכי קיפול ופריסה של אובייקטים וירטואליים באמצעות אפליקציית מציאות רבודה המכונה: גופים ופריסות במציאות רבודה (גפמ"ר). התלמיד יוצר פריסות של קובייה, מנסה משולשת ומנסה מחומשת וכן מקפל לגוף צורות דו ממדיות אשר חלקן פריסות של הגופים הנ"ל וחלקן אינן פריסות. שלב ג': ראיון נוסף בעל פה על גופים ופריסותיהם והמעברים ביניהם. נערכה תצפית על התנסותם של התלמידים במציאות רבודה, וכן על שלבי הראיון. התלמידים צולמו והוקלטו בווידאו על מנת לאפשר ניתוח נתונים מאוחר יותר. הניתוח נעשה בשיטה סמינטי. מילותיהם, מחוותיהם והאינטראקציות של התלמידים עם הייצוגים, קודדו לטבלת ציר זמן. המחוות של התלמידים קודדו על פי מקנייל: מחוות אינדקסיות, אייקוניות ומטאפוריות. על מחוות אלו נוספו גם מחוות תפעוליות שהתלמיד מבצע באינטראקציה עם האובייקטים הוירטואליים, אותן קבע מפתח האפליקציה, כגון: מגע בפאה פותח או סוגר אותה, אגודל מורם כלפי מעלה מוסיף גוף או פריסה, וכו'.

ממצאים

מפאת קוצר המקום, במאמר זה אני מציגה את הממצאים של אחד התלמידים. ממצאים דומים נצפו בקרב שלושת התלמידים האחרים. כאשר התלמידים נדרשו להחליט האם צורה היא אכן פריסה, במקרים רבים הם ביצעו תהליכי הדמיה מרחבית, כלומר: ניסו לקפל בדמיונם ובעזרת מחוות ידיים את הצורה לכדי גוף. תהליכים אלו התרחשו בעיקר בשלב א' טרם השימוש במשקפי AR, היות ובשלב זה, שעסק בשרטוטים על נייר, לתלמידים לא הייתה אפשרות לקפלם באופן פיזי, וגם לא באופן וירטואלי. שלב זה מתאפיין בעיקר במחוות אייקוניות, היות ובתהליכי הקיפול יש שימוש רב בפעולות (לקפל, להרים וכו'). כך לדוגמה ניתן לראות באפיזודה הבאה של רני באיור 1:

איור 1

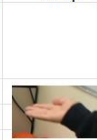
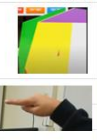
אפיזודה מתוך שלב א' המאופיינת בעיקר במחוות אייקוניות

הדובר	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני
ציר זמן	00:16:20	00:16:22	00:16:24	00:16:25	00:16:29	00:16:33	00:16:38	00:16:43	00:16:44	00:16:47
מילים	כי לוקחים את אחד	מקפלים אותו לשתיים	זה כמו כסא שיושבים	מקפלים לשלוש	כשמקפלים את זה לארבע	זה כמו ח'	יש לה גוף אהם... בשמאל למעלה וימין. לא, בשמאל למעלה ואלינו.	גם למטה.	במאחורה ושש בימין.	זה קובייה.
מחוות	מחווה אינדקסית	מחווה אייקונית	מחווה אייקונית	מחווה אייקונית	מחווה אייקונית	מחווה אייקונית	מחווה אייקונית	מחווה אייקונית	מחווה אייקונית	מחווה אייקונית
תמונה של המחווה										

שלב ב', בו התלמידים קיפלו ופרסו אובייקטים וירטואליים בגפמ"ר, מתאפיין בעיקר במחוות תפעוליות, אותן קבע מפתח האפליקציה. מחוות אלו משמשות את התלמידים לקיפול ולפריסה. כך לדוגמה ניתן לראות באפיזודה הבאה של רני באיור 2, בה התנסה רני בקיפול אי-דוגמה של פריסה בגפמ"ר:

איור 2

אפיזודה מתוך שלב ב' המאופיינת בעיקר במחוות תפעוליות

הדובר	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני
ציר זמן	01:08:17	01:08:21	01:08:26	01:08:30	01:08:31	01:08:33	01:08:37	01:08:38	01:08:41
מילים	כן, שגם היה בדפים. וזה דומה לפריסה.	ואז נגיד כשאני עושה ככה עכשיו, מחווה תפעולית	הירוק נגיד עולה... נגיד הצהוב לפה... מחווה תפעולית	קוביה, יש פה... מחווה תפעולית	וגם פה חסר משהו... מחווה אינדקסית	היה נגיד הירוק בצד השני, שאמרת, מחווה אינדקסית	זה עכשיו נסגר לקוביה. מחווה אייקונית	אבל בצד הזה אז אין מקום. מחווה אינדקסית	את רואה? זה אחד על השני. מחווה תפעולית
מחוות תמונה של המחווה									

מעט בשלב ב', ובעיקר בשלב ג', רוב התלמידים נימקו את היותה של הצורה הדו ממדית פריסה של גוף באמצעות אסטרטגיות אנליטיות. הם התחילו לזהות תבניות מסוימות של פריסות, שעבורן הם לא הזדקקו לאסטרטגיות חזותיות ולתהליכי הדמיה מרחבית. בשלב ג' פחתו באופן משמעותי המחווות האייקוניות, והתלמידים השתמשו בעיקר במחוות אינדקסיות על מנת להסביר את האסטרטגיות האנליטיות. כך לדוגמה ניתן לראות אצל רני, אשר שרטט פריסה של מנסרה מחומשת לבקשת המראיית (ראה איור 3). רני פיתח אסטרטגיה אנליטית לתבניות של פריסות: מלבני המעטפת פרוסים בשורה, ושני הבסיסים משני צדדים שונים של שורה זו. אסטרטגיה אנליטית זו מייצגת עבורו את הצורך באסטרטגיות חזותיות ובתהליכי הדמיה מרחבית. באיור 4 מוצגים דבריו ומחוותיו של רני בהתייחס לפריסה ששרטט:

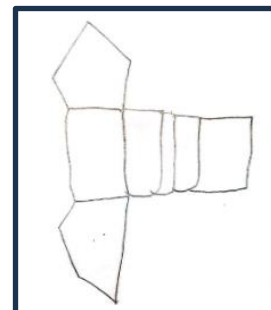
איור 3

שרטוט של רני לפריסה של מנסרה מחומשת.

איור 4

אפיזודה מתוך של ג' המאופיינת במחוות אינדקסיות

הדובר	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני	רני
ציר זמן	01:36:55	01:36:57	01:36:59	01:37:01	01:37:03	01:37:04	01:37:06	01:37:07	01:37:08
מילים	אם זה יהיה או פה...	אם זה יהיה או פה... אחד במעלה מחווה אינדקסית	זה יכול להיות או מתחתיו מחווה אינדקסית	או בימין למטה. מחווה אינדקסית	אם זה פה בימין למעלה מחווה אינדקסית	זה יכול להיות או מתחתיו או אחד ליד השני. מחווה אינדקסית	זה לא יכול להיות שזה יהיה פה אחד ליד השני. מחווה אינדקסית	אם...	כי אם כן זה יהיה באותו גג. מחווה אייקונית
מחוות תמונה של המחווה									



לסיכום, המחווות של התלמידים התפתחו תוך כדי ולאחר השימוש בגפמ"ר.

מסקנות

מחוות התלמידים התפתחו תוך כדי ואחרי השימוש בגפמ"ר. משימוש בעיקר במחוות אייקוניות תוך כדי אסטרטגיות חזותיות בשלב א', התלמידים עברו לשימוש בעיקר במחוות אינדקסיות תוך כדי אסטרטגיות אנליטיות בשלב ג'. המעבר נעשה דרך המחווות התפעוליות שבהן עשו התלמידים שימוש בשלב ב'. למעשה, לאחר שימוש בגפמ"ר התלמידים נהיו מודעים לתהליכי קיפול ופריסה. מודעות זו נצפתה בקרב התלמידים גם לאחר סיום השימוש בגפמ"ר. ממצא זה תואם מחקרים קודמים שקבעו כי יכולת הדמיה מרחבית עשויה להתפתח בעקבות אינטראקציה עם אובייקטים וירטואליים (Quintero et al., 2015). גפמ"ר מאפשרת את המעבר מהחזותי לאנליטי, ולכך מספר הסברים אפשריים. ראשית, המחווות התפעוליות שמזמנת הגפמ"ר ושימושן את התלמיד בשלב ב', שותפות

במעבר מהחזותי לאנליטי, היות והן מאפשרות את הקיפול הוירטואלי והמעבר מדו ממד לתלת ממד. שנית, גפמ"ר בדרך הצגתה את הגופים ופריסותיהם, פינתה את התלמיד מהצורך לדמיין אובייקטים. ככל הנראה, הצגת הגופים ופריסותיהם הפחיתה את המעמסה הקוגניטיבית אצל התלמיד ופינתה לו מקום על מנת להגיע להכללות, הפשטות ואסטרטגיות אנליטיות. שלישית, גפמ"ר מציגה לתלמיד דוגמאות ואי-דוגמאות לפריסות, ומאפשרת לו לקפל אותן, ולבדוק מדוע כל אחת מהן היא דוגמה לפריסה או אי-דוגמה לפריסה. ההיחשפות לאי-דוגמאות סייעו לתלמידים באפיון המשותף לפריסות ופיתוח אסטרטגיות אנליטיות. כיווני מחקר עתידיים למחקר זה הינם בדיקת התפתחות האמצעים הסמיוטיים בשימוש של קבוצת תלמידים בו זמנית בגפמ"ר, או בשימוש מתמשך של תלמיד בגפמ"ר בתקופת זמן ארוכה- כגון אחת לשבוע במשך מספר שבועות.

רשימת מקורות

- Bujak, K. R., Radu, I., Catrambone, R., MacIntyre, B., Zheng, R., & Golubski, G. (2013). A psychological perspective on augmented reality in the mathematics classroom. *Computers & Education*, 68, 536-544. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.02.017>
- Carmigniani, J., & Furht, B. (2011). In B. Furht (Ed.), *Augmented reality: an overview*. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0064-6_1
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., & Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: Assessment framework and empirical evidence. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 96-111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003>
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. Paper presented at the *Pme Conference*, 1, 1-3.
- İbili, E., Çat, M., Resnyansky, D., Şahin, S., & Billinghamurst, M. (2020). An assessment of geometry teaching supported with augmented reality teaching materials to enhance students' 3D geometry thinking skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(2), 224-246. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2019.1583382>
- Kospentaris, G., Vosnia, S., Kazi, S., & Thanou, E. (2016). Visual and analytic strategies in geometry. *Frontline Learning Research*, 4(1), 1- 25.
- Kramarenko, T. H., Pylypenko, O. S., & Zaselskyi, V. (2019). Prospects of using the augmented reality application in STEM-based Mathematics teaching.
- Le, H., & Kim, J. (2017). An augmented reality application with hand gestures for learning 3D geometry. Paper presented at the *2017 IEEE International Conference on Big Data and Smart Computing (BigComp)*, 34-41. <https://doi.org/10.1109/BIGCOMP.2017.7881712>
- McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Novack, M., & Goldin-Meadow, S. (2015). Learning from gesture: How our hands change our minds. *Educational Psychology Review*, 27(3), 405-412. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9325-3>
- Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2010). Students' 3D geometry thinking profiles. Paper presented at the *Proceedings of CERME*, 6 816-825.
- Quintero, E., Salinas, P., González-Mendivil, E., & Ramírez, H. (2015). Augmented reality app for calculus: A proposal for the development of spatial visualization. *Procedia Computer Science*, 75, 301-305. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.251>
- Wright, V. (2016). Visualisation and Analytic Strategies for Anticipating the Folding of Nets. *Mathematics Education Research Group of Australasia*,



סדנאות



מבוא

בעיות בנייה גיאומטריות נחשבות למאתגרות ותורמות לפיתוח חשיבה מתמטית. בחטיבת הביניים לומדים לפתור בעיות בנייה בסיסיות, החל מהעתקה וחצייה של קטע וזווית ועד לבנייה של משולשים ומרובעים. כיום בניות לא נכללות בחומר החובה בתיכון, אך עדיין לימוד של בניות הקשורות לחומר הנלמד נחשב למועיל ותורם לפיתוח התלמידים.

ככלל, בעיות שיכולות להתאים לתלמידי תיכון צריכות לענות על הדרישות הבאות: (1) ניתן לנסח את הבעיה במושגים המוכרים לתלמידי התיכון, (2) בעיות מעניינות, (3) הידע הדרוש להבנת הפתרון נלמד בתיכון, או שנדרש ידע נוסף שבעלי רקע תיכוני יכולים ללמוד בקלות, (4) דרך הפתרון לא מורכבת מדי.

במחקר זה נציג שבע בעיות בנייה חדשות העונות על הדרישות הללו. לפתרון של בעיות אלו נדרשת הכרות עם מספר הגדרות ומשפטים חדשים, שהתגלו והתפרסמו בשנים האחרונות (פרייברט, 2021). המיוחדות של המשפטים הללו היא בכך שלהבנה שלהם לא נדרש ידע מעבר לרמה תיכונית. נדגים בעזרת GeoGebra את החומר הנוסף שיש להכיר ואת שלבי הפתרון של בעיות הבנייה.

בעיות הבנייה החדשות

נתון מרובע קמור ABCD:

(1) בנו שני מרובעים החסומים במרובע ABCD כך שצלעותיהם המתאימות יהיו מקבילות זו לזו.

(2) בנו דלתון ומרובע כלשהו החסומים ב-ABCD כך שצלעותיהם המתאימות יהיו מקבילות זו לזו.

נתון מרובע ציקלי ABCD:

(3) בנו שני מרובעים החסומים במרובע ABCD בעלי היקפים שווים וצלעות מתאימות מקבילות.

(4) בנו שני מרובעים החסומים במרובע ABCD כך שיהיו חופפים ובעלי צלעות מתאימות מקבילות.

(5) מתוך קבוצת המרובעים בעלי היקפים שווים החסומים במרובע ABCD, בנו את המרובע בעל השטח המקסימלי.

נתון מרובע אורתוגוני ABCD (בעל אלכסונים מאונכים) שבו הזוויות DAB ו-ABC קהות:

(6) בנו מלבן החסום במרובע ABCD כך שצלעות המלבן יהיו לא מקבילות לאלכסוני המרובע.

(7) בנוסף לנתון, תהי P נקודה על הצלע AB. בנו שני מלבנים החסומים במרובע ABCD כך ש-P תהיה הקודקוד המשותף לשני המלבנים. האם לכל מיקום של P קיימים שני מלבנים?

בשלב זה הקוראים יכולים להיווכח שהבעיות שהצגנו מנוסחות באופן מובן לבעלי ידע תיכוני.

אולם, לחלק מהבעיות הללו אין דרך ידועה לפתרון, ולשאר – הפתרונות הידועים הם מסובכים ופחות מתאימים לרמה תיכונית.

רקע תאורטי הדרוש לפתרון

כפי שהזכרנו במבוא, בשביל לפתור את בעיות הבנייה שהצגנו בדרך שמתאימה יותר לתלמידי תיכון, נדרש להכיר הגדרות ומשפטים חדשים.

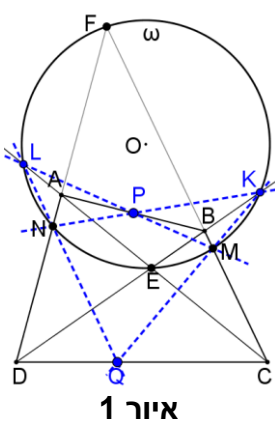
הגדרה 1 (מעגל היוצר נקודות פסקל): יהי ABCD (AD||BC) מרובע קמור

שבו E נקודת חיתוך האלכסונים ו-F נקודת חיתוך המשיכי הצלעות AD ו-BC.

כל מעגל ω המקיים את שתי הדרישות הבאות נקראה "מעגל היוצר נקודות

פסקל": (1) ω עובר דרך הנקודות E ו-F, (2) ω חותך את הצלעות AD ו-BC

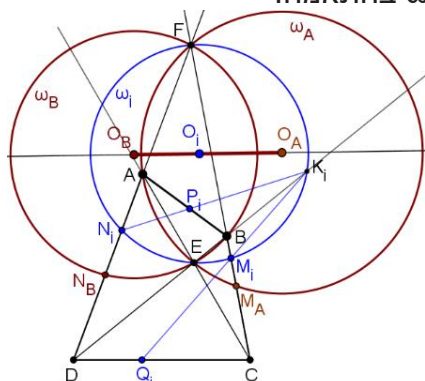
בנקודות פנימיות (בנקודות M ו-N באיור 1).



איור 1

תכונה 1 (קישור ל-GeoGebra): בנוסף לתמונת-המצב הגיאומטרית המתוארת בהגדרה I, נסמן ב-K ו-L את נקודות החיתוך של ω עם המשכי האלכסונים AC ו-BD בהתאמה. תהי P נקודת חיתוך הישרים LM ו-KN ותהי Q נקודת חיתוך הישרים LN ו-KM. אז, הנקודה P שייכת לצלע AB והנקודה Q השייכת לצלע CD (ראו איור 1).

הגדרה II (נקודות פסקל): הנקודות P ו-Q נקראות "נקודות פסקל בעזרת המעגל ω ".
תכונה 2 (קישור ל-GeoGebra): יהי ω_A מעגל העובר דרך הנקודות A, E ו-F ויהי ω_B מעגל העובר דרך הנקודות B, E ו-F. נסמן ב- O_A ו- O_B את המרכזים של ω_A ו- ω_B בהתאמה.



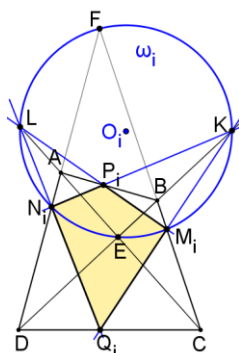
איור 2

אם המעגל ω_A חותך את הצלע BC בנקודה פנימית, אז, כל מעגל ω העובר דרך הנקודות E ו-F שמרכזו O_i שייך לקטע $O_A O_B$, חותך את הצלעות BC ו-AD בנקודות פנימיות. כלומר ω הוא מעגל היוצר נקודות פסקל (ראו איור 2).

תכונה 3 (קישור ל-GeoGebra): יהי ω מעגל שמרכזו O_i , היוצר את נקודות פסקל P_i ו- Q_i . מתקיים: $\frac{O_A O_i}{O_i O_B} = \frac{AP_i}{P_i B}$.

הגדרה III (המרובע המוגדר בעזרת מעגל היוצר נקודות פסקל): יהי ABCD מרובע קמור ויהי ω מעגל החותך את הצלעות BC ו-AD בנקודות M_i ו- N_i בהתאמה ויוצר את נקודות פסקל P_i ו- Q_i על הצלעות AB ו-CD בהתאמה. המרובע $P_i M_i Q_i N_i$ החסום במרובע ABCD, נקרא "המרובע המוגדר בעזרת המעגל ω " (ראו איור 3).

תכונה 4 (קישור ל-GeoGebra): יהי ABCD מרובע קמור ויהיו ω_1 ו- ω_2 שני מעגלים החותכים את הצלעות BC ו-AD בנקודות M_1 ו- M_2 , N_1 ו- N_2 בהתאמה ויוצרים את נקודות פסקל P_1 ו- P_2 , Q_1 ו- Q_2 על הצלעות AB ו-CD בהתאמה. אז הצלעות המתאימות של המרובעים $P_1 M_1 Q_1 N_1$ ו- $P_2 M_2 Q_2 N_2$ מקבילות זו לזו (ראו איור 4).



איור 3

הגדרה IV (המעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו): מעגל היוצר נקודות פסקל שמרכזו קולינארי עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו נקרא "המעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו" (המעגל ω באיור 5).

תכונה 5 (קישור ל-GeoGebra): יהי ABCD מרובע קמור שבו E נקודת חיתוך האלכסונים F ו-נקודת חיתוך המשכי הצלעות BC ו-AD; ויהיו O_A ו- O_B מרכזי המעגלים העוברים דרך הנקודות A, E ו-F ודרך הנקודות B, E ו-F בהתאמה. אז המרכז של המעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו הוא נקודת החיתוך של חוצה זוית $O_A F O_B$ והאנך האמצעי לקטע EF (הנקודה O באיור 5).

תכונה 6 (קישור ל-GeoGebra): המרובע המוגדר בעזרת המעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו הוא דלתון (המרובע PMQN באיור 5).

פתרון של בעיות הבנייה עבור מרובע כללי (בעיות 1 ו-2)

פתרון בעיה 1 (קישור ל-GeoGebra): (1) בניית המרכזים O_A ו- O_B של המעגלים העוברים דרך הנקודות A, E, F ו-B, E, F בהתאמה. בונים אנכי אמצעים לקטעים AE ו-BE. נסמן ב- O_A את נקודת החיתוך של האנכים ל-EF ו-AE. נסמן ב- O_B את נקודת החיתוך של האנכים ל-EF ו-BE.

(2) **בדיקה האם קיים פתרון.** יהי ω_A מעגל שמרכזו O_A ורדיוסו הקטע $O_A E$. אם ω_A לא חותך את הצלע BC בנקודה פנימית (אלא חותך את המשך הצלע) - אין פתרון לבעיה. אם ω_A חותך את הצלע BC בנקודה פנימית (כמתואר באיור 2), קיים פתרון ולכן ממשיכים לשלב הבא.

(3) **בניית מרובע ראשון החסום במרובע ABCD.** תהי O_1 נקודה אקראית על הקטע $O_A O_B$, בונים מעגל $\omega_1 = (O_1; |O_1 E|)$. נסמן ב- M_1 ו- N_1 את נקודות החיתוך של ω_1 עם הצלעות BC ו-AD בהתאמה, וב- K_1 את נקודות החיתוך של ω_1 עם המשך האלכסון BD. יהיו P_1 ו- Q_1 נקודות החיתוך של הישרים $K_1 M_1$ ו- $K_1 N_1$ עם הצלעות AB ו-CD בהתאמה (איור 4). המרובע הראשון הוא $P_1 M_1 Q_1 N_1$.

(4) **בניית מרובע שני החסום במרובע ABCD.** תהי O_2 נקודה אקראית על הקטע $O_A O_B$ השונה מהנקודה O_1 . בונים מעגל $\omega_2 = (O_2; |O_2 E|)$. באופן דומה לסעיף הקודם, מסמנים את הנקודות M_2 ו- N_2 ובונים את הנקודות P_2 ו- Q_2 . המרובע השני הוא $P_2 M_2 Q_2 N_2$.

לפי תכונה 4 לעיל, המרובעים $P_1M_1Q_1N_1$ ו- $P_2M_2Q_2N_2$ חסומים במרובע ABCD וצלעותיהם המתאימות מקבילות זו לזו. לכן הם עונים על הדרישות של הבעיה.

פתרון בעיה 2 (קישור ל-GeoGebra): שלבים 1 ו-2 כמו בפתרון של בעיה 1.

(3) בניית מעגל ω המתואם עם נקודות פסקל P ו-Q הנוצרות בעזרתו. בונים זווית $\angle O_AFO_B$. יהי f חוצה זווית של $\angle O_AFO_B$ ותהי O נקודת החיתוך של f עם האנך האמצעי לקטע EF (ראו איור 5). בונים מעגל ω שמרכזו O ורדיוסו הקטע OE.

(4) בניית דלתון. משתמשים במעגל ω , בדומה לשלב 3 בבעיית הבנייה 1, מסמנים את הנקודות M ו-N ובונים את הנקודות P ו-Q.

(5) בניית מרובע אקראי. תהי O_1 נקודה אקראית על הקטע O_AO_B , השונה מהנקודה O. בונים מעגל $\omega_1 = (O_1; |O_1E|)$. בדומה לשלב 3 בבעיית הבנייה 1, מסמנים את הנקודות M_1 ו- N_1 ובונים את הנקודות P_1 ו- Q_1 .

לפי תכונות 4 ו-5 לעיל, PMQN ו- $P_1M_1Q_1N_1$ הם דלתון ומרובע העונים על הדרישות של הבעיה.

רקע תאורטי נוסף של מרובע ציקלי הדרוש לפתרון בעיות 3, 4 ו-5

תכונה 7 (קישור ל-GeoGebra): יהי ABCD מרובע ציקלי. (א) מעגל ω_{EF} שקוטרו הקטע EF הוא המעגל המתואם עם נקודות פסקל הנוצרות בעזרתו. (ב) המרכז O של ω_{EF} הוא אמצע הקטע O_AO_B . נקודות פסקל P ו-Q הנוצרות בעזרת ω_{EF} הן אמצעי הצלעות AB ו-CD.

תכונה 8 (קישור ל-GeoGebra): יהי ABCD מרובע ציקלי ותהי $\{\omega\}$ קבוצת כל המעגלים היוצרים נקודות פסקל ותהי $\{P_iM_iQ_iN_i\}$ קבוצת כל המרובעים המוגדרים בעזרת המעגלים מהקבוצה $\{\omega\}$. (א) לכל המרובעים מהקבוצה $\{P_iM_iQ_iN_i\}$ יש אותו היקף, שאינו תלוי בבחירת המעגל ω . (ב) המרובע המוגדר בעזרת המעגל ω_{EF} הוא בעל השטח המקסימלי.

תכונה 9 (קישור ל-GeoGebra): יהי ABCD מרובע ציקלי ויהי O אמצע הקטע EF. אז כל שני מעגלים היוצרים נקודות פסקל, שהמרכזים שלהם נמצאים במרחקים שווים מהנקודה O, מגדירים שני מרובעים חופפים (ראו איור 6).

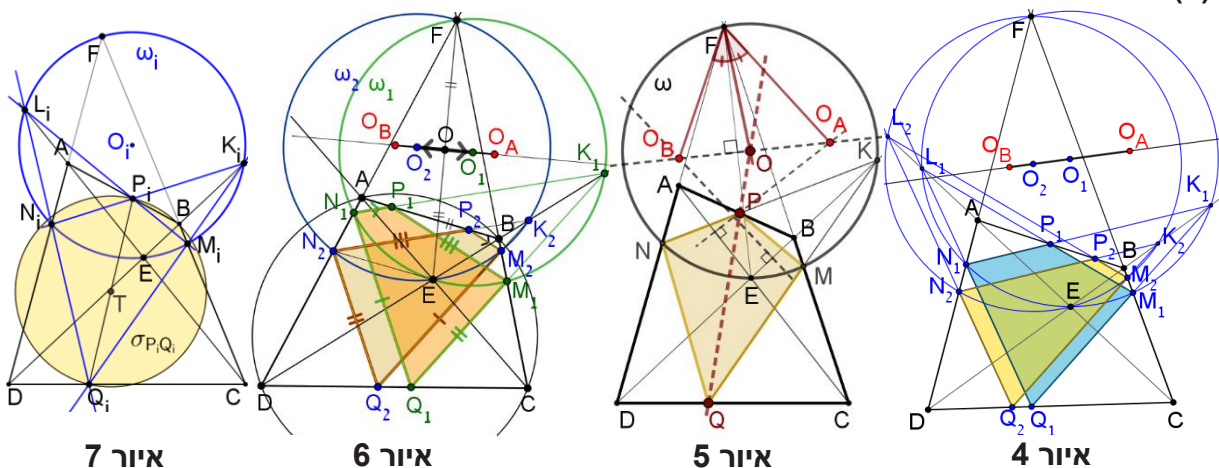
פתרון של בעיות הבנייה עבור מרובע ציקלי (בעיות 3-5)

פתרון בעיה 3 (קישור ל-GeoGebra): בהינתן מרובע ציקלי, הבנייה זהה לפתרון בעיה 1.

לפי תכונה 8א' המרובעים $P_1M_1Q_1N_1$ ו- $P_2M_2Q_2N_2$ שקבלנו, עונים על הדרישות של הבעיה.

פתרון בעיה 4 (קישור ל-GeoGebra): (1) בניית המרכזים של המעגלים. נסמן ב-O את אמצע הקטע EF. בונים את הנקודות O_A ו- O_B באופן הדומה לשלב 1 בפתרון בעיה 1. נבחר על הקטע OO_A נקודה כלשהי O_1 . על הקטע OO_B נבנה את הנקודה O_2 המקיימת: $O_2O = O_1O$.

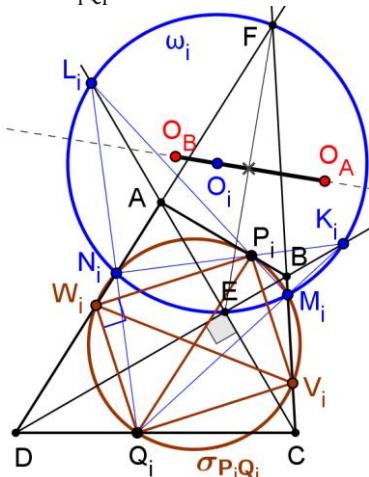
(2) בניית המרובעים. נבנה מעגל ω_1 שמרכזו O_1 ורדיוסו O_1E ומעגל ω_2 שמרכזו O_2 ורדיוסו O_2E .



באופן דומה לשלבים 3 ו-4 בבעיית הבנייה 1, בונים את המרובעים $P_1M_1Q_1N_1$ ו- $P_2M_2Q_2N_2$. לפי תכונה 9, המרובעים $P_1M_1Q_1N_1$ ו- $P_2M_2Q_2N_2$ עונים על הדרישות של הבעיה. **פתרון בעיה 5 (קישור ל-GeoGebra):** נבנה את המעגל ω_{EF} שקוטרו הקטע EF ונסמן ב-M ו-N את נקודות החיתוך של ω_{EF} עם הצלעות BC ו-AD בהתאמה. נסמן ב-P ו-Q את אמצעי הצלעות AB ו-CD בהתאמה. לפי תכונות 6, 7 ו-8ב', $PMQN$ הוא מרובע חסום בעל השטח המקסימלי.

רקע תאורטי של מרובע אורתוגוני הדרוש לפתרון בעיות 6 ו-7

הגדרה V (מעגל נקודות פסקל): יהי ω מעגל היוצר את נקודות פסקל P_i ו- Q_i . המעגל $\sigma_{P_iQ_i}$, שקוטרו הקטע P_iQ_i , נקרא "מעגל נקודות פסקל" (ראו איור 7). **תכונה 10 (קישור ל-GeoGebra):** יהיו: $ABCD$ מרובע אורתוגוני שבו הזוויות DAB ו- ABC קהות, O_i נקודה פנימית על הקטע O_AO_B שאינה שייכת ל-EF, ω_i מעגל שמרכזו O_i ורדיוסו O_iE היוצר את נקודות פסקל P_i ו- Q_i ויהיו M_i ו- N_i נקודות החיתוך של ω_i עם הצלעות BC ו-AD בהתאמה. אז: (א) מעגל נקודות פסקל $\sigma_{P_iQ_i}$ חותך את הצלע BC בנקודות M_i ו- V_i ואת הצלע AD בנקודות N_i ו- W_i . (ראו איור 8). (ב) המרובע $P_iV_iQ_iW_i$ הוא מלבן החסום ב- $ABCD$ שצלעותיו לא מקבילות לאלכסוני המרובע $ABCD$ (ראו איור 8).



פתרון בעיות הבנייה עבור מרובע אורתוגוני (6 ו-7)

פתרון בעיה 6 (קישור ל-GeoGebra):

(1) **בניית מעגל היוצר נקודות פסקל ומעגל נקודות פסקל:** בדומה לשלב 1 בפתרון איור 8 בעיה 1, בונים את הנקודות O_A ו- O_B . על הקטע O_AO_B בוחרים נקודה אקראית O כך ש- $O \notin EF$. בונים מעגל $\omega = (O; |OE|)$ ובעזרתו בונים את נקודות פסקל P ו-Q. בונים מעגל σ_{PQ} שקוטרו PQ. (2) **בניית מלבן:** מסמנים ב-M ו-N את נקודות החיתוך של ω עם הצלעות BC ו-AD בהתאמה. מסמנים ב-V ו-W את נקודות החיתוך של σ_{PQ} עם הצלעות BC ו-AD הנוספות ל-M ו-N. לפי תכונה 10ב', $PVQW$ הוא מלבן החסום ב- $ABCD$ שצלעותיו לא מקבילות לאלכסוני המרובע.

פתרון בעיה 7 (קישור ל-GeoGebra):

(1) **בניית המלבן הראשון:** דרך הנקודה P מעבירים ישר המקביל לאלכסון AC ומסמנים ב-P' את נקודת חיתוכו עם הצלע BC. דרך הנקודה P' מעבירים ישר המקביל לאלכסון BD ומסמנים ב-P'' את נקודת חיתוכו עם הצלע CD. דרך הנקודה P'' מעבירים ישר המקביל לאלכסון AC ומסמנים ב-P''' את נקודת חיתוכו עם הצלע AD. המלבן הראשון הוא $PP'P''P'''$ וצלעותיו מקבילות לאלכסוני המרובע. (2) **מציאת מרכז המעגל היוצר את נקודת פסקל P:** על הקטע O_AO_B בונים נקודה O כך שיתקיים $\frac{OAO}{OO_B} = \frac{AP}{PB}$. (3) **בניית המלבן השני:** בדומה לפתרון בעיה 6, בונים את המעגלים $\omega = (O; |OE|)$ ו- σ_{PQ} ובעזרתם בונים את המלבן $PVQW$.

לפי תכונה 10ב', הצלעות של $PVQW$ לא מקבילות לאלכסוני המרובע, לכן קבלנו 2 מלבנים שונים.

עבור סדנה: הצגת בעיות הבנייה החדשות: 10 דקות. ניסיון לפתרון: 15 דקות הפעלת הקהל. הצגת הרקע התאורטי הדרוש: 10 דקות. פתרון בעיות 1-2: 15 דקות הפעלת הקהל. הצגת רקע תאורטי נוסף עבור מרובע ציקלי: 5 דקות. פתרון בעיות 3-5: 15 דקות הפעלת הקהל. הצגת רקע תאורטי עבור מרובע אורתוגוני: 5 דקות. פתרון בעיות 6-7: 15 דקות הפעלת הקהל.

רשימת מקורות

פרייברט, ד' (2021). חידושים בגיאומטריה אוקלידית – תאוריה של מרובע קמור ומעגל היוצר נקודות פסקל על צלעותיו. ירושלים: אקדמון.



מבוא

המטרה של מחקר בחינוך מתמטי היא, בסופו של דבר, לשפר את ההוראה והלמידה של המקצוע. הוראת מתמטיקה קיימת כתחום אקדמי כבר כמאה שנים (הועדה הבינלאומית להוראת מתמטיקה – ICMI – הוקמה בשנת 1908), ובחמישים השנים האחרונות הייתה התקדמות עצומה בהבנה של תהליכי למידה והוראה, מפרספקטיבות מגוונות – אפיסטמיות, פסיכולוגיות (קוגניטיבית והתנהגותית), חברתיות, ועוד. אלפי מחקרים מתקיימים מדי שנה ומתפרסמים במאות כתבי עת, אך קיימת לעיתים תחושה שהשפעת המחקר על הפרקטיקה מאכזבת בהיקפה ובעומקה (Jankvist et al., 2021).

השפעת המחקר בחינוך מתמטי על הפרקטיקה הפכה בשנים האחרונות לתחום מחקר נפרד, המכונה מחקר יישום (implementation research). עדות למגמה זו אפשר למצוא בכינונה של קבוצת עבודה חדשה בכנס של המחקר האירופאי על חינוך מתמטי שהחלה לפעול בשנת 2017 (Jankvist et al., 2017), וביוסודו של כתב עת חדש (Jankvist et al., 2021), אשר עוסקים בנושא.

חוקרים רבים התייחסו לפער בין הפעילות האקדמית והפעילות הפרקטית בחינוך מתמטי, והציעו הסברים לפער זה ודרכי פעולה לצמצם אותו. בפרט, סדרה של מאמרי מערכת של כתב העת המוערך *Journal of Mathematics Education – JRME* עסקה בנושא בשנים 2017-2020, בהובלה של העורך הראשי דאז – ג'ינפה קאי. המאמר הראשון בסדרה (Cai et al., 2017a) שם על השולחן את הנושא שמעסיק את מערכת כתב העת – הגדלת ההשפעה של מחקר חינוכי על המעשה החינוכי. במאמרים אלה קאי ושאר המערכת מציעים הצעות מרחיקות לכת לגבי הקשר בין מחקר ויישום, וביחסי הכוח בין חוקרים ומורים. בין היתר הם מציעים להפוך יישום בכיתות למרכיב אינטגרלי של מחקר חינוכי (Cai et al., 2017b), לטשטש את הגבולות בין מחקר ופרקטיקה (Cai et al., 2017c), ואף להמשיג מחדש את התפקידים של חוקרים ושל מורים (Cai et al., 2018). בהמשך הם מציעים דרכים לקשור מחקר ופרקטיקה (Cai et al., 2019a) ולהעמיד שאלות מחקר משמעותיות עבור השטח (Cai et al., 2019b).

חוקרים אחרים דנים בשאלה עד כמה המחקר בתחום רלוונטי לפרקטיקה של מורים בשטח. לברי מתאר את הפער בין מורים וחוקרים כהשקפות עולם שונות שלא תמיד ניתנות לגישור (Labaree, 2003), כך שגם אם שאלות מחקר שמעסיקות חוקרים הן רלוונטיות למורים, יתכן שהאופן שבו חוקרים מבססים תשובות לשאלות אלה לא ישכנע מורים. פתרון אפשרי לקושי אפשר למצוא במאמר של קאי ושותפים (Cai et al., 2019b), העלו את הצורך בקיום של שותפויות בין השדה והמחקר, שבהן המשתתפים יגיעו להבנה הדדית מהן השאלות החשובות בתחום החינוך המתמטי וכיצד ניתן להשיב עליהן באופן משכנע.

קיימים בארץ מקרים מבודדים של שותפויות בין מורים וחוקרי חינוך מתמטי (ראו למשל מיזם מש"ל – מורים שותפים למחקר – של המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן – Cooper & Koichu, 2021). בהרצאת המליאה שלו בכנס ירושלים ה-11 למחקר בחינוך מתמטי, קופר (2022) קרא לכינון של שותפויות כאלה – בארץ ובעולם – ובמסגרת כנס ירושלים לחינוך מתמטי בפרט. סדנה זו מבקשת לבחון היתכנות של שותפות כזו, ואף לתרום לכינונה.

הסדנה מבקשת ליצור דיאלוג בין מורים וחוקרי חינוך סביב שאלות על הוראה ולמידה של מתמטיקה בבית הספר, ותעודד את הצדדים לשתף פרספקטיבות ולעמת ביניהן. מטרת המפגש היא לעורר שיח בין בעלי עניין בחינוך מתמטי שלא מרבים לתקשר ביניהם, וזאת סביב נושא שמעסיק את שתי הקהילות. שיח כזה צפוי להציף את הפערים בפרספקטיבות של הקהילות - אילו אתגרים מעסיקים אותן, כיצד הן רואות הוראה ולמידה איכותיות של מתמטיקה, וכו'. תועלת אפשרית שעשויה לצמוח ממפגש כזה כוללת:

- היכרות של מורים עם נקודות מבט מחקריות על חינוך מתמטי וכיצד הן עשויות לתרום לפרקטיקה שלהם
 - היכרות של חוקרים עם נקודות מבט מעשיות על חינוך מתמטי וכיצד הן עשויות לתרום למחקר שלהם
 - כינון קבוצות של מורים וחוקרי חינוך שמועניינים לקדם שותפויות לשיפור הוראה ולמידה של מתמטיקה
- בכך אנחנו מבקשים להתניע תהליך אשר ייתן מענה לקריאתו של קאי ושו"ת ליצור שותפויות אשר יטשטשו את הגבולות בין תפקידי חוקרים ומורים, ואשר יציעו סדר יום עתידי אשר ישרת את הצרכים של הקהילה המשותפת.

תוכנית הסדנה

את הסדנה ילווה פאנל המורכב משלושה חוקרי חינוך מתמטי ומשלושה מורי מתמטיקה המלמדים בכיתות על-יסודי. הפאנל ייצג מגוון רחב מבחינת מגדר, מבחינה תרבותית (ייצוג של אוכלוסיות מגוונות) ומבחינה מקצועית (מורים בזרמי חינוך מגוונים, חוקרים מאסכולות מחקריות מגוונות).

מבנה הסדנה וחלוקת זמנים:

טבלה 1

תוכנית הסדנה

מסך הזמן	תיאור פעילות	ארגון הקהל
15 דקות	היכרות קצרה + צפייה משותפת בקטע של שיעור מצולם	מליאה
10 דקות	כל חברי הפאנל מפנים את תשומת הלב למשהו משמעותי בעיניהם ששמו לב אליו בווידאו	פאנל (סבב ראשון)
25 דקות	כל קבוצה תבחר לעסוק בנושא משמעותי בעיניה מקטע הווידאו (נושא שעלה בפאנל או אחר)	קבוצות עבודה הטרורגניות
10 דקות	מורה נציג מכל קבוצת עבודה ישתף: כיצד בחרו נושא לדון בו, ואילו רעיונות ותובנות עלו	מליאה
10 דקות	חברי הפאנל מרחיבים על הנושא שהעלו בסבב הראשון, תוך התייחסות לדיווחים מקבוצות העבודה.	פאנל (סבב שני)
13 דקות	דיון פתוח על הנושאים שעלו	מליאה
7 דקות	כל חבר פאנל יענה בקצרה על השאלה "מה אני יודעת/ כעת שלא ידעתי קודם?"	פאנל (סבב שלישי)
90 דקות		סה"כ

קופר, ג'. (2022). מדוע לעשרות שנים של מחקר בחינוך מתמטי הייתה השפעה כה צנועה על הנעשה בשטח, ומה אפשר לעשות אחרת. פורסם ב: ר. אובודנקו, מ. וידר, א. ויסמן, נ. חן חדד, ע. לביא, א. לוינסון, א. מחאג'נה (עורכות). ספר מאמרי הכנס של כנס ירושלים האחד עשר למחקר בחינוך מתמטי. המרכז האקדמי לב

- Cai, J., Morris, A., Hwang, S., Hohensee, C., Robison, V., & Hiebert, J. (2017a). Improving the impact of educational research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(1), 2-6. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.1.0002>
- Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., & Hiebert, J. (2017b). Making classroom implementation an integral part of research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(4), 342-347. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.4.0342>
- Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., & Hiebert, J. (2017c). A future vision of mathematics education research: Blurring the boundaries of research and practice to address teachers' problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(5), 466-473. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.5.0466>
- Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., & Hiebert, J. (2018). Reconceptualizing the roles of researchers and teachers to bring research closer to teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(5), 514-520. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.49.5.0514>
- Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., & Hiebert, J. (2019a). Research pathways that connect research and practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(1), 2-10. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.50.1.0002>
- Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., ... & Hiebert, J. (2019b). Posing significant research questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 50(2), 114-120. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.50.2.0114>
- Cooper, J., & Koichu, B. (2021). In the pursuit of impact: Design and practice of three innovative professional development programs for mathematics teachers. In A. Hofstein, A. Arcavi, & A. Yarden (Eds.), *Fifty Years of Curriculum Development, Implementation and Research in the Department of Science Teaching, the Weizmann Institute of Science, Israel*. Sense-Brill. https://doi.org/10.1163/9789004503625_015
- Jankvist, U. T., Sánchez Aguilar, M., Bergman Ärleback, J., & Wæge, K. (2017). Introduction to the papers of TWG23: Implementation of research findings in mathematics education. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3769-3775).
- Jankvist, U. T., Aguilar, M. S., Misfeldt, M., & Koichu, B. (2021). Launching implementation and replication studies in mathematics education (IRME). *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, 1(1), 1-19. <https://doi.org/10.1163/26670127-01010001>



מבוא

הכנס הבינלאומי International Congress of Math Education - ICME הנערך אחת לארבע שנים הוא המפגש הגדל ביותר של העוסקים במחקר, פיתוח ויישום החינוך המתמטי ברחבי העולם. הכנס נערך בחסות ICMI - המועצה הבינלאומית להוראת המתמטיקה Commission for International Math Instruction שהיא חלק מארגון הגג העולמי - IMU - International Math Union של העוסקים במדעי המתמטיקה על מגוון ענפיהם (יש 97 וחיוך מתמטי הוא אחד מהם).

בחדש יולי 2024 יתקיים בסידני אוסטרליה [הכנס הבינלאומי ה-15](#). בין היתר, הכנס כולל תצוגות לאומיות שנבחרות ע"י הוועדה המארגנת. בהודעה השנייה של מארגני הכנס נכלל פירוט של שלוש המדינות (מבין 87 החברות בICMI) שנבחרו להציג [תצוגה לאומית](#) וביניהן ישראל.

מטרת התצוגה הלאומית היא להציג בפני באי הכנס את הנעשה בישראל בתחום המחקר, הפיתוח, תוכניות הלימודים, דרכי ההוראה והכשרת המורים בחינוך מתמטי. להצגה הוקצה מושב של 90 דקות.

קבלתי על עצמי לארגן את המושב. הנה קטע ממייל שקבלתי מיו"ר וועדת הכנס:

"... Information about the National Presentation from Israel – speakers, topics etc. – will be published in the ICME-15 Program. This material will be required by the Congress Secretariat no later than 16 February 2024. You will receive reminders over the coming months, along with any other advice that is required. In the meantime, if you have any questions please contact the Congress Secretariat (info@icme15.org).

I look forward to the National Presentation from Israel being a significant contribution to the ICME-15 Scientific Program and thank you and your colleagues for your work.

With kind regards,

Kim

Kim Beswick BSc DipEd PhD
Professor of Mathematics Education
Head, School of Education
Director, Gonski Institute for Education



Kim Beswick
Convenor ICME-15, Chair IPC
k.beswick@unsw.edu.au

**15th International Congress on
Mathematical Education**
7-14 July 2024 • ICC Sydney, Australia
Come and be counted

כפי שניתן לראות כנס ירושלים מתקיים לאחר המועד האחרון להגשת כל הפרטים למארגני הכנס וחמישה חודשים לפני הכנס עצמו. לאור האירועים הקשים בארצנו נשלחה קשה לאורכה למועד ההגשה.

את המפגש של כנס ירושלים לסדנה ננצל מצד אחד ליידע את כל באי כנס ירושלים על ההיערכות ומצד שני לסייע בהיערכות של אלה שייקחו חלק בהכנת התצוגה הלאומית.

ההצעה למבנה של הסדנה ותכניה היא כדלקמן:

30 דקות: נצה מובשוביץ-הדר:

הצגת המבנה של הארגון הבינלאומי, המבנה של הכנס ומקומן של ההצגות הלאומיות בו.

הצגת ההצעה לארגון התצוגה הלאומית של ישראל כפי שגובשה בתקופה אוגוסט 23 - פברואר 24.

מידע על ההיערכות (או יותר נכון אי-ההיערכות) שהתבצעה עד הכנס.

60 דקות: דיון

דיון בהבטחת התנהלות של שיתוף פעולה מירבי ושיקוף נאמן ככל האפשר של הנעשה בתחום החינוך המתמטי בישראל. במסמך שיוגש (באיחור, בתקווה שנקבל אישור לכך) להנהלת הכנס בסידני.

דיון על ההכנות הטכניות והתכניות הדרושות בחודשים שאחרי הכנס כדי שהתצוגה הלאומית תהיה מכובדת, מפורטת והולמת;

הדיון יסתיים בהתארגנות להמשך הקשר, חלוקת סמכויות ותחומי אחריות.



מבוא

הכשרה ופיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה הם בליבת המחקר בחינוך מתמטי. סוגיות מרכזיות בתחום זה עוסקות בתכנים שחשוב לכלול בהכשרת מורים, ובפדגוגיה המתאימה להוראתם (Novotná et al., 2020). ייצוגי הוראה מגוונים מאפשרים למידה על הוראה דרך פירוק של ההוראה למרכיביה השונים והתקרבות להוראה המתרחשת בכיתה. ובכך, השימוש בהם עונה לשתי הסוגיות לעיל. לפיכך, הספרות המקצועית קוראת להגביר את השימוש בייצוגי הוראה מגוונים כפדגוגיה התומכת בלמידה של סוגיות מרכזיות בהוראה בכלל ובהוראת מתמטיקה בפרט (Herbst & Chazan, 2011). בסדנה זו נציע ונדון באפשרויות הלמידה וההוראה של כלי ספציפי בהכשרת מורים - כתיבת תסריט (Scripting Task). כתיבת תסריט הנה משימה בה המתכשרים להוראה מתבקשים לכתוב דיאלוג היפותטי (הנכתב כתסריט) בין מורה לתלמידים כדי לתאר כיצד שיעור או חלק משיעור יכול להתפתח (Zazkis & Herbst, 2017). לאחר שנכתב, התסריט הכתוב מהווה ייצוג הוראה נוסף, שיכול לשמש את המתכשרים להוראה ללמידה ואף למחקר. לשימוש בתסריט כייצוג הוראה יש כמה יתרונות: ראשית, הוא אינו דורש משאבים רבים מתכנית הכשרת המורים, המתכשרים להוראה הם אלו שמדמיינים את השיעור ומביאים את ניסיונם לכתיבת הדיאלוג ו/או האינטרקציה הכיתתית. שנית, דרך כתיבת התסריט המתכשרים להוראה יוצרים ייצוג הוראה שדורש מהם פירוק של ההוראה והרכבתה מחדש. שלישית, נמצא כי השימוש בכתיבת תסריטים מקדם את הידע תכן מתמטי של המתכשרים להוראה (למשל, Zazkis & Marmur, 2018). למרות זאת, הדיווח על השימוש בכתיבת תסריטים ככלי להכשרת מורים עדיין מוגבל ולכן גם הידע המחקרי בנושא זה. לפיכך, בסדנה זו נרצה להציג את הכלי של כתיבת תסריטים. בסדנה, נשתף בידע ובניסיון שצברנו כאשר ביקשנו ממתכשרים להוראה לכתוב תסריטים בקורסים שונים תוך התמקדות בנושאים מתמטיים שונים ובסוגיות פדגוגיות שונות. נעשה זאת דרך הצגה של שלוש וריאציות של משימת כתיבת תסריט, כל אחת בעלת מאפיינים ייחודיים: מטרת הקורס בו התבקשו המתכשרים להוראה לכתוב את התסריט, הנושא המתמטי, הסוגייה הפדגוגית איתה נדרשו המתכשרים להוראה להתמודד ורמת הפתיחות של משימת כתיבת התסריט. נדון באפשרויות השימוש השונות הקיימות בתסריט לאחר שהוא נכתב על ידי המתכשרים להוראה וננתח יחד תסריטים שמתכשרים להוראה כתבו. לאחר מכן, נדון בהזדמנויות למחקר של מכשירי מורים וחוקרים הנובעות מבחינת התסריטים, כאשר השאלה המארגנת סביבה נקיים את הדיונים השונים היא: מהן ההזדמנויות ללמידה של המתכשרים להוראה הנובעות מכתיבת התסריט ומהשימוש בו? לבסוף, נזמין את המשתתפים לקחת חלק בשיתופי פעולה עתידיים.

רקע תיאורטי

במהלך תכניות הכשרה רבות, ואף מספר פעמים לאורך אותה תכנית הכשרה, מתבקשים מתכשרים להוראה לכתוב מערך שיעור. עם זאת, במרבית המקרים מערכי השיעור שהמתכשרים להוראה

כותבים הם כלליים ואינם מביאים לידי ביטוי את המורכבות שיש בשיעור מתמטיקה בכיתה. לכן, בגלל חוסר שביעות הרצון של מורי מורים מהכלליות והפשטנות של מערכי השיעור שמתכשרים להוראה כתבו, עלה הרעיון לבקש מהם לכתוב את מערך השיעור בצורה של תסריט המתאר התפתחות של שיעור מתמטיקה (Zazkis et al., 2009). הבקשה הזו, לכתוב תסריט המתאר התפתחות של שיעור, מופיעה בספרות בכמה שמות, למשל כתיבת תסריט (Zazkis & Herbst, 2017: Scripting Task), תסריט שיעור (Zazkis et al., 2009: Lesson Play), או דיאלוג היפותטי (Zazkis & Herbst, 2017). הספרות העדכנית משתמשת במונח כתיבת תסריט כמונח כללי שמתייחס למשימות הדורשות כתיבת דיאלוג בין מורה לתלמידים או בין תלמידים לעצמם, כדי לתאר כיצד שיעור או חלק משיעור יכול להתפתח (Zazkis & Herbst, 2017). בסדנה זו נשתמש במונח זה.

בעוד שמערך שיעור שם דגש על הנושא המתמטי - כיצד כדאי ללמד אותו והבעיות שהמורה מתכנן ללמד בשיעור - תסריט שיעור מפנה את תשומת הלב לתהליך שבאמצעותו תוכן זה ילמד בכיתה (Zazkis & Herbst, 2017). מרבית המחקר הנוכחי סביב משימות כתיבת תסריט מתמקד בעיקר בידע תכני המתמטי של המתכשרים להוראה בנושאים שונים כפי שעולה מהתסריט הכתוב: פונקציות (Zazkis & Marmur, 2018), שברים (Bergman et al., 2023), צפיפות קבוצת המספרים הרציונליים (Marmur et al., 2022) וכוכב גיאומטרי (Kercher et al., 2023). בחינה של תסריטים כתובים בנושאים מתמטיים שונים אפשרה למורי מורים לבחון את מרחב הדוגמאות המתמטיות שיש למתכשרים להוראה בנושא מסוים ולאתגר אותו (Zazkis & Marmur, 2018).

למרות שעדיין אין מחקר רב בנושא, הספרות מציעה להשתמש בתסריטים שכתבו מתכשרים להוראה גם כדי ללמוד על התפיסות, האמונות, וההנחות הסמויות שלהם, הקשורות ללמידה והוראה של מתמטיקה (Shure & Liljedahl, 2023). לאחר שנכתבו, התסריטים יכולים לאפשר גישה לתפיסות של מורים ומתכשרים להוראה על מסלולי למידה אפשריים של תלמידים בנושא מסוים, הנחות לגבי אופן החשיבה של התלמידים, הנחות לגבי האופן שבו מורה יכול לאתגר חשיבה של תלמידים, ואסטרטגיות הוראה מועדפות ו/או זמינות. לפיכך, משימת כתיבת תסריט יכולה לשמש גם ככלי דיאגנוסטי המאפשר גישה למורי מורים לתפיסות של מתכשרים להוראה ולעזור למורי מורים להתאים את ההוראה שלהם לפי מה שעולה מניתוח התסריטים הכתובים. למרות מרחב האפשרויות שכלי זה מאפשר, אין עדיין מחקר המתייחס למלוא הפוטנציאל של התסריט הכתוב ככלי דיאגנוסטי שיש בו הזדמנויות ללמידה והוראה של מתכשרים להוראה מתמטיקה. לאור היתרונות הרבים של הכלי, אנחנו, מורי מורים במוסדות שונים, משתמשים במשימת כתיבת תסריט בהכשרה בה אנחנו מלמדים. השימוש שלנו הוא כפול, ראשית אנו משתמשים במשימת כתיבת תסריט כדי לעזור למתכשרים להוראה לראות את המורכבות שבהוראת מתמטיקה וזאת דרך הצגה של משימות כתיבת תסריט פתוחות בעלות מספר דרגות חופש הדורשות מהמתכשרים להוראה לצפות קשיים ומורכבויות ולתת להם מענה בתסריט. שנית, ככלי דיאגנוסטי המאפשר לנו ללמוד על התפיסות והאמונות של המתכשרים להוראה. כדי לאפשר את השימוש הכפול הזה, כל אחד מאיתנו יצר וריאציה שמתאימה למשימת ההוראה שלו. בסדנה נרצה להציג את הכלי, ובעיקר נרצה לדון בהזדמנויות הרבות של הכלי ללמידה והוראה עבור מתכשרים להוראה מתמטיקה, מעבר למה שידוע כבר במחקר.

מסגרת העבודה של הסדנה

בווריאציה הראשונה, בדומה למשימת כתיבת תסריט (Zazkis & Marmur, 2018), המתכשרים להוראה מתבקשים לכתוב דיאלוג המשך לקטע נתון בו מתואר קושי מוכר של תלמידים בנושא מתמטי מסוים. וריאציה זו מבוססת על אירוע הוראה (מרקוביץ, 2003) בו תלמידה מצוירת צויר המדגים את השבר $\frac{1}{4}$ באופן ששונה מהדימוי המקובל שיש לשבר הזה (של חלוקה לארבעה חלקים חופפים). וריאציה זו כוללת מספר תגובות אפשריות של מורה, והמתכשרים להוראה מתבקשים לבחור בתגובה שנראית להם המתאימה ביותר. לאחר מכן, עליהם להמשיך את השיעור תוך התבססות על אמירת התלמידה, ולהבנות ולפתח את ההבנה המתמטית של התלמידה ושאר תלמידי הכיתה.

הווריאציה השנייה היא משימת כתיבת תסריט בה המתכשרים להוראה מתבקשים לבחור בעיה באלגברה המתאימה לבית הספר העל יסודי ולכתוב כיצד שיעור סביב בעיה זו יכול להתפתח. בווריאציה זו נדרשים המתכשרים להוראה לתת מענה למטרות שהם מנסחים מראש ולשנות של התלמידים בשיעור. לפיכך, וריאציה זו פתוחה יותר מהווריאציה הקודמת, וכוללת יותר דרגות חופש ובחירה הבאים לידי ביטוי בבחירת המשימה, בחשיבה על קשיים אפשריים של תלמידים סביב אותה בעיה ובחירה של דרכי תגובה אפשריות. המתכשרים להוראה נדרשים לשער מה יכולה להיות המורכבות שבהוראת מתמטיקה בכיתה ואז לחשוב על דרכים להתמודד איתה. בניית תסריטים שהמתכשרים להוראה כתבו ניתן לראות כיצד הם מדמיינים ששיעור מתמטיקה "צריך" להיות, מיהו סוכן הידע המקדם את הידע המתמטי בשיעור, ומהו תפקיד המורה בדיון מתמטי "אידיאלי".

הווריאציה השלישית היא משימה של "פרויקט כסדרה" בה המתכשרים להוראה כותבים סדרה של תסריטים הנבנים אחד על בסיס השני. זוהי משימת כתיבת תסריט הפתוחה ביותר, בעלת מספר רב של דרגות החופש. התסריטים מתארים קטעים קצרים של מפגשי מורה-קבוצת תלמידים העובדים על פרויקט במסגרת למידה מבוססת פרויקטים. מהתסריטים צריך להיות ברור איך קבוצת תלמידים יכולה להתקדם בפרויקט, עם מתן דגש על פתרון קשיים רלוונטיים לשלבי הפרויקט. אחד המאפיינים של למידה מבוססת פרויקטים הוא שהפרויקט לוקח זמן ולכן התלמידים נדרשים להתמודד עם חקר ממושך. מאפיין זה יוצר סיטואציות דידקטיות ייחודיות ללמידה מבוססת פרויקטים, והוא מקשה על מורים למתמטיקה, מתחילים ומנוסים כאחד, בניהול הלמידה של התלמידים שלהם (Palatnik, 2022). לפיכך, וריאציה זו נועדה לעזור למתכשרים להוראה ולמורים בפועל להתמודד עם קושי הכרוך בניהול למידה סביב פרויקט חקר ממושך ובהתמודדות עם הסיטואציות המיוחדות שלמידה זו יוצרת. וריאציה זו מרחיבה את משימות המסורתיות של כתיבת תסריט בכך שהיא מתייחסת ללמידה הקורית ברצף של מספר שיעורים והתייחסות להיבטים נוספים של הלומדים, כמו היבטים רגשיים וחברתיים.

בסדנה נציג דוגמאות של תסריטים שמתכשרים להוראה כתבו עבור כל אחת מהווריאציות שהוצגו לעיל ונדון בהזדמנויות ללמידה שווריאציות אלו מספקות עבור המתכשרים להוראה. נדון גם באפשרויות השימוש השונות הקיימות בתסריט לאחר שהוא נכתב על ידי המתכשרים להוראה, ואת ההזדמנויות למחקר של מכשירי מורים וחוקרים הנובעות מבחינת התסריטים.

תכנית הסדנה

בסדנה נרצה להאיר זרקור על כתיבת תסריטים ככלי ליצירת הזדמנויות ללמידה על הוראת מתמטיקה בהכשרת מורים. נדון באפשרויות השימוש הרבות שיש בתסריטים, הן כחומרי למידה והוראה במסגרות שונות להכשרה ופיתוח מקצועי של מורים והן כצוהר לחוקרים בתחום הכשרת מורים בחינוך המתמטי ככלי דיאגנוסטי המאפשר גישה לתפיסות הקשורות ללמידה והוראה של מתמטיקה.

1. נפתח ברקע תיאורטי קצר (כ-10 דקות) על מחקרים העוסקים בכתיבת תסריט, בחשיבות וברציונל השימוש בכלי זה.
2. בחלק השני (כ-40 דקות) נציג את הכלי של כתיבת תסריט דרך עבודה סדנאית. העבודה הסדנאית תתקיים בחדרים כאשר בכל חדר יוצגו תסריטים אותנטיים שמתכשרים להוראת מתמטיקה כתבו בהקשרים שונים סביב נושאים מתמטיים שונים וסוגיות פדגוגיות שונות, בהתאם למשימת כתיבת התסריט שקיבלו (לפי אחת מהווריאציות המפורטות לעיל). הווריאציות שיוצגו בחדרים הן:
 - כתיבת תסריט כדרך לנתח ולטפל באירוע הוראה בנושא שברים.
 - כתיבת תסריט כדרך לתאר התפתחות אפשרית של שיעור באלגברה המתוכנן סביב בעיה מתמטית אחת.
 - כתיבת תסריט מתגלגל המתאר רצף הוראה בלמידה מבוססת פרויקטים.

בחדרים, ננתח יחד את התסריטים מנקודות מבט שונות כאשר השאלה המרכזית שתשאל היא מהן ההזדמנויות ללמידה על הוראת המתמטיקה הבאות לידי ביטוי בכלי זה?

3. החלק השלישי יתקיים במליאה (כ- 40 דקות). ראשית, נציג את הדוגמאות שהוצגו בחדרים ואת הניתוח המשותף. לאחר מכן נציג במליאה ממצאים מהמחקר שלנו הבוחן את ההזדמנויות ללמידה של מתכשרים להוראה הצומחות ממשימת כתיבת תסריט (על שלל הווריאציות שלה). לבסוף, נסכם בדיון שיעסוק בשאלות הבאות: מה עוד אפשר לעשות עם כתיבת התסריטים בהכשרת מורים? מהם היתרונות והחסרונות של השימוש בכלי בהכשרת מורים? מה הפוטנציאל שאתם, משתתפי הסדנא, מוצאים בתסריטים עבור המחקר שלכם? כמו כן, נקרא לשיתוף פעולה עתידי, מחקרי ופרקטי, עם משתתפי הסדנא.

רשימת מקורות

- מרקוביץ, צ'. (2003), *ניתוח אירועים מתמטיים בכיתה*. מכון מופ"ת.
- Bergman, A. M., Gallagher, K., & Zazkis, R. (2023). Prospective teachers' responses to students' dialogue on fractions: attribute substitution and heuristic approaches. *Research in Mathematics Education*, 25(1), 85–104.
- Herbst, P., & Chazan, D. (2011). On creating and using representations of mathematics teaching in research and teacher development: Introduction to this issue. *ZDM*, 43, 1-5.
- Kercher, A., Bergman, A. M., & Zazkis, R. (2023). Counting the stars: advancing mathematical activity in a scripting journey. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–20.
- Marmur, O., Moutinho, I., & Zazkis, R. (2022). On the density of $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: Imaginary dialogues scripted by undergraduate students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(6), 1297–1325.
- Novotná, J., Moraová, H., & Tatto, M. (2020). Mathematics teacher education organization, curriculum, and outcomes. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 587–593). Springer
- Palatnik, A. (2022). Didactic situations in project-based learning: The case of numerical patterns and sequences. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100956. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100956>.
- Shure, V., & Liljedahl, P. (2023). The use of a scriptwriting task as a window into how prospective teachers envision teacher moves for supporting student reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-30.
- Zazkis, R., & Marmur, O. (2018). Scripting tasks as a springboard for extending prospective teachers' example spaces: A case of generating functions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 18, 291-312.
- Zazkis, R., Liljedahl, P., & Sinclair, N. (2009). Lesson plays: Planning teaching versus teaching planning. *For the learning of mathematics*, 29(1), 40-47.
- Zazkis, R., & Herbst, P. (Eds.). (2017). Scripting approaches in mathematics education: Mathematical dialogues in research and practice. Springer.



מבוא

רלוונטיות הנושאים

שימוש ופיתוח טכנולוגיות חדשות, כמו גם קיימות ושמירה על איכות הסביבה, הם נושאים מרכזיים של המאה ה-21 הזוכים לתשומת לב רבה יותר ויותר (Chin et al., 2019). כדי להצליח להתמודד עם אתגרי שוק העבודה ולתרום לצרכי החברה במאה ה-21, כדאי לתלמידים ולסטודנטים ללמוד לשלוט בכלים טכנולוגיים רבים, להיות יצירתיים, לשלוף ולשלב ידע מתחומים שונים ולפתח מיומנויות של למידה עצמית, עבודות חקר ופיתוח. מידול מתמטי (מודלינג), הפך לכלי חשוב המאפשר להבין קורלציות והשפעות הדדיות טוב יותר (Asempapa, 2022).

החשיבות של משימות חקר

בין המיומנויות הנדרשות לאנשי מקצוע עתידיים נמנות יצירתיות, חשיבה מחוץ לקופסה, היכולת לפתור בעיות ולרכוש ידע בתחומים חדשים, טכנולוגיות בפרט. כל אלה מהווים מאפייני מחקר, ולכן כדאי להקדים משימות חקר או אתגרים לשלבים מוקדמים יותר במהלך החינוך (O'Dell et al., 2022).

בסדנה זו נציג פרויקט עבודת חקר שפותח עבור סטודנטים לתואר שני בחינוך מתמטי במכללה האקדמית אחוה. במהלך פרויקט זה הסטודנטים למדו למצוא ולבחור באינטרנט נתונים מעניינים וגגשים של מעקב אחר נדידת בעלי חיים, להוריד ולנתח נתונים אלה ולקשר אותם לנתונים מתחנות מזג אוויר ברחבי העולם. בתור המשיך, ניתן לדון בהשפעה של שינויים סביבתיים על תנועת בעלי חיים. הפרויקט הועבר כחלק מהקורס "קשרים בין תחומים מתמטיים וקשרים בין המתמטיקה לתחומי דעת אחרים".

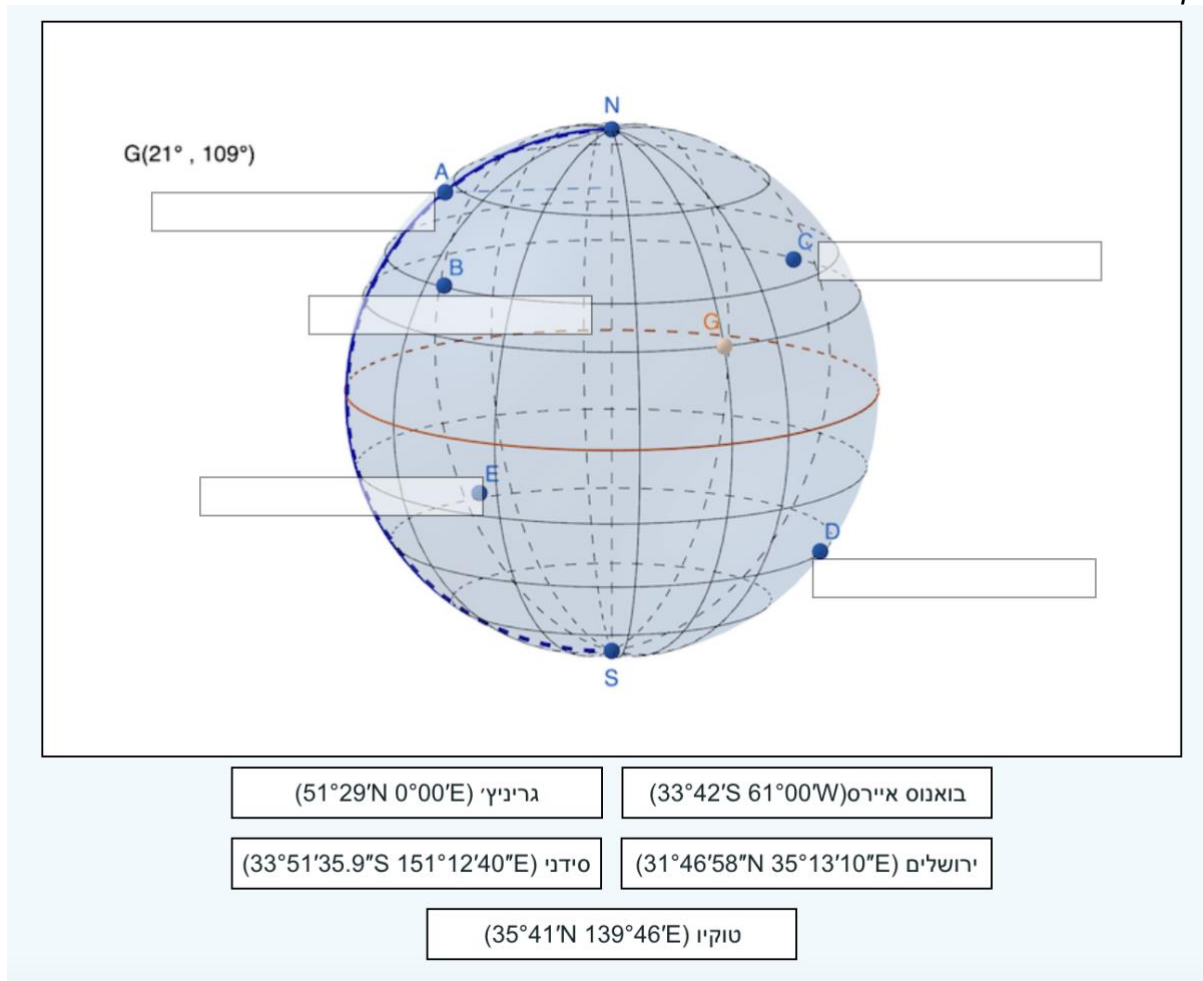
מטרת הסדנה

מטרת הסדנה היא להוות דוגמה למשימת חקר שמשלבת תחומי ידע שונים (כגון מתמטיקה, גאוגרפיה וביולוגיה) וכלים דיגיטליים רבים (כגון סביבה גאומטרית אינטראקטיבית, גיליונות אלקטרוניים ותוכנות מאגרי נתונים באינטרנט). מבחינת היקפה, זוהי דוגמה למשימת חקר שניתן לבצע כפרויקט.

תיאור הסדנה

בתחילת הסדנה נציג כלים בעזרתם ניתן לסייע לסטודנטים להעמיק או לרענן את הידע שלהם על קואורדינטות גאוגרפיות. נושא זה נלמד בישראל בדרך כלל, ולעתים באופן בסיסי מאוד, בשיעורי גאוגרפיה (משרד החינוך, 2022). כל עוד ישנם סרטונים המתאימים לחזרה עצמית על נושא הקואורדינטות הגאוגרפיות, אנו מציעים לתרגל ולבדוק את למידת החומר בעזרת יישומי גאוגרפיה (שנציג בסדנה) בשילוב עם פלטפורמה לניהול למידה (כגון Moodle) ומשחקים (כגון קהוט). חזרה והעמקה זו של נושא הקואורדינטות הגאוגרפיות בוצע בכיתה בשיטת הכיתה ההפוכה. כלומר, הסטודנטים למדו את החומר בבית או חזרו עליו בבית, כאשר התרגול בוצע בכיתה. Wright et al. (2022) מנתחים ומסכמים 30 מחקרים בנושא הכיתה ההפוכה והשפעתה על למידת המתמטיקה. לדברי המחברים, למרות שההישגים הם טובים, חסרה עדיין מסגרת תיאורטית לשיטת הוראה זו.

צילום מסך של יישומון גאוגרפי בתוך הפלטפורמה Moodle לתרגול, חזרה והעמקת הנושא "קואורדינטות גאוגרפיות".



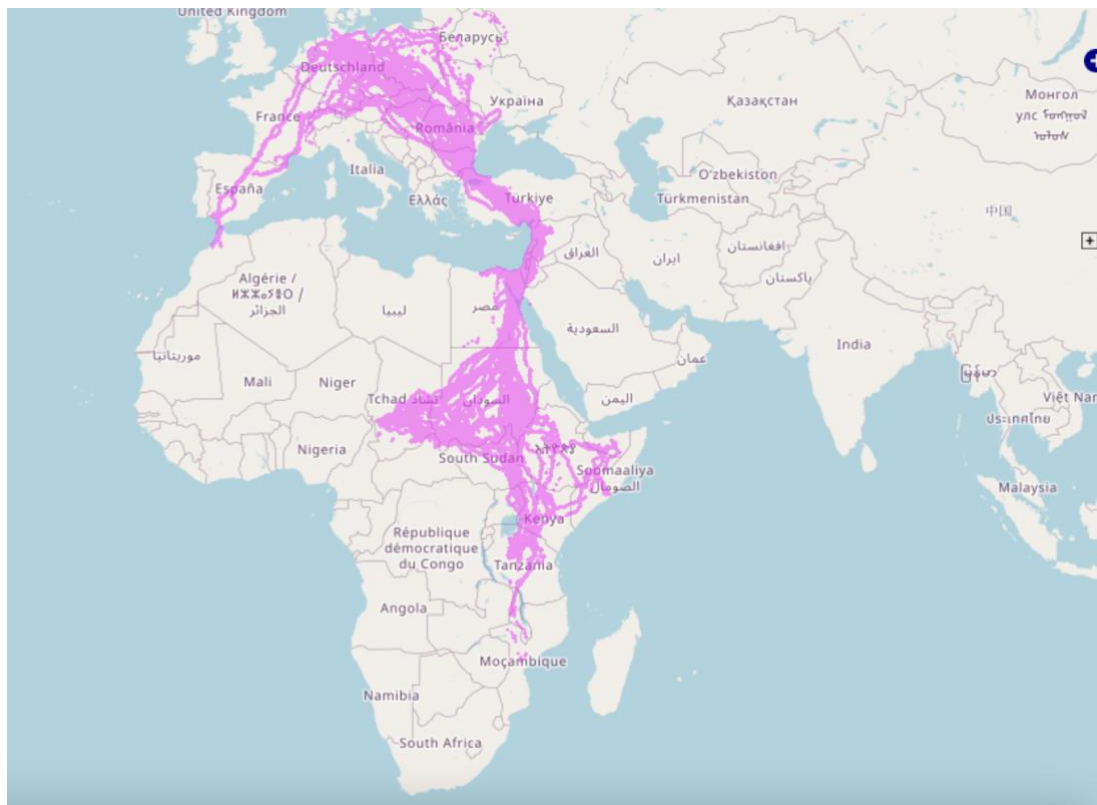
במרכז הסדנה עומדת היכרות ועבודה עם אתר האינטרנט "Movebank" (Max Planck Institute of Animal Behavior, n.d. -a). Movebank היא פלטפורמה מקוונת לאחסון ושיתוף נתוני מעקב אחר בעלי חיים. בין הכלים לאיסוף הנתונים הללו ישנם קלאסיים כמו טבעות ציפורים, ומודרניים כמו משדרי רדיו ו-GPS (Global positioning system), מערכת מיקום גלובלית). פרויקט ה-Movebank החל בשנת 2007, וחלק מהנתונים נגישים באופן חופשי. כל קבוצה של חוקרים שאוספת נתונים מחליטה אם או באיזה תנאי לשתף את הנתונים שלהם.

בסדנה, לפני הפעלת הקהל, ניתן היכרות קצרה עם נדידת ציפורים, כיצד ניתן לאסוף נתוני GPS של חסידות נודדות והמגבלות של טכניקות כאלה.

Movebank מאפשר למשתמשים להציג נתוני מעקב על מפה (איור 2). במפה מופיעים מסלולי בעלי חיים ללא הזמנים המתאימים. במקרים בהם בעלי חיים מפגינים התנהגות חריגה כמו שינוי פתאומי במסלול שלהם (איור 3), ניתן להוריד את הנתונים המתאימים לניתוח נוסף בעזרת גיליונות אלקטרוניים. כך ניתן למצוא תאריכים ושעות של אירועים ספציפיים או התנהגויות חריגות במסלול שניתן לראות במפה. בהזדמנות זו ניתן גם להציג תוכנות שונות עבור גיליונות אלקטרוניים, לדון ביתרונות ובחסרונות שלהן, ולהעלות את השאלה איזו תוכנה מתאימה לאיזו מטרה. לאחר קביעת המועד של התנהגות ספציפית או חריגה, אנו מציעים לגשת לנתונים של תחנות מזג אוויר סמוכות למיקום הגאוגרפי של האירוע (Meteostat, n.d.) על מנת לבדוק קורלציות אפשריות.

איור 2

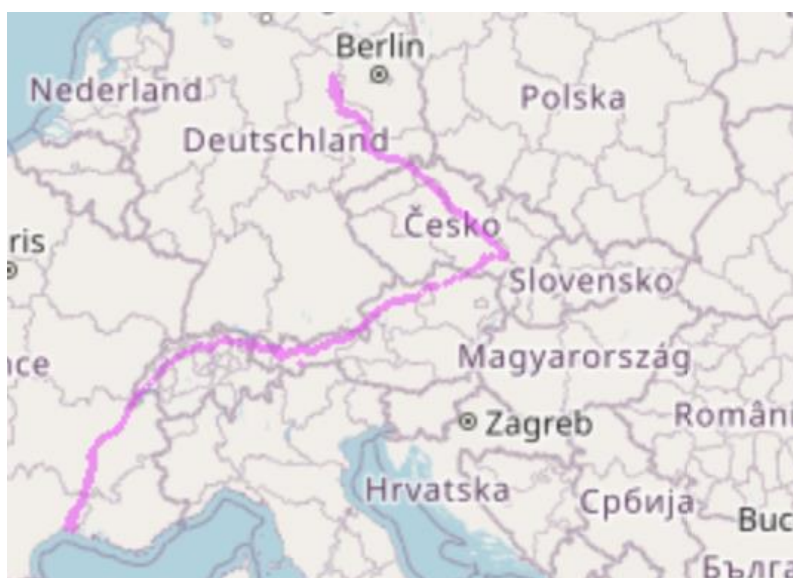
דוגמה למפת Movebank בה ניתן לראות מסלולי נדידה של חסידות מצפון אירופה לאפריקה. כל המסלולים עוקפים את הים התיכון וחלק משמעותי של המסלולים עובר דרך ישראל.



בחלק של הפעלת הקהל ננסה גם למצוא נתונים המדגימים שבמהלך השנים האחרונות ציפורים שנודדו בעבר מצפון אירופה לאפריקה, נשארו במהלך החורף במקומות כמו ספרד במקום להמשיך לאפריקה. עובדה זו קשורה להתחממות הגלובלית ועודף מזון במזבלות.

איור 3

דוגמה למסלול נדידה חריג של חסידה. בהתחלה הציפור עפה לכיוון דרום-מזרח ומשנה את כיוונה בצ'כיה לדרום-מערב. בלי להוריד את טבלת הנתונים לא ניתן לדעת מתי שינוי הכיוון הזה קרה.



איור 4

דוגמה לטבלת נתונים שניתן להוריד מ-Movebank. בטבלה רואים קואורדינטות גאוגרפיות ומועדי האירועים (תחילת אוגוסט). הטבלה נערכה וצומצמה עבור צילום המסך.

	A	B	C	D	E	J	O	
1	event-id	visible	timestamp	location-long	location-lat	eobs:battery-voltage	eobs:start-timestamp	e
2	211066788	TRUE	2013-08-02 07:44:26	12.0882227	52.1172734	4018		
3	230516477	TRUE	2013-08-02 07:44:27	12.0882227	52.1172734	4038	2013-08-02 07:43:08	A
4	211066787	TRUE	2013-08-02 07:45:49	12.0880479	52.1172077	4018		
5	230516478	TRUE	2013-08-02 07:45:49	12.0880479	52.1172077	4033	2013-08-02 07:45:01	A
6	211066786	TRUE	2013-08-02 07:50:18	12.072298	52.1164612	4018		
7	230516479	TRUE	2013-08-02 07:50:19	12.072298	52.1164612	4034	2013-08-02 07:49:59	A
8	230516480	TRUE	2013-08-02 07:57:16	11.9656269	52.1314313	4038	2013-08-02 07:55:01	A
9	230516481	TRUE	2013-08-02 08:00:00			4035	2013-08-02 08:00:00	D

סיכום ותצפית

השילוב בין נתוני Movebank, תוכניות גיליונות אלקטרוניים ונתונים מתחנות מזג אוויר ברחבי העולם, מאפשר לסטודנטים לערוך מחקר במגוון כלים דיגיטליים וללמוד בדרך זו על מורכבותם של שינויים סביבתיים. ב-Movebank עצמו ישנן הצעות רבות עבור פרויקטים (Max Planck Institute of Animal Behavior et al., n.d. b), בין היתר מודול למעקב אחר חתולים (מתאים לחטיבת הביניים) ומודול בשיתוף פעולה עם Google Earth לחישוב השטח המשמש לציפורים נודדות בשלבים שונים של המחזור השנתי שלהן (מתאים לתיכון).

רשימת מקורות

משרד החינוך. (2022). תכנית הלימודים בגאוגרפיה - אדם וסביבה.
https://meyda.education.gov.il/files/Curriculum/geography_5_6.pdf.

- Asempapa, R. S. (2022). Examining practicing teachers' knowledge and attitudes toward mathematical modeling. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 10(2), 272-292. <https://doi.org/10.46328/ijemst.2136>.
- Chin, C. K., Munip, H., Miyadera, R., Thoe, N. K., Ch'ng, Y. S., & Promsing, N. (2019). Promoting Education for Sustainable Development in Teacher Education integrating Blended Learning and Digital Tools: An Evaluation with Exemplary Cases. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(1), em1653. <https://doi.org/10.29333/ejmste/99513>
- O'Dell, J. R., Langrall, C. W., & Cullen, A. L. (2022). Challenging Students to Experience Mathematics as Mathematicians. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 115(3), 191 - 201. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2021.0160>
- Max Planck Institute of Animal Behavior, North Carolina Museum of Natural Sciences, University of Konstanz. (n.d. -a). Movebank for animal tracking data. Retrieved from Movebank: <https://www.movebank.org/cms/movebank-main>.
- Max Planck Institute of Animal Behavior, North Carolina Museum of Natural Sciences, University of Konstanz. (n.d. -b). Teaching and Training. Retrieved from Movebank: <https://www.movebank.org/cms/movebank-content/teaching-and-training>.
- Meteostat. (n.d.). *The Weather's Record Keeper*. <https://meteostat.net/en>.
- Wright, G. W. & Park, S. (2022) The effects of flipped classrooms on K-16 students' science and math achievement: a systematic review, *Studies in Science Education*, 58(1), 95-136. <https://doi.org/10.1080/03057267.2021.1933354>



מבוא

אחת ההחלטות החשובות בעיצוב סביבת פיתוח מקצועי למורים היא בחירת הכלים הפדגוגים שייתווכו את הלמידה וההוראה (Sztajn et al., 2017). המחקר המדעי כמו גם השדה החינוכי מייצרים מתווכים פדגוגים רבים כמו למשל וידאו, עבודות תלמידים, מפות מושגים ועוד. העושר והמגוון הרב של מתווכים אלו, המתפתח בשנים האחרונות, מביא עימו את הדיון על המטרות השונות של מתווכים מסוגים שונים. מתווכים מסוג אחד, למשל, יכולים לייצג ולתאר אירועים שקרו בכתה. אחרים יכולים לעזור לגשר בין תיאוריה לפרקטיקה, להפוך ידע פדגוגי לזמין יותר, ולעודד תקשורת ושיח בין עמיתים. מתוך כך, זיהינו צורך חשוב, שעולה הן מהמחקר והן מהשדה, להבדיל בין מתווכים שונים, לשיים את ההבדלים ביניהם, ולהבחין בהזדמנויות השונות שהם מזמנים למורים כחלק מתהליך למידתם והתפתחותם המקצועית.

לפני ארבע שנים, בכנס ירושלים השמיני למחקר בחינוך מתמטי התקיימה סדנה על ייצוגי הוראה והזדמנויות הלמידה שהם מזמנים למורים (וינגרדן ואחרים, 2020). הסדנה עסקה בייצוגי הוראה שונים, בדרכים השונות בהן ניתן לייצג את ההוראה ואת פרקטיקות ההוראה, ובהיבטים השונים של ההוראה הנחשפים ומודגשים באמצעות כל ייצוג. הסדנה המוצעת כאן ממשיכה ומרחיבה את הדיון בסדנה הקודמת. בסדנה זו נעסוק בשתי קבוצות חופפות של מתווכים פדגוגים: ייצוגי הוראה ומסגרות מושגיות. ראשית כותבי ההצעה ייתנו רקע מדעי על שני המושגים. בהמשך, בלב המושב, נתנסה בשימוש בארבעה מתווכים פדגוגים משני הסוגים. לסיכום, ננסה למפות בצורה מדויקת יותר את מרחב המתווכים, באופן שיאפשר למורי מורים לבצע בחירות מודעות ומפורשות יותר בבחירת כלים פדגוגים בהתאם למטרות הפדגוגיות שלהם ושל המורים המשתתפים בתוכניות פיתוח מקצועי.

ייצוגי הוראה

פיתוח מקצועי של מורים לרוב מתרחש בזמן ובמרחב המרוחקים מההוראה עצמה. לכן, מורי מורים וחוקרי חינוך רואים חשיבות רבה בשימוש ושילוב של ייצוגי הוראה שונים בתהליך הלמידה של מורים, במטרה לתווך בין התנסויות קודמות של המורים וההקשר בו הם מלמדים ותופסים את ההוראה שלהם. ייצוגי הוראה טיפוסיים שנידונו בספרות הם הקלטות וידאו של שיעורים (van Es & Sherin, 2010), עבודות תלמידים (Kazemi & Franke, 2004), אנימציות של ארועי הוראה (Herbst et al., 2011) ותרחישי מורה-תלמיד כתובים או מסופרים (Horn, 2005). לאחרונה, המושג "ייצוגי הוראה" הורחב, וישנם ייצוגי הוראה חדשים ומגוונים יותר הממוקדים בפרקטיקה ספציפית וכוללים ייצוג ויזואלי של ההוראה תוך ארגון וקיבוץ מחדש של הנתונים (אגרגציה) בהשראה של מסגרת מושגית מסוימת. לדוגמא, ריינהולץ ושהא (Reinholz & Shah, 2018) התמקדו בפרקטיקה של שיויוניות בכיתות המתמטיקה והציעו ייצוגים ויזואליים שונים המציגים דפוסי השתתפות שונים בכיתה בהקשר השיויוני (כלי EQUIP). בדוגמא נוספת, שפירו וגרנר (Shapiro & Garner, 2022), הציעו ייצוג הוראה מרחבי שעוקב אחר התנועה של המורים והשימוש שלהם במרחב הכיתתי. חלק גדול מייצוגי הוראה אלו גם נבחנו בהקשר של התפתחות מקצועית של מורים, כאשר מורים ומורי מורים עושים שימוש בייצוגי הוראה לצורך דיון, זיהוי, בחינה והבנה מעמיקה יותר של פרקטיקות הוראה שונות.

בנוסף לרעיון של ייצוגים של פרקטיקות הוראה, ישנם מחקרים שבוחנים שימוש של מסגרות מושגיות להוראה ולמידה ככלי למידה למורים. באמצעות מסגרות אלו מורים ומורי יכולים לחשוב בצורה רפלקטיבית על ההוראה שלהם, על התנסויות קודמות שלהם ועל קשרים שונים בין מערכות מושגים פדגוגיים, פרקטיקות הוראה, וה"אני מאמין" הפדגוגי שלהם. לדוגמה, מסגרת ה-TRU Math (Teaching for Robust Understanding) של שונפלד (Schoenfeld et al., 2019) מציגה בצורה מאורגנת, מפורשת ומעוגנת במחקרים עכשוויים חמישה עקרונות להוראה המעודדת הבנה ברמה גבוהה. מסגרת זו יושמה בהקשר של פיתוח מקצועי למורים כאמצעי דרכו המורים דנו בשיעורי מתמטיקה שונים ובהיבטים השונים של הוראה המעודדת הבנה. אדלר, אשר חקרה בהרחבה את השימוש של מורים במשאבים להוראה ולמידה טענה שיש מחסור בפיתוח מסגרות מושגיות עבור למידת מורים והיא זיהתה פוטנציאל רב בשימוש במסגרות כאלו ליצירת שינוי בהוראה (Adler, 2021).

הסדנה

במהלך הסדנה נתנסה בעבודה עם ארבעה מתווכים פדגוגיים הכוללים שני ייצוגי הוראה ושתי מסגרות מושגיות. ההתנסות תהיה בקבוצות ותכלול שני סבבים, כאשר בכל סבב המשתתפים יבחרו להתנסות עם מתווך פדגוגי מסוג אחר (סך הכל כל קבוצה תתנסה עם ייצוג אחד ומסגרת מושגית אחת). בתום כל סבב נדון על החוזקות של המתווכים (אילו היבטים הם מדגישים?) ועל החולשות שלהם (אלו דברים חשובים הם משאירים בחוץ?). בתום שני הסבבים, הקבוצות ינסו למפות את ארבעת המתווכים הפדגוגיים בהתאם לתכונות שלהם ולמטרות הפדגוגיות שמתאימות להם (במובן של פדגוגיה למורים). להלן תיאור קצר של כל אחד מהמתווכים הפדגוגיים בהם יתנסו משתתפי הסדנה. מטעמי מקום לא הוספנו כאן את הייצוגים הויזואליים של ארבעת המתווכים הללו אך אלו יודפסו עבור המשתתפים בסדנה.

שני ייצוגי ההוראה בהם יתנסו המשתתפים בסדנה

עצי מימושים לעצמים מתמטיים (The Realization Tree Mediator):

עץ המימושים לעצם מתמטי הוא איור דמוי עץ המתאר באופן ויזואלי דיון כיתתי סביב משימה מתמטית. עץ המימושים מורכב מהעצם המתמטי המרכזי של המשימה (שנמצא בראש העץ), המימושים השונים של עצם זה, והקשרים שנעשו בין מימושים אלה. בנוסף, האיור גם מתאר את המידה בה התלמידים היו מעורבים בדיון ופיתחו נרטיבים מתמטיים (Weingarden & Heyd-Metzuyan, 2023). עץ המימושים מבוסס על רעיונות מהתיאוריה הקומוניטיבית (Sfard, 2008) ופותח במטרה לבחון שיעורי מתמטיקה ולהעריך את המידה בה השיעור מעודד השתתפות חקירתית. לאחרונה השימוש של עץ המימושים התרחב לכלי פדגוגי ללמידת מורים, המספק למורים דוגמא מוחשית לתוכן המתמטי של השיעור, לקשרים המתמטיים הפוטנציאליים שיכולים להיעשות בשיעור ולפעולות ההוראה השונות שיכולות לעודד השתתפות חקירתית.

רוטינות הנחיית עבודה בקבוצות (Groupwork Monitoring Routines):

ייצוג הוראה זה מתאר באופן ויזואלי את פעולות המורה במהלך הנחיית עבודה בקבוצות של תלמידים בשיעורי מתמטיקה. ייצוג זה מבוסס על מסגרת הפתיחה-כניסה-מיקוד-יציאה והשתתפות, המתמקדת ברוטינות הניטור של מורים במהלך עבודה בקבוצות (Ehrenfeld & Horn, 2020). מסגרת זו מתמקדת בחמישה שלבים שונים במהלך עבודה בקבוצות של תלמידים ומתמקדת בפעולות המורה בכל אחד משלבים אלו, למשל כיצד מורים יוזמים שיחות עם התלמידים, מה הפוקוס המתמטי בו הם מתמקדים, עם מי הם משוחחים ואיך הם עוזבים את השיחה כדי לעורר (או לא) דיון נוסף בקרב התלמידים. כמו במקרה של עץ המימושים, גם ייצוג זה פותח במטרה לנתח שיעורי מתמטיקה ואת מגוון הדרכים בהן מורים מנחים עבודה קבוצתית ולאחר מכן הפך לכלי ללמידת מורים (Ehrenfeld et al., 2023), המספק למורים דוגמאות קונקרטיות של רוטינות הנחיית עבודה בקבוצות.

מסגרת ההזדמנויות להוכחות והנמקות (Opportunities for Reasoning and Proving) (Framework)

מסגרת זו פותחה במטרה לאפיין משימות מתמטיות בהתאם להזדמנויות שהן מזמנות לתלמידים להוכיח ולנמק (Weingarden et al., 2022). המסגרת מבוססת על הרעיון הקומוניטיבי (Sfard, 2008) שלמידת מתמטיקה היא סוג מיוחד של שיח, וכך משימות מתמטיות יכולות להיות מאופיינות בהתאם לסוג השיח שהן מזמינות תלמידים להשתתף. ההזדמנויות להוכחות והנמקות במשימה מאותרות באמצעות העצמים שבמרכז המשימה: מתמטיים-בית ספריים (משוואה) או לוגיים (משפט תנאי), ובאמצעות הפעולות הדרושות לפתרון המשימה: מתמטיות-בית ספריים (כתיבת משוואה), לוגיות (כתיבת משפט תנאי), או חשיבה-הנמקה (הכללה, הצדקה). באמצעות בחינה של 552 משימות ושל השילובים השונים של עצמים ופעולות המאפיינים אותן, זוהו ארבעה סוגים של הזדמנויות להוכחות והנמקות: (1) הזדמנויות מועטות, (2) הזדמנויות לחשיבה מתמטית, (3) הזדמנויות להשתתפות בשיח לוגי, (4) הזדמנויות לחשיבה מתמטית בשיח מתמטי ולוגי. גם מסגרת זו פותחה בתחילה כדי לחקור משימות מתמטיות ולאחרונה נעשה בה שימוש גם ככלי למידה למורים, המאפשר להם לדון בהזדמנויות להוכחות והנמקות שמשימות שונות מזמנות (Weingarden & Buchbinder, 2023).

גישור בין התמדה ויצירת משמעות מתמטית (Bridging Perseverance and) (Mathematical Sensemaking)

מסגרת זו פותחה לצורך בחינה של פעולות הוראה שמחד מעודדות התמדה מתמטית ומאידך יצירת משמעות מתמטית. המסגרת מתמקדת בקשרים בין שני מימדים אלו ובפעולות הגומלין ביניהן כפי שהן באות לידי ביטוי בפעולות המורה בשיעור (Buenrostro & Ehrenfeld, 2023). המסגרת מבוססת על שלוש נקודות מבט תיאורטיות של מושג ההתמדה: עמדתית-תפיסית, מטה-קוגניטיבית וקונטקסטואלית-אינטראקטיבית. בהתאמה, מסגרת מושגית זו מיוצגת באמצעות שלושה מתווכים הקשורים זה בזה ומתארים את הקשר בין פרקטיקת עידוד ההתמדה והעמדות כלפי יצירת משמעות מתמטית: (1) עמדות התלמידים כמסוגלים ליצור משמעות מתמטית, (2) דרכים מפורשות לפתרון בעיות, (3) התאמת מסגרת ההשתתפות של תלמידים בהתאם לאזור ההתפתחות המקורב שלהם (ZPD). שלוש נקודות מבט אלו יחד עם המתווכים היוזאליים שלהם מספקים עדשה רעיונית למורים ומורי מורים המאפשרת להם לזהות ולפרט את סוג התמיכה שמורים יכולים להציע לתלמידים ולבחון את יחסי הגומלין בין התמדה ויצירת משמעות מתמטית.

סיכום

למתווכים פדגוגים יש תפקיד חשוב בתהליך הלמידה של מורים במסגרת התפתחותם המקצועית. היכרות והתנסות עם מתווכים פדגוגים שונים ודיון נרחב על ההבדלים בין המתווכים השונים, המאפיינים שלהם והדגשים הפדגוגים שכל מתווך מביא עימו, יתרום להבנה מעמיקה יותר אודות תרומתם של מתווכים פדגוגים לתהליך הלמידה של מורים. המסקנות והתובנות שיעלו מתוך סדנה זו יעזרו הן לקידום המחקר והפיתוח התיאורטי אודות השימוש בתווכים פדגוגיים והן באופן פרקטי יותר, למורי מורים שמתעניינים ליישם מתווכים שונים כדי לתמוך בתהליך הלמידה של המורים.

רשימת מקורות

- וינגרדן, מ., הד-מצויינים, ע., אלבוים-כהן, א., נחליאלי, ט., שוורץ, ג. (פברואר 2020). ייצוגי הוראה והזדמנויות הלמידה שהם מזמנים למורים. כנס ירושלים השמיני למחקר בחינוך מתמטי, המרכז האקדמי לב, ירושלים.
- Adler, J. (2021). Levering change: the contributory role of a mathematics teaching framework. *ZDM-Mathematics Education*, 53(6), 1207-1220.
- Buenrostro, P., & Ehrenfeld, N. (2023). Beyond mere persistence: a conceptual framework for bridging perseverance and mathematical sensemaking in teaching and teacher learning. *Educational Studies in Mathematics*, 1-23.

- Ehrenfeld, N., & Horn, I. S. (2020). Initiation-entry-focus-exit and participation: A framework for understanding teacher groupwork monitoring routines. *Educational Studies in Mathematics*, 103(3), 251–272.
- Ehrenfeld, N., Horn, I. S., & Jasien, L. (2023). Using monitoring traces to support teacher sensemaking about groupwork monitoring routines. *American Educational Research Association (AERA 2023)*. Chicago, IL.
- Herbst, P., Chazan, D., Chen, C. L., Chieu, V. M., & Weiss, M. (2011). Using comics-based representations of teaching, and technology, to bring practice to teacher education courses. *ZDM–Mathematics Education*, 43(1), 91–103.
- Horn, I. S. (2005). Learning on the Job: A situated account of teacher learning in high school mathematics departments. *Cognition and Instruction*, 23(2), 207–236 .
- Kazemi, E., & Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics: Using student work to promote collective inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 203–235.
- Reinholz, D. L., & Shah, N. (2018). Equity analytics: A methodological approach for quantifying participation patterns in mathematics classroom discourse. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(2), 140–177.
- Schoenfeld, A. H., Baldinger, E., Disston, J., ... & Zarkh, A. (2019). Learning with and from TRU: Teacher educators and the teaching for robust understanding framework. In K. Beswick (Ed.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education, Volume 4, The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. Rotterdam, the Netherlands: Sense publishers.
- Shapiro, B. R., & Garner, B. (2022). Classroom interaction geography: visualizing space & time in classroom interaction. *Journal of Research on Technology in Education*, 54(5), 769–783.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(2), 155–176 .
- Weingarden, M., & Buchbinder, O. (2023). Applying a commognitive-based framework to promote teachers' communication about reasoning and proving. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel., & M. Tabach (Eds.). *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*. Israel, Haifa.
- Weingarden, M., Buchbinder, O., & Liu, J. (2022). Opportunities for reasoning-and-proving in mathematical tasks: A discursive perspective. In Lischka, A. E., Dyer, E. B., Jones, R. S., Lovett, J., Strayer, J., & Drown, S. (Eds). *Proceedings of the 44th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)*. pp. 857-866. Middle Tennessee State University. Nashville, Tennessee. November 2022.
- Weingarden, M., & Heyd-Metzuyanim, E. (2023). What can the realization tree assessment tool reveal about explorative classroom discussions? *Journal for Research in Mathematics Education*, 54(2), 97–117.
- Sztajn, P., Borko, H., & Smith, T. (2017). Research on mathematics professional development. *Compendium for research in mathematics education*, 793-823.



מבוא: בעיות בנייה בתולדות המתמטיקה ובלמידתה

בעיות בנייה מהוות חלק מהותי של הגאומטריה. ב"יסודות" של אוקלידס נאמר כי המשמעות של אובייקט קיים היא שאפשר לבנות אותו בעזרת סרגל ומחוגה, ואת משמעות המילה "בעיה" עצמה אפשר לבטא באמצעות "ביצוע בנייה גאומטרית". במשך מאות שנים בעיות בנייה סיפקו השראה להגדרת מושגים חדשים ואף ענפים שלמים של המתמטיקה (גזית, 2004; סטופל וזיסקין, 2015, פרקים 5-7). מנקודת מבט אפיסטמולוגית-דידקטית, פתרון בעיות בנייה נחשב לאחד הרכיבים החשובים של התרבות המתמטית. יתרה מזאת, התבנית של ארבעה שלבים לפתרון בעיות בנייה – אנליזה, ביצוע הבנייה, הוכחת תקינותה וחקר הפתרונות (Alexandrov, 2010) – הייתה מקור ל"דגם קלאסי" (פויה, 1961) של פתרון בעיות מתמטיות בכלל.

אולם ב-40 השנים שקדמו לעשור האחרון, בעיות בנייה החלו להיחשב חסרות תועלת ו"קשות מדי". בהתאם לכך התגברה הנטייה להסיר אותן מתוכניות לימודים בבתי הספר (Arzarello et al., 2012) ומהחומר הנלמד בתהליכי הכשרת מורים. חשוב להזכיר כי תהליכים של פתרון בעיות בנייה באמצעות "נייר ועיפרון", תהליכים המהווים את תבנית ארבעת השלבים אשר צוינה לעיל, אכן מצריכים לעיתים שימוש בשיטות מסובכות למדי שאינן אינטואיטיביות עבור התלמידים. למרבה המזל, השילוב של תוכנות גאומטריה דינמיות בבתי הספר הביא ל"תחייה" של פרקי הבניות גאומטריות בתוכניות לימודים במתמטיקה בארץ ובעולם (משרד החינוך, 2016). בהתאם לכך בעיות בנייה (גם אם ברמה בסיסית למדי) החלו להופיע שוב בספרי הלימוד, וחלק מהספרים מציעים שימוש בכלים ממוחשבים לפתרון בעיות כאלו.

אף שקיים אוסף רחב של מחקרים העוסקים בהיבטים מגוונים של שילוב טכנולוגיה בלימודי גאומטריה במגוון רמות, רק אחדים ממחקרים אלה מתמקדים בהתמודדות של הלומדים עם בניות גאומטריות (בעיקר בפן הקוגניטיבי). בקרב פרחי הוראה ומורים בפועל נבדקו השיקולים באשר לדרכי בניית אובייקטים גאומטריים בהתאם להגדרותיהם בסביבת גאומטריה דינמית (Cohen et al., 2017; Sinitsky, 2017), ונדונו תוצאות ההתנסות של הסטודנטים בהרחבת תחום הפתרון של בעיות בנייה בסביבת GeoGebra (Barabash, 2018). אולם בתחום של שימוש בכלי גאומטריה דינמית כדי לפתור בעיות בנייה בגאומטריה, הספרות המקצועית לא מציעה סכמות לפתרון המבוססות על תכונות של סביבות אלו.

כלים של גאומטריה דינמית מספקים הזדמנויות ייחודיות לפתרון בעיות בנייה. התנסות חופשית (כמעט) של המתמודד עם הבעיה יכולה להביא לגילוי המקום הגאומטרי הרלוונטי לבניית האובייקט הנדרש, והיא סוללת את הדרך לתהליך בנייה ולפתרון הבעיה. בסדנה זו נגלה באופן מעשי את מגבלותיה של התבנית הקלאסית לפתרון בעיות בנייה, ונדגים את השיטה האינטואיטיבית לפתרון בעיות אלו. התנסות פעילה בפתרון בעיות בנייה בסביבת GeoGebra מהווה את החלק העיקרי של הסדנה, ואחריה מוצגות למשתתפים בסדנה תוצאות ניסוי אשר בחן את התמודדותם של פרחי הוראה שלמדו בשני קורסים אקדמיים עם בעיות בנייה דומות. הסדנה מסתיימת בדיון בהיבטים דידקטיים ופדגוגיים של השימוש בשיטה המוצעת לפתרון בעיות בנייה כדרך חלופית, או משלימה, לדרך הנהוגה בתהליכים להכשרת פרחי הוראה ובפרקטיקה הבית-ספרית.

משיטת ניתוח מקדים לבניית משפחת האובייקטים

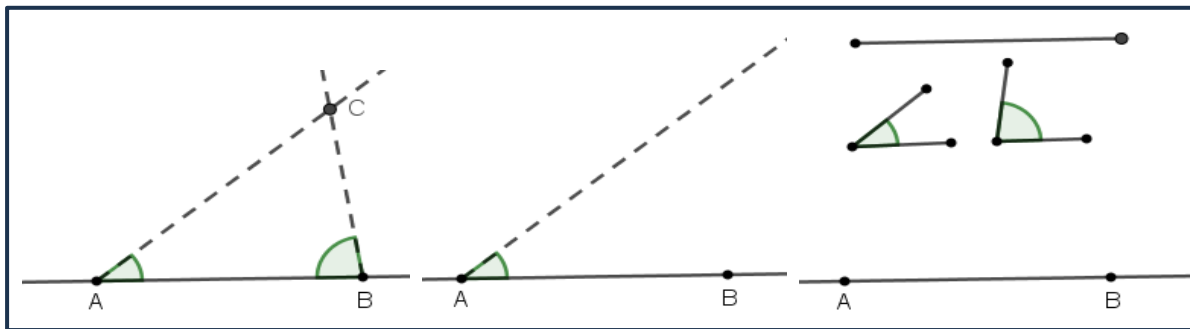
מניתוח של מגוון בעיות בנייה גאומטרית (סטופל וזיסקין, 2015, פרק 1) עולה כי קיימים שני סוגים של בעיות אלו: (א) יצירת אובייקט נדרש "חדש" בהתאם לנתוני הבעיה; (ב) "שחזור" של אובייקט בהתבסס על רכיבים מסוימים שלו המצוינים בנתוני הבעיה. מבחינה תאורטית פורמלית, כל תהליך של בנייה גאומטרית מורכב מרצף רלוונטי של חמש בניות בסיסיות (החל בהעברת קו ישר דרך שתי נקודות וכלה בקביעת נקודות מפגש של שני מעגלים) אשר מוגדרות עוד ב"יסודות" של אוקלידס. בפועל בתהליכי בנייה משתמשים ב"בניות נפוצות" הנחשבות למתקדמות מעט יותר – כמו למשל בניית אנך אמצעי לקטע, או בניית משיק למעגל מנקודה הנמצאת עליו או מחוץ לו (Alexandrov, 2010).

למעשה, קיים מגוון רחב של כלים ושיטות לפתרון בעיות בנייה מתקדמות. המגוון הרחב הזה מקשה מאוד את מלאכת הסיווג של הכלים לפתרון; אפילו מונוגרפיות המוקדשות לבעיות בנייה, מציגות רשימת המלצות ולא אסטרטגיות כלליות ברורות (שם). המשותף לכל השיטות הוא השלב הראשון: הטיפול בכל בעיית בנייה מורכבת מתחיל במשפט "נניח שהבעיה נפתרה, והאובייקט הנדרש נבנה". בהתאם לכך גם תוכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר התיכון מדגישה בנושא של בעיות הבנייה הגאומטרית את חשיבות העיקרון של הקדמת התכנון לביצוע (משרד החינוך, 2020). יש לציין כי שיטת הניתוח הזו אכן עוזרת בחלק מהבעיות, כמו למשל בבעיה של שחזור משולש לפי צלע ושתי הזוויות הצמודות לה. אולם היא איננה כלי אוניברסלי לפתרון כל בעיות הבנייה; כך למשל שימוש בניתוח מקדים אינו מסייע לפתור את הבעיה של שחזור משולש לפי שלוש צלעותיו הנתונות. תיאור ויזואלי של האובייקט הנדרש נועד לאפשר התמקדות בתכונות הנחוצות לבניית האובייקט הזה, אך לעיתים התכונות האלו מתגלות רק במעבר לאובייקט נוסף שאינו מופיע בתיאור האובייקט אשר נדרש לבנות אותו.

בסדנה מודגמת גישה המאפשרת לפתור בעיות בנייה ללא תיאור ויזואלי של האובייקט הנדרש. הבנייה מתבצעת בדרך של "התנסות חופשית" של הלומדים בסביבה של גאומטריה דינמית (Sinitsky, 2023). מבחינה מתמטית, הגישה מבוססת על רעיון המקומות הגאומטריים – אחד הכלים הידועים לפתרון בעיות בנייה. איור 1 שלהלן ממחיש את יישום השיטה בתהליך של בניית משולש לפי צלע ושתי הזוויות הצמודות לה: המשולש משוחזר כחיתוך של שתי קרניים. כל אחת מהקרניים מהווה מקום גאומטרי של קודקודי המשולשים, בהינתן צלע וזווית אחת הצמודה לה.

איור 1

שלב ב' בניית המשולש ABC (מימין לשמאל) לפי צלע נתונה AB , ושתי זוויות הצמודות לצלע זו – הקודקוד השלישי C מתקבל כחיתוך של שתי קרניים היוצרות זווית נתונה עם צלע AB .



בשלב הראשון המתמודד עם הבעיה קובע חלק מהדרישות לאובייקט שצריך לבנות או לשחזר, ובדרך זו הוא בונה את האוסף הרציף של האובייקטים אשר עונים על חלק מאילוצי בעיית הבנייה. בגישה הסטנדרטית הזו האובייקט מתקבל כחיתוך של שני מקומות גאומטריים או יותר אשר כל אחד מהם עונה על חלק מאילוצי הבעיה.

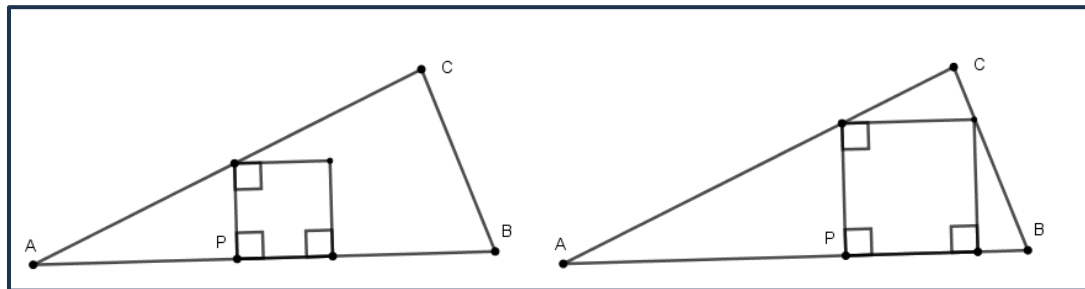
למרות בהירותו של הרעיון, בעבודה "עם עיפרון ונייר" הזיהוי של אוסף הקונסטרוקציות הנדרשות עלול לעורר קשיים. בהקשר הזה תוכנות של גאומטריה דינמית מספקות כלים ידידותיים ואינטואיטיביים

ללומדים. בבעיות רבות המקום הגאומטרי הרלוונטי "הראשוני" אשר עונה על חלק מהאילוצים, מתגלה בנקל ומאפשר בנייה בדרך פשוטה ואינטואיטיבית; התלמידים המתמודדים עם הבעיה אמורים להתחיל בבניית ביניים של האובייקט העונה על דרישות אלו. בהמשך האפשרות "עקבות" (trace) המופיעה בסביבת GeoGebra יוצרת אוסף דינמי של האובייקטים המהווים את המקום הגאומטרי הבנוי. בשלב הזה מתגלה האובייקט (או כמה אובייקטים) אשר מתאים לשאר אילוצי הבעיה. למעשה, הגישה מממשת את הרעיון של שינויים בתוך שימור הנתון (סיניצקי ואילני, 2014): משנים את האובייקט תוך כדי שימור האילוף שהושג בבנייה הראשונית. "הכיוון" של השינוי הנדרש מתגלה באמצעות "גרירת" אחת הנקודות של אובייקט הביניים.

באיור 2 שלהלן השיטה מודגמת באמצעות הצגת פתרון בעיית בנייה של ריבוע אשר חסום בתוך משולש באופן הבא: שני קודקודים של הריבוע נמצאים על צלע אחת של המשולש, ושני הקודקודים הנוספים ממוקמים על שתי הצלעות האחרות של המשולש.

איור 2

בניית ריבוע החסום בתוך משולש נתון (מימין) באמצעות בניית ביניים של ריבוע אשר שלושה מתוך ארבעת קודקודיו ממוקמים על צלעות המשולש הנתון



התנסות בתהליכי בניות גאומטריות בסביבת GEOGEBRA

במסגרת הסדנה יוצגו כמה בעיות בנייה לצורך התנסות בשיטה. חלק מהבעיות האלו מוקרות למדי ומאפשרות פתרון קצר ואינטואיטיבי בסביבת גאומטריה דינמית:

- בניית משיק למעגל מנקודה הנמצאת מחוץ למעגל;
- שחזור משולש לפי שתי צלעות שלו ותיכון לצלע השלישית;
- שחזור משולש לפי שתי צלעות שלו וגובה לצלע השלישית;
- שחזור משולש לפי שתי צלעות שלו וחוצה זווית (הזווית שבין שתי הצלעות האלו);
- שחזור משולש לפי היקפו ושתי זוויות שלו;
- חסימת מלבן בעל היקף נתון בתוך משולש;
- חסימת משולשים מגוונים בתוך ריבוע;
- בניית ריבוע שקודקודיו נמצאים על הקווים המקבילים הנתונים.

על המשתתפים בסדנה לגלות בכל בעיה את החלק באילוצי הבעיה אשר קובע את המקום הגאומטרי הנוח לבנייה בשלב הראשון, ובהמשך הם מתנסים בשימוש באפשרות "עקבות" (trace) בסביבת GeoGebra החושפת דרך להשלמת הבנייה הנדרשת.

דיון בעקבות ההתנסות: האם וכיצד ליישם את השיטה בקרב תלמידים ופריחי הוראה?

השיטה המוצגת מהווה שינוי משמעותי של פרדיגמת ההתמודדות עם בעיות בנייה: במקום לנתח את תכונות האובייקט בהתבסס על ההנחה שהוא כבר בנוי, על הלומד להתחיל את תהליך הפתרון בהתנסות בבניית אובייקט העונה על חלק מאילוצי הבעיה. בהמשך נעשית "התאמה" של האובייקט

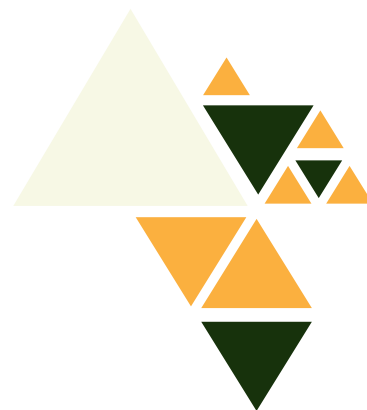
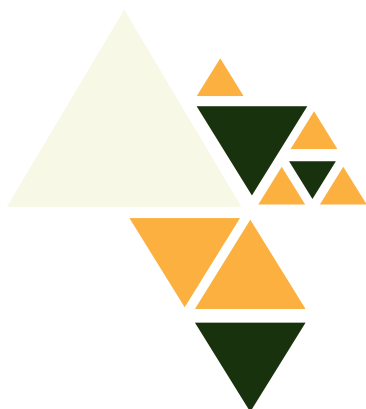
לנתונים נוספים של הבעיה באמצעות פעולה אינטואיטיבית של "גרירת" האובייקט הבנוי. פעולה זו מוכרת היטב למורים מהקריאה הנפוצה של הלומדים "וכעת נזיז את האובייקט עד שהוא מגיע למיקומו המתאים", אך הפעם היא סוללת את הדרך להשלמת הבנייה הנדרשת.

בדיון בעקבות ההתנסות יוצגו למשתתפים נתונים של ניסוי בהיקף קטן, ניסוי שבמהלכו סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה בבית הספר העל-יסודי התמודדו עם בעיות בנייה אחרי הצגת השיטה המתוארת לעיל. דיון זה יתמקד בהיבטים דידקטיים אחדים של השיטה המוצעת: סיווג המקומות הגאומטריים המתגלים, שלבי הנימוק של הבניות המוצעות, דרכי הפתרון של הבעיה כמקור להצגת בעיות בנייה נוספות וכן הלאה. נוסף על כך יוקדש זמן לדיון בסוגיה של דרכים לשילוב הגישה בתהליכי הכשרה של פרחי הוראה ובפרקטיקה הבית-ספרית.

רשימת מקורות

- גזית, א' (2004). **מצאתי...! על אנשים שאהבו לחשוב ולחשב**. גייסט.
- משרד החינוך (2016). **תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות ז-ט**. משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית, אגף א' מדעים, הפיקוח על הוראת המתמטיקה.
- משרד החינוך (2020). **תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות י, 5 יח"ל**. משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית, אגף א' מדעים, הפיקוח על הוראת המתמטיקה.
- סטופל, מ' וזיסקין, ק' (2015). **בניות גאומטריות: בעיות קלאסיות, אתגריות ומוחשבות**. שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך 5-7.
- סיניצקי, א' ואילני ב' (2014). **שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות**. מכון מופ"ת.
- פויה, ג' (1961). **כיצד פותרין?** (א' בן נחום, תרגום). אוצר המורה.
- Alexandrov, I. I. (2010). *Sbornik geometricheskikh zadach na postroyeniye s resheniyami* [Collection of geometric construction problems with solutions]. KomKniga
- Arzarello, F., Bartolini Bussi, M. G., Leung, A. Y. L., Mariotti, M. A., & Stevenson, I. (2012). Experimental approaches to theoretical thinking: Artefacts and proofs. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 97-143). Springer.
- Barabash, M. (2018, June 26–29). *GeoGebra as a dynamic geometry tool in mathematics and in mathematics teaching: A case of geometric constructions* [Paper presentation]. 7th CADGME Conference on Digital Tools in Mathematics Education, Coimbra, Portugal.
- Cohen, D., Kouropatov, A., Ovodenko, R., Hoch, M., & HersHKovitz, S. (2017). Geometric constructions in a dynamic environment (GeoGebra): The case of in-service teachers. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education [CERME 10]* (pp. 580-587). ERME and Dublin City University, Institute of Education.
- Sinitsky, I. (2023). The intuitive way to solve construction problems in the dynamic geometry environment. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 30(3), 123-130.
- Sinitsky, M. (2017). Pre-service teachers' (Mis)-understanding of the constructions of dynamic geometry objects. *Journal Biuletyn of the Polish Society for Geometry and Engineering Graphics*, 30, 41-45.

סימפוזיון





מבוא

מתמטיקה מהווה מרכיב משמעותי ואינטגרלי של דיסציפלינות שונות, בפרט בתחומי המדע, הטכנולוגיה וההנדסה (STEM). שילוב יישומים מהעולם האמיתי בתחומי ה-STEM בלימודי המתמטיקה מאפשר לתלמידים ליישם ידע, יכולות ומוטיבציה ללמידה, אשר נדרשים מבוגרי מערכת החינוך כאזרחים פעילים המודעים לסביבתם. יש בכך גם יכולת לתרום למאמץ העולמי הנוגע להגדלת ההון האנושי אשר בוחר בלימודים ותעסוקה עתידית במקצועות ה-STEM (Cai et al., 2014; Geiger, 2011). מידול מתמטי מהווה גישה יעילה לשילוב מתמטיקה עם הקשרים רלוונטיים מתחומי ה-STEM (Kohen & Orenstein, 2021), ומתייחס ליכולת לפתור בעיות מהעולם האמיתי תוך שימוש בכלים מתמטיים (Blum & Leiss, 2006; Kaiser, 2007). יכולות מידול מתמטי הן מיכולות הליבה של האוריינות המתמטית והן נמדדות במערכות חינוך ברחבי העולם באמצעות מבחני פיזה הבינלאומיים על בסיס חשיבותן לעתיד בוגריהן. בהקשר הישראלי, ממצאי מבחני פיזה העדכניים (OECD, 2023) מציגים הישגים נמוכים יחסית במתמטיקה בקרב תלמידי חטיבות הביניים לעומת ממוצע ה-OECD, בפרט בקרב דוברי העברית חלה ירידה של 12 נקודות במתמטיקה. ככלל תלמידי ישראל הציגו פערים בכל מיומנויות האוריינות המתמטית שנבדקו וזאת ביחס למדינות ה-OECD, וביתר שאת ביישום פתרון מתמטי, פירוש והערכה של הפתרון. בנוסף, בקרב דוברי העברית, הוצגו פערים בהישגים במתמטיקה לטובת הבנים ונמצאה שונות גבוהה בתוך ובין בתי ספר ברחבי הארץ. ממצאים אלה מדגישים את היעדרו של מצע מבוקר ושוויוני להתפתחותן של מיומנויות אוריינות מתמטית במערכת החינוך הישראלית (ראמ"ה משרד החינוך, 2023).

גם בהקשרם הבין לאומי, ממצאי מבחני פיזה מניעים צורך גובר בהוראה ולמידה של משימות מידול מתמטי במערכות חינוך באופן מבוקר, מבוסס מחקרית ובפריסה רחבה וזאת מתוך כוונה לקדם את התפתחותן של יכולות לפתרון בעיות מתמטיות בהקשר מציאותי בקרב תלמידי בית הספר (Cevikbas et al., 2021). למרות העניין הגובר במידול מתמטי והטמעתו במערכות החינוך הפורמליות, ישנם אתגרים בשילובו בתכנית הלימודים ובמתן הכשרה מתאימה למורים, בפרט כאשר המידול עוסק בהקשרים בין-תחומיים מתחומי ה-STEM (Kohen & Nitzan, 2022). בשל תפקידו המרכזי של המורה בקידום תהליכי מידול אצל תלמידים, יש צורך בתוכניות פיתוח מקצועי יעילות כדי לצייד את המורים ביכולות מידול בעצמם כלומדים, וכן כמורים אשר נדרשים להקנות יכולות אלו לתלמידיהם. בפרט, לאור הדרישה ההולכת וגוברת למתן הזדמנויות לפיתוח מקצועי אשר הינן ברות-קיימא, וניתנות ליישום בקנה מידה רחב (Prediger et al., 2019), מודגש תפקידם המכריע של מורים מובילים העוסקים בהנחיית תכניות אלו להטמעה מוצלחת (Karsenty, 2021).

מטרת הסימפוזיון

נציג מחקר רחב, אשר מעריך את הקיימות והיישומיות בקנה מידה רחב של מודל פיתוח מקצועי למורים להוראת מידול מתמטי בהקשר מדעי-הנדסי. יוצג מודל רב-שכבתי בעל שלוש רמות, שנועד לתמוך בקידום יכולות מידול בקרב מורים מובילים, מורים מטמיעים ותלמידים. שלושת המחקרים המוצגים יציגו את העשייה המחקרית בהקשר לכל שכבה של המודל. השכבה הראשונה של המודל היא תוכנית לפיתוח מקצועי שמטרתה לקדם יכולות מידול בקרב מורים מובילים למתמטיקה; השכבה השנייה של המודל היא הרחבה של השכבה הראשונה, שבה מספר רב של מורים משתתפים בהשתלמויות פיתוח מקצועי אשר מנוהלות על ידי המורים המובילים, תוך הקפדה על עקרונות הליבה של התכנית לפיתוח מקצועי מהשכבה הראשונה; השכבה השלישית כוללת את התלמידים אשר נחשפים למשימות המידול בכיתותיהם על ידי המורים המטמיעים שהוכשרו בשכבה השנייה של המודל, במטרה לפתח את יכולות המידול שלהם כחלק משיעורי המתמטיקה הבית-ספריים.

ד"ר זהבית כהן, מרצה בכירה בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, טכניון.
הדס הנדלמן, בוגרת תואר מאסטר בהנחייתה של ד"ר כהן בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, טכניון.
לירון שוורץ-אביעד, דוקטורנטית בהנחייתה של ד"ר כהן בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, טכניון.
אורית כהן-ניסן, דוקטורנטית בהנחייתה של ד"ר כהן בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, טכניון.

נושאי המחקר

אסטרטגיות ליישום תוכנית לפיתוח מקצועי לקידום הוראת מידול מתמטי בקרב מורים מובילים
הדס הנדלמן וזהבית כהן

מבוא

החינוך לקיימות מתייחס לתפיסה רחבה של הקיימות במערכת החינוך, אשר בבסיסה השקפה הרואה במשברים הסביבתיים הזדמנות לגדל דור שיצור חברה מתחשבת ומודעת יותר. המידול המתמטי משמש ככלי חשוב להשגת מטרות אלו, שכן, מדובר בתהליך מחזורי המתחיל ומסתיים במצבים מהעולם האמיתי שאינם קשורים למתמטיקה. בתהליך זה מתבצע הקשר לעולם המתמטי במטרה למצוא פתרון מתמטי לאתגרים העולים מהמציאות בה אנו חיים (Wiegand & Borromeo Ferri, 2023). המידול המתמטי מקבל לאחרונה משמעות מרכזית בנושא החינוך המתמטי, וקידום התלמידים מושג במידה רבה בזכות מורים המסייעים בכך (Cai et al., 2014; Kaiser, 2020). חוקרים מדגישים את הצורך בהכשרה של מורים באמצעות סביבת פיתוח מקצועי יעודית אשר תומכת בפיתוח יכולות המידול של המורים, ראשית עבור עצמם כלומדים, ולאחר מכן לצורך יישום הוראה מקדמת מידול בכיתותיהם. לצד הצורך בתוכניות לפיתוח מקצועי, אתגר מתמשך הינו הרחבת השפעתם בקנה מידה רחב, אשר מאפשרת הטמעת תכני התוכנית בקרב מורים רבים, ובהמשך לכך – בכיתותיהם לצורך קידום יכולות המידול המתמטי בקרב תלמידיהם. אולם, למרות החשיבות הרבה לתוכניות לפיתוח מקצועי בקנה מידה רחב, הספרות המקצועית הנוגעת בהערכת יכולת זו היא דלה. מחקר זה מתמקד במודל פיתוח מקצועי התומך ביכולת התוכנית להיות מיושמת ביעילות בקנה מידה רחב בשתי שכבות: השכבה הראשונה הינה תוכנית לפיתוח מקצועי המיועדת למורים מובילים, והשכבה השנייה הינה תוכנית לפיתוח מקצועי המיועדת למורים המשתתפים בתוכניות לפיתוח מקצועי בהובלת המורים המובילים מהשכבה הראשונה (Prediger et al., 2019). המודל כולל יישום שתי אסטרטגיות הטמעה, מערכתית וחומרית, תוך שילוב המאפיינים של תוכנית הכשרה יעילה (Darling-Hammond et al., 2017). הנקשרים לכל אסטרטגיה. משתתפי המחקר הינם 36 מורים מובילים שהשתתפו באחד משני סבביה במהלך השנים האקדמיות 2020-21 ו-2021-22. כלי המחקר כוללים: (1) שאלוני רפלקציה ודיווחי הטמעה שמטרתם לבחון את אופן יישום אסטרטגיות ההטמעה תוך זיהוי מאפייני התוכנית שבאו לידי ביטוי מנקודת מבטם של המורים הן כלומדים בשכבה הראשונה והן כמובילי תוכנית הכשרה בשכבה השנייה; (2) ראיונות אישיים עם מנחות התוכנית לפיתוח מקצועי בשכבה הראשונה – תוכנית למורים מובילים, שמטרתם לבסס את המידע בנוגע ליכולות המידול של המורים ולמאפייני התוכנית שתמכו במורים המובילים כלומדים וכמובילי תוכניות לפיתוח מקצועי, מנקודת מבטם של המנחים.

ממצאים עיקריים

על מנת לבחון את המאפיינים שבאו לידי ביטוי בתהליך הלמידה של המורים, נעשו מבחני ANOVA לבחינת ההבדלים באופן שבו חוו המורים את מאפייני התוכנית אשר חולקו לשני אשכולות בהתאם לאסטרטגיות ההטמעה.

יישום אסטרטגיות ההטמעה בשכבה הראשונה – המורים כלומדים

ביישום האסטרטגיה המערכתית, נמצאו הבדלים מובהקים מנקודת מבטם של המורים המובילים כלומדים, $F(3,51)=5.137, p<.01, \eta^2=.232$. המורים דיווחו כי המאפיין משוב ורפלקציה נמצא בולט יותר משיתוף פעולה וזמן ממושך. המאפיין למידה פעילה נמצא דומה מבחינת התבלטותו לשאר המאפיינים. גם ביישום אסטרטגיית החומרים, נמצאו הבדלים מובהקים במאפיינים השייכים לאשכול זה, $F(2,51)=21.088, p<.001, \eta^2=.453$. נמצא כי המאפיין אימון ותמיכת מומחה נתפס בעיני המורים הלומדים כמאפיין הבולט ביותר.

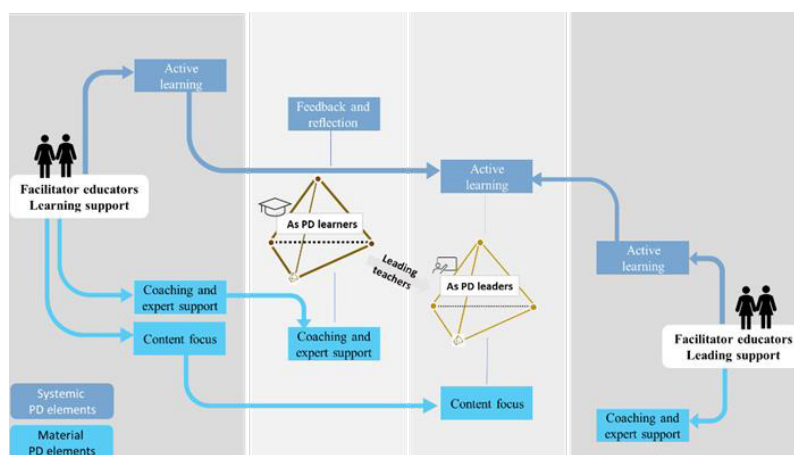
יישום אסטרטגיות ההטמעה בשכבה השנייה – המורים כמנחים

ביישום האסטרטגיה המערכתית, נמצאו הבדלים מובהקים מנקודת מבטם של המורים המובילים כמנחים $F(3,41)=5.375, p<.005, \eta^2=0.282$. המאפיין למידה פעילה נמצא בולט יותר מהמאפיינים

האחרים, למעט המאפיין שיתוף פעולה. גם ביישום האסטרטגיה החומרית, נמצאו הבדלים מובהקים מנקודת מבטם של המורים המובילים כמנחים, $F(2,42) = 15.30, p < .001, \eta^2 = 0.422$. המאפיין תוכן ממוקד נמצא כמאפיין הבולט והמשמעותי ביותר שהמורים בחרו להדגיש במהלך המפגשים שהנחו. בשילוב ממצאי הראיונות עם מנחות ההשתלמות, ניתן לראות (איור 1) הלימה בין האופן שבו המנחות יישמו את האסטרטגיות והדגישו מאפיינים מסוימים לאופן שבו המורים המובילים בחרו לעשות זאת בהנחייתם את השכבה השניה. הממצאים הללו מעידים על האופן שבו תוכנית ההכשרה מתרחבת לרמה הבאה תוך שמירה על יציבותה ועקרוניותה. בפרט, ממצאי המחקר מעידים על המאפיינים משוב ורפלקציה ותמיכת מומחה כמאפיינים התורמים ביותר לתהליך הלמידה של המורים המובילים, ואילו, המאפיינים תוכן ממוקד ולמידה פעילה כתומכים במורים המובילים בתהליך ההטמעה של בעיות מידול מתמטי בתוכנית לפיתוח מקצועי במסגרת הובלתם.

איור 1

אופן התרחבות התכנית בקנה מידה רחב בהיבט של יישום אסטרטגיות ההטמעה



פעולות התומכות בהוראת מידול של מורים משתלמים ביחס לשלבי המידול השונים

לירון שוורץ-אביעד וזהבית כהן

מבוא

בשנים האחרונות מידול מתמטי הפך למרכיב חשוב בחינוך המתמטי ברחבי העולם (Kaiser, 2020). מידול מתמטי מוגדר בתור תהליך מעגלי הכולל בתוכו 4 שלבים עיקריים: (1) הבנה והפשטה; (2) מתמטיזציה; (3) חקירת המודל; ו-(4) פירוש והערכה (Kaiser & Stender, 2013). מאחר ופיתוח משימות מידול הינו תהליך מאתגר, וספציפית כל שלב במידול מהווה קושי קוגניטיבי בפני עצמו (Wess et al., 2021), מורים נדרשים ליכולות ייחודיות להם על מנת ללמד הוראת מידול בצורה מיטבית. בורומא-פרי ובלום פיתחו מודל המתאר 5 יכולות מרכזיות להוראת מידול אפקטיבית: (1) יכולת תיאורטית; (2) יכולת מבוססת משימה; (3) יכולת הוראה; (4) יכולת דיאגנוסטית ו-(5) יכולת הערכה (Borromeo-Ferri & Blum, 2010). המחקר הנוכחי מתמקד ביכולת ההוראה של מורים, אשר מוגדרת כיכולת לתכנן ולבצע שיעורי מידול, וכוללת את הידע של התערבויות התומכות בתהליכי מידול של התלמידים. כמו כן, היכולת כוללת שימוש בפעולות התומכות בהוראת מידול אפקטיבית בכיתה. לאחרונה, מחקרים רבים בחנו שיטות הוראה אפקטיביות להוראת מידול בכיתה (Stillman, Kaiser & Lampen, 2020). אולם, טרם נבחנו כיצד באות לידי ביטוי פעולות המורים התומכות בהוראת מידול בפועל בכיתה בהקשר לשלבי המידול השונים, ומהן תפיסות המורים לגבי חשיבות שלבי המידול. ספציפית, חשוב לבחון באילו שלבי מידול המורים נותנים דגש ומשקיעים את מרב הפעולות התומכות בהוראת מידול ובאילו שלבים פחות, על מנת לספק להם תמיכה הולמת בהשתלמות שתוביל אותם לשימוש בפעולות התומכות בהוראת מידול בצורה אחידה לאורך שלבי המידול השונים.

מטרות המחקר הנוכחי הינן: (1) לבחון את תפיסות המורים כלפי החשיבות של שלבי המידול, (2) לבחון כיצד באות לידי ביטוי פעולות המורים התומכות בהוראה בשלבי המידול השונים, ו-(3) לבחון אם קיים קשר בין תפיסות המורים כלפי חשיבות שלבי המידול לבין אופן הביטוי של המורים בפעולות התומכות בהוראה בשלבי המידול השונים. משתתפי המחקר הינם 78 מורי מתמטיקה לחטיבות הביניים

הנמוכות אשר השתתפו בתוכנית לפיתוח מקצועי להוראת מידול מתמטי בשנה הנוכחית, בהקשר של השכבה השנייה של המודל. במסגרת התוכנית, המורים נדרשו להטמיע 3 משימות מידול מתוך המשימות שנלמדו בהשתלמות, בכיתות הלימוד שלהם. לאחר כל הטמעת משימה בכיתה, המורים מילאו דיווח-עצמי הכלל שאלה סגורה ופתוחה, שמטרתו לזהות כיצד באו לידי ביטוי הפעולות התומכות בהוראה בשלבי המידול השונים. בשאלה הסגורה, המורים התבקשו לדרג באחוזים (1-100%) את המידה בה ביצעו פעולות התומכות בהוראת המשימה בכיתה בכל אחד משלבי המידול השונים, כך שסך כל יהיה 100%. בשאלה הפתוחה, המורים התבקשו להסביר ולנמק את הדירוג שביצעו בשאלה הסגורה, תוך התייחסות לתפיסות שלהם לגבי חשיבות שלבי המידול השונים להוראת מידול. בנוסף, התבצעו ראיונות חצי-מובנים עם 3 מורים לאחר שהטמיעו משימת מידול בכיתה, במטרה לבחון את תפיסות המורים לגבי חשיבות שלבי המידול השונים להוראת מידול.

ניתוח הנתונים כלל מבחני ANOVA מדידות חוזרות חד-כיווני לבחינת ההבדלים בשימוש בפעולות התומכות בהוראה על ידי המורים בשלבי המידול השונים, וכן ניתוח תוכן איכותני (Hsieh & Shannon, 2005) של השאלה הפתוחה והראיונות לבחינת תפיסות המורים כלפי החשיבות של שלבי המידול, וניתוח Chi-Square להערכת תפיסות אלו, והקשר שלהן לדירוג הפעולות התומכות בשלבי המידול השונים.

ממצאים עיקריים

בהתייחס לתפיסות המורים, בניתוח נמצא כי המורים הצהירו יותר על חשיבות שני שלבי המידול הראשונים, הבנה והפשטה ומתמטיזציה, לעומת שני שלבי המידול האחרים, חקירת המודל ופירוש והערכה $\chi^2(3) = 72.454, p < .001$.

בהתייחס לדירוג שהתקבל בדיווחים העצמיים, המורים הצהירו על פעולות התומכות בהוראת מידול בכל שלבי המידול השונים. עם זאת, בהתייחס לשני שלבי המידול האחרונים, חקירת המודל ופירוש והערכה, המורים דיווחו על ביצוע פעולות תומכות ברמה נמוכה באופן מובהק לעומת תמיכתם בשלבי הבנה והפשטה. כמו כן, תמיכתם בשלב פירוש והערכה נמצאה נמוכה באופן מובהק מתמיכתם בשלב המתמטיזציה, $F(1,213) = 7497.3, p < .001, \eta^2 = 0.972$.

לבסוף, נמצא כי קיימת תלות מובהקת בין תפיסות המורים כלפי חשיבות שלבי המידול לבין הביטוי בפועל של פעולות המורים התומכות בהוראת מידול בשלבים השונים, $\chi^2(12) = 149.95, p < .001$. מניתוח ראיונות המורים עלה כי שני השלבים הראשונים של המידול, הבנה והפשטה ומתמטיזציה, נתפסו בעיני המורים כדומיננטיים ביותר. לעומת זאת, שלב פירוש והערכה נתפס בעיני המורים כפחות משמעותי להוראה משאר השלבים השונים, וכן המשמעות שלו לעיתים לא הייתה ברורה בעיני המורים.

חקר יכולות מידול מתמטי בקרב תלמידי חטיבת ביניים: מיקוד בהבדלים מגדריים ושיוך אזורי

אורית כהן-ניסן וזהבית כהן

מבוא

הטמעת משימות מידול מתמטי בתוכנית הלימודים הבית ספרית מכוונת לקדם יכולות לימודיות לפתרון בעיות בהקשר מציאותי. תהליך מידול מתמטי ממוקד בבנייתו של מודל מתמטי הנותן מענה לבעיה בהקשר המציאותי (Blum & Niss, 1991; Niss & Blum, 2020). תהליך זה נסמך על יכולות לימודיות של הפותר להבין את הבעיה המציאותית ולפשטה למודל מציאותי, לבנות מודל מתמטי מהמודל המציאותי, לפתור שאלות מתמטיות בתוך המודל המתמטי, לפרש ולתקף את התוצאות המתמטיות בהקשרן המציאותי (Kaiser, 2007; Maaß, 2006). תלמידים רבים חווים אתגר קוגניטיבי להתקדם בשלבי תהליך המידול ולהשלימו, בשל קושי אובייקטיבי לפתח יכולות אלה באופן עצמאי. הטמעת משימות מידול מציאותיות עם רקע מדעי-הנדסי בלמידה הבית ספרית מאפשרת לתלמידים להבין את החשיבות של המתמטיקה ככלי לפתרון בעיות מציאותיות מורכבות. כמו כן, קישוריות של חומרי למידה לתוכנית הלימודים הבית ספרית ותמיכה דידקטית של מורים הינן משמעותיות בתהליך קידום יכולות מידול בקרב תלמידים (Niss & Blum, 2020).

המחקר הנוכחי מתמקד בהטמעה בית-ספרית של משימות מידול מתמטי בהקשר מדעי-הנדסי המקושרות לאפליקציות טכנולוגיות מתחום ההייטק, המוכרות לתלמידים מחיי היום יום. המשימות משתלבות בתוכנית הלימודים בחטיבת הביניים ומוצגות במסגרת שיעורי מתמטיקה על ידי מורים אשר הוכשרו לכך. המורים נעזרים בסביבה לימודית מקוונת להצגת בעיה מציאותית מפושטת, ומכווינים את התלמידים בדיון להבנת המודל המתמטי המוצע לפתרון הבעיה. לסיכום השיעור, התלמידים מתנסים בפתרון מבדקים מקוונים המציגים משימות מידול מתמטי בהקשר המדעי-הנדסי אליו נחשפו בשיעור.

המבדקים כוללים משימות הממוקדות בבחינת היכולות הנדרשות להבנת הבעיה המציאותית, פתרון מתמטי לבעיה, ופירוש ותיקוף של התוצאות בהקשר המציאותי.

משתתפי המחקר הם 918 תלמידים, 35% בנים, 37% בנות, והיתר לא הזדהו. התלמידים מגיעים מ-70 כיתות ו-40 בתי-ספר שונים ומשויכים לאזורי מגורים שונים בארץ כאשר כ-12% מאזור הפריפריה, כ-33% מאזור פריפריה-בינוני, 39% מאזור המרכז, והיתר לא הזדהו. המחקר יושם בין השנים 2020-2023, בהן נחקרו שלושה מחזורים שונים של תלמידים אשר נחשפו למשימות מידול מתמטי בהקשר מדעי-הנדסי. בין משימות אלו, נכללת משימת היוטיוב הנמצאת במוקד הצעה זו, אשר עוסקת בבעיה שבה סרטון יוטיוב נעצר מפני שמהירות הצפייה בו גדולה ממהירות טעינתו. המודל המתמטי המוצע לפתרון הבעיה הוא, זמן (s)*מהירות (Mb/s)=נפח הסרטון (Mb), וזאת לצורך חישוב זמן השְׁקָה מינימלי המאפשר למנוע את עצירת הסרטון.

במסגרת כנס זה, יושם זרקור על אופן ניתוח הנתונים של מבדק מקוון אחד בנושא יוטיוב אשר תלמידים ענו עליו באופן עצמאי לאחר שנחשפו למשימה זו בכיתה. מבדק יוטיוב כולל שאלות סגורות ופתוחות כאשר כל אחת מהן ממוקדת בבחינתה של אחת מיכולות המידול הנדרשת להתקדמות בשלבי תהליך המידול המתמטי. בפרט, שתי שאלות סגורות בוחנות את רמות הביצוע של יכולת ההבנה של הבעיה המציאותית ויכולת הפירוש, ושני מקבצים נוספים (של שאלות סגורות ופתוחות) הבוחנים את רמות הביצוע של יכולת הפתרון המתמטי ויכולת התיקוף.

ניתוח הנתונים כלל זיהוי והערכה של יכולות המידול בשאלות המבדק המקוון באמצעות מחוון אשר פותח ותוקף במסגרת המחקר (Cohen-Nissan & Kohen, 2023). המענים לכל אחת מהשאלות הסגורות או הפתוחות קודדו לרמת ביצוע יכולת גבוהה כלומר מענה נכון לשאלה, או לרמת ביצוע נמוכה שמשמעותה מענה שגוי, כאשר המענים במקבץ המייצג יכולת אחת מוצעו ונבנה משתנה ממוצע עבור יכולת זו. בהתאם לכך, ניתוח המענים לשאלות בודדות הבוחנות יכולת אחת בוצע על ידי מבחני חי בריבוע, בעוד שניתוח המענים לשאלות שקובצו למשתנה רמת ביצוע ממוצע בוצע באמצעות מבחני שונות.

בהצגה זו נתמקד בשאלת המחקר הבאה: האם וכיצד (אם בכלל) נבדלים תלמידים ברמות הביצוע של יכולות המידול המתמטי במבדק יוטיוב, על בסיס הקשר דמוגרפי של מגדר ושיוך אזורי?

ממצאים עיקריים

ממצאי מבחני חי בריבוע עבור המשתנים רמות הביצוע ביכולת ההבנה והפירוש בקרב תלמידים שהזדהו על פי מגדר, מצביעים על תלות מובהקת בין רמות הביצוע של יכולת ההבנה של הבעיה המציאותית ומגדר $\chi^2(1) = 4.537, p < .05$. שכיחות רמת הביצוע הגבוהה ביכולת ההבנה בקרב הבנות עולה על שכיחות רמת ביצוע זו בקרב הבנים (86.8%, 80.7% בהתאמה). בהמשך לכך, בקרב התלמידים אשר הזדהו על פי שיוך אזורי, נמצאה תלות מובהקת בין רמות הביצוע של יכולת ההבנה של הבעיה המציאותית לבין אזור שיוך $\chi^2(2) = 10.896, p < .01$. שכיחות רמת הביצוע הגבוהה ביכולת ההבנה בקרב תלמידים מאזורי פריפריה עולה על שכיחות רמת ביצוע זו בקרב תלמידים מאזור המרכז (92.7%, 80.4%).

בהתייחס לרמות הביצוע של יכולת הפתרון המתמטי והתיקוף, ממצאי מבחני t מציגים הבדלים מובהקים בין בנים לבנות, $t(642) = -1.951, p < .001$, $t(666) = 1.738, p < .05$, בהתאמה. עם זאת, בעוד שממוצע רמות הביצוע של יכולת הפתרון המתמטי בקרב בנות ($M=74.02, SD=30.17$) נמצא גבוה יותר באופן מובהק לעומת הבנים ($M=69.07, SD=35.13$), ממוצע רמות הביצוע של יכולת התיקוף בקרב בנות ($M=74.10, SD=32.37$) נמצא נמוך יותר לעומת הבנים ($M=78.38, SD=31.50$). בהמשך, בהתייחס להבדלים בין תלמידים מאזורי שיוך שונים, ממצאי מבחן ANOVA חד-כיווני מציגים הבדלים מובהקים ברמות הביצוע של יכולת הפתרון המתמטי, $F(2,764) = 8.553, p < .001, \eta^2 = 0.022$ וברמות הביצוע של יכולת התיקוף $F(2,764) = 10.253, p < .001, \eta^2 = 0.026$. בנייתו המשך מסוג Scheffe נמצא כי בשאלות הבוחנות את רמת הביצוע ביכולת פתרון מתמטי ממוצעי רמות הביצוע של תלמידים מאזורי פריפריה-בינוני ($M=74.91, SD=31.78$) ואזור המרכז ($M=70.25, SD=32.97$). כמו כן, נמצא כי בשאלות הבוחנות את רמת הביצוע ביכולת התיקוף, ממוצעי רמות הביצוע של תלמידים מאזור המרכז ($M=82.68, SD=26.4$) הינם גבוהים באופן מובהק ממוצעי רמות הביצוע של התלמידים מאזורי פריפריה-בינוני ($M=71.46, SD=36.14$).

הסימפוזיון המוצע מציג שלושה מחקרים הנקשרים זה לזה על בסיס מודל רב-שכבתי לקידום כישורי מידול בקרב מורים מובילים, מורים מטמיעים ותלמידים. המחקר הראשון מציג את השכבה הראשונה בתוכנית ההכשרה שמטרתה לקדם את יכולות המידול בקרב המורים המובילים. המחקר מתמקד בחשיבות של המורים המובילים לתהליך ההטמעה של התוכנית בקנה מידה רחב, ובוחן את אופן יישומה בשכבה השנייה המיועדת למורים המטמיעים, מנקודת מבטם.

המחקר השני מציג את השכבה השנייה של המודל בתוכנית ההכשרה המתמקדת בקידום יכולות המידול בקרב המורים המטמיעים אשר הוכשרו להוראת מידול על ידי המורים המובילים מהשכבה הראשונה. המחקר מתמקד ביכולת ההוראה של המורים המטמיעים החיונית להוראת מידול, ובוחן את תפיסות המורים כלפי חשיבות שלבי המידול, את האופן בו פעולות התומכות בהוראת מידול של מורים באות לידי ביטוי ביחס לשלבי המידול השונים, ואת הקשר ביניהם.

המחקר השלישי מציג את אוכלוסיית היעד של מודל המחקר הכולל, אלה הם התלמידים הלומדים משימות מידול מתמטי בשיעורי המתמטיקה בבתי הספר, עם מוריהם אשר הוכשרו להוראת הנושא. מנקודת מבט של למידה של נושא חדשני במסגרת הבית ספרית, המחקר מתמקד בחקר היכולות והמוטיבציה של תלמידי חטיבת הביניים בלמידה של משימות מידול בהקשר מדעי-הנדסי לאור התמיכה הדידקטית של חומרי הלמידה המקוונים וההוראה המתווכת בשלבי תהליך המידול. בסימפוזיון יועלו נקודות לדיון אשר יתייחסו בין היתר ל:

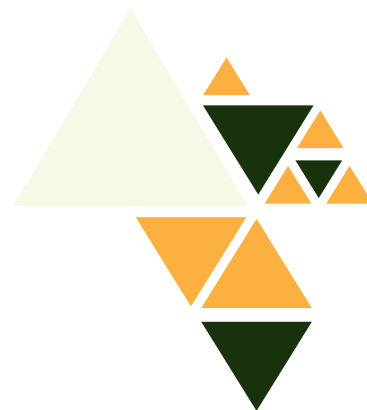
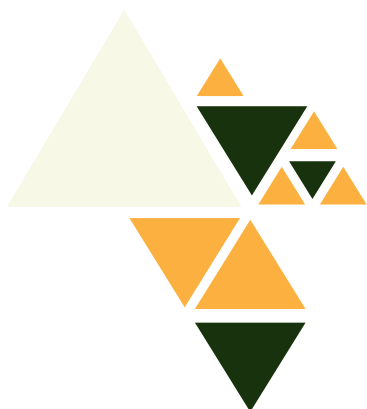
- (1) מה תפקידם של המורים המנחים להטמעה בקנה מידה רחב? בפרט, האם וכיצד המודל לפיתוח מקצועי למורים להוראת מידול מתמטי המוצע יכול לתת מענה ולשפר את הישגי התלמידים?
- (2) התאמת משימות מידול מתמטי בהקשר מדעי-הנדסי ללומדים שונים, הן מורים והן תלמידים, ובפרט – כיצד ניתן להתבסס על למידה מסוג זה לצורך צמצום (ולא הרחבת) פערים בין אוכלוסיות שונות.
- (3) המחקר הנוכחי בוחן תהליך מידול מכוון באמצעות חומרי למידה ייעודיים והוראה מתווכת. האם אופן יישום זה של מידול מתמטי עשוי לתרום להטמעתו בהקשר הבית ספרי, מהן המגבלות וכיצד ניתן לגשר עליהן?

רשימת מקורות

- ראמ"ה משרד החינוך. (2023). *מחקר פיזה 2022 (PISA) אוריינות במתמטיקה, במדעים ובקריאה: תמונת מצב תלמידים בני 15*. נלקח מ: <https://meyda.education.gov.il/files/Rama/PISA-2022-report.pdf>
- Blum, W. & Leiss D. (2006). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "Filling up". In Haines et al. (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood Publishing.
- Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2010). Mathematical modelling in teacher education- Experiences from a modelling seminar. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *European Society for Research in Mathematics Education – Proceedings of CERME 6*, pp. (2046–2055).
- Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J. A., Borromeo Ferri, R., Borba, M., Geiger, V., et al. (2014). Mathematical modeling in school education: Mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education perspectives. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th conference of the international group for the psychology of mathematics education and the 36th conference of the North American chapter of the psychology of mathematics education* (p. 145-172). Vancouver: PME.
- Cevikbas, M., Kaiser, G., & Schukajlow, S. (2021). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics*, 109, 205–236.

- Cohen-Nissan, O., & Kohen, Z. (2023). Secondary school students' competencies and motivation to engage in mathematical modelling tasks in a virtual learning environment. *Frontiers in Education*, 8.
- Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., Gardner, M. (2017). Effective Teacher Professional Development. Palo Alto, CA: Learning Policy Institute. <https://doi.org/10.54300/122.311>.
- Geiger, V. (2011). Factors affecting teachers' adoption of innovative practices with technology and mathematical modelling. *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA14*, 305–314.
- Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, 15(9), 1277–1288.
- Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 110–119). Horwood.
- Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 553–561). Springer International Publishing.
- Kaiser, G., & Stender, P. (2013). Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 277–293). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Karsenty, R. (2021). Implementing professional development programs for mathematics teachers at scale: What counts as success?. *ZDM–Mathematics Education*, 53(5), 1021–1033.
- Kohen, Z. & Orenstein, D. (2021). Tech related real-world problems and their modeling to secondary mathematics curriculum. *Educational Studies in Mathematics*, 107(1), 71–91
- Kohen, Z. & Nitzan, O. (2022). Contextual mathematical modelling: Problem-solving characterization and feasibility. *Education Sciences, special issue on STEAM Education and Problem Solving*, 12(7), 454.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Katja Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 38(2), 113–142.
- Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. London & New York: Routledge.
- OECD (2023), PISA 2022 Assessment and Analytical Framework, PISA, OECD Publishing, Paris
- Prediger, S., Roesken-Winter, B., & Leuders, T. (2019). Which research can support PD facilitators? Strategies for content-related PD research in the Three-Tetrahedron Model. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(4), 407–425.
- Stillman, G. A., Kaiser, G., & Lampen, E. (2020). Sense-making in mathematical modelling and applications educational research and practice. *Mathematical Modelling Education and Sense-making*, 15–29.
- Wess, R., Klock, H., Siller, H. S., & Greefrath, G. (2021). *Measuring professional competence for the teaching of mathematical modelling: A test instrument* (p. 129). Springer Nature.
- Wiegand, S., & Borromeo Ferri, R. (2023). Promoting pre-service teachers' professionalism in steam education and education for sustainable development through mathematical modelling activities. *ZDM – Mathematics Education*.

מיצגים





מבוא

כל תיכונסט בישראל יכול להגיש לבגרות עבודת גמר בהיקף של 5 יחידות לימוד בתחום בחירתו. בתהליך חיבור של עבודת גמר, התלמידים אמורים ללמוד באופן עצמאי ולהשיג או להעמיק ניסיונות ראשונים של מחקר. קיימות הנחיות של משרד החינוך לגבי הדרישות, מבנה העבודה והלו"ז (משרד החינוך, ח. ת.).

בשלב הראשון נדרש מהתלמידים להגיש הצעת מחקר. לתלמידים מוקצה מנחה אישי, חוקר מנוסה או דוקטורנט שמקבל תשלום קבוע לכל עבודה. גם הבודקים החיצוניים מקבלים תשלום לפי עבודה. תלמידים והוריהם יכולים להחליט אם להצטרף באופן פרטי לתוכנית של עבודות גמר. עבור תלמידים שמצטרפים לתוכנית אלפא למחוננים, ההגשה של עבודת גמר היא חובה ומהווה חלק מהמלגה (מרכז מדעני העתיד, ח. ת.). מרכזים של תוכנית אלפא קיימים באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה העברית בירושלים, בטכניון, באוניברסיטת בן גוריון בנגב, במכון ויצמן למדע, באוניברסיטת אריאל בשומרון (לבנות בלבד) ובאוניברסיטת בר-אילן. כדי להתקבל לתוכנית אלפא, התלמידים צריכים לעבור מבחן מחוננים, מבחנים נוספים בסגנון של מבחן פסיכומטרי וראיונות. בין היתר נבדקת רמת האנגלית שלהם. תכנית אלפא מלווה בתוכנית חברתית.

מחוננים מוגדרים כאנשים סקרנים בעלי רמה גבוהה של חשיבה. האיתור הוא בדרך כלל דרך מבחנים, כאשר 3% הנבדקים שקיבלו את ההישגים הטובים ביותר הם מחוננים, ואלה שבין 5% החזקים ביותר, אך לא בין 3% החזקים ביותר, הם מצטיינים. הגדרה זו מתייחסת לתוצאות מבחן ולא משקפת בהכרח את הניסיון של מורות (או מורים) שמתארים תלמידים מחוננים כיצירתיים יותר, בעלי זיכרון טוב, הבנה מהירה וכתלמידים שזקוקים לפחות תרגול.

מטרת ושאלת המחקר

המתמטיקה היא תחום מרכזי בעידן הטכנולוגיה. לכן, חשוב מאוד לתת לתלמידים בסיס טוב כדי שיוכלו להתמודד עם הדרישות של תקופה זו ושל שוק העבודה שמחכה להם. בנוסף, חשוב לאתר ולקדם תלמידים מצטיינים ומחוננים שמתמודדים בקלות עם תחום המתמטיקה ולתת להם כלים כדי לפתח את כישוריהם.

(Özdemir & Isiksal Bostan, 2021; Roberts, Inman, & Robins, 2021; Singer, Sheffield, Freiman, & Brandl, 2016).

קיימות תוכניות רבות לקידום של תלמידים מצטיינים במתמטיקה: תחרויות (בראש וראשונה אולימפיאדות במתמטיקה, כולל ההכנה לאולימפיאדה הבינלאומית), חוגים ומעגלים מתמטיים שלרוב מעוררים את היצירתיות של משתתפים דרך התעסקות בנושאים של העשרת המתמטיקה (recreational mathematics), תוכניות שמאיצות את לימודי המתמטיקה ושמובילות לבגרות במתמטיקה בגיל צעיר יותר ועבודות גמר במתמטיקה.

אין מחקרים על עבודות גמר של תלמידים מחוננים בתחום המתמטיקה. ברוב הספרות קיימת התייחסות לתפקידם של מורים ומורות ושל ההורים בקידום של מחוננים, לתחרויות, לתוכניות העשרה ולתוכניות תאוצה (Singer, Sheffield, Freiman, & Brandl, 2016).

יש התייחסות לעבודות חקר במסגרת של מחנות קיץ (Berman, Goldberg, & Koichu, 2005). המטרה של מחקר זה היא להעריך את תרומתן של עבודות גמר במתמטיקה להתקדמות ולהתפתחות של תלמידים מחוננים. מחקר זה מקדים פרויקט מקיף יותר.

שאלת המחקר היא "כיצד מתמודדים תלמידים מחוננים עם עבודות גמר במתמטיקה מבחינת פיתוח הידע המתמטי, רכישה של שיטות מחקר וניהול הזמן?".

כל התלמידים אליהם אנו מתייחסים בחקר מקרה זה כתבו את עבודת הגמר כחלק מתוכנית אלפא.

מתודולוגיה

מחקר זה הוא איכותי ומהווה חקר מקרה. שיטות המחקר הן תצפיות, בדיקות של הצעות מחקר, עבודות גמר והטיטוטות שלהן וראיונות. במחקר זה נבדק התהליך של חמש עבודות במתמטיקה שהוכנו על-ידי מחוננים. התלמידים שכבר מעל גיל 18 התראיינו.

תוצאות

מהשוואה של טיטוטות של הצעות מחקר ופרקי עבודות עם ההצעות והעבודות הסופיות ניתן להסיק התקדמות של התלמידים והתלמידות ביכולתם המחקרית: סקר הספרות מאורגן יותר, כלי המחקר נבחרים עם שיטה ומחשבה, הכתיבה הופכת לברורה יותר והביבליוגרפיה מסודרת יותר. יחד עם זאת, יש לציין שכבר יש לתלמידים ולתלמידות מעט ניסיון עם עבודות חקר שהוטלו עליהם בבית הספר. בדרך כלל מדובר על סקר ספרות בו יש לקרוא ולסכם דברים שכבר ידועים או משימות חקר במתמטיקה.

הקושי הבולט בכל עבודות הגמר אליהן אנו מתייחסים בחקר מקרה זה, הוא ניהול הזמן. בתקופת כתיבת עבודת הגמר, התלמידים לומדים בכיתות י' וי"א ועליהם ללמוד למבחני בגרות. מעבר לכך, משתתפים מחוננים פעמים רבות ביותר מתוכנית אחת – הם משתתפים בתוכניות נוספות כגון בגרות בגיל צעיר יותר, קורסים באוניברסיטה או אולימפיאדות.

בבקשה להעריך או לדרג את התוכניות השונות שקיימות עבור מחוננים ענו המראיינים שהשילוב עם תוכניות מלוות חברתיות הוא קריטריון חשוב. יש לציין שבמקרה של עבודות גמר במסגרת של תוכנית אלפא האינטראקציה החברתית היא חלק מהתוכנית.

דיון

לפי מה שידוע עד כה, התוכנית של עבודות גמר היא תוכנית שמתאימה כדי לקדם תלמידים ותלמידות מחוננים. בראש ובראשונה משתתפים בתוכנית אלפא נהנים מהתהליך, גם עקב התוכנית המלווה החברתית. יחד עם זאת, חקר המקרה המוצג כאן אינו מקיף. כדאי לחקור קבוצות גדולות יותר של תלמידים ותלמידות, לפתח שאלונים ולהוסיף מרכיב כמותי למחקר.

ביבליוגרפיה

מרכז מדעני העתיד. (ח.ת.). אלפא:

<https://www.madaney.net/site/programs/alpha/>

משרד החינוך. (ח.ת.). עבודות גמר. פורטל עובדי הוראה:

<https://pop.education.gov.il/final-projects>

Berman, A., Goldberg, F., & Koichu, B. (2005). 'Good Research' Conducted by Talented High School Students: The Case of Sci-Tech. *Gifted Education International*, 20(2), 220-228.

Roberts, J., Inman, T., & Robins, J. (2021). *Introduction to Gifted Education*. New York and London: Routledge.

Singer, F., Sheffield, L., Freiman, V., & Brandl, M. (2016). Research On and Activities for Mathematically Gifted Students. *ICME-13 Topical Surveys*. Hamburg: Springer Open.

Özdemir, D. A., & Isiksal Bostan, M. (2021). Mathematically Gifted Students' Differentiated Needs: What Kind of Support Do They Need? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52, 65-83.



מבוא ורקע תיאורטי

קידום יצירתיות מתמטית מהווה מטרה חשובה בחינוך למתמטיקה, שעשוי לתרום להתרחשותה של למידה משמעותית והשגת אוריינות מתמטית בקרב תלמידים. לטענת לייקן (Leikin, 2009) יצירתיות נתפסת בדרך כלל כיצירת רעיונות, גישות ותוצרים מקוריים והיא מתבטאת ביכולת לשער השערות, לחקור, לשאול שאלות, לטעון, להסביר ולהפריך. אחת התכונות של יצירתיות מתמטית היא יכולת שטף של רעיונות (fluency). שטף הוא מספר התשובות או הרעיונות שהועלו במסגרת הזמן המוקצב (1974 Torrance). תכונה נוספת היא גמישות. גמישות היא מציאת פתרונות המבוססים על רעיונות שונים או מספר הקטגוריות של התשובות או הרעיונות שהועלו (Torrance, 1974). תכונה נוספת של יצירתיות מתמטית היא מקוריות או חידוש, היכולת ליצירת רעיונות חדשים. מקוריות ניכרת בתגובה בלתי שגרתית, יוצאת דופן, שלא הוצגה על ידי משתתפים אחרים בתהליך היצירתי. עבודת מחקר זו בחנה את היצירתיות הקבוצתית בסביבת עבודה קבוצתית פנים-אל-פנים לעומת סביבת עבודה וירטואלית בקרב תלמידי י"ב. שאלת המחקר היא: האם יש הבדל בשלושת המדדים של יצירתיות (שטף, גמישות המקוריות) בקרב תלמידים שעבדו בקבוצות פנים-אל-פנים לבין תלמידים שעבדו בקבוצות בסביבה וירטואלית?

מתודולוגיה:

במחקר השתתפו 12 תלמידי כיתות י"ב שלומדים במגמות מתמטיקה 4 ו-5 יחידות. התלמידים חולקו לארבע קבוצות. בכל קבוצה השתתפו שלושה תלמידים. כל התלמידים שהשתתפו במחקר למדו באותו תיכון במסגרת החינוך הפורמלי ולכולם אותו מורה למתמטיקה. המשתתפים במחקר עבדו על שלושה פעילויות הנחשבות כמעודדות יצירתיות מתמטית. לדוגמא, במטלה הראשונה, "לוח מסמרים", התבקשו התלמידים למצוא כמה שיותר מצולעים ששטחם שתי יחידות (שגיאה! מקור ההפניה לא נמצא).

ממצאים

באור 1 מוצגים הקטגוריות של הפתרונות ודוגמאות לקטגוריות של מטלה 1.

איור 1 – קבוצת פא"פ 2: קטגוריות ודוגמאות למטלת לוח המסמרים

קטגוריה מקבילית	ריבוע	מלבן	משולש	טרפז	צורות מורכבות מצורות מוכרות	צורות הפוכות
דוגמה						

טבלאות 1, 2 ו-3 מציגות את ריכוז מדדי היצירתיות עבור כל קבוצה במדדי שטף, גמישות ומקוריות.

טבלה 1

ממצאי מרכיבי היצירתיות במטלה 1 של כל קבוצות המחקר

יצירתיות	קבוצות פנים אל פנים	קבוצות זום
קבוצת פא"פ 1	קבוצת פא"פ 2	קבוצת זום 1
קבוצת זום 2	קבוצת זום 1	קבוצת זום 2

שטף	11	18	24	16
גמישות	6	7	7	6
מקוריות	0	4	9	3

טבלה 2

ממצאי מרכיבי היצירתיות במטלה 2 של כל קבוצות המחקר

יצירתיות	קבוצות פנים אל פנים				קבוצות זום
	קבוצת פא"פ 1	קבוצת פא"פ 2	קבוצת זום 1	קבוצת זום 2	קבוצת זום 2
שטף	24	36	26	17	
גמישות	6	7	7	6	
מקוריות	2	3	5	2	

טבלה 3

ממצאי מרכיבי היצירתיות במטלה 3 של כל קבוצות המחקר

יצירתיות	קבוצות פנים אל פנים				קבוצות זום
	קבוצת פא"פ 1	קבוצת פא"פ 2	קבוצת זום 1	קבוצת זום 2	קבוצת זום 2
שטף	10	17	8	4	
גמישות	6	7	4	4	
מקוריות	6	11	3	0	

דיון:

באופן גלובלי, במדדי השטף והמקוריות היה יתרון לקבוצות הפא"פ. עדיין ניתן לראות שהתלמידים שעבדו בשתי הסביבות הצליחו להפגין שטף רעיונות וגמישות מחשבתית ומקוריות. נראה כי עבודה בקבוצות בשתי סביבות הפא"פ והזום מעודדת את השטף ומאפשרת לתלמידים לפתח גמישות מחשבתית. כמו כן, התלמידים בקבוצה נחשפים לרעיונות שונים לפתרון מטלות פתוחות והדבר מאפשר לתלמידים להשתחרר מקיבעויות (Molad et al., 2020). לסיכום, הממצאים מרמזים כי עדיין יש עדיפות לעבודה קבוצתית פנים-אל-פנים. הממצאים של המחקר הנוכחי דומים למחקרים שנערכו בצל משבר הקורונה, שביקשו להבין את המשמעות של המעבר מלמידה פיזית, פנים-אל-פנים ללמידה מרחוק. לדוגמה, מחקרם של פררה וגמג' (Perera & Gamage, 2021) מצאו כי קיים פער בהצלחה של התלמידים בלמידה מרחוק לטובת הלמידה פנים-אל-פנים.

מקורות

- Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, (pp.129-145). Sense Publisher.
- Molad, O., Levenson, E., & Levy, S. (2020). Individual and group mathematical creativity among post-high school students. *Educational Studies in Mathematics*, 201-220, 104.
- Perera, E., & Gamage, K. A. (2021). Learning Remotely during a Pandemic: Are Students in a Developing Country Fully Equipped with Tools for Swift Changes? *Sustainability*, 13(15), 1-20.
- Torrance, E. P. (1974). The Torrance Test on creative thinking: Norms – Technical manual. Scholastic Testing Service.



מבוא ורקע תיאורטי

בשנים האחרונות חלה עלייה בהשכלתן של נשים דוברות ערבית, אך חלק ניכר מהן, פונות ללימודי חינוך ותעסוקה במערכת החינוך, אף ששוק עבודה זה רווי (פוקס ווילסון, 2018). נוסף לכך, אחוז הבנות דוברות ערבית הנבחרות בחינת הבגרות ברמת חמש יחידות לימוד במתמטיקה גבוה מאחוז הבנים דוברי ערבית הנבחרים אותה בחינה בשנים 2010-2020. ואולם נתון זה אינו תואם את אחוז דוברי העברית בישראל הנבחרים בחינת הבגרות ברמת חמש יחידות לימוד במתמטיקה, שכן אחוז הבנים גבוה יותר מאחוז הבנות (הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה, 2010-2020). לאור המצב בחברה הערבית הישראלית, מניעיהן ועמדותיהן של נשים מהמגזר הערבי בתום שנה מסיום לימודי מתמטיקה ברמת חמש יחידות בבואן לבחור לימוד אקדמי שלא נמצא בקבוצת מקצועות ה-STEM, תוך התייחסות לגורמים המשפיעים על החלטותיהן לגבי בחירת מקצועות אקדמיים שאינם בתחום STEM, כאשר החידוש הראשון של מחקר זה הוא הבנה של הגורמים המניעים את החלטותיהן בבואן לבחור לימוד אקדמי, והשני זיהוי שלושה פרופילים שונים העומדים מאחורי קבלת ההחלטות של נשים אלו.

התיאוריה מנבאת שהסטריאוטיפ המגדרי מצמצם את ביצועי הבנות במבחנים במתמטיקה, ומשפיע עליהן בבחירת מסלול לימוד אקדמי ומשלחיד עתידי, ואילו על הבנים אינו משפיע (Makarova et al., 2019). מניתוח ומחקר על אודות הסטריאוטיפ המגדרי סביב מקצועות ה-STEM נמצאו כי הנטייה להרבות בעקביות בהפרדה מגדרית בצורות שונות כמו: התנהגות, הטיות, סטריאוטיפ וכדומה בתחומים חינוכיים ותעסוקתיים תורמת באופן מכריע להפצת אמונות מגדריות-סטריאוטיפיות לגבי התאמתן הטבעית של נשים בקריירה בתחומים כמו חינוך בריאות וסעד – ממוקדי אנוש, ושל גברים בתחומים עתירי מתמטיקה (Charles & Bradley, 2009). עם זאת, תמיכה מצד המורים בכיתה באופן סמוי או גלוי בסטריאוטיפ הקשור ליכולת לפי מגדר, למשל, שבנים מצליחים טוב יותר במתמטיקה ובמדעים, יכולה להשפיע על תוצאות ה-STEM הבאות של התלמידים ולעצב אותן, כגון הרשמה לקורסים מתקדמים, בגלל השפעת הסטריאוטיפ על זהותם המתמטית והמדעית של בנים ובנות (Cheryan et al., 2015). יתר על כן, גם ההורים משפיעים על בחירת התלמידות, ולמרות שרוב ההורים מציינים שהם מתייחסים באופן שווה לבניהם ולבנותיהם, המציאות אחרת, והם מתייחסים אליהם באופן מבוסס מגדר (Eccles, 1990).

שאלות המחקר: אילו גורמים משפיעים על החלטותיהן של בנות ערביות המסיימות לימודיהן בתיכון עם חמש יחידות במתמטיקה, בנוגע למסלול האקדמי שלהן ובחורות במקצוע שאינו STEM?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו שש בנות בגיל 18 מהחברה הערבית בישראל שנה לאחר שסיימו לימודי חמש יחידות מתמטיקה ובית ספר תיכון בשנת 2021, והן תכננו ללמוד באקדמיה בשנת הלימודים (להלן: שנה"ל) תשפ"ג. איסוף הנתונים נעשה באמצעות ראיונות אישיים חצי-מובנים אחד על אחד שכללו שאלות המתייחסות לאופן קבלת החלטותיהן בבחירת מקצוע לימוד. טקסט הראיונות קודדו לקטגוריות ומיון לפי ארבעת ממדי המודל: [1] "תמיכת מורים" התמקדה אמירות שהתייחסו למורי מקצועות ה-STEM שלימדו את התלמידות בעבר; [2] אמירות שקודדו "ציפיות הורים" התמקדו במסרים הסביבתיים שקלטו התלמידות מהוריהן לגבי מקצועות הלימוד האקדמיים; [3] אמירות שקודדו "סטריאוטיפים על הזדמנויות תעסוקה" התמקדו בתפיסותיהן לגבי אופי העיסוק העתידי, מה חשוב בעת בחירתו, והקשר בין מקצוע הלימוד לתעסוקה; [4] אמירות שקודדו "השפעת עמיתים" התמקדו בהתייחסות המשתתפות לעמיתים ולחברותיהן לגבי בחירת מקצוע הלימוד האקדמי (He et al., 2020).

ממצאי המחקר מעידים שבנות מהחברה הערבית שלמדו חמש יחידות במתמטיקה נוטות לבחור מקצוע לא מתוך מקצועות ה-STEM למרות שהן מודעות ליכולותיהן, וזאת משום שהן מתחשבות בעמדות של סביבתן החברתית. למרבה הצער, תהליך קבלת ההחלטות שלהן לא נתמך במידע הולם ובסיוע מהחברה שלהן ללמוד מקצועות STEM, וניתן לומר שהשיקול העיקרי בבסיס החלטותיהן היה באיזה משלח-יד יוכלו לעסוק אחרי סיום הלימודים. כמו כן הן בחרו את מקצוע הלימוד האקדמי מתוך התחשבות בשוק העבודה המקומי והמשרות הסטריאוטיפיות המתאימות לנשים. לנוכח ממצאי המחקר הנוכחי, הבחירה האקדמית של המשתתפות הייתה קשורה קשר הדוק להזדמנויות התעסוקה, ושש המשתתפות במחקר בחנו את האפשרות של משלח-יד שבו יוכלו לעסוק אחרי סיום לימודי התואר. הממצאים מרמזים שבנות נוטות יותר לעסוק בעבודות מסורתיות ומקובלות חברתית. זאת ועוד, השפעת הסביבה הייתה דומיננטית בשיקוליהן: להורים ולסביבה היה משקל ניכר בעת בחירתן ללמוד מקצוע אקדמי.

ניתוח הראיונות זיהה שלושה פרופילים שונים המייצגים את דפוסי הבחירה של בנות ערביות שסיימו ללמוד חמש יחידות במתמטיקה לגבי מקצועות לימוד אקדמיים. הפרופיל הראשון, "החיובי", מייצג משתתפת שבחרה ללמוד פסיכולוגיה, והמניע היה רצון אישי מלווה בתמיכה חברתית ועידוד מהסביבה החברתית והמשפחתית ללמוד כל מקצוע וגם מקצועות ה-STEM. הפרופיל השני, "המעורב", מייצג שלוש משתתפות שבחרו במקצוע שאינו STEM ובתוך כך קבלת תמיכה חלקית מסביבתן. בפרופיל הזה היו הבחירות מושפעות מההורים ומעמיתים אשר לא תמכו בלמידת מקצועות STEM, בשונה מתמיכת המורים. הפרופיל השלישי, "השלילי", מייצג שתי משתתפות של המחקר שבחירתן במקצוע לימוד אקדמי הושפעה באופן כמעט מלא ממורים, ציפיות ההורים, סטריאוטיפים לגבי הזדמנויות תעסוקה ועמיתים. לפיכך הן בחרו במקצועות כגון הוראה וחינוך, וצמצמו אופציות מקצועיות רבות בשל ציפיות סוציו-מגדריות.

תרומת המחקר העיקרית היא זיהוי הגורמים המשפיעים על קבלת החלטות למקצוע לימוד אקדמי בקרב נשים מהחברה הערבית אשר למדו חמש יחידות מתמטיקה, והוא תורם להעלאת המודעות סביב החשיבות של התמיכה המשפחתית, החינוכית והחברתית לתלמידות מובילות במתמטיקה גם אחרי סיום לימודיהן בבית הספר.

רשימת מקורות

- הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה (2010-2020) השנתון הסטטיסטי לישראל. פני החברה בישראל: דוח מס' 4. ירושלים: ישראל.
- פוקס, ה' וויליסון פרידמן, ת' (2018). השתלבות נשים ערביות בשוק העבודה: השכלה, תעסוקה ושכר. מרכז טאוב לחקר המדיניות החברתית בישראל.
- Charles, M., & Bradley, K. (2009). Indulging our gendered selves? Sex segregation by field of study in 44 countries. *American Journal of Sociology*, 114(4), 924-976.
- Cheryan, S., Master, A., & Meltzoff, A. N. (2015). Cultural stereotypes as gatekeepers: Increasing girls' interest in computer science and engineering by diversifying stereotypes. *Frontiers in psychology*, 49.
- Eccles, J. S., Jacobs, J. E., & Harold, R. D. (1990). Gender role stereotypes, expectancy effects, and parents' socialization of gender differences. *Journal of social issues*, 46(2), 183-201.
- He, L., Zhou, G., Salinitri, G., & Xu, L. (2020). Female Underrepresentation in STEM Subjects: An Exploratory Study of Female High School Students in China. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(1).
- Makarova, E., Aeschlimann, B., & Herzog, W. (2019). The gender gap in STEM fields: The impact of the gender stereotype of math and science on secondary students' career aspirations. In *Frontiers in Education* (p. 60). Frontiers.



רקע תיאורטי

קיימים פערים מגדריים בהישגים במתמטיקה, רוב הזמן לטובת הבנים בחינוך העברי בישראל. בנות נוטות לחשוב שצריך להיות חכם בשביל לעסוק במתמטיקה, אך הרבה לא רואות עצמן כחכמות. במקביל, בקרב הבנים, יש הנוטים לחשוב שהמורה ידרג אותם גבוה יותר מאשר בקרב הבנות (Markovits & Forgasz, 2017). פערים במתמטיקה מושפעים מגורמים חברתיים המועברים לתלמידים על ידי מתווכים חברתיים, כמו דינמיקה כיתתית. בבתי ספר מעורבים, נמצא, למשל, בנים בכללי נוטים לראות תחרויות בכיתה כלגיטימיות, בעוד בנות בכללי נוטות לראות תחרויות כפוגעת בלמידה (Zohar & Sela, 2003). תפיסת "כוח בנות" מציינת את בעיית בנים שתלטינים בכיתות מעורבות. לפי תפיסה זאת, בנות יכולות לפתח ביטחון עצמי במתמטיקה ומדעים בכיתות נפרדות. כלומר, כיתות נפרדות מעצימות בנות. תפיסה זאת ממחישה את היתרון של כיתות נפרדות לבנות, במיוחד במתמטיקה ומדעים (Pahlke et al., 2014).

הפרדה מגדרית במתמטיקה ובמדעים מסתמכת על מספר הנחות: (1) ביטחון עצמי הוא קריטי להצלחה במתמטיקה, (2) בדרך כלל חסר לבנות ביטחון עצמי כלפי מתמטיקה, (3) והפרדה תרשה לבנות לפתח את הביטחון העצמי הנדרש. בשביל לפרט את ההבנה בתחום על פערים מגדריים, לוביאנסקי ועמיתיה (Lubienski et al., 2021) בחנו את הקשר בין מגדר, הצלחה במשימות מאתגרות, ופרמטרים פסיכולוגיים-חברתיים. הם הגדירו מושג חדש "אוריינטציה לפתרון משימות Bold", המתאפיינת ב: (1) מוכנות לתחקר את המשימה ועבודה עצמית, (2) ביטחון לפתור משימות מתמטיות קשות, (3) וגמישות בבחירת פתרון מתאים. במחקר שערך לוביאנסקי ועמיתיה (Lubienski et al., 2021) בארה"ב מצאו פערים מגדריים משמעותיים בהצלחה במשימות מתמטיות מאתגרות וביטחון מתמטי ואוריינטציה לפתרון משימות "Bold" מנבאים הצלחה זאת. הסתכלות חברתית על מתמטיקה ומגדר מזמינה מחקר על תתי-חברה, כמו החברה הדתית בישראל. המחקר הנוכחי נערך בקרב תלמידי תיכון הלומדים בבתי ספר דתיים נפרדים, במטרה לענות על השאלות הבאות:

1. אם יש הבדל בין בנים לבנות: ברמת הביצוע בפתירת משימות מתמטיות מאתגרות? באוריינטציה בפתירת משימות "Bold"? בביטחון עצמי במתמטיקה?

2. מהו הקשר בין מגדר, אוריינטציה פתירת משימות "Bold", ורמת הביצוע בפתירת משימות אלה?

מתודולוגיה

המחקר נערך בשני בתי ספרים ברמה דתית המוגדרת כ"דתי לאומי", ושייכות לאותה תנועת נוער. המשתתפים במחקר היו בכיתות י"א, ברמה של 4-5 יחידות לימוד. השתתפו 58 תלמידים ו-35 בנות. כלי המחקר מורכב משלושה חלקים והתבסס על שאלון שאמצנו מלוביאנסקי ועמיתיה (Lubienski et al., 2021) שתרגמנו לעברית תוך התאמה לקונטקסט המקומי. החלק הראשון בשאלון מורכב משמונה משימות מתמטיות, חלקם מאתגרות. המשתתפים היו צריכים לבחור תשובה מחמשת התשובות המוצגות. החלק השני בודק אוריינטציה של פתרון משימות "Bold" (לדוגמא: "אני מעדיף.ה להמציא פתרונות לבעיות מתמטיות משל עצמי, במקום לגשת לתהליכים של המורה או שספר הלימוד מראה לי"). החלק השלישי כולל שישה היגדים בודקים ביטחון מתמטי (לדוגמא: "אני יכול.ה לעשות בעיות מתמטיות מורכבות מאוד"). בחלק השני והשלישי המשתתפים נדרשו לדרג את כל היגד לפי

סולם ליקרט מ 1 (לא מסכים בכלל) עד 5 (מסכים מאוד). ניתוח הנתונים התבסס על בדיקת מבחן t למדגמים בלתי תלויים וגם על חישוב מתאמים.

ממצאים

בתשובה לשאלה הראשונה, נמצא שממוצע הבנים בביצוע משימות מתמטיות מאתגרות גבוה מהממוצע של הבנות ($M=0.793; SD=0.206$) ($M=0.555; SD=0.22$) וההבדל מובהק סטטיסטית ($P < .001$). לגבי אוריינטציה לפתרון משימות "Bold", הממוצע של הבנים גבוה יותר ($M=3.33; SD=0.662$) מהממוצע של הבנות ($M=2.95; SD=0.772$), וההבדל מובהק סטטיסטית ($P < .05$). לגבי ביטחון מתמטי, הממוצע של הבנים גדול מהממוצע של הבנות ($M=2.69; SD=0.962$), וההבדל מובהק סטטיסטית ($P < .001$). יתרה מכך, הביטחון של הבנים נוטה לכיוון "מסכים בהחלט", לעומת הביטחון של הבנות שנוטה לכיוון "לא מסכימה בכלל".

בתשובה לשאלה השנייה, נמצא שיש קשר חיובי מובהק בין כל זוג של פרמטרים אלה. הקשר בין ביטחון מתמטי לבין אוריינטציה לפתרון משימות "Bold" הוא חיובי והחזק ביותר ($\tau = .405$, $p < .001$). בדומה לו גם הקשר בין ביטחון מתמטי לציון ($\tau = .387$, $p < .001$). לעומתם, הקשר בין אוריינטציה לפתרון משימות "Bold" לציון מתון יותר ($\tau = .244$, $p < .01$) אך עדיין חיובי ומובהק. הקשר בין אוריינטציה לפתרון משימות "Bold" לבין הציון של התלמיד קיים, אך במידה פחותה מהמחקר הקודם מארה"ב. כאשר ביצענו הפרדה מגדרית, מצאנו שאצל הבנות הקשר בין בטחון מתמטי לבין ציון משוכלל הוא גדול יותר (ומובהק סטטיסטית) מהקשר שנמצא אצל הבנים (שלא יצא מובהק סטטיסטי).

דיון

הציון הממוצע של הבנים במשימות המתמטיות היה גבוה מהציון הממוצע של הבנות, בדומה לממצאים בארץ ובעולם בכיתות המעורבות (Lubienski et al., 2021). עובדה זאת, לגבי הממוצעים בארץ ובעולם, נותנת לנו כיוון שההפרדה המגדרית היא אינה הגורם לפערים המגדרים במשימות המתמטיות. הקשר בין בטחון מתמטי לבין ציון במשימות המתמטיות הוא חיובי, וכך גם הקשר בין אוריינטציה לפתרון משימות "Bold" לבין הציון במשימות המתמטיות, בדומה לממצאים מארה"ב. מחקר זה מקיף רק שני בתי ספר שאולי לא מייצגים את שאר בתי הספר הדתיים הנפרדים. עם זאת, הוא נותן ממצאים ראשוניים על פערים מגדריים לטובת הבנים בבית ספר דתיים נפרדים. דרך מחקר זה אי אפשר לזהות מגוון תופעות שאולי מיוחדות וחיוביות לכיתות נפרדות. אבל הפערים שנמצאו כאן מרמזים על פערים בחינוך מתמטי, למרות ההפרדה המגדרית שאמורה להפחית הטיות מגדריות. בנוסף להרחבת מחקר מסוג זה למדגם גדול יותר של בתי ספר, יש גם את האפשרות לכלול בתי ספר ממלכתיים כך שנוכל להבחין עד כמה תופעות אלה קשורות לתת-חברה הדתית.

הערה: מחקר זה (מס' 21/2747) נתמך על-ידי הקרן הלאומית למדע.

רשימת מקורות

- Lubienski, S. T., Ganley, C. M., Makowski, M. B., Miller, E. K., & Timmer, J. D. (2021). "Bold problem solving": A new construct for understanding gender differences in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 52(1), 12–61. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0136>
- Markovits, Z., & Forgasz, H. (2017). "Mathematics is like a lion": Elementary students' beliefs about mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 49–64. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9759-2>
- Pahlke, E., Hyde, J. S., & Allison, C. M. (2014). The effects of single-sex compared with coeducational schooling on students' performance and attitudes: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 140(4), 1042–1072. <https://doi.org/10.1037/a0035740>
- Zohar, A., & Sela, D. (2003). Her physics, his physics: Gender issues in Israeli advanced placement physics classes. *International Journal of Science Education*, 25(2), 245–268. <https://doi.org/10.1080/09500690210126766>



מבוא

מדידת זוויות ופונקציות טריגונומטריות הם נושאים מתמטיים הנלמדים בתיכון ובתואר ראשון במשך יותר ממאה שנה. הם מהווים בסיס ללימודי מתמטיקה והשימוש בהם הכרחי בדיסציפלינות שונות כגון בפיזיקה, בהנדסה, במתמטיקה שימושית ועוד. במסגרת לימודים בבתי הספר בארץ התלמידים פוגשים מדידת זוויות בגיאומטריה, בטריגונומטריה ובחדו"א. תוצאותיהם של מספר מחקרים הצביעו על כך שלתלמידים ומורים יש קושי בהבנה לגבי פונקציות טריגונומטריות (Weber, 2005 ; Thompson, Carlson, & Silverman, 2007). למידה בהשוואה, בפרט השוואה בין יחידות מדידה שונות, מאפשרת לתלמידים לחדד את תחום התקיפות של כל אחת מהיחידות ויוצרת בסיס ללמידה משמעותית (Marton, 2014). למידה מסוג זה משליכה על לימודי המשך בהשכלה גבוהה ומפחיתה סיכוי לתפישות שגויות וטעויות נפוצות. במהלך לימודיהם בבית הספר תלמידינו פוגשים שתי יחידות למדידת זוויות: מעלות ורדיאנים.

במחקר הפיילוט האיכותני (שקדי, 2014) הנוכחי בדקנו את תוכנית הלימודים של משרד החינוך לאורך כל 12 שנות הלימוד ואת ספרי הלימוד בהם משתמשים רוב מורי החטיבה העליונה ל-5 יחידות לימוד (N=4). שאלנו את השאלות הבאות:

1. האם נושאי השימוש במעלות וברדיאנים למדידת זוויות ניתנו בהרחבה בתוכנית הלימודים?
2. האם נושאי השימוש במעלות ורדיאנים מוזכרים בספרי לימוד ל-5 יחידות לימוד ובאיזה היקף?
3. האם קיים הסבר בספרי לימוד ל-5 יחידות לימוד באלו מקרים מומלץ להשתמש במעלות ובאלו ברדיאנים?
4. באלו פרקים ובאלו שלבי למידה ב-5 יחידות לימוד נכנסים הרדיאנים?

ממצאים

על פי תוכנית הלימודים תלמידינו פוגשים בבית הספר שתי יחידות למדידת זוויות: מעלות ורדיאנים. ההיסטוריה של המעלות מוזכרת בבית הספר היסודי, אך אין כל אזכור של היסטוריה המושג רדיאן בתוכנית הלימודים ובספרי הלימוד. התלמידים נפגשים בפעם הראשונה עם מדידת זוויות במעלות בבית ספר יסודי ולאחר מכן הם פוגשים את מספר π בכיתה ה' רק לצורך חישוב היקף ושטח מעגל,

ללא ציון קשר ליחידות מדידת זווית -רדיאנים. בחטיבת הביניים בלימודי גיאומטריה ובכיתה י' בטריגונומטריה התלמידים עובדים עם זוויות ביחידות מדידה של מעלות.

במסגרת לימודי 5 יחידות לימוד התלמידים פוגשים את מדידת הזוויות בבעיות בנושאים שונים. השנה (תשפ"ד) כל מדינת ישראל עברה לתוכנית חדשה במתמטיקה, אך אין שינויים מהותיים במבנה של 5 יחידות לימוד.

נמצא, כי בספרי לימוד יש הנחיה לעבוד ברדיאנים עם פונקציות טריגונומטריות, אך אין הסבר והצדקה פורמלית לכך. בבחינות בגרות ל-5 יחידות לימוד יש בעיות קיצון גיאומטריות, כאשר הנעלם הוא זווית. בבעיות מסוג זה נוצר קונפליקט בין ההרגל בגיאומטריה להשתמש במעלות לעומת דרישה לעבוד עם פונקציות טריגונומטריות ברדיאנים. הדיון בשאלות: מדוע בפונקציות הטריגונומטריות יש להשתמש ברדיאנים? אולי יש מקרים בהם בכל זאת ניתן לעבוד עם פונקציות טריגונומטריות במעלות? לא נעשה במסגרת ספרי לימוד אשר רוב תלמידי 5 -יחידות לימוד עובדים איתם. נציג דיון במספר בעיות מבחינות בגרות המדגימות את הבעיה וניתן המלצות דידקטיות למורה בהקשר זה.

סיכום

נושא השימוש במעלות וברדיאנים כיחידות מידה של זווית לא ניתן בהרחבה במסגרת תוכנית הלימודים ולא במסגרת ספרי לימוד בהם נעשה שימוש בארץ, בפרט לתלמידי 5 יחידות לימוד. הנושא הינו חשוב ודורש חידוד עבור התלמידים וחלק מהמורים. ניתן תמיד למדוד זוויות ברדיאנים, אך לא תמיד הדבר אפשרי במעלות. כאשר מדובר בפונקציות טריגונומטריות בהן מופיע x כארגומנט של פונקציה טריגונומטרית בסיסית וגם לא בתוך הארגומנט של הפונקציה הטריגונומטרית, לא ניתן לעבוד במעלות. חשוב מאוד להדגיש את העניין עבור התלמידים, תוך הסבר מעמיק "מדוע", על מנת לא ליצור תפיסות שגויות בקרב התלמידים ולהראות את תחום התקפות של שימוש במעלות. כך לאפשר למידה משמעותית של הנושא.

רשימת מקורות

- Marton, F. (2014). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.
- Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 415–432.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91–112.
- גבע, י. (2011). מתמטיקה, שאלון 035806, 5 יחידות לימוד, כרך ד', יואל גבע
- גורן, ב. (2018). מתמטיקה. חלק ב-2, שאלון 035581, 5 יחידות לימוד, יואל גבע
- זולבסקי, א., זודיק, א., רון, ג. (2013). ללמוד וללמד אנליזה, ספר מתמטי – דדקטי למורה, הצאת מעלות
- לוי, א. & מאלב, א. (2021). הכנת לבחינות הגרות במתמטיקה, שאלון 581, הוצאת ארכימדס
- תוכנית הלימודים במתמטיקה: https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika
- שקדי, א. (2003). מילים המנסות לגעת במחקר איכותני- תיאוריה ויישום. הוצאת רמות- אוניברסיטת תל-אביב.



מפגש חוקרים צעירים

מפגש חוקרים צעירים: איך ממשיכים מכאן? על מוטיבציה בעשייה המחקרית



בועז זילברמן, המרכז לטכנולוגיה חינוכית

לירון שוורץ-אביעד, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל

מרב וינגרדן, מכון ויצמן למדע

נדב מרקו, האוניברסיטה העברית

רוני יודקוביץ, האוניברסיטה העברית

מבוא

פורום החוקרים הצעירים בחינוך מתמטי נוסד בכנס ירושלים ה-8 בשנת 2020 ומקיים מפגשים ופעילות שוטפת לאורך השנה. הפורום מגבש קהילה של חוקרים וחוקרות הנמצאים בשלבים הראשונים בעשייה המחקרית שלהם, החל בלימודים לתואר שני, דרך כתיבת עבודת דוקטורט ועד להשתלמויות בתר-דוקטורט, בארץ ובחו"ל. מטרת הפורום היא לתת הזדמנות לחוקרים צעירים לשתף בדילמות ובאתגרים שלהם בעולם המחקר, לרכוש ביחד מיומנויות מחקריות, למצוא עמיתים לשיתופי פעולה בתחום החינוך המתמטי ולשמוע מניסיונם של חוקרים וחוקרות בכירים מקהילת החינוך המתמטי על דרכים אפשריות להתמודדות עם אתגרים אלו ואחרים. מטרת פגישת הפורום בכנס ירושלים ה-12 היא לדון על מוטיבציה במהלך השלבים השונים של העשייה המחקרית. נתייחס הן למוטיבציה פנימית והן למוטיבציה חיצונית, לאופנים ונקודות הזמן שבהם המוטיבציה משתנה לאורך השנים, לדרכי התמודדות עם נקודות שבר לאורך הדרך, להשפעה של המוטיבציה המחקרית על החיים מחוץ למחקר, ועוד.

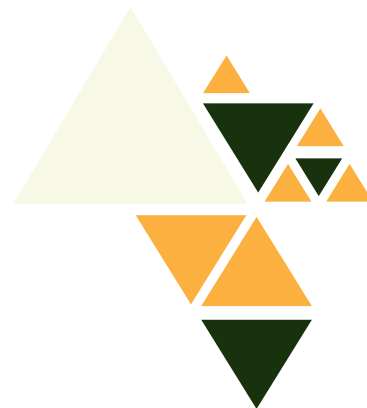
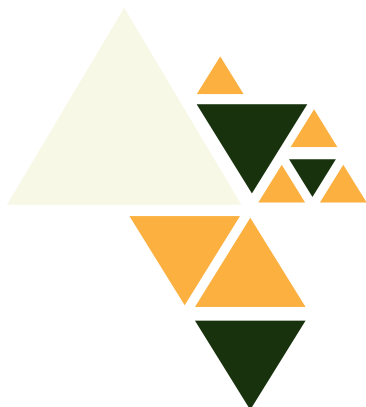
מידע אודות משתתפי הפאנל:

ד"ר נלי קלר – חברת סגל במכללה אקדמית שאנן וראש פרויקט במכינה קדם אקדמית של הטכניון. חוקרת בחינוך המתמטי פיתוח מקצועי, למידת עמיתים, ושילוב של חרדים בלימודים אקדמאיים.

פרופ' קריסטה אסטרון – חברת סגל באוניברסיטה העברית, חוקרת היבטים שונים בתחום מדעי הלמידה: למידה באמצעות אינטראקציה ושיתוף, למידת מורים, שינוי מושגי.

ד"ר אליק פלטניק – חבר סגל באוניברסיטה העברית, חוקר היבטים שונים בתחום החינוך המתמטי: הוראה מבוססת חקר, למידה מעוגנת גוף, ולמידה והוראת מתמטיקה עם טכנולוגיה.

אינדקס



א

אביב גיבלי 11
אביטל אלבוים-כהן 143, 94
אוסאמה סוידאן 134
אורית כהן ניסן 165
אושרית לובל רוקח 41
אחלאם ענאבוסקי 118, 114
איילת קריספין 61
איליה סיניצקי 160
אכראם חסן 53
אליק פלטיניק 130, 86, 61
אמאני דסקי 175
אמירה עאבד 86
אמל קעדאן 65
אנטולי קורופטוב 86, 21, 17, 13
אסתר לוינסון 175, 106, 41, 37

ב

בועז זילברמן 184
ביטל אמיר 106
ברק כהן 94

ג

ג'והינה עואודה-שחברי 179, 77
ג'ייסון קופר 143

ד

דוד פרייברט 139
דפנה אליאס 21, 17, 13

ה

הדס הנדלמן 165

ו

וג'יה דאהר 118
ורד גבריאליוב 130

ז

זהבית כהן 165
זהיה גנאים 37
זמירה מברך 9

ח

חסן איוב 49

ט

טומי דרייפוס 21, 17, 13
טלי נחליאלי 143

י

יוליה מורשטיין 181
יחיאל תנעמי 110
ילנה פורטנוב נאמן 25
יניב ביטון 90

כ

כלילה קופרמן 21

ל

לורי רובל 179, 77
ליה נח-סלע 21, 17, 13
לילך שחם 45
לינה וינצקי 181
לירון שוורץ אביעד 184, 165

מ

מאיה רון עזרא 41
מונה תומא 57
מיכל איילון 86, 82, 73, 69
מיכל טבח 126, 122, 114, 98, 94
מרב וינגרדן 184, 156
מרים עמית 25
מתן דמרי 102

נ

נדב ארנפלד 156
נדב מרקו 184
נצה מובשוביץ-הדר 146

ס

סבינה סגרה 173, 152
סברין סעד 77
סוהא רואשדה 69
סיגל-חוה רותם 148

ע

עדי עראקי	148
עינת הד-מצוינים	98, 94, 45
ענבל ישראל	134

ק

קארין אלוש	90
------------------	----

ר

רובא זערורה	82
רוני יודקוביץ	184
רונית בסן-צינצינטוס	118
רחל זקס	29
רימא זגייר עראידה	177
רינה צצקיס	10

ש

שולה וייסמן	102
שי אולשר	90, 57, 53, 49
שירה עבאד	73
שרי אלוש	179

ת

תגיל פרלמוטר	122
תמי הראל בן שחר	53
תמר אבירם	98
תמר שובל	126
תקוה עובדיה	33