Jerusalem Conference
on Research in
Mathematics Education

11JCRME

כנס ירושלים
האחד עשר
למחקר בחינוך מתמטי

ספר מאמרי הכנס

עורכים: אובודנקו רגינה, וידר מירלה, ויסמן אילנה, חן חדד נעמי,
לביא עירית, לוינסון אסתר, מחאג'נה אחלאם

תוכן עניינים

דבר ועדת התוכנית 4

רשימת שופטי ההצעות 6

הרצאות מליאה

מדוע לעשרות שנים של מחקר בחינוך מתמטי הייתה השפעה כה צנועה על הנעשה בשטח, ומה אפשר לעשות אחרת | דר׳ ג׳ייסון קופר 9

לקראת חיים בעידן של נתוני עתק ואי-וודאות: טיפוח תכלול של חשיבה סטטיסטית, חשיבה מדעית והבנה של מהות המדע במיזמי מדע אזרחי | פרופ׳ דני בן-צבי 11

משפט פלילי בצל מרחב המיקוח - מאקטיביזם חברתי לפיתוח מודל כלכלי-מתמטי, מחקר אמפירי והצעה לרפורמה | ד"ר יוסף זהר 13

אינטראקציות בהוראה ולמידה של מתמטיקה מנקודת המבט של הטכנולוגיה | דר׳ שי אולשר 15

דיווחי מחקר

ידע מורי מתמטיקה בחטיבת הביניים לגבי הוראת בעיות מילוליות | איריס שרייבר 17

פתוח יותר או פתוח פחות, מה עדיף? | מאיה רון עזרא, פרופ׳ אסתר שרון לוינסון 21

בחינת האפקטיביות של סרטוני וידאו קצרים להוראת מתמטיקה בנושא אנליזה | אלי נצר, פרופ׳ מיכל טבח 25

הוראה היברידית בשיעורי מתמטיקה: נקודת מבטם של תלמידים | סוהא רואשדה, מיכל איילון, ... 29

של מי השיעור הזה? על סוגיית האלתור בשיעורים שתוכננו במסגרת חקר שיעור | גלית נגרי חדיף, רוני קרסנטי, אברהם הרכבי 33

צמיחת ידע מורים ועיצוב חוזה דידקטי במעבר לפדגוגיה ממוקדת תלמיד – המקרה של למידה מבוססת פרויקטים | תובל אבישי, אליק פלטניק 37

תפקידים ואחריות בדיונים מתמטיים בקהילות להוראה מעודדת חשיבה | טלי נחליאלי, עינת הד-מצויינים 41

מסטודנטית למורה למתמטיקה: התפתחות מקצועית בשימת לב לאירועים קריטיים של משתתפת בתוכנית הכשרה | סיגל-חוה רותם, מיכל איילון 45

איך הוא ייגש לבעיה? מאפיינים של חיזוי פתרונות התלמידים על ידי מורים | רחל זקס, בוריס קויצ׳ן 49

יצירתיות קבוצתית במציאת חוקיות לתלמידי כיתה ו׳ (תת- משיגים) עם התערבות חברתית והתערבות מתמטית | מחאמיד אייה, אסתר לוינסון 53

על מפגש בין מטרות הוראה למשאבים- יישום משימות מסדר חשיבה גבוה תוך שימוש בסביבה משחקית ממוחשבת | אודליה צייאדה, מיכל טבח 57

פיתוח מקצועי למורים מובילים, ממוקד מידול מתמטי בהקשר הנדסי | הדס הנדלמן, זהבית כהן 61

עד כמה מורי מתמטיקה המשתתפים בקהילות מקצועיות לומדות משנים את תפישותיהם בנוגע להוראה מעודדת חשיבה? | סורינה סבאח, עינת הד-מצויינים 65

מפיתוח מקצועי למורים לצמיחה אישית-מקצועית: המקרה של מורי מדעים ומתמטיקה מומחים | ענת אבן זהב, מירלה וידר 69

הוראת ארבע פעולות חשבון במספרים טבעיים בכיתות א׳-ב׳: תחושת חוללות עצמית של מורים לגבי הידע שלהם | ויסוצ׳אנסקי לובה, איריס שרייבר 73

פיתוח חשיבה יצירתית באמצעות שברים ומקצבים | ליבי עזריהו, אורית ברוזה, שי כהן, שרה הרשקוביץ ואסתר עדי-יפה 77

התייחסות של מבוגרים לגבי הערכת ידע גיאומטרי של ילדים צעירים- המקרה של משולשים | רותי ברקאי, אסתר לוינסון, דינה תירוש, פסיה צמיר 81

השפעת ההקשר החוץ-מתמטי של מילוי מים בבריכה על הבניית ידע ופיתוח חשיבה הצטברותית במבוא ללימוד חשבון אינטגרלי בתיכון | גילת פלאח, טומי דרייפוס, אנטולי קורופטוב 85

כיצד סטודנטים להנדסה מתקשרים את פתרונותיהם למשימות בחדו"א ? | ענת רוזן, אוסאמה סוידאן 89

ניתוח תהליכי פתרון בעיות מכוונות יצירתיות באמצעות מעקב תנועות עיניים | עדי עראקי, רוזה לייקין, בת שבע חדד 93

דימוי מושג עודף ודימוי מושג חסר: המקרה של מקבילים | דינה תירוש, פסיה צמיר 97

בחינת הגדרות חלופיות למושג ככלי איבחון וכמנוף ללמידה: המקרה של הפונקציה העולה | קרני שיר, אורית זסלבסקי 101

הזדמנויות להוכחות והנמקות במשימות מתמטיות: עדשה דיסקורסיבית | מרב וינגרדן, אורלי בוכבינדר 105

התבונה המרחבית ויחסי הגומלין שלה עם תפיסה מרחבית וחזותית | אביגיל צברי 109

אפיון שיח אלגברי מוקדם באמצעות ראיון דרך עדשה קומוגניטיבית | לארה שהלה דמירדג׳יאן, אביטל אלבוים-כהן, עינת הד-מצויינים, מיכל טבח 114

התפתחות השיח האלגברי בסביבת גיליון אלקטרוני: בין רוטינות מעשיות לרוטינות שיח | תמר אבירם,
מיכל טבח, עינת הד-מצויינים 118

דיווח קצר על מחקר

היבטים מונולוגיים ודיאלוגיים בעבודת המתמטיקאי | תמי שובל, מיכל טבח 123
שיח מעבר ממתמטיקה תיכונית לאוניברסיטאית: נקודת מבט של מתרגלים ניו זילנדים מתחילים
| תקוה עובדיה, איגור קונטורוביץ' 127
דפוסי תקשורת של מורים וסטודנטים בשיח מתמטי עם תלמיד מתקשה במהלך התנסות בסימולציה
| עדי עראקי, ראיסה גוברמן, יוליה מוצ'ניק רוזנוב' 131
תפיסות פרחי הוראה למתמטיקה לגבי שילוב חינוך לערכים בשיעור
| ח'ירייה מסארוה, שאדיה ג'דבאן 135
אמונות ביחס למתמטיקה ומגדר בקרב מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים בחברה הערבית בישראל
| מרים סלאמה, לורי רובל, ג'והיינה עוואדה-שחברי, מיכל איילון 139
מורים בחברה הערבית: פרדוקס השוויון המגדרי במתמטיקה | ג'והיינה עוואדה שחברי, לורי רובל 143
אפיון גישות הוראה של מושג הנגזרת בעזרת מודל מטרות-פעולות: השוואה בין גישות הוראה של שתי מורות
| אמירה עאבד, מיכל איילון, אנטולי קורופטוב 147
טיפות הבנת מושגית בגיאומטריה בקרב מורים המתכשרים להוראת גיאומטריה בכיתות א-ב בשימוש באירועים
מתמטים המדגישים המעברים בין דימוי מושג להגדרה: המקרה של האלכסון | הודא שאיב, ג'והיינה עוואדה-שחברי ... 151
תפיסת מושג הפתרון למערכת Ax=b בקרב סטודנטים | כלילה קופרמן, מיכל כהן 156
ניתוח יחידות לימוד STEM שתכננו סטודנטים להוראת מתמטיקה | אחלאם ענאבוסי, וגיה דאהר 160
הזדמנויות ומכשולים ביישום התוכנית החדשה לרמת 5 יח"ל | דפנה אליאס, טומי דרייפוס,
ליה נח סלע, אנטולי קורופטוב 164
מורים מזהים את אתגרי תלמידיהם בהוראת מידול מתמטי | לירון שוורץ אביעד, ד"ר זהבית כהן 169
תפיסות מסוגלות עצמית מתמטית, אקדמית וכללית בקרב תלמידי תיכון מחוננים | אורלי דנציגר, יעל נוריק 173
המכנה המשותף בשברים פשוטים - ידע, תפיסות ודרכי התמודדות של מורים | נאוה שאול,
ד"ר רונית בסן-צינצינטוס 177
"אני חושבת שיש הרבה מה ללמוד מהם... הם חושבים אחרת" תפיסת גננות את הוראת המתמטיקה
והיצירתיות המתמטית בגני תקשורת | מירב צהר רוזן, ענת קסירר 181
תפיסות של מורים למתמטיקה בתיכון לגבי הוראת מתמטיקה בסביבת הכיתה ההפוכה | חלימה שרקייה, זהבית כהן 186
השפעת הוראת סוגיה הלכתית מתמטית על עמדות תלמידות כלפי מתמטיקה | אסתי בוטמן, מאיר סנדיק 190

קבוצות דיון

למידה משולבת דיגיטל - תהליך ההכשרה של פרחי הוראה באמצעות סביבת הלמידה FUL
FULLPROOF – אתגרים ודילמות | ניצן איזנשטרק, חיים בלין, אנטולי קורופטוב 195
שילוב הקניית כישורי המאה ה-21 כחלק מהחינוך המתמטי | נצה מובשוביץ-הדר, אלי איזנברג,
ורדה זיגרסון, רותי סגל, מירה פל, קרני שיר, עטרה שריקי 199
גישות תלמידים לפתרון בעיות ותפיסות מורים הקשורות ליישום משימות מפת"ח
מתמטי בכיתות חט"ב | פאתנה מרג'יה, סיגל קליין, נוי אביב, פרופ' רוזה לייקין 202

סימפוזיון

סימפוזיון—מורים יוצרים ומעצבים בעיות מתמטיות | אליק פלטניק 207
שילוב טכנולוגיה בהוראת המתמטיקה והמדעים: היבטים של ידע תוכן פדגוגי טכנולוגי ורגשות מורים | רותי סגל 214

מיצגים

בעקבות נולטינג - אסטרטגיות חשיבה פרופורציונית של מתכשרים להוראה, בקורס מקוון בנושא
יחס ופרופורציה | דורית כהן, ענת קלמר, בת-שבע אילני 222
הקשר בין הישגים בלימודי ההוראה של מורים למתמטיקה לבין הערכת רכזי מקצוע | אלון דיין, רותם עבדו 226
על משפט הפרפר ומקומות גיאומטריים | מנאל ג'בור 230
למידה מטעויות בשיעורי מתמטיקה – נקודת מבט של תלמידות כיתה ז' | נהורה אזולאי, יעל נוריק 235

מפגש חוקרים צעירים

מפגש חוקרים צעירים: התמודדות עם ביקורת עמיתית | בועז זילברמן, גיל שורץ, לירון שוורץ אביעד, מרב וינגרדן 240

אינדקס 241

דבר ועדת התוכנית

שלום רב לקהילת החינוך המתמטי בישראל. ברוכות הבאות וברוכים הבאים לכנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי, המתקיים זו הפעם האחת עשרה ברציפות.
כולנו שמחים על שהשנה התאפשר לנו לקיים את הכנס באופן היברידי, הכולל יום מפגש פנים אל פנים בירושלים בשילוב עם הטכנולוגיה המאפשרת לנו להמשיך את הכנס יום נוסף מהבית. הימים המקוונים נותנים הן אפשרות לחברים הנמצאים מחוץ לישראל להשתתף בכנס לנהל מפגשים שלמים כגון מפגש חוקרים צעירים המאורגן על ידי פוסט דוקטורנטיות מארה"ב וחברי קהילה מהארץ, והן לשמוע הרצאות של מרצים אורחים דוברי עברית מישראל ומחו"ל. בשנים קודמות אירחנו את ד"ר אורלי בוכבינדר מאוניברסיטת ניו המפשיר, את ד"ר איגור' קונטורוביץ' מאוניברסיטת אוקלנד, ואת פרופ' דור אברהמסון מאוניברסיטת קליפורניה בברקלי. השנה נמשיך במסורת ונארח את דר' שי אולשר, מאוניברסיטת חיפה, המתארח באוניברסיטת מרילנד בארה"ב.

מתוך כך נוכל לומר שאף שנראה כי מסביבנו העיסוק במגפת הקורונה פסק, הייתה גם ברכה באופן הבהול בו נאלצנו לנצל את הטכנולוגיה על מנת לאפשר לנו לקיים בינינו קשר גם מרחוק, ולא נרצה לוותר על היתרון שבקיום מפגשים מקוונים. יש בשימוש בטכנולוגיה בכנס חוקרי חינוך מתמטי גם צדק פואטי, שכן מיותר לציין כי בעולם המודרני המתמטיקה היא שעומדת מאחורי פריצות דרך טכנולוגיות רבות.

ריבוי ההצעות שהוגשו השנה מלמד על עבודה פורייה ואינטנסיבית של חברי הקהילה למחקר

בחינוך המתמטי. לשיפוט הוגשו 58 הצעות, ובסופו של דבר כולל הכנס 26 הצגות של דיווחי מחקר, 17 הצגות קצרות, 4 מיצגים, 3 קבוצות מחקר ו-2 סימפוזיונים, כמו גם מושב חוקרים צעירים ו-4 הרצאות מליאה. חשוב לנו להדגיש שההצעות הקצרות, שרובן יוצגו במתכונת של שיח מחקרי (3 הצגות בנות 10 דקות, ואח"כ 30 דקות דיון משותף בשלוש ההצגות) אינן נופלות בחשיבותן מדיווחי המחקר. בדיווחי מחקר יש מקום מצומצם יותר לדיון, ובדיווחים הקצרים, בהם מתוארים מחקרים בתחילת הדרך, הדיון ומשוב הקהילה מקבלים נפח גדול יחסית.

הרצאות המליאה יתרכזו בסוגיות שונות במחקר בחינוך מתמטי ונושאים הנוגעים לשימוש במתמטיקה. בהרצאת הפתיחה, ד״ר ג'ייסון קופר ממכון ויצמן למדע, יעסוק בהשפעת המחקר בחינוך מתמטי על הנעשה בשטח. פרופסור דני בן צבי מאוניברסיטת חיפה, יסקור את עידן המהפכה בחינוך הסטטיסטי, באמצעות תיאור מרכיביו של פרויקט עיצוב ומחקר "קישורים" (שהחל ב- 2005), פרויקט שנועד לטפח חשיבה סטטיסטית בקרב תלמידות ותלמידים בבית ספר יסודי לקראת חיים בעידן של נתוני עתק ואי-וודאות. את היום המקוון יפתח ד"ר יוסף זוהר מהמכללה האקדמית גליל מערבי, ומנהל המכון לבטיחות במשפט הפלילי. ההרצאה תחשוף אותנו לנושא המיקוח על עסקאות טיעון אותו הוא יסביר בעזרת מודל מתמטי - כלכלי שפיתח - "משפט פלילי בצל המיקוח" (Shadow of Bargaining), את היום המקוון ואת הכנס יסיים ד"ר שי אולשר מאוניברסיטת חיפה ששוהה השנה במרילנד. ד"ר אולשר יפתח צוהר לאינטראקציות בהוראה ולמידה של מתמטיקה אבל הפעם

הוא ידון בהן מנקודת המבט של הטכנולוגיה.

הכנס לא היה יכול להתקיים ללא עזרה ותמיכה של גורמים רבים. תודתנו נתונה:

- למרכז האקדמי לב בירושלים, שממשיך לתת את חסותו ולהעמיד לרשותנו שרותים ומשאבים
- למוסדות האקדמיים שממשיכים לתמוך כספית בכנס שנה אחר שנה
- לכלל הוועדה המארגנת, ובאופן מיוחד לנעמי חן-חדד וליעקב קולטקר ששום דבר לא היה קורה בלעדיהם
- לחברות וועדת הכנס, שעמלו רבות במהלך השנה האחרונה על התוכנית ועל כל הכלול בה
- לצוות הטכני של מכללת אורנים שבנו את הסביבה הפיזיטאלית ומספקים לנו תמיכה טכנית רצופה
- לקהילה כולה, שהשתתפה בשיפוט ההצעות ושמשתפת אותנו במחקריה

אנחנו מאחלים לכולכם כנס מעניין, מעשיר ומהנה.

בברכה,

ד"ר עירית לביא וד"ר מירלה וידר, יושבות ראש וועדת הכנס

חברי ועדת התכנית (לפי סדר ה- א"ב)

ד"ר רגינה אובדנקו, מכללת סמינר הקיבוצים, מכללת שנקר

ד"ר מירלה וידר, מכללת שאנן לחינוך, מכון ויצמן למדע

ד"ר אילנה וייסמן, מכללת שאנן, מכללת אורט בראודה, אוניברסיטת חיפה

ד"ר עירית לביא, מכללת אורנים

פרופ' אסתר לוינסון, אוניברסיטת תל-אביב

ד"ר אחלאם מחאג'נה, "רשת עתיד", הטכניון

חברי הוועדה המארגת (לפי סדר ה- א"ב)

פרופ' נח דנא-פיקארד, המרכז האקדמי לב

נעמי חן-חדד, מכללת סמינר הקיבוצים – המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאמנויות

יעקב קולטקר, המרכז האקדמי לב

רשימת שופטי הכנס (לפי סדר הא"ב)

אביטל אלבוים-כהן
אוסמה סווידאן
אורלי גוטליב
אחלאם ענבוסי
איריס שרייבר
אלון פינטו
אליק פלטניק
אמירה עאבד
ילנה נפתלוב
רז הראל
דפנה אליאס
אנטולי קורופטוב
בועז סילברמן
בוריס קויצ'ו
בת-שבע אילני
ג'והיינה שחברי
ג'ייסון קופר
גיל שוורץ
גילה רון
איחסאן חאג' יחיא
גילת פלאח
גלית נגרי-חדיף
דורית כהן
זהבית כהן
טומי דרייפוס
טלי נחליאלי
יניב ביטון
יעל נוריק
פאתנה מרגייה
מאיה רון עזרא
מיכל איילון
מיכל טבח
מירב ויינגרדן
מירב צוהר רוזן
מנוחה פרבר
מריטה ברבש
נצה מובשוביץ-הדר
סבינה סגרה
סורינה סבאח
עטרה שריקי
עינת הד-מצוינים
איגור קונטורוביץ
ענת אבן-זהב
קרני שיר
רוני קרסנטי
רותי ברקאי
רותי סגל
אורלי בוכבינדר
רחל זקס
רעות פרשה
שי אולשר
תמרה אבישר
תקוה עובדיה
ענת קלמר
ראיסה גוברמן
אחלאם ענאבוסי

לתכנית הכנס לחץ כאן >>

Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

11JCRME

כנס ירושלים האחד עשר למחקר בחינוך מתמטי

הרצאות מליאה

מדוע לעשרות שנים של מחקר בחינוך מתמטי הייתה השפעה כה צנועה על הנעשה בשטח, ומה אפשר לעשות אחרת

דר' ג'ייסון קופר, מכון וייצמן

חינוך מתמטי קיים כתחום אקדמי מחקרי עשורים רבים, אולי למעלה מ- 100 שנים. למרות הצטברות מרשימה של ידע בתחום, ההשפעה על הנעשה בשטח צנועה. קיימת תחושה שתובנות המחקר אינן מיושמות בשטח.

סדרה של מאמרי מערכת בכתב העת Journal for Research in Mathematics Education (JRME) מעלה את שאלת הרלוונטיות של מחקר בחינוך מתמטי לבעיות המעשיות של מורים. קאי ושותפים (Cai et al., 2017a) הציעו לחקור את תהליך היישום של חדשנות חינוכית כדי להבין חסמים, ואכן מחקר יישום (implementation research), בשונה ממחקר יישומי), שבו תהליך היישום הוא האובייקט שנחקר, מתפתח במהירות בשנים האחרונות. לראיה, נחנך לאחרונה כתב עת המוקדש כולו למחקרי יישום ושחזור – Implementation and Replication Studies in Mathematics Education (Jankvist et al., 2021)..

חסם מרכזי בפני יישום בשטח של חדשנות מבוססת מחקר נעוץ בפרספקטיבות השונות של חוקרים ושל מורים. השאלות שמעסיקות חוקרים אינן בהכרח השאלות שמעסיקות מורים, וגם האופן שבו ניגשים לענות על שאלות שונה בשתי הקהילות. קאי ושות' (Cai et al., 2017b) מציעים לטשטש את הגבולות בין מחקר ופרקטיקה כדי להגיע לחקר של שאלות שמעסיקות מורים. אין זה מהלך פשוט, והוא דורש חשיבה חדשה על התפקידים של מורים ושל חוקרים (Cai et al., 2018), ופרדיגמות מחקריות חדשות (Cai et al., 2019), למשל מודלים שונים של שותפויות שדה ומחקר - Research-practice partnerships (e.g. Penuel et al., 2015), קהילות חקר (Inquiry communities, Jaworski, 2008), ועוד.

אתגר נוסף העומד בפני יישום של תובנות מחקריות נוגע לשאלת האמינות של ממצאי מחקר חינוכי. בהנחה שהשאלות הנחקרות רלוונטיות לפרקטיקה, מניין למורים (ולחוקרים אחרים) הביטחון שהממצאים אמינים ורלוונטיים מחוץ לסביבה שבה נערך המחקר? כאן נכנסים לתמונה מחקרי שחזור (replication), אשר עשויים להגביר את האמינות – ומכאן גם הרלוונטיות – של ממצאי מחקר (Star, 2021).

בהרצאה אדון בחסמים בפני יישום בשטח של ממצאי מחקר, ואציג גישות מחקריות שלי ושל עמיתי בתחום. עובדתנו מתקיימת תחת הכותרת "מורים שותפים למחקר" (מש"ל, Koichu, 2021 & Pinto), ובהרצאה אציג את הגישה הערכית שלנו למחקר שמשתף מורים ואת שיטות העבודה והמחקר שנגזרות ממנה, ואתאר חלק משותפויות אלה. ברקע ההרצאה תרחף השאלה: מה אנחנו כחוקרים יכולים לעשות כדי שלעבודתנו תהיה השפעה משמעותית על הנעשה בשטח?

מקורות

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., & Hiebert, J. (2017a). Making classroom implementation an integral part of research. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(4), 342-347. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.4.0342

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., & Hiebert, J. (2017b). A future vision of mathematics education research: Blurring the boundaries of research and practice to address teachers' problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(5), 466-473. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.5.0466

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., & Hiebert, J. (2018). Reconceptualizing the roles of researchers and teachers to bring research closer to teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(5), 514-520. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.5.0514

Jankvist, U. T., Aguilar, M. S., Misfeldt, M., & Koichu, B. (2021). Launching Implementation and Replication Studies in Mathematics Education (IRME). *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education, 1*(1), 1-19. doi: https://doi.org/10.1163/26670127-01010001

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: teachers and didacticians in collaboration. In: Krainer, K. and Wood, T. (Eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education volume 3: Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks*. SensePublishers.

Penuel, W. R., Allen, A. R., Coburn, C. E., & Farrell, C. (2015). Conceptualizing Research–Practice Partnerships as Joint Work at Boundaries. *Journal of Education for Students Placed at Risk (JESPAR), 20*(1-2), 182-197. https://doi.org/10.1080/10824669.2014.988334

Pinto, A., Koichu, B (2021). Implementation of mathematics education research as crossing the boundary between disciplined inquiry and teacher inquiry. *ZDM Mathematics Education 53*, 1085–1096. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01286-7

Star, J. R. (2021). In Pursuit of a Replication Culture in Mathematics Education, *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education, 1*(1), 53-76. https://doi.org/10.1163/26670127-01010003

לקראת חיים בעידן של נתוני עתק ואי-וודאות:
טיפוח תכלול של חשיבה סטטיסטית, חשיבה מדעית והבנה של מהות המדע ב מיזמי מדע אזרחי

פרופ' דני בן-צבי, ראש החוג למדעי הלמידה וההוראה, הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה

dbenzvi@univ.haifa.ac.il; http://dbz.edtech.haifa.ac.il/

אין עוררין על החיוניות של אוריינות סטטיסטית לקיומה של חברה דמוקרטית, ליברלית וחופשית. לפיכך, חינוך סטטיסטי הוא הכרחי בכל גיל כחלק מרכזי בהכנה לחיים בעולם רווי נתונים ואי-וודאות הנלווית אליהם. על אחת כמה וכמה, שׁוּמָה עלינו להכין את אזרחי העתיד להתמודדות עם נתוני עָתֵק, שלהם מראית עין מתַעְתֵּעַת של וודאות (Ben-Zvi, Makar, & Garfield, 2018; Garfield & Ben-Zvi, 2008).

בהרצאה זאת אסקור בקצרה את עידן המהפכה בחינוך סטטיסטי, באמצעות תיאור תמציתי של מספר מרכיבים של פרויקט עיצוב ומחקר "קישורים" (שהחל ב- 2005), שנועד לטפח חשיבה סטטיסטית בקרב תלמידות ותלמידים בבית ספר יסודי. המרכיב הראשון הוא אפיסטמי בעיקרו - יצירת מושגים לא פורמליים של ה"רעיונות הגדולים" של הסטטיסטיקה, כך שיותאמו ליכולות של תלמידים צעירים. למשל, הסקה סטטיסטית בלתי פורמלית (Makar,. Bakker, & Ben-Zvi, 2011), או מודל סטטיסטי בלתי פורמלי (Dvir & Ben-Zvi, 2023). על בסיס ההמשגות החדשות הללו, המרכיב השני הוא עיצוב של סביבות למידה מוגברות טכנולוגיה המאפשרות לתלמידים מרחב למידה של חקר וגילוי מושגים ותהליכים סטטיסטיים תוך שימוש בנתונים רלוונטיים לחייהם. הטכנולוגיות בהן עשינו שימוש, כגון, TinkerPlots או Fathom, נשענות על כישורים פשוטים של ילדים צעירים, כדי לאפשר להם לבנות ייצוגים משמעותיים של נתונים בכוחות עצמם ולפתח חשיבה סטטיסטית בלתי פורמלית (Biehler, Ben-Zvi, Bakker, & Makar, 2013). במהלך השנים עבר עיצוב זה התפתחויות רבות, אחת החשובות שבהן היתה עיצוב מסלול למידה חִזְרוּרִי (המכונה Integrated Modeling Approach, IMA), שנע בין עולם הנתונים ועולם ההסתברות, ומאפשר לתלמידים גם לחקור נתונים וגם לענות על שאלות הסתברותיות, כגון, "מהו גודל המדגם המינימלי שאני יכול לסמוך עליו?" באמצעות סימולציות הסתברותיות (Manor, & Ben-Zvi, 2017). המרכיב השלישי של פרויקט "קישורים" הוא מחקר איכותני, החוקר את התפתחות החשיבה הסטטיסטית של התלמידים המשתתפים בסביבות הלמידה שעוצבו, למשל חשיבה עם אי-וודאות, טבעה, מאפייניה, השתנותה ומקורותיה (Ben-Zvi, Aridor, Makar, & Bakker, 2012).

נוכח מציאות משתנה במהירות, שני שינויים עיקריים עוברים על המחקר שלנו בשנים האחרונות. הראשון, עידן נתוני העָתֵק וסְלוּף מֵידָע (דֵּיסְאִינְפוֹרְמַצְיָה) מחייב אותנו לבחון את ההנחות והמסקנות שלנו, לעצב מחדש את סביבות הלמידה, כך שיהיו אותנטיות להתפתחויות במדע הנתונים המִתְהַוֶּה (Gafny & Ben-Zvi, accepted). והשנייה ניסיון פורץ דרך לטפח תִּכְלוּל בּוֹ־זְמַנִּי של חשיבה סטטיסטית, חשיבה מדעית והבנה של מהות המדע במֵיזָמֵי מדע אזרחי (Aridor, Dvir, Tsybulsky, & Ben-Zvi, accepted).

רשימת מקורות

Aridor, K., Dvir, M., Tsybulsky, D., & Ben-Zvi, D. (accepted). Integration between informal statistical reasoning, scientific reasoning and nature of science understanding through citizen science. *Instructional Science*.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *44*(7), 913-925.

Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (Eds.) (2018). *International handbook of research in statistics education* (Springer international handbooks of education series). Springer.

Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2013). Technology for enhancing statistical reasoning at the school level. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, and F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-690). Springer

Dvir, M., & Ben-Zvi, D. (2023). Informal statistical models and modeling. *Mathematical Thinking and Learning*, *25*(1), 79-99.

Gafny, R. & Ben-Zvi, D. (accepted). Students' articulations of uncertainty about big data in an integrated modeling approach learning environment. *Teaching Statistics*.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*. Springer.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). *The reasoning behind informal statistical inference. Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1-2), 152-173.

Manor, H., & Ben-Zvi, D. (2017). Students' emergent articulations of statistical models and modeling in making informal statistical inferences. *Statistics Education Research Journal*, *16*(2), 116-143.

משפט פלילי בצל מרחב המיקוח - מאקטיביזם חברתי לפיתוח מודל כלכלי-מתמטי, מחקר אמפירי והצעה לרפורמה

ד"ר יוסף זהר, המכללה האקדמית גליל מערבי, מנהל המכון לבטיחות במשפט הפלילי

על פי התאוריה הקלסית "מיקוח בצל המשפט" (Shadow of Trial), המיקוח על עסקאות הטיעון נערך בצל תוצאת המשפט הצפויה. ככל שעסקאות הטיעון משקפות טוב יותר את תוצאת המשפט הצפויה, כך נצפה לפערי ענישה קטנים יותר בין נאשמים שונים שבחרו בעסקאות טיעון.

מחקרים אמפיריים שונים חשפו את קיומם של פערי ענישה, שאינם ניתנים להסבר באמצעותה של תאוריית "צל המשפט". כשלים כגון הגנה לא יעילה, עלויות סוכנים, ערבויות ומעצר עד תום הליכים מחד גיסא, וקיומן של הטיות וסכנות פסיכולוגיות אחרות הפוגעות בשיקול הדעת של הנאשמים להתמקח באופן רציונלי בצל תוצאת המשפט מאידך גיסא, מסיטים באופן ניכר את התפלגות העונשים בעסקאות הטיעון מהתוצאה החברתית הרצויה, ומטילים ספק ביעילות הכלכלית המיוחסת להן.

המודל הכלכלי-מתמטי שפותח, "משפט פלילי בצל המיקוח" (Shadow of Bargaining), עניינו שיקוף טוב יותר של היחס שבין תוצאת עסקת הטיעון לבין תוצאת המשפט הצפויה. המודל ממחיש כיצד עסקאות הטיעון יוצרות תופעה של מחזור משוב (Positive Feedback), המזין ומחריף את היקף השימוש בעסקאות הטיעון. מכאן שכל מערכת משפט שתאפשר לעקוף את הליך בירור האמת, במוקדם ובמאוחר, כפי שקרה גם בישראל, לא יהיו בה כמעט משפטי הוכחות. החצנה נוספת העולה מתאוריה זו היא שעלייה בשיעור עסקאות הטיעון מובילה לעלייה בפערי הענישה.

כדי לאשש או להפריך את הניבוי של המודל שלפיו עם העלייה בשיעור עסקאות טיעון תחול עלייה בפערי ענישה בתיקים דומים שהסתיימו בעסקת טיעון, הוגדרו מדדים חדשים שטרם נוסחו בספרות. כבסיס לבחינה אמפירית של השערת המחקר משמש מדד יחס הענישה, המדד ליחס בין הענישה בעסקאות טיעון שונות בתיקים דומים, והענישה הצפויה להם במשפט. חישוב מדד יחס הענישה בתיקים דומים מאפשר את אמידת פערי הענישה בתקופות שונות ואת בחינת הקשר, אם קיים, בין פערי הענישה ושיעור עסקאות הטיעון.

מאגר הנתונים שעליו התבסס המחקר, כלל מידע נרחב על תיקים פליליים בסוג עבירה אחד, והתפרס על פני תקופה של 12 שנים, שלאורכה חלה עלייה ניכרת בשיעור עסקאות הטיעון. שינויים חיצוניים (אקסוגניים) למערכת המשפט, שחלו בשנים שבהן נאספו הנתונים, סייעו לבחון את התאמת התחזיות העולות מהתאוריות השונות למציאות ולהשוות בין התאוריות בשאלה לאיזו מהן מידת ההתאמה הטובה יותר.

תוצאות המחקר האמפירי מאוששות את היתכנות השערת המחקר בדבר הקשר בין העלייה בשיעור עסקאות הטיעון להתרחבות מרחב המיקוח עליהן ועקב כך לעלייה בפערי הענישה. עצם גילוי תופעה זו, אשר לא נחזתה על ידי תאוריית "צל המשפט", מעניק משקל להיתכנותה של החלופה התאורטית, "צל המיקוח", שבבסיס השערת המחקר הנוכחי. יתרה מכך, נראה כי התיקים שהסתיימו בעסקאות טיעון הקדימו להגיב לשינויים במדיניות הענישה שהתחוללו בתקופת המחקר. במובן זה הם שימשו מעין מנגנון תמסורת להעברת המידע לתיקים שהתנהלו בבית המשפט, בנוגע לרמת הענישה שמוכנים לקבל הנאשמים. מדובר בתהליך הפוך מזה שצופה תאוריית "צל המשפט".

בהרצאה בתוכניתי לפרוס את המהלך המחשבתי מלידת רעיון המחקר מתוך פעילות התנדבותית לתיקון החוק, לפיתוח מודל כלכלי-מתמטי, אישוש אמפירי, מסקנות נורמטיביות והצעה לרפורמה.

רשימת מקורות

1. Luz Kanner, S., Rosen, D., Zohar, Y., & Alberstein, M. (2019). Managerial Judicial Conflict Resolution (JCR) of Plea Bargaining: Shadows of Law and Conflict Resolution. *New Criminal Law Review, 22 (4)*, 494-541.
2. Michaeli, M., & Zohar, Y. (2022). The Vanishing Trial: A Dynamic model with adaptive agents. (English). *Special Issue of Public Choice - Law and Economics from the Public Choice Perspective*.
3. Weiss, U., & Zohar, Y. (2017). The Plea Bargaining Game - Plea Bargains as a Sort of Extortion. In: Harel, A. (Ed), *The Criminal Procedure volume* (pp. 183-215). The Buchman Faculty of Law Book Series. (Hebrew).
4. Zohar, Y., & Michaeli, M. (2014). Trial in the Shadow of Bargaining - The Feedback-Cycle Effect of Plea Bargaining, *Aley Mishpat, 11,* 153-226. (Hebrew).
5. Zohar, Y. (2020). Trial in the Shadow of Bargaining Range - Modelling and Measuring Disparities in Plea Bargaining Sentencing. *Law Studies, 32(2),* 635-731. (Hebrew).
6. Zohar, Y. (2013). What the judicial system is to be judged about. *The Law & Business Journal,* IDC Herzliya. (Hebrew).
7. Zohar, Y. (2013). Public Representation in a Confession based Legal System. *The Law & Business Journal*, IDC Herzliya. (Hebrew).

אינטראקציות בהוראה ולמידה של מתמטיקה מנקודת המבט של הטכנולוגיה

דר' שי אולשר, אוניברסיטת חיפה

האינטראקציה של אנשים עם טכנולוגיה היא יומיומית ומגוונת. כלים טכנולוגיים משמשים אותנו למגוון רחב של מטרות, כאשר צורת האינטראקציה בינינו לבין הכלים השונים מאפשרת לנו להבין מה אפשר לבצע בעזרתם, ולהם לפרש את ההנחיות שלנו. בעוד חלק מהכלים הטכנולוגיים מאפשרים אינטראקציה פשוטה יחסית, למשל מתג הפעלה וכיבוי של מכשיר חשמלי, לעיתים הדרישות שלנו מהטכנולוגיה יותר מורכבות. דרישות כאלה מצריכות במקרים רבים גם מיומנות ומחשבה מצידנו על מנת לתקשר לטכנולוגיה את הדרישות בצורה בה הן אכן יובנו ויאפשרו את קבלת התוצאות המקוות. הספרות המחקרית עשירה במחקרים אשר בוחנים את האינטראקציה עם כלים, טכנולוגיים ואחרים, מנקודת המבט של הלומד (או המורה) בתהליך הלמידה וההוראה של מתמטיקה. אבל האם חשבתן פעם איך נראה תהליך הוראת המתמטיקה מנקודת המבט של הסביבה הטכנולוגית? המרא"ה היא סביבה טכנולוגית אשר משמשת ללמידה והוראה של מתמטיקה. הסביבה הטכנולוגית מקיימת אינטראקציות רבות עם גורמים שונים: החל מהמחשב אשר מריץ אותה עליו, דרך היישומונים המתמטיים אותם היא מנתחת, מעצב המשימות אשר מגדיר לה את המשימות ואת דרך ההערכה שלהן, תלמידים, ומורים. לכל אינטראקציה של המרא"ה יש כללים, נורמות, יכולות ומגבלות. לא תמיד המרא"ה מבינה מה רוצים, וגם כאשר היא מבינה - לא תמיד היא יכולה לספק לנו את מה שאנחנו מבקשים, או בצורה בה אנו מבקשים זאת. כדי שנוכל להשתמש, להעריך, ואף לבקר את היכולות של הטכנולוגיה להשתתף בתהליך הלמידה וההוראה של מתמטיקה, כדאי לנסות להתבונן על האינטראקציות השונות גם מנקודת המבט של הטכנולוגיה. בהרצאה אציג אינטראקציות של טכנולוגיה בשלבים שונים ועם גורמים שונים בתהליכי למידה והוראה של מתמטיקה, ודרכן אנתח את דרכי העבודה המשותפות, האפשרויות והמגבלות השונות.

Abu-Raya, K., & Olsher, S. (2021) Learning analytics based formative assessment: Gaining insights through interactive dashboard components in mathematics teaching. In *Proceedings of the AI for Blended Learning Workshop at the Sixteenth European Conference on Technology Enhanced Learning (ECTEL21)*. Published in CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org), Vol. 3042. http://ceur-ws.org/Vol-3042/paper_1.pdf

Olsher, S., Chazan, D., Drijvers, P., Sangwin, C., & Yerushalmy, M. (Accepted). The role of the “machine” in digital assessment. In Pepin, B., Gueudet, G., & Choppin, J. (Eds.) Handbook of digital (curriculum) resources in mathematics education.

Yerushalmy, M., Olsher, S., Harel, R., Chazan, D. (2022). Supporting Inquiry Learning: an Intellectual Mirror that Describes what It “Sees”. *Digital Experiences in Mathematics Education*, Advance online publication: https://doi.org/10.1007/s40751-022-00120-3

דיווחי מחקר

ידע מורי מתמטיקה בחטיבת הביניים לגבי הוראת בעיות מילוליות

איריס שרייבר, מכללת סמינר הקיבוצים ואוניברסיטת בר אילן

מבוא ורקע תאורטי

פתרון בעיות מילוליות הינו נושא מרכזי בתוכניות לימודים במתמטיקה בכל שלבי החינוך. בתוכנית הלימודים למתמטיקה בחטיבות הביניים בישראל מודגשת חשיבות הנושא (משה"ח, 2013) כנושא המחבר את המתמטיקה למצבים מחיי היום יום של התלמידים. כך גם במחקרים שונים מציינים את הנושא כנושא אינטגרטיבי המאפשר שילוב מספר מושגים יחד, מפתח רמת חשיבה גבוהה ויצירתיות. פתרון בעיות מילוליות מאפשר לתלמידים להשתמש בכלים ובמיומנויות מתמטיים שאותם למדו על מנת לפתור בעיה אותנטית מחיי היום-יום (Boonen, 2013; Verschaffel et al., 2020).

להוראת בעיות מילוליות קיימות גישות שונות הנשענות על אסטרטגיות פתרון הבעיה תוך שימוש בכלים מתמטיים שונים. גישת הוראה אחת היא הגישה המסורתית הנפוצה בה הבעיה נפתרת על ידי ארגון המידע בטבלה, בניית משוואה מתאימה ופתרונה באמצעות טכניקה אלגברית. גישה שנייה היא להשתמש בייצוג חזותי לבעיה העשוי לסייע בהבנת הבעיה (Debrenti, 2015). גישה שלישית היא הגישה הפונקציונלית בה מתארים את הבעיה באמצעות פונקציה ומסתייעים בגרף הפונקציה לפתרון הבעיה (Mielicki & Wiley, 2016). פתרון בעיות מילוליות הינו נושא קשה לתלמידים והוא מזמן שגיאות רבות וקשיים רבים (Pongsakdi, 2020), החל מקשיים הקשורים לקריאה או להבנת הנקרא, דרך קשיים לבניית הייצוג המתמטי הנכון ודרך קשיים במושגים, בחישובים או באלגברה.

ריבוי הייצוגים ולצידם ריבוי הקשיים של התלמידים דורש מהמורים ידע רחב ולכן אחד הגורמים העשויים להשפיע ביותר על תהליך ההוראה-למידה של הנושא הוא ידע המורים. הידע הנדרש למורים למתמטיקה נחקר רבות וחוקרים רבים ניסו לדייק את הגדרתו. במחקר זה נעשה שימוש במסגרת התיאורטית של דבורה בול ועמיתים (Ball et al. 2008) אשר הגדירו מרכיבי ידע מרכזיים הנדרשים להוראת מתמטיקה: ידע תוכן שגרתי (Common Content Knowledge, CCK) הוא סוג ידע מתמטי הנדרש גם למי שאינם מורים. למשל, לדעת לפתור או לחשב ולדעת לפתור בעיות מתמטיות; ידע תוכן ייחודי (Specialized Content Knowledge, SCK) הוא ידע ומיומנות מתמטית ייחודיים להוראה. למשל, לדעת לפתור בעיה במגוון דרכים, ולהבין את העקרונות התאורטיים מאחוריהן; ידע של תוכן והוראה (Knowledge of Content and Teaching, KCT) הוא שילוב ידע תחום התוכן עם הוראה. למשל, לדעת באילו ייצוגים שונים ניתן להציג וללמד בעיה ולדעת להעריך את היתרונות והחסרונות של כל ייצוג; ידע של תוכן ותלמידים (Knowledge of Content and Students, KCS) הוא שילוב ידע של תחום התוכן עם היכרות עם תלמידים. למשל, היכרות עם שגיאות נפוצות של תלמידים ועם סיבות אפשריות לשגיאות אלה. ידע מורים הינו גורם מאד משמעותי בתהליכי ההוראה-למידה. חוקרים שבדקו ידע של מורים (ידע תוכני וידע פדגוגי-תוכני) מצאו שככל שידע המורים היה רחב יותר, הם נתנו מענה טוב יותר לקשיי התלמידים, הכינו תוכניות התערבות טובות יותר ותלמידיהם הצליחו יותר (Brownell et al., 2010; Tchoshanov, 2011; Van Inger et al., 2016).

כפי שנכתב לעיל, בעיות מילוליות הינו נושא המעורר קשיים רבים בקרב תלמידים ומצריך מהמורים ידע רחב להוראתו. Chapman (2015) מציינת כי להוראת פתרון בעיות נדרש למורה ידע בעל מרכיבים שונים הייחודיים לפתרון בעיות, אותם ניתן לקשר למרכיבי הידע של דבורה בול ושותפיה: מיומנות בפתרון בעיות, היכרות עם בעיות שונות ומאפיינים שלהם, היכרות עם אסטרטגיות שונות לפתרון בעיות, יצירת בעיות ושינוי של בעיה קיימת, ידע לגבי תלמידים: אמונות תלמידים וקשיי תלמידים, היכרות עם דרכים להורות ולהנחות תלמידים בפתרון בעיות.

לא נמצאו למיטב ידיעתי מחקרים שמיפו ידע של מורים בארבעת מרכיבי הידע שהגדירה דבורה בול בהתייחס לבעיות מילוליות. מכך נגזרה מטרת המחקר: לבדוק מהו ידע המורים בכל אחד ממרכיבי הידע השונים, בנושא בעיות מילוליות תוך התמקדות בשני סוגי בעיות הנלמדים על פי תוכנית הלימודים בישראל בשלבי חינוך שונים (יסודי, חט"ב, חט"ע): בעיות תנועה ובעיות גאומטריה.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר: במחקר השתתפו 57 מורים המלמדים מתמטיקה בחטיבות הביניים בישראל. המורים מלמדים במגוון יישובים ובמגוון בתי ספר, לכולם תעודת הוראה במתמטיקה לחט"ב, והם בעלי וותק מגוון: מחציתם בעלי וותק של 1-10 שנים, ומחציתם בעלי וותק של מעל 10 שנים.

כלי המחקר: המורים קיבלו 2 שאלות מילוליות, האחת בעיית תנועה והשנייה בעיה גאומטרית. הבעיות מייצגות את הרמה הנדרשת על פי תוכנית הלימודים במתמטיקה בישראל (משה"ח, 2005). הבעיות הינן ברמה ממוצעת ועל פי תוכנית הלימודים מצופה מכל מורה ללמד בעיות כאלה במגוון דרכים תוך חיבורים לידע קודם ולנושאים אלגבריים קשורים.

בעיית התנועה: "מאור ואמיר יוצאים בו זמנית מבתיהם ורוכבים זה לקראת זה. מהירותו של מאור היא 6 קמ"ש, ומהירותו של אמיר היא 8 קמ"ש. המרחק בין בתיהם הוא 56 ק"מ. באיזה מרחק מביתו של מאור ייפגשו שני הרוכבים?". לבעיה זו ניתן להציג בשלב הזה של גיל התלמידים שש דרכי פתרון: אלגברי, ויזואלי (בעזרת סקיצה), אריתמטי, בעזרת מהירות יחסית, באמצעות יחס, ופתרון גרפי.

בעיית הגאומטריה: "לרן יש 4 קיסמים באורך X סנטימטרים כל אחד. הוא רצה לבנות מהם מסגרת לתמונה ריבועית ששטחה 9 סמ"ר. הקיסמים היו ארוכים מדיי אז הוא קיצר את כל אחד מהם ב- 7 סנטימטרים כך שהתאימו בדיוק לתמונה שלו. מה היה אורך הקיסמים של רן?". לבעיה זו ניתן להציג בשלב הזה של גיל התלמידים ארבע דרכי פתרון: אלגברי, גרפי, פתרון מהסוף להתחלה, ואריתמטי.

לגבי כל אחת מהבעיות המורים התבקשו: לפתור (CCK), להציע דרכים נוספות לפתרון (SCK), להציע דרכים להמחיש או להורות את הבעיה (KCT), לציין לכל דרך פתרון שהציעו קשיים של תלמידים ושגיאות שתלמידים עושים בפתרון הבעיה (KCS), כאשר לכל פתרון יש מגבלות/קשיים ושגיאות אופייניות, מלבד הקושי הכללי של תרגום המילים למתמטיקה, או קושי בהבנת מושגים (כמו מרחק, מהירות ריבוע, שטח או אורך) והקשר ביניהם.

ממצאים

ממצאי בעיית התנועה מעידים כי הדרך השכיחה בה פותרים המורים ובה הם מלמדים ואף מכירים שגיאות תלמידים היא הדרך המסורתית האלגברית:

CCK את בעיית התנועה פתרו נכון כל המשתתפים (100%), רובם (86%) פתרו בדרך האלגברית וחלק קטן פתרו בעזרת סקיצה או בעזרת מהירות יחסית. SCK: הצעות המורים לדרכי פתרון נוספות כללו שוב את שלוש הדרכים הנ"ל (מי שלא פתר בעזרתן פתרון ראשון, הציע אותן כפתרון שני. חלק קטן של המורים (14%) הציע גם פתרון גרפי. KCS: מרבית המורים שציינו שגיאות אפשריות התייחסו לשגיאות של הדרך האלגברית כמו שגיאה בבניית המשוואה, שגיאה בפתרון המשוואה, ותלמידים שאינם יודעים כיצד להמשיך ולכתוב את הפתרון אחרי שמוצאים את הנעלם. KCT: רוב המורים מראים לתלמידים סקיצה. הם אינם נוטים לפתור בדרך זו אבל ציינו שהם תמיד מסרטטים סקיצה לבעיה ככלי עזר ולא כדרך פתרון. כל המורים ציינו שהם מלמדים בדרך המסורתית בעזרת טבלה וכלים אלגבריים, וכן ציינו כי פתרון גרפי, אריתמטי, או בעזרת יחס אינם דרכים שהם נוהגים לפתור או ללמד לפיהן. חלקם ציינו אמצעים טכנולוגיים (כמו שרטוט פונקציות באמצעות תוכנת גאוגברה) או "המחזה" של הבעיה (שני תלמידים הולכים זה לקראת זה).

בהתייחס להוראה בדרכים מגוונות והצגת דרכי פתרון מגוונות לתלמידים, רוב המורים (כשני שליש) הביעו הסתייגות מהצגת דרכים שונות: 73.68% יציגו סקיצה של קפיצות הדרך אבל לא כדרך פתרון אלא כייצוג ויזואלי של התנועה, 19.3% אמרו שאינם נוטים להציג יותר מדרך פתרון אחת אלא רק לעיתים לתלמידים מצטיינים, ורק 7% ציינו שהם נוהגים להראות יותר מדרך פתרון אחת.

ממצאי בעיית הגאומטריה גם מעידים כי הדרך השכיחה בה פותרים המורים ובה הם מלמדים ואף מכירים שגיאות תלמידים היא הדרך המסורתית האלגברית. לבעיה זו ישנה שגיאה שכיחה אופיינית והיא שגיאת תחום ההגדרה של הבעיה: מי שפותר בדרך האלגברית מקבל שתי תשובות כאשר אחת מהן נפסלת כיוון שאיננה בתחום ההגדרה.

CCK: את בעיית הגאומטריה פתרו נכון רוב המשתתפים (95%) כאשר השוגים היו מורים שלא פסלו את התשובה השנייה שאיננה בתחום ההגדרה. רובם (84%) פתרו בדרך האלגברית וחלק קטן פתרו

מהסוף להתחלה. SCK: הצעות המורים לדרכי פתרון נוספות כללו שוב את שתי הדרכים הנ"ל (מי שלא פתר בעזרתן פתרון ראשון, הציע אותן כפתרון שני. חלק קטן של המורים (10%) הציע גם פתרון גרפי או אריתמטי. KCS: מרבית המורים שציינו שגיאות אפשריות התייחסו לשגיאות של הדרך האלגברית כמו שגיאה בבניית המשוואה, שגיאה בפתרון המשוואה, ושגיאות בתחום ההגדרה. KCT: מיעוט הציעו המחשות באמצעים קונקרטיים (רצועות קרטון או מקלות פלסטיק שמחברים לריבוע), וכל היתר ציינו שהם מלמדים בדרך האלגברית.

בהתייחס להוראה בדרכים מגוונות רוב המורים (66.7%) לא מציגים דרך נוספת, 9.3% ציינו כי שאינם נוטים להציג יותר מדרך פתרון אלא רק לעיתים לתלמידים מצטיינים זו אפשרות ורק 14% ציינו כי יראו יותר מדרך פתרון אחת.

סיכום ממצאי הידע באופן כללי, בשתי הבעיות, כל המורים ציינו את האלגוריתם המסורתי לפתרון (בחירת משתנה, בניית טבלה, בניית משוואה ופתרונה). המורים אף השתמשו במילים "מתכון לפתרון" וציינו שהם נוקטים באותה שיטה בכל סוגי בעיות מילוליות שהם מלמדים. כפי שניתן לראות לעיל- נמצאו הבדלים בידע המורים בין מרכיבי הידע השונים ובין שתי הבעיות שניתנו.

להלן (טבלה 1) סיכום של ידע המורים. נבדק מהו אחוז המורים שגילו ידע בכל אחד מהמרכיבים: אחוז המורים שפתרו נכון את הבעיה, אחוז המורים שפתרו נכון ביותר מדרך אחת, אחוז המורים שהציעו דרכי הוראה שאינן רק הדרך המסורתית של טבלת נתונים ובניית משוואה, ואחוז המורים שהכירו שגיאות אפשריות אופייניות לכל דרך פתרון שהציעו.

טבלה 1

אחוז המורים שגילו ידע בכל אחד ממרכיבי הידע

סוג ידע	השאלה	בעיות גאומטריה	בעיות תנועה	הבדלים בין סוגי הבעיות $\chi 2$
CCK	פתרו נכון את השאלה	95%	100%	-
SCK	היכרות עם לפחות 2 דרכי פתרון/ייצוגים שונים	39%	65%	* 7.905
KCT	בחירת דרכי הוראה והמחשה מגוונות (מלבד טבלה ומשוואה)	19%	74%	33.886**
KCS	היכרות עם קשיים ושגיאות תלמידים (מלבד קשיים בקריאה, שגיאות אלגבריות או חישוביות)	7%	14%	-

* p<0.05 , ** p<0.01

ממצאי טבלה 1 מעידים כי במרכיבי ידע תוכן והוראה וידע תוכן ייחודי, הידע של המורים בבעיות תנועה רחב יותר מאשר הידע שלהם בבעיות גאומטריה. בשני סוגי הבעיות, הידע הנמוך ביותר נמצא לגבי ידע של תוכן ותלמידים והידע הגבוה ביותר שנמצא הוא ידע תוכן שגרתי. לא נמצא קשר בין וותק המורים לבין דרכי הפתרון השונות (CCK, SCK, KCT). מורים וותיקים וחדשים ענו באופן דומה על הבעיות בהתייחס לדרכי הפתרון שלהם ועל המלצות ההוראה שלהם. כן נמצא קשר בין וותק לבין ידע של תוכן ותלמידים KCS: למורים וותיקים יותר נמצא ידע רב יותר בהתייחס לשגיאות תלמידים (r=0.323, p<0.05).

דיון ומסקנות

במחקר זה נבדק שיטתית ידע המורים לגבי הוראת שני סוגי בעיות מילוליות ספציפיות. ידע מורים עשוי להשפיע על תהליכי הוראה-למידה: ידע מתמטי ופדגוגי רחב ותחושת מסוגלות גבוהה מאפשרים הוראה משמעותית. אחד החידושים במחקר זה הינם אופן בדיקת הידע: לא נמצאו מחקרים קודמים שבדקו את ארבעת מרכיבי הידע שהוגדרו על ידי דבורה בול ועמיתים (2008) ידע תוכן שגרתי- CCK, ידע תוכן ייחודי-SCK, ידע של תוכן והוראה- KCT וידע של תוכן ותלמידים- KCS.

ממצאי ידע המורים מעידים כי למורים ידע CCK ברמה טובה מאד: כל המורים פתרו נכון את בעיית התנועה ורובם המוחלט פתרו נכון את הבעיה הגאומטרית. בהתייחס למרכיבי הידע SCK ו- KCT נמצא כי למורים ידע חלקי: דרך הפתרון השכיחה ביותר, אותה הכירו כל המורים (או שפתרו בעזרתה כפתרון ראשון או כפתרון שני) הינה דרך הפתרון האלגברי. יתר דרכי הפתרון נמצאו בשכיחות נמוכה עד אפסית. כמו כן, נמצא כי המורים נוטים לעבוד בדרך אחת והיא כמעט אצל כולם הדרך האלגברית. הידע הנמוך ביותר נמצא לגבי ידע KCS- מעט מאד מורים צופים מראש או מכירים שגיאות אופייניות של תלמידים. ממצאי מחקר זה תואמים ממצאי מחקר קודם (Schreiber, 2020) שגם בו נמצא כי למורים הידע הרב ביותר בידע תוכן שגרתי והידע המועט ביותר בידע של תוכן ותלמידים.

לא נמצא קשר בין וותק המורים לבין שלושה מבין ארבעת מרכיבי הידע. כן נמצא קשר בין ידע תוכן ותלמידים KCS וותק המורים: ככל שלמורים וותק רב יותר, כך יש להם ידע רב יותר לגבי שגיאות תלמידים. גם ממצא זה תואם את ממצאי המחקר הנ"ל שגם בהם וותק המורים נמצא בקשר ישיר לידע שלהם בהקשר לתלמידים. ניתן להסביר זאת בכך שלמורים וותיקים יותר יש יותר היכרות עם תלמידים ודרכי חשיבה של תלמידים מאשר למורים חדשים. ממצאים אלו מחזקים ומדגישים המלצות מחקרים קודמים (Van Inger et al., 2016) לגבי חשיבות הרחבת הידע, הדרכה וליווי של מורים.

רשימת מקורות

משרד החינוך והתרבות (2006). תוכנית לימודים במתמטיקה לחטיבות הביניים לכל המגזרים בישראל. ירושלים: ת"ל.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching – What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Boonen, A. J., van der Schoot, M., van Wesel, F., de Vries, M. H., & Jolles, J. (2013). What underlies successful word problem-solving? A path analysis in sixth-grade students. *Contemporary Educational Psychology*, *38*(3), 271-279.

Brownell, M. T., Sindelar, P. T., Kiely, M. T., & Danielson, L. C. (2010). Special education teacher quality and preparation: Exposing foundations, constructing a new model. *Exceptional Children, 76*, 357-377.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *3*(1), 19-36.

Debrenti, E. (2015). Visual Representations in Mathematics Teaching: An Experiment with Students. *Acta Didactica Napocensia, 8*(1), 19-25.

Mielicki, M. K., & Wiley, J. (2016). Alternative representations in algebraic problem solving: When are graphs better than equations?. *The Journal of Problem Solving, 9*(1), 1.

Pongsakdi, N., Kajamies, A., Veermans, K., Lertola, K., Vauras, M., & Lehtinen, E. (2020). What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. ZDM, 52(1), 33-44.

Schreiber, I. (2020). Patterns in Kindergarten: Teachers Pedagogical Content Knowledge and Self-Efficacy. *Scientia in educatione, 11*(1), 69-81.

Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 141-164.

Van Inger, S., Eskelson, S. L., & Allsopp, D. (2016). Evidence of the need to prepare prospective teachers to engage in mathematics consultations. *Mathematics Teacher Education and Development, 18*(2), 73-91.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM, 52*(1), 1-16.

פתוח יותר או פתוח פחות, מה עדיף?

מאיה רון עזרא, אוניברסיטת תל אביב, המכללה האקדמית אחוה
פרופ׳ אסתר שרון לוינסון, אוניברסיטת תל אביב

מבוא

דו"ח ה- OECD לשנת 2017 מדגיש כי לכל אדם, ללא הבחנה בכישוריו, יש את הפוטנציאל לחשוב יצירתי. מחקרים שונים מצביעים על כך שעידוד יצירתיות מתמטית עשוי לחזק קשרים בין נושאים מתמטיים שונים ולהרחיב ידע קיים (Shen & Edwards, 2017), אך על אף הכרה זו, מעט מאוד מחקרים עוסקים בעידוד יצירתיות מתמטית באוכלוסיות של תלמידים עם צרכי חינוך מיוחדים (צח"מ). בכל הקשור לתלמידים עם צח"מ, הולכת וגוברת המודעות לחשיבות שביצירת הזדמנות שוות ללמידה עבור כל תלמיד באשר הוא (Treahy & Gurganus, 2010). הוראה החושפת תלמידים עם צח"מ למגוון דרכי פתרון עשויה לעודד גמישות ויצירתיות, כמו גם לסייע בהעמקת הידע וההבנה המתמטית (Peters et al., 2014). המחקר הנוכחי בדק כיצד תלמידים עם צח"מ ובפרט תלמידים עם הפרעת למידה (ה"ל) מבטאים יצירתיות מתמטית בעת פתרון מטלה פתוחה.

רקע תיאורטי

הבנה מעמיקה של רעיונות מתמטיים משלבת בתוכה מרכיבים של יצירתיות וחשיבה מסתעפת (Bahar & Maker, 2011). נהוג לבדוק יצירתיות מתמטית באמצעות שלושה פרמטרים: 1. שטף – **כמות** של פתרונות סופיים או דרכי פתרון, בעלי הקשר למטלה הנתונה, 2. גמישות - **מגוון** אסטרטגיות או דרכי פתרון שונים, חשיבה מסתעפת המובילה למעבר בין קטגוריות שונות, 3. מקוריות – "**ייחודיות**" או "חדשנות" בפתרונות ובדרכי הפתרון המעידים על תובנה והקשרים בין נושאים שונים (Levenson, 2013). על מנת לעודד יצירתיות, חוקרים רבים המליצו לתת לתלמידים לפתור מטלות פתוחות.

מטלה פתוחה (open-ended tasks) היא מטלה בעלת נתיב התחלה ללא הוראה מפורשת (Klein & Leikin, 2020). מטלה כזו, תקרא במחקר זה "מטלה פתוחה לחלוטין". לעומתה, מטלה שרמת ה"פתיחות" בה מצטמצמת, נתיב ההתחלה נשאר כשהיה ללא הוראה מפורשת אך התוצאה הסופית מוגדרת מראש, תקרא "מטלה פתוחה למחצה". מטלה שכזו מעוררת חשיבה מסתעפת ומזמנת יצירת דרכים מגוונות המובילות כולן לאותו הפתרון, מעודדת ביטוי למרכיבי היצירתיות (Bahar & Maker, 2011). במחקר זה תלמידים עם ה"ל התנסו במטלה עם שלושה סעיפים, הראשון פתוח לחלוטין ואילו השניים האחרים פתוחים למחצה.

הפרעת למידה (ה"ל) מאופיינת בקשיים ברכישת ידע חדש, עיבוד מידע וקשיים בשליפה וזיכרון. תלמידים עם ה"ל לומדים על פי תוכניות חינוכית התואמת את התוכן המתמטי בתוכנית הלימודים הכללית, כאשר מטרת ההוראה היא לחשוף את התלמידים למגוון אסטרטגיות ולעודד לגמישות ויצירתיות (Peters et al., 2014) כמו חבריהם לכיתה ללא צרכים מיוחדים. מאידך, הוראת המתמטיקה חייבת להיות מונגשת ורלוונטית עבורם והיא דורשת תיווך וגישור בהתאם לצרכיהם הייחודיים. שאילת שאלות פתוחות ואסטרטגיות של הדהוד וחשיבה בקול הן חלק מהתיווך הנדרש. הן מקדמות מיומנויות מטה-קוגניטיביות כמו בקרה, מעקב וניתוח פתרון (Treahy & Gurganus, 2010) וכמו כן מעוררות אפיקי מחשבה חדשים החיוניים לשטף ולגמישות. מטרת המחקר היא לבחון

באיזו מידה זוגות תלמידים עם ה"ל הלומדים בכיתה ג' חינוך מיוחד (חנ"מ) מבטאים יצירתיות מתמטית, כאשר ניתן להם תיווך מותאם.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 12 תלמידי כיתה ג' עם ה"ל, משתי כיתות חנ"מ בבתי ספר כלליים. המדען הראשי של משרד החינוך אישר את המחקר והורי כל התלמידים אישרו את השתתפותם. התלמידים חולקו לזוגות במטרה להפרות ביטויים של שטף וגמישות (Molad et al., 2020). המחנכות חלקו את התלמידים תוך התחשבות ביכולות המתמטיות והחברתיות הדרושות לעבודה משותפת.

לצורך בדיקת ביטויי היצירתיות, הוצגה לתלמידים מטלה פתוחה המחולקת לשלוש משימות ברמות שונות. המשימה הראשונה "כמה תרגילים תוכל לכתוב מהמספרים 0-9?" בעלת נתיב התחלה פתוח לחלוטין ברמת קושי נמוכה. המשימה השנייה "כמה תרגילים תוכל לכתוב מהמספרים 0-9 שתוצאתן היא 20?", מטלה פתוחה למחצה וברמת קושי בינונית, והמשימה השלישית "כמה תרגילים תוכל לכתוב מהמספרים 0-9 שתוצאתן היא 32?", גם היא פתוחה למחצה אך ברמת קושי יותר גבוה.

המשימות הועברו לתלמידים בשני מפגשים, כל מפגש בין 5-25 דקות, בחדר שקט שהוקצה עבור המחקר בבית הספר. החוקרת נכחה במפגש, סיפקה לכל זוג תלמידים כלי כתיבה ודף לבן חלק עבור כתיבת התשובות (במידה והתלמידים ביקשו, ניתן דף נוסף כך שלכל תלמיד יהיה דף אישי לכתיבת התשובות). במידת הצורך, החוקרת תיווכה לתלמידים באמצעות: שאילת שאלות (למשל: האם ניתן לשלב יותר מפעולה אחת בתרגיל? האם ניתן ליצור תרגיל עם יותר משני איברים?), חזרה על דבריהם בקול ומתן חיזוקים מילוליים, על פי פרוטוקול שהוכן מראש. התלמידים ישבו זה לצד זה, מצלמת וידאו תיעדה את אופן ביצוע המטלה. כל הזוגות ביצעו את המשימה הראשונה והשנייה במפגש אחד, זוג אחד מתוך ששת הזוגות לא ביצע את המשימה השלישית עקב הקושי העולה ברמת המשימות. המטלה הנה חלק ממחקר עיצוב רחב, הבודק כיצד ניתן להנגיש מטלות המעודדות יצירתיות מתמטית לתלמידים עם ה"ל. התוצאות המוצגות כאן הינן מחלקו הראשון של המחקר.

ממצאים

בהתייחס למטלה שניתנה, היצירתיות המתמטית נבדקה על פי מרכיבי שטף וגמישות. מרכיב השטף נמדד לפי סך כל התרגילים הנכונים שכל זוג כתב יחד. במקרים בהם תלמיד כתב את אותו התרגיל פעמיים ובמקרים בהם שני בני הזוג כתבו תרגיל זהה, התרגילים נחשבו כתרגיל אחד.

עבור המשימה הראשונה כל זוג כתב בממוצע 31 תרגילים (SD=5.17). במשימות האחרות ממוצע התרגילים היה נמוך יותר, במשימה השנייה הממוצע היה 9.17 תרגילים (SD=3.37) ובשלישית 6.4 תרגילים (SD=2.5). רוב התלמידים השתמשו בפתרונותיהם בפעולה חשבונית אחת (למשל חיבור), שהופיעה פעם אחת או יותר בתרגיל ובמספר משתנה של איברים (ראה איור 1). בטבלה 1 מוצגת השכיחות הממוצעת של התרגילים בהן מעורבת פעולה חשבונית אחת ותרגילים בהן מעורבות מספר פעולות (N מייצג את ממוצע התרגילים לכל משימה). מהטבלה משתקף ההבדל בין שימוש בפעולות במשימות השונות, לדוגמא במשימה הראשונה התלמידים הפגינו שימוש רב יותר בפעולות החיבור והכפל (ממוצע של 10.33-12.5 תרגילים) לעומת פעולות אחרות. בנוסף, ניכר כי המשימות הפתוחות למחצה זימנו יצירת תרגילים המערבים מספר פעולות יחד (תרגילי שרשרת). במשימה הראשונה כל זוג כתב בממוצע 31 תרגילים מתוכם 2 תרגילים מעורבים, לעומת המשימה השלישית בה ממוצע התרגילים פחת אך מתוכם כמות התרגילים המעורבים היתה גבוהה, ביחס של 4.2/6.4.

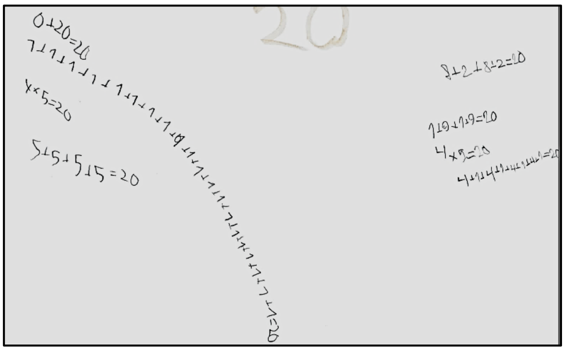
טבלה 1
שכיחות ממוצעת של תרגילים שהופקו בשלושת המשימות עבור פעולה

	משימה 1	משימה 2	משימה 3
	(N=31)	(N=9.17)	(N=6.4)

חיבור	M=12.5 (SD=4.48)	M=5.83 (SD=0.41)	M=1.4 (SD=0.9)
חיסור	M=4.33 (SD=2.64)	-	-
כפל	M=10.33 (SD=8.03)	M=2.67 (SD=2.16)	M=0.8 (SD=0.44)
חילוק	M=1.83 (SD=0.99)	-	-
מעורב	M=2 (SD=0.98)	M=2.67 (SD=2.16)	M=4.2 (SD=1.79)

מרכיב הגמישות התייחס ל"שבירת הקיבעונות" בהתחשב בגילם הצעיר של התלמידים עם ה"ל. ביטוי לגמישות נחשב כאשר התלמידים "התגברו" על תבנית מוכרת (תרגיל עם פעולה אחת לרוב חיבור או כפל), ויצרו תרגילים בהם היו מעורבים יותר מפעולה אחת או תרגילים בהם פעולה אחת הופיעה יותר מפעם אחת. איור 1 ואיור 2 מדגימים כיצד באה לידי ביטוי גמישות של שני זוגות תלמידים במשימה 2.

איור 1
דף פתרונות זוג א' במשימה 2



איור 2
דף פתרונות זוג ב' במשימה 2

בדף הפתרונות של זוג א' ניכר כי התלמידים "התגברו" על התבנית הנפוצה (תרגיל עם פעולה אחת), והשתמשו אומנם בפעולה אחת (חיבור) אך מספר המחוברים השתנה מתרגיל לתרגיל (1+9+1+9, 4+4+4+4+4). לעומתם, זוג ב' יצר מלכתחילה תרגילי שרשרת עם מספר פעולות וגוון בין הפעולות השונות $(2+9+9*1)$. כמו כן ניכר שימוש ייחודי בפעולת החיסור $(4-8-8*4)$.

ממצא נוסף מתייחס לתיווך שניתן לתלמידים בעת ביצוע המשימות. למשל בתמליל השיח בין החוקרת לזוג תלמידים לאחר 10 דקות של ביצוע משימה 1, החוקרת מפנה אל התלמידים שאלה על מנת לעודד גמישות ולפתוח אפיק מחשבה נוסף:

חוקרת:	האם חייבים תרגיל שיש בו שני מספרים או שאפשר יותר?
תלמיד 1:	(פותח עיניו בפליאה ומסתכל על חברו).
תלמיד 2:	אפשר יותר.
חוקרת:	כמו מה?
תלמיד 1:	אמ... שמונה ועוד שתיים ועוד שתיים ועוד שתיים.
תלמיד 2:	וואי, רגע רגע (קופץ במקום)...שמונה ועוד שתים ועוד חמש ועוד שש (כותב את התרגיל ופותר).
תלמיד 1:	(כותב 2+9+8=19).
תלמיד 2	(לאחר עוד דקה) "וואי אני יכול גם לעשות ככה חמש כפול חמש כפול 9 כפול 9".
תלמיד 1:	רוצה לדעת את השיטה שלי? תראה מה השיטה שלי, כמה ספרות עשית?

תלמיד 2: שלוש ספרות.

תלמיד 1: תעשה עוד ספרה אחת, עכשיו אני יכול להראות לך דרך (לוקח את הדף של תלמיד 2). אתה יכול לעשות חמש כפול חמש, עשרים וחמש. תשע כפול תשע, שמונים ואחת, נכון? ואני יכול לעשות ככה עשרים וחמש ועוד שמונים ואחד וזאת התשובה שתצא לי.

בדוגמא זו, שאלת החוקרת פתחה עבור שני התלמידים אפיק מחשבה, אשר אחריו התלמידים יצרו תרגילים עם יותר משני איברים (2+9+8, 6+5+2+8) וכן שילוב של מספר פעולות בתרגיל אחד (5*5+5*5). בנוסף, התיווך שניתן עודד את התלמידים לקיים שיח, שיתוף פעולה ועזרה הדדית בעת כתיבת התרגיל ופתרונו.

דיון ומסקנות

שילוב מטלות המעודדות יצירתיות מתמטית בכיתות חנ"מ אינו מובן מאליו ומצריך הנגשה והתאמות. מחקר זה הראה שתלמידים עם ה"ל מצליחים לבטא שטף וגמישות במשימות הנחשבות כמעודדות יצירתיות מתמטית. התלמידים בטאו שטף של תרגילים במשימות פתוחות לחלוטין (Klein & Leikin, 2020), עם תיווך ממוקד שסייע להם בשליפת הידע ואפשר את עיבודו באופן התואם את המטלה (Treahy & Gurganus, 2010). במשימה הראשונה ניכר ביטוי רב יותר למרכיב השטף לעומת הגמישות, שהתבטא בעיקר בפעולות החיבור והכפל. לעומת כך, במטלה השנייה והשלישית שהיו פתוחות למחצה למרכיב הגמישות היה ביטוי רב יותר לעומת השטף שפחת. כאן באו לידי ביטוי חשיבה מסתעפת ויצירת הקשרים בין נושאים כחלק מההתמודדות עם המשימה (Bahar & Maker, 2011). המחקר הנוכחי אומנם מצומצם, שכן הוא מראה ביטויים של יצירתיות אצל 12 תלמידים עם ה"ל ורק במטלה אחת. יחד עם זאת, התובנות שהתקבלו מניתוח זה יוכלו בעתיד לסייע בהנגשת מטלות המעודדות יצירתיות מתמטית.

רשימת מקורות

Bahar, A. K., Maker, C. J. (2011). Exploring the Relationship between Mathematical Creativity and Mathematical Achievement. *Asia-Pacific Journal of Gifted and Talented Education*, 3(1), 33-48.

Klein, S., Leikin, R. (2020). Opening mathematical problems for posing open mathematical tasks: what do teachers do and feel?. *Educational Studies in Mathematics,* 105, 349-365.

Molad, O., Levenson, E. S., Levy, S. (2020). Individual and group mathematical creativity among post–high school students. *Journal for Education studies in mathematics*, 104, 201-220.

Levenson, E. (2013). Tasks that may occasion mathematical creativity: Teachers' choices. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 16(4), 269–291.

OECD (2017), PISA 2021 Creative Thinking Strategic Advisory Group Report, Organisation for Economic Co-Operation and Development, https://one.oecd.org/document/EDU/PISA/GB(2017)19/en/pdf (accessed on 3 October 2022).

Peters, G., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L., Ghesquière, P. (2014). Subtraction by addition in children with mathematical learning disabilities. *Learning and Instruction*, 30, 1-8.

Shen, Y., Edwards, C. P. (2017). Mathematical creativity for the youngest school children. Kindergarten to third grade teachers' interpretations of what it is and how to promote it. *The mathematics enthusiast*, 14 (1), 324-345.

Treahy, D. L., Gurganus, S. P. (2010). Models for special needs students. *Teaching Children Mathematics,* 16(8), 484-490.

בחינת האפקטיביות של סרטוני וידאו קצרים להוראת מתמטיקה בנושא אנליזה

אלי נצר, אוניברסיטת תל אביב
פרופ' מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

מבוא ורקע תאורטי

סרטוני הוראה ולמידה בחינוך זוכים לשימוש נרחב בעשור האחרון, ומהווים את אחד ממקורות המולטימדיה השימושיים ביותר ללמידה בקורסים מקוונים (de Koning, Hoogerheide, & Boucheix, 2018). יחד עם השימוש ההולך וגובר בסרטוני וידאו לצרכי הוראה, התפתחו גם מתודות העוסקות באופן שילוב הסרטונים בקורסים ובמקצועות הנלמדים. במקביל, מתעוררים אתגרים הקשורים לתכנון, ייצור ואופן השימוש המיטבי בסרטונים אלו (Hansch et al., 2015). בנוסף, מעט מאוד מחקרים עוסקים במדידת האפקטיביות הפדגוגית של השימוש בסרטונים במסגרת קורסים מקוונים, ואף אין תמימות דעים לגבי המדדים לבחינתה (Woolfitt, 2015).

בספרות קיימות שתי גישות מרכזיות לשאלת אופן מדידת האפקטיביות של סרטוני וידאו לימודיים. הגישה הראשונה הנוקטת בבחינה עקיפה, דוגלת בניתוח ההשפעות העקיפות על הלומדים, כגון בחינת הישגי הלומדים, שיעור הנשירה מהקורס וכן משובי הלומדים. הגישה השנייה למדידת אפקטיביות של סרטונים, הנתפסת כבחינה ישירה, מבוססת על ניתוח אופן השימוש בפועל כפי שנעשה על ידי משתמשי הסרטונים (Kim et al., 2014). מחקר זה נערך תוך שימוש בגישה השנייה, הבוחנת באופן ישיר את נתוני השימוש בסרטונים.

מחקר זה הינו הרחבה של מחקר קודם של המחבר (נצר, 2019). המחקר הקודם התמקד בסרטוני תרגול מסוג מסוים, העוסקים במושג הפונקציה הריבועית על ייצוגיה השונים ומיועדים לכיתה ט'. למרות ייחודיות המחקר הקודם בהיבט מתודת המחקר, מסקנותיו חייבו המשך בדיקה בכדי שניתן יהיה להכליל. מחקר זה בא להרחיב את קודמו על ידי חקירת מגוון רחב יותר של סרטונים מתמטיים, וכן לטייב את מתודת חקירת הסרטונים. לשם כך, הוחלט להתמקד במחקר בסרטונים בנושא אנליזה; זהו נושא לימוד מרכזי בחטיבה העליונה ברמות 4-5 יחידות לימוד, ובהתאמה, סרטונים בנושא אנליזה מהווים חלק ניכר מהמאגר ממנו נלקחו וכן כוללים מגוון רחב של שיטות ואמצעי המחשה.

למחקר שתי שאלות מרכזיות: הראשונה, אילו התאמות ושינויים יש לבצע במתודה כפי שפותחה במחקר הקודם, על מנת שיתאפשר לנתח באמצעותה מגוון רחב של סרטוני הקנייה ותרגול מתמטיים? והשנייה, מה ניתן ללמוד מניתוח הסרטונים על פי המתודה שהוגדרה, ביחס למידת האפקטיביות של הסרטונים? השאלה האחרונה חולקה לשלוש תתי שאלות: א. באיזה אופן הסוגיות המתמטיות הנדונות בסרטונים משפיעות על מאפייני השימוש, ומה ניתן ללמוד מכך לגבי העדפות הלומדים?; ב. כיצד אופן הצגת הנושאים המתמטיים בסרטונים משפיע על מאפייני השימוש, ומה ניתן ללמוד מכך על העדפות הלומדים?; ג. באיזה אופן הפורמטים השונים של הסרטונים משפיעים על מאפייני השימוש בהם, ומה ניתן ללמוד מכך על העדפות הלומדים? נציין, כי בשל מגבלות המקום במסגרת הצגה זו נתמקד בשאלה הראשונה בלבד.

מתודולוגיה

המחקר מתמקד בחקירת סרטונים קצרים להוראת מתמטיקה, המיועדים לתלמידי החטיבה העליונה, במטרה לבחון את האפקטיביות של סרטונים אלו. לשם כך המחקר בוחן מגוון רחב של סרטוני הוראה

מתמטיים בנושא אנליזה, מתוך תוכנית הלימודים לחטיבה העליונה ברמת 5 יחידות לימוד (מפרויקט "האתגר 5"). שיטת המחקר מבוססת על חקר מרובה מקרים; כל סרטון הנו מקרה ובמסגרת המחקר נחקרים מקבצים שונים של סרטונים. בנוסף, נבחנים נתוני השימוש של המשתמשים בסרטונים כפי שהצטברו במשך שנתיים ממועד העלאתם למרשתת, יחד עם ניתוח תוכנם המתמטי-דידקטי של הסרטונים.

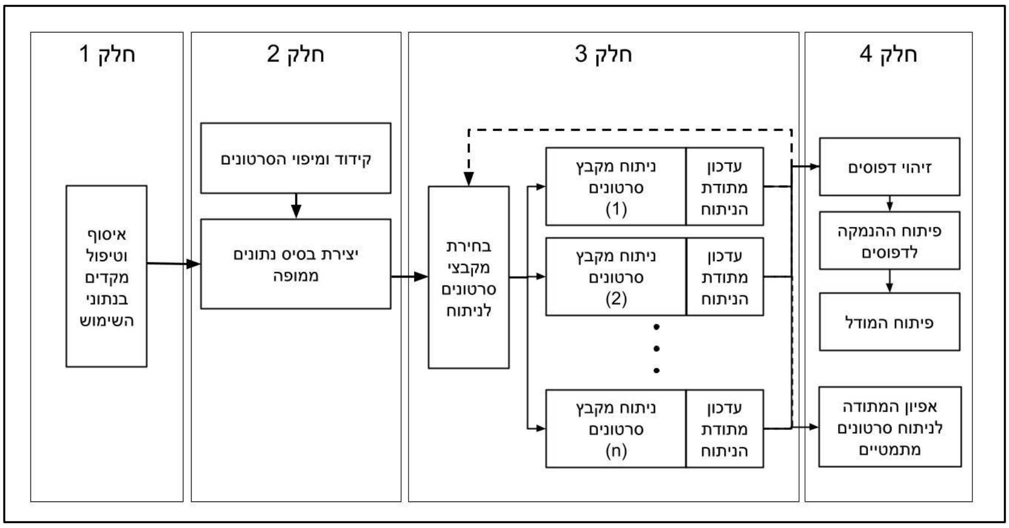
אוכלוסיית המחקר הינה ציבור משתמשי הסרטונים. היות והסרטונים פתוחים וזמינים לכל במרשתת, הנחת המחקר היא שרוב המשתמשים הנעזרים בסרטונים הם תלמידים מכיתות י' עד יב' הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יחידות לימוד. הנחה זו נסמכת בעיקר על העובדה שהסרטונים מאוגדים תחת פרויקט "האתגר 5", המיועד מלכתחילה לאוכלוסיה זו.

ניתן לחלק את כלי המחקר לשניים: הראשון, עשרים ושישה סרטוני הוראה בנושא אנליזה שהופקו במסגרת פרויקט "האתגר 5". הסרטונים מותאמים לתוכנית הלימודים של 5 יחידות לימוד במתמטיקה לכיתות י' עד יב', מצויים במרשתת ופתוחים לשימוש ללא תשלום. השני, שימוש בפלטפורמת YouTube Analytics, המאגדת מגוון רחב של נתונים וכלי ניתוח. הפלטפורמה מאפשרת פילוח של הנתונים הן לפי זמן והן לפי מדדים נוספים בהקשר לשימוש הישיר של המשתמשים בסרטונים.

מהלך המחקר מחולק לארבעה חלקים עיקריים, ראו איור 1. חלקו הראשון, הנו איסוף וטיפול מקדים בנתוני השימוש (Pre-processing). ההתמקדות בחלק זה היא בנתוני השימוש החיצוניים והפנימיים של הסרטונים. חלקו השני, הנו מיפוי הסרטונים ושילוב נתוני השימוש. תוצר שלב זה הנו טבלה מסכמת, הכוללת מיפוי של כל הסרטונים באתר על פי נושאי הלימוד ועל פי סוגי הסרטונים. חלקו השלישי, הנו ניתוח הנתונים באופן חוזר (iterative), כאשר חקירת כל סרטון במקבץ תבוצע כחקר מקרה בודד (case study). בנוסף, תוצאות החקירה של כל סרטון יבחנו לעומת שאר הסרטונים במקבץ (Multiple-case) וזאת לצורך אימות ההבחנות ומציאת תבניות ומאפיינים דומים או שונים. חלקו הרביעי והאחרון, הנו איפיון המתודה ובחינת מידת האפקטיביות. הדפוסים והתבניות שהתגלו בחלק הקודם יגובשו, בשאיפה למתן מענה כולל על שאלות המחקר.

איור 1

מהלך המחקר



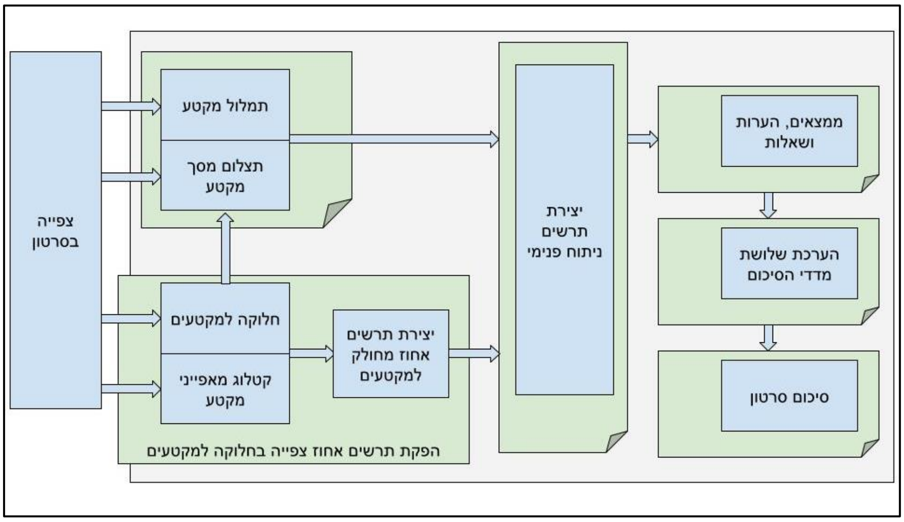
בכל אחד מהסרטונים, ניתוח תוכן הסרטון מתמקד בהיבט הדידקטי של הסרטון (נצר, 2019). ההתייחסות היא לאופן הצגת הנושאים המתמטיים, אופן הבנייתם וכן השיטות הדידקטיות בהן נעשה שימוש בסרטון. בנוסף, הניתוח כולל בחינה של הרישומים שמתבצעים במהלך הסרטון, בחינת שרטוטי העזר, התמקדות בהמחשות הגרפיות שצורפו ותזמונן בסרטון וכן בחינת הדגשים, החזרות וההרחבות שבוצעו במהלך הסרטון.

ממצאים

בסיום חלקו השני של המחקר, לאחר מיפוי כל הסרטונים בנושא אנליזה במאגר ובחינת טיב הנתונים שנאספו, הוחלט להתמקד בעשרים ושישה סרטונים. כחלק מכיווני המחקר שהתגבשו במהלך חלקו השלישי של המחקר, במסגרתו נחקר כל סרטון כמקרה בודד (case study), פותחה מתודת הניתוח המתוארת באיור 2. שני חידושים עיקריים נכללים במתודה זו בהשוואה למחקר הקודם: הראשון, מעבר מקטלוג של כלל הסרטון לקטלוג ואפיון מקטעים בתוך הסרטון, המחשה לכך ניתן לראות באיור 3. השני, אפיון שלושה מדדי סיכום להערכה כוללת של הסרטון; שלושת המדדים הם מדד המבנה המתמטי-דידקטי של הסרטון, מדד אופן שילוב אמצעי ההמחשה ומדד אופן הנגשת הסרטון.

איור 2

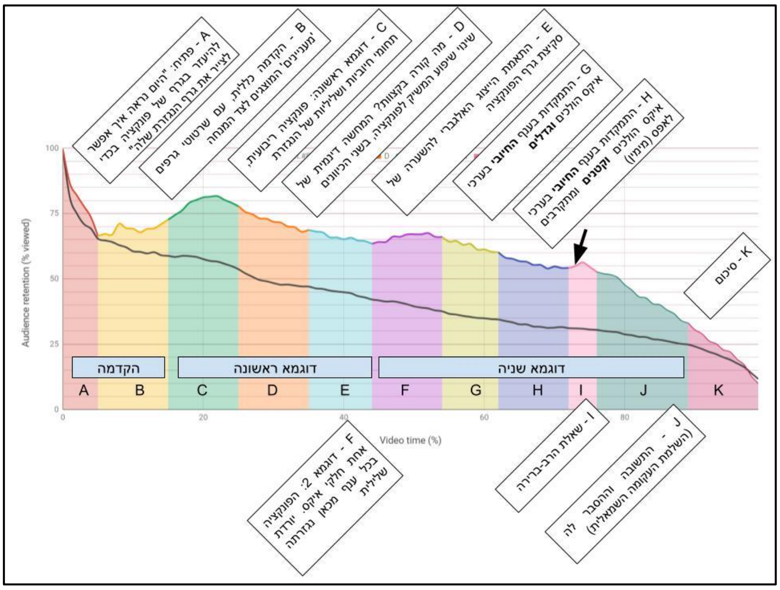
השלבים השונים בניתוח סרטון בודד



שלושה מדדים אלו התפתחו להיות שלוש עדשות המשמשות לבחינת תתי-שאלות המחקר. העדשה הדידקטית, מהווה דרך לבחינת הסוגיות המתמטיות השונות הנדונות בסרטונים. עדשת ההמחשה, מהווה כלי לבחינת אופן הצגת הנושאים המתמטיים בסרטונים. ועדשת ההנגשה היא הבוחנת את מידת השפעת הפורמטים השונים של הסרטונים על האפקטיביות שלהם.

איור 3

קטלוג הסרטון למקטעים



השימוש בכל אחת משלוש העדשות מאפשר לבחון כל סרטון מזווית אחרת, ולהשוותו בכל פעם למקבץ סרטונים אחר בעל אותם מאפיינים. כך למשל בעדשה הדידקטית, הבוחנת את הסוגיות המתמטיות הנדונות בסרטונים, נמצאו שלושה מאפיינים כלליים לפיהם ניתן לקבץ את הסרטונים. בהתאמה, שלושת המקבצים אופיינו באופן הבא: א. סרטונים המדגימים פרוצדורה מתמטית מסוימת ואופן יישומה; ב. סרטונים המציגים בעיות מתפתחות; ג. סרטונים הדנים במונחים והמשגה. בעדשה זו כל סרטון נבחן בהשוואה למקבץ אליו הוא משויך, דבר שהקל על זיהוי הממצאים.

דיון

למרות העניין הרב בחקר מידת האפקטיביות של סרטונים בהוראה באופן כללי, ועל אף מגוון השיטות הנדונות בספרות לצורך בחינתם, הרי שלמיטב ידיעת כותב המחקר אין בנמצא כיום מתודולוגיה מובנית לבחינת מידת האפקטיביות של סרטונים להוראה בכלל (Hansch et al., 2015) ולהוראת המתמטיקה בפרט. לפיכך, ייחודיותו של מחקר זה הנה בראש ובראשונה בכך שאחת ממטרותיו היא פיתוח מתודולוגיה לבחינת סרטוני הוראת מתמטיקה, המשלבת את בחינת נתוני השימוש בסרטונים יחד עם ניתוח תוכנם, לטובת קביעת מידת האפקטיביות של הסרטונים.

בנוסף, ההתמקדות בחקירת תוכן הסרטונים מהיבט דידקטי-מתמטי – באופן בו נבחן הקשר בין פעולות המשתמשים בעת הצפייה בסרטונים לבין התוכן הדידקטי-מתמטי הכלול בסרטונים – אף היא ייחודית. חקר קשר זה יכול לאפשר זיהוי דפוסי שימוש של לומדים בסרטונים, ומעבר לכך, לאפשר מתן הסבר לדפוסי שימוש אלו ואף הסקת מסקנות לטובת הפקת סרטוני הוראה בעתיד.

ביבליוגרפיה

נצר, א. וטבח, מ. (2019). פיתוח מתודולוגיה לחקירת והערכת מידת האפקטיביות של מקבצי סרטוני תרגול מתמטיים, בנושא ייצוג הפונקציה הריבועית. אצל ע. הד-מצויינים, א. פינטו, נ. עדין (עורכים), כנס ירושלים השביעי למחקר בחינוך מתמטי, 105-108. ירושלים, ישראל

de Koning, B. B., Hoogerheide, V., & Boucheix, J.-M. (2018). Developments and Trends in Learning with Instructional Video. *Computers in Human Behavior*, *89*, 395–398. https://doi.org/10.1016/j.chb.2018.08.055

Hansch, A., Hillers, L., McConachie, K., Newman, C., Schildhauer, T., & Schmidt, P. (2015). Video and Online Learning: Critical Reflections and Findings from the Field. *SSRN Electronic Journal*. https://doi.org/10.2139/ssrn.2577882

Kim, J., Guo, P. J., Seaton, D. T., Mitros, P., Gajos, K. Z., & Miller, R. C. (2014). Understanding in-video dropouts and interaction peaks inonline lecture videos. In *Proceedings of the first ACM conference on Learning @ scale conference - L@S' ' '14* (pp. 31–40). New York, New York, USA: ACM Press. https://doi.org/10.1145/2556325.2566237

Woolfitt, Z. (2015). The effective use of video in higher education. *Lectoraat Teaching, Learning and Technology. Inholland University of Applied Sciences. Rotterdam*, 1–49.

הוראה היברידית בשיעורי מתמטיקה: נקודת מבטם של תלמידים

סוהא רואשדה, אוניברסיטת חיפה, אורנים- המכללה האקדמית לחינוך
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

בעקבות התפשטות נגיף הקורונה נסגרה מערכת החינוך הישראלית באמצע מארס 2020 ועברה למתכונת של הוראה היברידית, הכוללת שילוב של הוראה פרונטלית (פנים אל פנים) עם הוראה מרחוק. תקופה זו חשפה את החשיבות הרבה שיש בהוראה מרחוק ובשילובה בהוראה התוך־כיתתית (Niranjan, 2020). עם זאת, מעבר זה היווה אתגר למורים שנאלצו להתמודד עמו בפתאומיות. אסטרטגיות ההוראה בהוראה מרחוק שונות מאסטרטגיות ההוראה הפרונטליות (Ewing, 2021). עם זאת הבנתנו כיצד נחוותה למידת המתמטיקה בתקופה זו על ידי תלמידים מוגבלת מאוד. המחקר המוצע כאן מבקש לבחון את העמדות (attitudes) של תלמידים ביחס להוראה היברידית במתמטיקה. מחקר זה הוא חלק ממחקר רחב יותר הבוחן היבטים שונים של הוראה היברידית במתמטיקה, הן מנקודת המבט של מורים והן מנקודת המבט של תלמידים.

מחקר זה משתמש במודל תלת־ממדי לאפיון עמדות של תלמידים כלפי המתמטיקה שהוצע על-ידי מרטינו וזן (Di Martino & Zan, 2010) והמתייחס לשלושה ממדים: (1) תפיסת המתמטיקה, למידתה והוראתה (vision of mathematics), (2) תפיסת המסוגלות העצמית במתמטיקה (perceived competence), ו-(3) נטייה רגשית כלפי המתמטיקה (emotional dimension). המחקר בוחן את עמדות התלמידים בשלושת ממדים אלה לפני תקופת הקורונה ובמהלך תקופת הקורונה כאשר למדו בהוראה היברידית. המחקר מתמקד בשאלה:

מהן העמדות של תלמידים הלומדים מתמטיקה בכיתה י"א ברמת 5 יחידות לימוד ביחס להוראה היברידית במתמטיקה בתקופת הקורונה בהשוואה לעמדותיהם ביחס להוראה כיתתית "נורמטיבית" כפי שחוו לפני הקורונה? העמדות ייבחנו לגבי שלושת הממדים: המתמטיקה, למידתה והוראתה, המסוגלות העצמית במתמטיקה והנטייה הרגשית כלפי המתמטיקה.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר

הכותבת הראשונה (שהיא מדריכה ארצית) איתרה שבעה מורים למתמטיקה שלימדו בתקופת הקורונה כיתות י"א ברמת 5 יחידות לימוד באופן היברידי. מורים אלה בחרו תלמידים לביצוע הראיונות. סך הכל נבחרו על ידי אותם מורים 24 תלמידים אותם ראיינו למחקר. מחקר זה מתבסס על עשרה ראיונות מתוך אותם 24 ראיונות כך שאת שאר הראיונות ישומשו למחקר המורחב. התלמידים נבחרו מרמות הישגים שונות (לפי דעת מוריהם): מתקשים, בינוניים ומצטיינים.

כלי המחקר

איסוף הנתונים נעשה באמצעות ראיונות אישיים חצי מובנים אשר כללו שאלות המתייחסות אל עמדותיהם של התלמידים כלפי שלושת הממדים (Di Martino & Zan, 2010) (1) המתמטיקה, למידתה והוראתה, (2) מסוגלותם העצמית ביחס למתמטיקה ו־(3) הנטייה הרגשית שלהם כלפי המתמטיקה; כל אלה בהקשר של ההוראה ההיברידית שהתקיימה במהלך השנתיים האחרונות, ואל מול ההוראה ה"רגילה" כפי שחוו לפני הקורונה. השאלות המרכזיות שבהן התמקד הריאיון היו: מה מאפיין את שיעורי המתמטיקה, האם התלמיד אוהב מתמטיקה, כיצד התלמיד רואה את המתמטיקה, כיצד התלמיד תופס את חשיבות למידת המתמטיקה, לו היה במקום המורה - מה התלמיד היה משנה בשיעורי המתמטיקה, מה מאפיין את ההשתתפות של התלמיד בשיעורי המתמטיקה, האם התלמיד

חושב שהוא מצליח במתמטיקה, ומה התלמיד עושה כאשר הוא מתקשה. ביחס לכל נושא התבקשו התלמידים להשוות בין הוראה "רגילה" של המתמטיקה, כפי שחוו לפני תקופת הקורונה, ובין ההוראה ההיברידית המשלבת הוראה מרחוק עם הוראה תוך־כיתתית, כפי שחוו בתקופת הקורונה. כמו כן, לאורך הריאיון התבקשו התלמידים להסביר בפירוט את תשובותיהם ולתת דוגמאות מהתנסותם בפועל. הראיונות התבצעו מרחוק (ב"זום") וארכו כשעה עד שעה וחצי כל אחד.

ניתוח הנתונים

הראיונות תומללו ונקראו בשלמותם מספר פעמים. ניתוח הנתונים שילב ניתוח מכוון וניתוח אינדוקטיבי (Patton, 2002). בניתוח המכוון, אמירות התלמידים מוינו בהתאם לשלושת ממדי המודל: [1] אמירות שקודדו כ'עמדות ביחס למתמטיקה, למידתה והוראתה' התמקדו בתפיסות של אופי המתמטיקה, חשיבותה של המתמטיקה בעיניהם, ובתפיסות התלמידים ביחס לתהליכי למידת והוראת המתמטיקה, פעילויות מתמטיות וארגון הלמידה. [2] אמירות שקודדו כ'עמדות ביחס למסוגלות העצמית במתמטיקה' התמקדו בתפיסות התלמידים את היכולת שלהם במתמטיקה, את החוזקות והחולשות שלהם, את יכולת התמודדותם עם קשיים ואת המסוגלות שלהם להשתתף בצורות שונות של למידה (כגון למידה עם עמיתים או למידה אינדיבידואלית). [3] אמירות שקודדו כ'נטייה רגשית כלפי המתמטיקה' התמקדו בהבעת רגשות של התלמידים כלפי מקצוע המתמטיקה, כלפי מופעים שונים של למידה והוראה של המתמטיקה וכיו"ב. בניתוח אמירות התלמידים נערכה הבחנה בין אמירות המתייחסות להוראה ה"רגילה" לפני תקופת הקורונה ובין אמירות המתייחסות להוראה ההיברידית (על מופעיה השונים) בתקופת הקורונה. לאחר מכן, נעשה ניתוח תוכן אינדוקטיבי לבנייה של קטגוריות לכל אחד משלושת הממדים. כמו כן זוהו שלושה פרופילים שונים של תלמידים ביחס לשינויים שחלו בעמדותיהם במהלך ההוראה ההיברידית במתמטיקה.

ממצאים ודיון

אמירות התלמידים בכל ריאיון וריאיון מוינו בהתאם לשלושת ממדי המודל. ניתוח אינדוקטיבי של אמירות התלמידים זיהה קטיגוריות[1] ביחס לעמדות התלמידים לאחר חוויית ההוראה ההיברידית יחסית לחווייתם לפניה. למחקר מספר ממצאים עיקריים. ממצא חשוב אחד קשור ב**התעוררות האחריות ללמידת המתמטיקה בתקופת ההוראה ההיברידית** בקרב כל התלמידים שרואיינו. חלק מהתלמידים הסבירו שינוי זה בהכרח לקחת אחריות וללמוד לבדם כדי ל"השלים חומר" שהתקשו ללמדו בשיעורים מרחוק. חלקם שייכו זאת גם לנגישות חומרי הלמידה במתמטיקה אשר לא היתה קודם לכן. ממצא חשוב נוסף קשור **בהתעצמות ההסתמכות של התלמיד על עצמו בלמידת המתמטיקה במהלך ההוראה ההיברידית.** לפני כן, לדברי רוב התלמידים, הם היו בדרך כלל סומכים על המורה כאשר הם נתקלים בחומר מתמטי קשה או כאשר מתקשים בפתרון שאלה מתמטית כי הם היו מודעים לכך שהם נפגשים עם המורה בשיעור הבא בתוך הכיתה. בתקופת ההוראה ההיברידית, לעומת זאת, הם הרבו לנסות לפתור בכוחות עצמם לפני פנייתם לבקש עזרה מהמורה, מהעמיתים או בבית. לצד התעצמות תחושת האחריות וההסתמכות העצמית, רוב התלמידים ציינו כי **החשיבות שהם מקנים להשקעה** בלימוד

[1] הקטיגוריות כתובות בפונט מודגש

המתמטיקה גברה במהלך ההוראה ההיברידית. ממצאים אלה דומים לממצאי מחקר שנערך באוניברסיטה (Abrosimova, 2020) לפיהם במעבר להוראה מרחוק, כאשר סטודנטים עמדו בפני קושי בלמידת המתמטיקה, הם נטו להתמודד בעצמם עם הקושי – סימן ללקיחת האחריות על הלמידה על עצמם. לקיחת האחריות בלמידה תורמת להבנה עמוקה יותר לחומר הנלמד ולרכישת מיומנויות ואסטרטגיות למידה (Carpenter & Pease, 2013). יתר על כן, אחריות על הלמידה מהווה מרכיב חשוב בהצלחת תלמידים מכיוון שלומד אחראי תופס את האחריות על הלמידה שלו ככלי להשגת הצלחה והתקדמות במקצוע (Roper, 2007). באופן דומה, הסתמכות עצמית בלמידה מיוחסת בספרות ללומדים המנהלים את הלמידה שלהם, עוסקים בניטור ובקרה, בעלי מוטיבציה פנימית ופעילים בתהליך התלמידה שלהם כדי להשיג את המטרה הלימודית אליה הם שואפים (Ramdass, & Zimmerman, 2008).

לצד המאפיינים החיוביים שחוו התלמידים במהלך ההוראה ההיברידית נמצאו גם עדויות להיבטים שליליים שלה. רוב התלמידים ציינו שהסחות הדעת שהם נחשפים אליהן בשיעורים מרחוק מהבית ואי־נוכחות פיזית של המורה **הקשו עליהם להתרכז**. לדבריהם, קשר העין עם המורה ושפת הגוף שלו הם גורמים קריטיים לריכוז שלהם בשיעורים, דבר שהשפיע לרעה על **הבנתם את החומר**. בנוסף לכך, מחצית מהתלמידים העידו **שהמעורבות** שלהם בשיעורי המתמטיקה פחתה בתקופת ההוראה ההיברידית. סיבה אחת, לדבריהם, קשורה בקושי בריכוז ופספוס חומר שהפחית אצלם את הביטחון העצמי להשתתף בשיח הכיתתי. סיבה נוספת קשורה לבושה לפתוח את המיקרופון ולחשוף בכך את רעשי הרקע בבית.

ניתוח הראיונות זיהה שלושה פרופילים שונים של תלמידים ביחס לשינויים שחלו בעמדות התלמידים כלפי המתמטיקה ולמידתה במהלך ההוראה ההיברידית במתמטיקה: הפרופיל הראשון ("החיובי", שתי תלמידות מתוך העשרה) מאופיין בשינוי חיובי בעמדות התלמידים במהלך ההוראה ההיברידית ביחס למרבית הקטגוריות, לצד זה, זוהה שימור בחיוביות העמדות של התלמידות ביחס לקטגוריה חשיבות ההשקעה במתמטיקה'. הפרופיל השני ("המעורב", שישה תלמידים) מאופיין בשינוי חיובי ביחס לחלק מהקטגוריות, כמו 'חשיבות ההשקעה במתמטיקה', 'אחריות ללמידה', לצד חוויה שלילית ביחס לקטגוריות כמו 'מעורבות בלמידה', ו'ריכוז בלמידה'. בפרופיל זה זוהה שימור בחיוביות העמדה של התלמידים ביחס להיבט 'הנטייה הרגשית כלפי המתמטיקה'. הפרופיל השלישי (ה"שלילי", שני תלמידים) מאופיין בחוויות שליליות יותר יחסית לשני הפרופילים האחרים, ביחס לקטגוריות כמו 'מעורבות בלמידה', 'ריכוז בלמידה' ו-'קבלת משוב'. טבלאות 1-3 מציגות את שלושת הפרופילים. הצבע הירוק מייצג עלייה בחיוביות העמדה של התלמיד; הצבע האדום מייצג ירידה בחיוביות העמדה של התלמיד; הצבע הצהוב מייצג שימור בחיוביות העמדה של התלמיד; הצבע הלבן מייצג קטיגוריות אשר לא עלו בראיון עם התלמיד.

טבלאות 1-3: שלושת הפרופילים ביחס לשינויים שחלו בעמדות התלמידים במהלך ההוראה ההיברידית

פרופיל מסי 1 – "הפרופיל החיובי"

תפיסת התלמידים את המתמטיקה, למידתה והוראתה	מסוגלות עצמית	נטייה רגשית כלפי מתמטיקה
חשיבות ההשקעה במקצוע	התמודדות עם קשיים	מידת החיבור למתמטיקה
אחריות ללמידה		
הסתמכות עצמית בלמידה		
ריכוז בלמידה		
מעורבות בלמידה		
מידת נגישות וזמינות החומר		
דינמיות ודיוק של המתמטיקה		
קבלת משוב		

פרופיל מסי 2 – "הפרופיל המעורב"

תפיסת התלמידים את המתמטיקה, למידתה והוראתה	מסוגלות עצמית	נטייה רגשית כלפי מתמטיקה
חשיבות ההשקעה במקצוע	התמודדות עם קשיים	מידת החיבור למתמטיקה
אחריות ללמידה		
הסתמכות עצמית בלמידה		
ריכוז בלמידה		
מעורבות בלמידה		
מידת נגישות וזמינות החומר		
דינמיות ודיוק של המתמטיקה		
קבלת משוב		

פרופיל מסי 3 – "הפרופיל השלילי"

תפיסת התלמידים את המתמטיקה, למידתה והוראתה	מסוגלות עצמית	נטייה רגשית כלפי מתמטיקה
חשיבות ההשקעה במקצוע	התמודדות עם קשיים	מידת החיבור למתמטיקה
אחריות ללמידה		
הסתמכות עצמית בלמידה		
ריכוז בלמידה		
מעורבות בלמידה		
מידת נגישות וזמינות החומר		
דינמיות ודיוק של המתמטיקה		
קבלת משוב		

למחקר זה מספר תרומות אפשריות. הממצאים העיקריים המחדשים לגוף הידע בספרות העוסק בחוויית התלמידים את ההוראה ההיברידית במתמטיקה בתקופת הקורונה קשורים בערך המוסף שהקנתה ההוראה ההיברידית ללמידה של התלמידים: התעוררות האחריות ללמידת מתמטיקה ולהשלמת החומר

המתמטי שבו התקשו, והתעצמות ההסתמכות העצמית בלמידת המתמטיקה בקרב התלמידים. ממצאים אלו נמצאו בקרב כל משתתפי המחקר הנוכחי. שלושת הפרופילים המסתמנים בקרב התלמידים מהווים בסיס להמשך חקירה ולניסיון לחפש קשרים בין מאפיינים שונים של תלמידים והשלכות של למידה במסגרת הוראה היברידית. למשל, מה מאפיין תלמידים שההוראה ההיברידית תרמה להם במכלול ההיבטים? מה מאפיין תלמידים שההוראה ההיברידית היוותה עבורם התנסות מורכבת בהיבטים מסוימים?

מבחינה מתודולוגית, הקטגוריות שעלו בניתוח הראיונות ביחס לשלושת הממדים המרכיבים את המודל של די מרטינו וזאן (Di Martino & Zan, 2010) ובניית שלושת הפרופילים ביחס לשינויים שחלו בעמדות התלמידים כלפי המתמטיקה, למידתה והוראתה במהלך ההוראה ההיברידית במתמטיקה, יכולים לשמש חוקרים אחרים בניתוח עמדות של תלמידים כלפי הוראה היברידית במתמטיקה. מבחינת התרומה לשטח, ממצאי המחקר מצביעים על יתרונות וחסרונות שחוו התלמידים בהוראה ההיברידית של המתמטיקה. אומנם בשלב זה הממצאים מוגבלים למספר קטן של תלמידים, עם זאת מסתמנת הכדאיות לחשוב על שילוב של הוראה פרונטלית עם הוראה מרחוק בהוראה השגרתית של המתמטיקה ולא רק במצבי חירום. כמו כן, הקטגוריות שזוהו והפרופילים שנבנו עשויים לשמש בסיס לדיון עם מורים ומורי מורים על הוראה היברידית שתוכל לספק מענה לתלמידים שונים.

רשימת מקורות

Abrosimova, G. A. (2020). Digital literacy and digital skills in university study. *International Journal of Higher Education*, *9*(8), 52-58.Carpenter, J. P., & Pease, J. S. (2013). Preparing students to take responsibility for learning: The role of non-curricular learning strategies. *Journal of Curriculum and Instruction*, *7*(2), 38-55.

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 27–48.

Ewing, L. A., & Cooper, H. (2021). Technology-enabled remote learning during Covid-19: Perspectives of Australian teachers, students and parents. *Technology, Pedagogy and Education*, 30(1), 39-54. https://doi.org/10.1080/1475939X.2020.1868562

Niranjan, P., (2020). Corona virus Pandemic impact on Global Education: A Blessing in disguise. *Sustainable Humanosphere, 16,* (2).

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. sage.

Ramdass, D., & Zimmerman, B.J. (2008). Effects of Self Correction Strategy Training on Middle School Students' Self-Efficacy, Self-Evaluation, and Mathematics Division Learning. *Journal of Advanced Academics*, 20, 18–41.

Roper, A.R. (2007). How students develop online learning skills. *Educause Quarterly*, 30(1), 62–64.

של מי השיעור הזה? על סוגיית האלתור בשיעורים שתוכננו במסגרת חקר שיעור

גלית נגרי חדיף, מכון ויצמן למדע
רוני קרסנטי, מכון ויצמן למדע
אברהם הרכבי, מכון ויצמן למדע

מבוא

חקר שיעור (Lesson Study) הוא מודל של פיתוח מקצועי שמקורו ביפן (Fernandez & Yoshida, 2004). בלב המודל נמצאת עבודה משותפת של קבוצת מורים הנפגשים דרך קבע, חוקרים חלק מתכנית הלימודים ומתכננים בצוותא שיעור לפרטי פרטים, כולל חיזוי תגובות אפשריות של תלמידים ותכנון הדרכים להתמודד עם כל תגובה. אחד המורים בקבוצה מלמד את השיעור בכיתתו, בעוד האחרים צופים בשיעור ומתעדים את הנעשה בו, ולאחר מכן הקבוצה מנתחת את השיעור אל מול התכנון ובמידת הצורך משפרת את מערך השיעור, וחוזר חלילה. הפרקטיקה של חקר שיעור נהוגה בבתי ספר ביפן למעלה ממאה שנה, ובעשורים האחרונים מיושמת במדינות שונות ברחבי העולם ככלי להתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה (Lewis & Lee, 2017). ה"ייבוא" של חקר שיעור מן התרבות היפנית לתרבויות אחרות כרוך בפרשנויות מקומיות שאינן תמיד נאמנות לחלוטין לרציונל ולאופן היישום של המודל המקורי (Stigler & Hiebert, 2016). המחקר המדווח כאן הוא חלק ממחקר רחב יותר העוקב אחר קהילות חקר שיעור בישראל והמבקש לאפיין את ההטמעה המקומית של מודל זה בתרבות ההוראה הישראלית, השונה במידה ניכרת ממקבילתה היפנית (Schwarts & Karsenty, 2020). במסגרת המחקר הועלו סוגיות כגון: חתירה קבוצתית לקונצנזוס; דילמות בהנחיית קהילות של חקר שיעור; קיימות המודל לאורך זמן; וסוגיית האלתור, שבה עוסק התקציר שלהלן.

למושג "אלתור" קיימות הגדרות שונות. ההגדרות המילוניות של המושג (למשל ב- dictionary.com, Cambridge Dictionary וכד') מדברות על ביצוע של פעולה כלשהי ללא הכנה מוקדמת, בהתבסס על משאבים הזמינים ברגע הפעולה. קרוסן וסורנטי (Crossan & Sorrenti, 2002) מגדירים אלתור כאינטואיציה המנחה פעולה בצורה ספונטנית. הגדרות אלו מתייחסות אמנם לאלמנטים של חוסר תכנון מוקדם או מחשבה מוקדמת מפורשת, אך האזכור של אינטואיציה ושל משאבים מרמז על כך שאלתור אינה פעולה אקראית, קפריזית או שרירותית, ואשר יתכן שיש לה שורשים בחוויות קודמות שהן לאו דווקא מודעות או מפורשות אך עשויות לעצב ולהניע לפעולה. בהקשר לחוויות קודמות אלה, ובהשאלה מעבודתו של פישביין (Fischbein, 1987) על אינטואיציה ראשונית ומשנית, אנו מציעים להבחין בין "חוויות ראשוניות" ל"חוויות משניות": בעוד שחוויות ראשוניות מצטברות במהלך התפתחותו הטבעית של אדם בתוך סביבה תרבותית מסוימת מילדות ועד בגרות, ללא תלות בהוראה פורמלית, חוויות משניות מצטברות בדרכים שיטתיות יותר, כתוצאה מרפלקציה מפורשת על המתרחש שתוצאתה היא לקח המופנם ו"מאוחסן" ברפרטואר של תגובות אוטומטיות או חצי אוטומטיות למצבים בלתי צפויים, כפי שעשוי לקרות, למשל, בפעולות ספונטניות של מורה מנוסה.

המחקר שיתואר להלן התמקד בסוגיית האלתור במהלך הוראת שיעור שתוכנן בקפידה מראש בקבוצת חקר שיעור. סוגיה זו צמחה מתוך העיון בנתונים שנאספו, כאשר נוכחנו לדעת שבניגוד למודל היפני, המורים הישראלים לא תמיד נצמדו למערך שיעור מהודק שהוכן בקבוצה. בעקבות זאת, הרעיון של אלתור עלה כנושא שראוי לחקור ולהבין בהקשר של חקר שיעור בישראל. שאלת המחקר בה עסקנו היא: מהם מאפייני האלתור בשיעורים שתוכננו במסגרת תהליך חקר שיעור בישראל?

מתודולוגיה

סביבת המחקר היא פרויקט חקר שיעור ישראלי, שהוקם במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן תחת השם תפני"ת (**ת**יעוד **פ**רקטיקות, **נ**יתוח ויישום **ת**ובנות). החל משנת תשפ"א הופעלו קהילות תפני"ת בית-ספריות בשמונה בתי ספר בישראל, במתכונת של "קהילה מקצועית לומדת" בה חברים מורי

המתמטיקה של בית הספר. כל קהילה הונחתה על ידי שני מנחים: מנחה פנימי שנבחר מתוך צוות המתמטיקה הבית-ספרי ומנחה חיצוני מטעם מכון ויצמן. כל המנחים עברו הכשרה לאורך השנה שקדמה להפעלת הפרויקט בבתי הספר, כאשר קבוצת המנחים מהווה קהילה בפני עצמה, שהתנסתה אף היא במספר סבבים של חקר שיעור. בכל אחת מהקהילות הבית-ספריות השתתפו בשנת תשפ"א 6-13 מורים למתמטיקה, סך הכל 76 מורים בעלי ותק ממוצע של 14 שנים בהוראה, רובם בעלי תואר שני, המלמדים או שלימדו בחטיבה העליונה (84%) ובחטיבת הביניים (64%). מבין שמונה הקהילות, שבע המשיכו לשנת הפעלה נוספת בתשפ"ב, עם שינויים קלים בהרכב הקהילות (סך הכל 67 מורים). כל הקהילות עברו שלבים דומים, אך משך הזמן שהוקדש לכל שלב השתנה לפי הצרכים והאופי של כל קהילה. השלבים כללו צפייה וניתוח שיעורים מתוך אתר עדש"ה, במטרה ללמוד כלים לצפייה פרודוקטיבית ולא שיפוטית; תכנון שיעורים בתת-קבוצות של הקהילה; הוראת השיעורים שתוכננו; ניתוח עמיתים של השיעורים שצולמו והתחלת סבב חדש של חקר שיעור. איסוף הנתונים למחקר הרחב כלל שאלונים שמילאו המורים בתחילת כל שנה ובסופה, הקלטות זום של חלק ממפגשי הקהילות וצילומי וידאו של השיעורים שתוכננו ובוצעו בקהילות. בתום כל שנה נבחרו אקראית שני מורים מכל קהילה לראיון אישי. הראיונות היו מובנים למחצה, נמשכו כשעה וכללו שאלות על חוויות אישיות וקבוצתיות מתוך התהליך שעברו המורים. כל הראיונות הוקלטו ותומללו. בדיווח זה אנו מתמקדים בנתונים מתוך הראיונות. ניתוח הנתונים נעשה בשיטת ניתוח נושאית (Thematic analysis): במהלך קריאת תמלילי כל הראיונות, נאספו התבטאויות השופכות אור על כל אחד מהשלבים אותם עברה הקהילה. לאחר מכן, סווגו ההתבטאויות לנושאים מתפתחים (בתהליך של bottom-up) במטרה לזהות תופעות מעניינות העולות מהנתונים. בתהליך זה עלתה סוגיית האלתור בהקשרים שונים, והוחלט לחקור סוגיה זו, כאמור לעיל. הניתוח הרלוונטי לסוגיה זו התמקד בזיהוי ותיאור סוגים שונים של אלתור.

ממצאים

בניתוח זוהו ארבעה סוגים של אלתור, שאותם נתאר ונדגים להלן.

1. **אלתור מובנה**. המורים בוחרים במכוון לא לתכנן חלקים מהשיעור, כך שהוא נבנה מראש עם "חורים" שיאפשרו אלתור. המקרה של אורי (שם בדוי, כמו גם יתר שמות המורים) מדגים סוג זה. לאורך מספר מפגשים ובשיתוף פעולה מלא, אורי והמורים בקבוצתו תכננו שיעור משותף בנושא בעיות ערך קיצון לרמת חמש יחידות לימוד. לאחר דיונים מעמיקים שבעקבותיהם נערכו שינויים משמעותיים בשיעור, המערך הוצג בפני כל חברי הקהילה וכלל רק דף עבודה ובו הבעיה המרכזית. הצוות שהציג את המערך לא דן כלל בנושאים כמו תגובות התלמידים הצפויות, שהם בליבת המודל של חקר שיעור. השיעור שצולם בכיתתו של אורי הוגדר על ידי הקבוצה כמוצלח. כל אמירה של התלמידים זכתה להתייחסות המורה, שקישר את תגובות התלמידים לנושאים ולמונחים שונים שהוזכרו בשיעור ובמהלך השנה כולה. בריאיון, שהתקיים בסוף השנה, הרבה אורי להשתמש בזמן הווה ובמילה "תמיד" כדי לתאר מהלכים שגורים שהוא עושה כמורה ותגובות אופייניות שלו לסיטואציות חוזרות, למשל כאשר תלמידים מדווחים על אי הצלחה בשיעורי הבית:

> יש כאלה שאומרים לי: לא הצלחתי את סעיף ב' או נתקעתי כבר באמצע א', או, יש כאלה שאומרים לי: אני לא יודע לעשות כלום, ואז אני אומר לו: אין מצב שאתה לא יודע לעשות כלום... אני גם כל הזמן מבקש עוד דרכים ועוד פתרונות, שזה גם בהתחלה מתיש אותם [...] תמיד כשיש לי סיטואציות כאלה שגורמות לאיזה הרהור, אז חשוב לי לטפל בהרהור הזה [...] אז כשנוצרות כאלה סיטואציות, חשוב לי לעצור ולפתוח את הדיונים האלה [...] תמיד כשאני פוגש כיתות זה לוקח קצת זמן לבנות את הסיטואציה הזאת בכיתה.

קטע זה מדגים את קיומן של "חוויות משניות", שמצטברות כתוצאה של רפלקציה ("חשוב לי לטפל בהרהור הזה"), ויתכן שהרפרטואר של מהלכי הוראה שנוצר בעקבותיהן, בין אם הוא מודע או סמוי, הוא שמאפשר למורה להיות גמיש מספיק כדי להיענות תוך כדי השיעור לתגובות התלמידים ללא צורך בתכנון מראש של מענה זה. בנוסף, במקרה של אורי בולט גם ההיבט האישיותי. אורי מתאר את עצמו כמורה אסוציאטיבי ומסביר כיצד מרכיב זה משרת אותו במהלך ההוראה ומאפשר לו שלא ליצור מערך שיעור מהודק אלא להוביל את השיעור בהתאם לתגובות התלמידים:

אני מאוד אסוציאטיבי וזה לוקח אותי לכל מיני מקומות שונים ומשונים, אפרופו מערך שיעור. הדיונים יכולים להתחיל בנקודה א' ולהסתיים בנקודה ת' ואין קשר בין ההתחלה לסוף השיעור. השיעורים והדיונים בנויים ברובם לפי לאן שהתלמידים מובילים אותם [...] המשימות מתפתחות לרוב מתוך השאלות שהתלמידים שואלים. בשיעור שהעברתי הרגשתי שהיו 90 דקות של התרחשויות שאי אפשר להסביר, ואני חושב שזה בעיקר מהאמירות של הילדים גם במהלך השיעור וגם בסוף השיעור – "וואו, איך הצלחת לחבר את כל השנה הזו ל-90 דקות!" [...] זה באמת היה שיעור יוצא דופן. הדבר היחיד שהיה מיוחד בשיעור הזה הוא שהיה לי את השלד שלו. זאת אומרת שבאתי עם שאלה מסודרת, וידעתי באיזה נקודה אני רוצה להתחיל ובאיזו נקודה אני רוצה לסיים, אבל לא ידעתי איך באמצע זה יתפתח [...] אני לא יודע אם זה politically correct, אבל אין לי כזה מערך שיעור ותרגילים שאני יודע מראש שאני נכנס ואני יודע שאותם אני אפתור, אני בונה את השיעורים שלי בעיקר מתוך הניסיון שיש לי ומתוך מה שעולה כצורך בכיתה [...] המבנה הבסיסי היה שם ואני די סמכתי על הילדים שהם יעשו את העבודה, והם לא אכזבו אותי. בדיעבד, לתכנן את השיעור בפירוט רב יותר היה חסר משמעות. אני חושב שזה בנוי על זה שאני סומך על האינטואיציה שלי ומקווה שהחבר'ה לא יאכזבו ויגיעו לנקודות מאוד מעניינות. כמובן שלא יכולתי לצפות את כל מה שקרה שם. אבל בגלל שהם כל כך טובים וסקרנים, יכולתי לסמוך עליהם שהם ייקחו את זה למקומות אחרים.

ציטוט זה מדגים כיצד מורה שמשתמש באופן קבוע בפרקטיקה של אלתור, עשוי להמשיך לעשות זאת גם כאשר הוא נחשף לתהליך של חקר שיעור שמדגיש בניית מערך מפורט ומקיף לפני הכניסה לכיתה. כפי שמעיד אורי, מה שמשתנה הוא שכעת "היה לי את השלד", כלומר אם שיעור רגיל מבוסס כולו על אלתור ("אין לי כזה מערך שיעור ותרגילים שאני יודע מראש שאני נכנס ואני יודע שאותם אני אפתור"), הרי שכעת היה תכנון לפחות למבנה הגלובלי של השיעור ("באתי עם שאלה מסודרת, וידעתי באיזה נקודה אני רוצה להתחיל ובאיזו נקודה אני רוצה לסיים, אבל לא ידעתי איך באמצע זה יתפתח"). יחד עם זאת, אורי המשיך לסמוך על ניסיונו, על האינטואיציה שלו, ועל הציפייה שתגובות התלמידים יובילו את השיעור למקומות מעניינים.

2. **אלתור מינימלי**. בסוג זה של אלתור, התכנון כל כך מהודק עד כי לכאורה אין מקום לאלתר. כאשר בכל זאת נוצר מצב לא צפוי בשיעור, המורה מנסה לפעול על פי קו החשיבה של הקבוצה. המקרה של נאוה מדגים סוג זה. נאוה לימדה בכיתתה שיעור שתוכנן לפרטי פרטים, כולל דיון בתגובות התלמידים המצופות ותכנון מענה המורה לתגובות אלו. בפועל, אכן רוב התגובות של התלמידים היו צפויות, אך נאוה נתקלה גם בהפתעות:

זה נורא שונה משיעור שאני מכינה בעצמי, ששם אני מרגישה חופש מלא למשוך את השיעור לאן שנראה לי למשוך אותו ופה הייתי צריכה להיות די צמודה למה שתכננו, כדי שזה יהיה באמת חקר שיעור ושזה לא יהיה השיעור הספציפי שלי. עלו דברים שלא תכננו ולא חשבנו עליהם ופתאום זה עלה והייתי כמובן צריכה להפעיל שיקול דעת לגבי מה אני חושבת שהצוות שלי היה רוצה שאני אעשה. אני חושבת שבמפגש שלנו אתמול מה שעשיתי די קלע למה שהיה מצופה שאני אעשה.

נאוה למעשה חשה כ"שגרירה של הקבוצה", וכאשר נוצר צורך לפעול בסיטואציה שלא נצפתה מראש על אף התכנון המדוקדק, ניסתה לקלוע לכוונת חבריה לקבוצה ("מה [...] שהצוות שלי היה רוצה שאני אעשה"). בניגוד לגמישות לה היא מורגלת בשיעוריה ("ששם אני מרגישה חופש מלא למשוך את השיעור לאן שנראה לי למשוך אותו"), רמת האלתור שראתה לנכון להפעיל היתה מינימלית.

3. **הוספה או השמטה של חלקים ביחס למערך המקורי שתוכנן בקבוצה**. בסוג זה של אלתור, שינוי חלק מהשיעור נתפס כזכות לגיטימית של המורה שמלמד/ת את השיעור, בהתאם לנסיבות ולשיקולי הדעת של המורה. המקרה של נאור מדגים זאת. נאור החליף חלק מהשיעור ובחר לדון בשאלה מתקדמת יותר במקום לתרגל את תכני החלקים הקודמים כפי שתכננה קבוצתו:

השיעור היה בסדר בסך הכל בדיוק כמו שתוכנן, לא היו שם מצבים שהייתי צריך לאלתר כמעט. פה ושם דברים מינוריים. בסופו של דבר זה עבר לפי התכנון וזה היה מעניין לראות מהצד [...] אבל עם השאלה השלישית אני הגזמתי, כלומר קפצתי ישר לאיזה סיפור של הגרפים ופה הבנתי שנכשלתי [...] האמת היא שזה לא היה לפי התכנון המקורי אבל אמרתי לעצמי שאעשה את מה שתכננו ואם יישאר יותר זמן, אכין עוד שאלה, אאלתר [...] בסך הכל זה היה מאוד מעניין לראות מה קורה בכיתה.

נראה כי נאור התחיל את השיעור כנציג של קבוצתו, בדומה לנאוה, וחתר לממש את התכנון ("בדיוק כמו שתוכנן"; " זה עבר לפי התכנון"). המילים "זה היה מעניין לראות מהצד" עשויות להתפרש כמבט של "שגריר" שבוחן את ההתרחשות מהפרספקטיבה של צוות שלם. עם זאת, נאור מראש השאיר

לעצמו פתח לגמישות והכין שאלה נוספת למקרה שירגיש שהזמן מאפשר לו זאת. למרות שבסופו של דבר האלתור לא צלח לדעתו ("פה הבנתי שנכשלתי"), הוא אינו מתייחס לכך כאל "חוסר נאמנות" לקבוצה אלא מבטא אוטונומיה באמצעות רצף המילים 'אמרתי לעצמי', 'אעשה', 'אכין', 'אאלתר'.

4. **אלתור הסותר את התכנון שנבנה בקבוצה**. במקרה קיצון, המורה שלימדה את השיעור שתוכנן בקבוצתה בחרה להתעלם ממערך השיעור וללמד בדרך אחרת. מנחת הקהילה תיארה את המקרה:

> ואז המורה, שבאה ללמד את השיעור הזה, שכל כך הרבה טחנו אותו, עושה מה שבראש שלה. כאילו אין שיעור מתוכנן. [...] היא הסכימה לתכנון, היה לה מערך מוכן והיא כל הזמן הסתכלה בו. [...] עכשיו, היא גם הסתכלה כל הזמן על הדפים וגם לא עשתה מה שכתוב. היא לא התכוננה, לא השקיעה חשיבה.

במקרה זה, הנתונים שבידינו אינם מספיקים כדי להסביר מהיכן נובע הצורך של המורה שלא לפעול על פי התכנון לו היתה שותפה. למרות שרק שני מקרים כאלה תועדו, הם מעוררים מחשבה.

דיון

בניסיון להטמיע את המודל היפני של חקר שיעור בתרבות ההוראה הישראלית, נראה כי עולות פרשנויות מקומיות בנוגע לשאלה עד כמה על המורה להיצמד למערך שיעור המתוכנן לפרטי פרטיו בקבוצה ומהי רמת האלתור ה"מותרת". בפרט עולה מהממצאים, כי ישנה התייחסות מגוונת של מורים לנושא של תגובות התלמידים בשיעור והמענה להן. בעוד שבמקרה של אלתור מינימלי האינטראקציות עם התלמידים אמורות להתרחש בדומה ככל האפשר לתכנון המקורי, כפי שקורה ביפן, במקרה של אלתור מובנה התפיסה היא שאין צורך, ואולי אף לא ניתן, לצפות את תגובות התלמידים ועל כן לגיטימי שהמורה יסתמך על חוויות משניות קודמות ועל מרחב תקדימים עשיר כדי לתת מענה בזמן אמת. אנו מציעים את ההשערה כי באדפטציה הישראלית לחקר שיעור, הסוגים השונים של האלתור עשויים להאיר תפיסות של מורים בנוגע לשאלה "של מי השיעור שתוכנן?": במקרה של אלתור מובנה, נראה שהשיעור הוא של התלמידים - הם אלה שמובילים את השיעור על פי תגובותיהם. במקרה של אלתור מינימלי, המורה המלמד הוא נציג של הקבוצה המתכננת והשיעור הוא של הקבוצה. בסוג השלישי, השיעור הוא של המורה והכיתה - המורה מחליט על פי היכרותו עם הכיתה ושיקול דעתו האם להשמיט או להוסיף חלקים ביחס לתכנון המקורי. בסוג הרביעי השיעור הוא של המורה בלבד, ואין תחושת מחויבות לקבוצה המתכננת. למחקר זה לא היה היבט כמותי, אך נציין כי העמדה שרמת תכנון מפורטת אינה נחוצה, ושיש מקום להשאיר פתח לאלתור, חזרה והופיעה במהלך אינטראקציות עם המורים. בכוונתנו להמשיך לבדוק סוגיה זו לעומק בקבוצות נוספות: אם אכן מדובר בדפוס חוזר, אזי נוכל להצביע על אפיון תרבותי של הטמעת חקר שיעור בארץ, דבר שחשוב הן מחקרית והן מעשית, ומעלה שאלות מעניינות כגון: האם גם תכנון שאינו מפורט כמו ביפן, עשוי לעצב חוויות משניות שבתורן ישפיעו על טיב האלתורים המתרחשים בשיעור?

המחקר נערך בתמיכת הקרן הלאומית למדע (ISF), מענק מס' 1219/20.

רשימת מקורות

Crossan, M. M., & Sorrenti, M. (2002). Making sense of improvisation. In K. N. Kamoche, M. P. Cunha, & J. V. Cunha (Eds.), *Organizational improvisation* (pp. 29–51). Routledge.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Kluwer Academic Publishers.

Lewis, C., & Lee, C. (2017). The global spread of lesson study: contextualization and adaptations. In M. Akiba & G. K. Letendre (Eds.), *International handbook of teacher quality and policy* (pp. 185-203). Routledge.

Schwarts, G., & Karsenty, R. (2020). “Can this happen only in Japan?": Mathematics teachers reflect on a videotaped lesson in a cross-cultural context. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*, 527–554.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2016). Lesson study, improvement, and the importing of cultural routines. *ZDM - The International Journal of Mathematics Education*, *48*(4), 581-587.

צמיחת ידע מורים ועיצוב חוזה דידקטי במעבר לפדגוגיה ממוקדת תלמיד – המקרה של למידה מבוססת פרויקטים

תובל אבישי, אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית, ירושלים

מבוא ורקע תיאורטי

למידה מבוססת פרויקטים (PBL) הינה שיטת הוראה המוכרת בעולם מזה מספר עשורים, וקיימת ספרות עשירה אודות מאפייניה. בין יתרונות השיטה מוזכרים חיזוק עצמאותם של התלמידים ותחושת הבעלות שלהם על הידע, פיתוח חשיבה ביקורתית וחשיבה מסדר גבוה, שיפור מיומנויות תקשורת ורפלקציה, והתנסות בפתרון בעיות ובקבלת החלטות. לאורך הפרויקט תלמידים עובדים לאורך זמן בצורה אוטונומית יחסית, ובסופו ישנו תוצר מוחשי. PBL במתמטיקה מאפשר לתלמידים ליישם אסטרטגיות חיוניות לפיתוח חשיבה מתמטית כגון הורדת רמת מורכבות הבעיה, חיפוש אחר מודלים וקשרים, וביצוע הכללות. (Condliffe et al., 2017; Halverscheid, 2005; Palatnik, 2022; Thomas, 2000).

למרות יתרונות אלה, השימוש בשיטת PBL בהוראת המתמטיקה אינו נפוץ כפי שניתן היה לצפות, בין השאר משום היותה ממוקדת תלמידים, קונסטרוקטיביסטית ולא פרונטאלית. כנגזרת, השיטה מאתגרת את פרקטיקות ההוראה המוכרות ומחייבת שינוי משמעותי באופן העבודה הן של המורים והן של התלמידים. המורה הופך ממקור ידע לגורם מנחה המעצב את סביבת הלמידה עבור תלמידיו, תוך שהוא נאלץ להתמודד עם רמות גבוהות של חוסר שליטה, חוסר ודאות ורעש (Condliffe at al., 2017). אתגרים אלה מעלים את הצורך במודלים חדשים של פיתוח מקצועי והכשרות מורים, אשר יהיו מותאמים למאפיינים הייחודיים של שיטת ההוראה הזו, ויציידו את המורים בכלים ובמיומנויות הנדרשות על מנת שיממשו בהצלחה למידה מבוססת פרויקטים בכיתה (Barron et al, 1998). מתוך הבנה זו בחרנו למקד את המחקר במורים ובשינוי שהם עוברים בעת המעבר להוראה בשיטת PBL.

בהתבסס על הספרות המחקרית וניסיונו המעשי של הכותב השני במימוש PBL (Palatnik & Koichu, 2017, Brousseau, 1997, Condliffe 2017), השערתנו ביציאה לדרך הייתה שהשינוי בפדגוגיה יוביל לצמיחת ידע של המורה, כמו גם לצורך בעדכון מערכת הציפיות ההדדית בין המורה לתלמידים. באשר לצמיחת הידע, בחרנו במודל RCM-PCK (Carlson & Daehler, 2019). זהו מודל דינמי הבנוי ממעגלים קונצנטריים ומאפשר לתאר את *זרימת* הידע בין המעגל החיצוני - ידע של עמיתים, מורי מורים, חוקרים ומתמטיקאים (CollectivePCK), המעגל האישי של המורה הנדון (PersonalPCK), והמעגל הפנימי של ידע ממומש (EnactedPCK), שהוא "הידע הייחודי עליו מתבסס המורה...בעת תכנון השיעור, ביצועו והרפלקציה שלאחריו" (Carlson & Daehler, 2019, p.82). בנוסף, שילבנו במסגרת התיאורטית את תיאוריית המצבים הדידקטיים (Brousseau, 1997) המחדדת את המצבים השונים המתקיימים בעת שתלמידים מבצעים משימות חקר (מצב א-דידקטי בו התלמידים עובדים לבדם, ומצב דידקטי בו המורה קושר את הידע שרכשו לגוף הידע המתמטי הרחב) וכן את מושג החוזה הדידקטי, שהוא מערכת המחויבויות והציפיות בין המורה לבין התלמידים.

לאור המסגרת התיאורטית, שאלות המחקר שלנו היו:

(1) איזה אלמנטים בידע של המורים מתפתחים בעת המעבר מהוראה פרונטלית להוראת מתמטיקה בהקשר בשיטת PBL?

(2) אילו שינויים חלים בחוזה הדידקטי בין המורה לתלמידים כתוצאה ממעבר זה?

מתודולוגיה

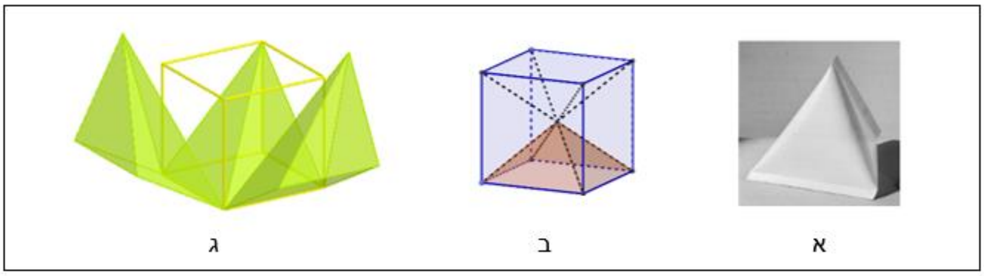
ההקשר המחקרי – תכנית "פרקטימטיקה"

המחקר הנוכחי הינו מחקר גישוש אשר ליווה את שנתה הראשונה של תכנית "פרקטימטיקה" – תכנית פיתוח מקצועי הנשענת על שלושה צירים, אשר בכל אחד מהם ישנו חידוש עבור המורים המשתתפים בה: תוכן מתמטי חדש (מתמטיקה בהקשר תעשייתי), פדגוגיה חדשה (PBL), וקהילת מורים לומדת בהנחייתו של הצוות האקדמי. במסגרת התכנית נחשפו המורים לבעיות מתמטיות אותנטיות מעולמות התעשייה, אשר עברו עיבוד ראשוני על ידי הצוות האקדמי והותאמו לתכנית הלימודים לכיתה ט'. על בסיס בעיות אלה הובילו המורים למידה מבוססת פרויקטים בכיתותיהם, והמחקר תיעד וליווה את התהליך לאורך שנת הלימודים. למורים שהשתתפו בתכנית, כמו גם לתלמידיהם, לא היה נסיון קודם ב-PBL, ולכן לקהילת המורים הייעודית שהוקמה היה תפקיד משמעותי: היא סיפקה ידע ותוכן מתמטי ופדגוגי, אפשרה למורים להתנסות ב-PBL כלומדים, היוותה מקום בטוח לקבלת תמיכה רגשית ולקיום שיח עמיתים, וסיפקה מודלים ברורים של מסלולי חקר אפשריים לפני כניסתם של המורים לכיתות (Barron et al, 1998). דיווח זה מביא את תיאור המקרה של אחת המורות, שרה.

בעיית הגרעין ממנה יצאו התלמידים למימוש הפרויקטים מבוססת על סיפורה של חברת "TetraPak" אשר השיקה בשנות החמישים של המאה הקודמת אריזת חלב מהפכנית בצורת פירמידה משוכללת (ראה איור 1א). כמשימת פתיחה התבקשו התלמידים ליצור דגם של מיכל כזה תוך שימוש בחלק הגדול ביותר האפשרי של דף A4, ולהציג אותו לצד חישובים והסברים. מבעיה זו המשיכו התלמידים וביצעו במשך מספר שבועות פרויקטי חקר שבמוקדם בעיקר מאפיינים של גופים תלת ממדיים.

א. איור 1

(א) אריזת החלב של TetraPack (ב) דגם של פירמידה בתוך קובייה (ג) פירוק קובייה לשלוש פירמידות משוכללות



המחקר הינו חקר מקרה אינסטרומנטלי, במסגרתו נבחנו שאלות המחקר לאורך זמן, תוך איסוף נתונים ממספר מקורות. שבעה מפגשי זום בני שעה וחצי של קהילת המורים הוקלטו ותומללו, והתבטאויותיהם של המורים סווגו לקטגוריות בהתאם למסגרת התיאורטית, קרי לפי סוגי ידע להוראה וזרימת ידע בין המעגל הקולקטיבי לאישי ולממומש. בשלב שני הוצלבו הנתונים עם מקורות נוספים - תצפית בכיתה, שאלונים, תכתובות מייל ווצאפ ורשימות ביומנה של המורה. מתוך ממצאים אלה יצרנו את תיאור המקרה של המורה שרה.

ממצאים

להלן נביא מספר דוגמאות להתפתחות הידע של המורה שרה בחלוקה לקטגוריות חוזה דידקטי, CK, PCK, PK. נציין כי בחלק מהמקרים מה שחולל את התפתחות הידע היו תכנים שהובאו לקהילה על ידי המובילים (Collective Knowledge), ובחלק מהמקרים המקור לידע היו אירועים שהתרחשו בכיתה בשלב המימוש ואשר שרה בחרה להעלות לדיון במסגרת השיתופים בקהילה.

שינוי מערכת הציפיות בין המורה לבין התלמידות והרגלתן לשיטת הלימוד החדשה

באחד המפגשים הראשונים שלה עם התלמידות, שרה חושפת בפניהן את בעיית אריזות החלב. התלמידות מנסות לפתור את הבעיה וכאשר הן לא מצליחות לפתור, הן מבקשות מהמורה שתגלה להן

את הפתרון. להפתעתן, שרה מחליטה לא להיענות לבקשה ושולחת אותן הביתה מבלי לגלות להן את הפתרון. שרה מציינת שגם עבורן וגם עבורה מדובר בחידוש, שכן עד עכשיו התלמידות היו מקבלות ממנה מענה לכל שאלה. במהלך השיעור שלאחר מכן שולחת שרה את התלמידות לחפש בעצמן חומר על פירמידות, בשונה ממה שהורגלו אליו עד כה. אנו עדים כאן ליצירת שינוי באופן ההתנהגות של המורה מול תלמידותיה בשלב הא-דידקטי של הלמידה (Brousseau, 1997). שינוי זה, והשינויים הנוספים שחלו באופי האינטראקציה של שרה עם תלמידותיה חייבו את המורה להתעקש מול התלמידות ולהבהיר להן שוב ושוב מה בדיוק נדרש מהן, מה שלא תמיד היה קל. מספר שבועות לאחר תחילת הפרויקט שרה מספרת:

שרה: זה לא משהו שהם מכירים בכלל...אף פעם לא עבדו ככה. זה לא משהו שבכלל תלמידים יודעים מה פירוש למידה מבוססת פרויקטים. כדי שדבר כזה ייכנס למערכת חינוך...קודם כל צריך שתלמיד יכיר את זה, יעבוד בזה, יהיה לו מושג בכלל במה מדובר...

התפתחות ידע פדגוגי (PK) הקשור למאפייני שיטת הלמידה ואופי הדרישות מהמורה:

תוך כדי ההתנסות ב-PBL שרה מגיעה לתובנות בנוגע לקצב הלמידה, לגמישות הנדרשת ולאופן בו המורה צריך להתכונן לשיעור. וכך היא מתארת באחד ממפגשי הקהילה:

שרה: זה לוקח המון זמן, אני תכננתי את זה להרבה פחות. לפחות כפול מהזמן זה לקח לי...מה שלמדתי מזה זה שצריך נורא להתגמש, להיות מוכן לא רק לשיעור הספציפי, כן? צריך לבוא עם קצת יותר".

באותו עניין בהזדמנות אחרת שרה מציינת את הקושי להתכונן לשיעורים האלה, ומדגימה את ההבדל בין שיעור רגיל בו המורה מכין את היחידה ומעביר אותה לבין שיעור ב-PBL, שבו "כל שיעור הוא הפתעה". תובנות אלה של מורה שרה הן עדות להבניה של ידע פדגוגי חדש הרלוונטי ל-PBL: נדרשת הכנה לשיעור שמכוונת להגברת גמישות, פתיחות להפתעות וראיה רחבה יותר, שבאות על חשבון קצב למידה גבוהה ו"כיסוי חומר".

התפתחות ידע תוכן (CK) וידע תוכן פדגוגי (PCK):

כחלק מהמחקר של התלמידות בנושא פירמידות הן בנו דגם פיסי של קובייה המורכבת משש פירמידות ישרות וזהות (איור 1ב). במהלך השיעור עלתה השאלה מדוע ניתן לחלק קובייה ל-6 פירמידות זהות אך לא ל-3, למרות שיחס הנפחים בין קובייה לפירמידה בעלות בסיס וגובה זהים הוא 1:3. במפגש הקהילה שהתקיים לאחר השיעור התפתח דיון דומה לזה שהתקיים בכיתה של שרה, ומוביל הקהילה הדגים תוך שימוש ב GeoGebra כיצד כן ניתן לחלק קובייה לשלוש פירמידות זהות (תרשים 1ג). עבור שרה, כמו גם עבור שאר מהמורים בקהילה היה כאן חידוש גם ברמת ידע התוכן המתמטי, וגם בעצם השימוש ב GeoGebra:

שרה: אתה רואה, נגיד אנחנו היינו רוצים להראות להם כזה דבר, עד שהיינו מחפשים את זה...היה לוקח לי המון זמן".

נדגיש כי במקרה הזה מה שחולל את תהליך זרימת הידע היה דיון שהתקיים בכיתתה של שרה, ואיתגר את ידע התוכן האישי שלה. החלטתה להעלות את הנושא בקהילת המורים העשירה את הידע הקולקטיבי של חברי הקהילה ואת הידע האישי שלה עצמה, וכך צמחו גם ידע התוכן – הכנסת שלוש פירמידות זהות לתוך קובייה, וגם ה-PCK – שימוש בכלי הדמיה אינטראקטיבי.

התפתחות ידע פדגוגי (PK):

לאורך חודשי הפרויקט נאלצה שרה להתמודד עם מצבים חברתיים, שהיו תוצאה של עבודת חקר ממושכת בקבוצות קטנות, ובהם נדרשה להפגין יכולות גישור ולפתור ויכוחים שהתעוררו בתוך קבוצת העבודה. כך למשל במקרה בו זוג תלמידות לא הצליחו להתקדם במשך מספר שבועות, ובמהלך פגישה איתה הן מאשימות אחת את השנייה ומגיעות לכדי מריבה וצעקות. לאחר האירוע שרה מספרת:

שרה: אז היום דיברתי איתה בנפרד והסברתי לה ש'לא יקרה כלום אם אתן רוצות להיפרד, כאילו אם את מרגישה שלא מתאים לכן כזוג, בואי נראה איך אפשר לעזור לכן בעניין הזה, רק תחליטי'...הרגשתי איזה צורך מתוך הלב שלי להתערב.

על פי רוב מורים למתמטיקה פחות נדרשים להתמודדות עם מצבים כאלה, שהם תוצאה של עבודה של התלמידים בקבוצות לאורך זמן. היכולת לפשר ולגשר מהווה ידע פדגוגי חדש עבור המורה שרה.

דיון ומסקנות

המחקר בחן מקרה של מורה ותיקה ומנוסה ללא ניסיון קודם ב-PBL, וניתח את צמיחת הידע שלה במעבר להוראה ממוקדת תלמיד. המחקר מאשש טענות תיאורטיות שמעבר שכזה מציב בפני המורה אתגרים וקשיים, בשל הצורך לשנות את תפקידו ואת מערכת הציפיות ההדדית בינו לבין תלמידיו (Condliffe et al., 2017; Thomas, 2000). המחקר מביא עדויות אמפיריות לשינויים הללו ולאופן ההתגברות על האתגרים תוך צמיחת ידע התוכן, הידע הפדגוגי וידע התוכן הפדגוגי של המורים שהשתתפו בתכנית. כך למשל, שרה ושאר המורים בקהילה הגיעו להבנה שכדי שיוכלו להתמודד עם הפתעות שעולות מתהליך החקר של התלמידים נדרש תכנון מודולרי וגמיש הצופה מעבר לשיעור אחד ספציפי, ואשר צריך להישען על ידע מתמטי נרחב. המורים למדו כיצד להניע תלמידים וכיצד לקדם את החקר שלהם, והרחיבו את סל המיומנויות שלהם בהיבטים אלה. הם היו עדים לכוחה המניע של למידה מתוך סקרנות, והרגישו את האפקט שיש להיערכות להצגה בפני קהל חיצוני על מידת הרצינות בלמידה. בנוסף, עולה מהממצאים ש-PBL מחייב את המורים למתמטיקה לפתח מיומנויות חברתיות דוגמת גישור וייעוץ, על מנת שיוכלו לתת מענה למצבים חברתיים ואתגרים בינאישיים שנוצרים תוך כדי הלמידה. צמיחת ידע זו וזרימתו בין המעגל הקולקטיבי של מנחי הקהילה והמורים העמיתים אל עבר המעגל האישי של המורה שרה תוארו באמצעות מודל RCM-PCK, והיוו מענה לשאלת המחקר הראשונה. במענה לשאלת המחקר השנייה, המקרה המתואר מביא ראיות אמפיריות לעיצובו של חוזה דידקטי בעת המעבר מהוראה פרונטלית ל-PBL. לאורך תקופת הפרויקט ניצלה שרה הזדמנויות לחזור ולהבהיר לתלמידים את הציפיות שלה מהם, ולחדד אותן במקרים שבהם הדבר נדרש. מודעותה של שרה להתפתחויות והתהליכים שחוותה, ונכונותה לשתף ולהרחיב את הידע שלה סייעו לה לממש בהצלחה PBL בכיתתה, ותרמו להרחבת הידע הקולקטיבי של חברי הקהילה. לאור ממצאי המחקר אנו ממליצים לשלב בתוכניות פיתוח מקצועי נושאים תיאורטיים דוגמת חוזה דידקטי ומודלים לידע מורים, לצד חלקים מובנים של שיתוף וניתוח סיטואציות שעולות בכיתות.

רשימת מקורות

Barron, B. J., Schwartz, D. L., Vye, N. J., Moore, A., Petrosino, A., Zech, L., & Bransford, J. D. (1998). Doing with understanding: Lessons from research on Problem- and Project-Based Learning. *Journal of the Learning Sciences*, *7*(3–4), 271–311.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics (Didactique des mathematiques, 1970-1990*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. and Trans.). Kluwer.

Carlson, J., & Daehler, K. R. (2019). The refined consensus model of pedagogical content knowledge in science education. In A. Hume, R. Cooper, & A. Borowski (Eds.), *Repositioning pedagogical content knowledge in teachers' knowledge for teaching science* (pp. 77–92). Springer, Singapore.

Condliffe, B., Quint, J., Visher, M.G., Bangser, M. R., Drohojowska, S. Saco, L., & Nelson, E. (2017). *Project based learning: A literature review*, 1-78. New York, NY: MDRC.

Halverscheid, S. (2005). Features of mathematical activities in interdisciplinary, project-based learning. *ZDM*, *37*(3), 200–207.

Palatnik, A., & Koichu, B. (2017). Sense making in the context of algebraic activities. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(3), 245–262.

Palatnik, A. (2022). Didactic situations in project-based learning: The case of numerical patterns and sequences. *The Journal of Mathematical Behavior*, *66*, 100956.

Thomas, J. W. (2000). *A review of research on project-based learning*. San Rafael, CA: Autodesk Foundation.

תפקידים ואחריות בדיונים מתמטיים בקהילות להוראה מעודדת חשיבה

טלי נחליאלי, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט
עינת הד-מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא ורקע תאורטי

יש עדויות לכך שפיתוח הוראה מעודדת חשיבה מתקיים היטב בקהילות מורים (Horn & Kane, 2015). בנוסף, ידוע כי במסגרת הכשרה מקצועית להוראה מעודדת חשיבה, ההתנסות של מורים בפתרון בעיות מסוג אלה שהם ילמדו בכיתה, היא חשובה. יחד עם זאת, מטבע המבנה של קהילות מורים, ההנחיה בהן נעשית על ידי מורים עמיתים שאמנם לרוב יהיו בעלי ניסיון בהוראה מעודדת חשיבה בכתה, אך לאו דווקא בהובלת דיונים מתמטיים של עמיתים.

בקהילות מורים של מחשב"ה – מהלכים מעודדי חשיבה בשיעורי המתמטיקה, מורים למתמטיקה המלמדים בבית הספר העל-יסודי לומדים איך ליצור בכיתה הזדמנויות להשתתפות חקירתית של התלמידים – הזדמנות להיות שותפים בפיתוח הידע המתמטי, ליצור קשרים בין רעיונות ועצמים מתמטיים ולקחת אחריות על הלמידה שלהם. זאת בניגוד להשתתפות שהיא ריטואלית יותר המתמקדת בהפעלה נוקשה של פרוצדורות מוכרות (Nachlieli, & Heyd-Metzuyanim, 2022). לשם כך אנחנו מתמקדים בבחירת משימות מתמטיות מסוג "עשיית מתמטיקה" שהן משימות שעבורן לתלמידים אין פרוצדורה מוכנה (Smith & Stein, 1998), ובדרך כלל הן משימות שהתלמידים יכולים לפתור בדרכים שונות והובלה של דיונים מתמטיים שבמסגרתם יוצרים קשרים בין פתרונות שונים ובין רעיונות מתמטיים שונים.

במחקר שבו נבחן האופן שבו מורים למתמטיקה שהופכים למנחים מצליחים להוביל קהילות (Borko, et al., 2014) נמצא שבעוד שהמנחים הצליחו באופן לא רע לבנות קהילה שבה המורים מרגישים בטוחים, בחלקים הקשורים לדיונים המתמטיים הם הצליחו פחות. בעיקר המורים-מנחים התקשו להוביל דיונים על הקשרים שבין פתרונות שונים ועל אסטרטגיות שונות לפתרון. בורקו ושותפיה בחנו את הנושא מכיוון הידע המתמטי הנדרש ממנחי הקהילות. אנו מציעות כאן הסתכלות מעט שונה. מתוך ההנחה שמנחי קהילות מורים בהכרח יהיו כמעט תמיד מורים-עמיתים, אנו מעוניינות להבין כיצד דיונים מתמטיים יכולים להתקיים בקהילה גם כאשר המנחים אינם בהכרח בעלי ידע מתמטי נרחב יותר משל המורים המשתלמים. זאת, משום שהרעיון העומד בבסיס קהילות מורים אינו דווקא "העברת ידע" (כפי שהיה לעיתים נהוג בהשתלמויות מסורתיות) אלא יותר שיתוף עמיתים ולמידה משותפת (Brodie, 2021).

לצורך כך, אנו מאמצות גישה של ניתוח שיח המאפיינת את התפקידים (roles) והמיצובים (position) שלוקחים על עצמם בני שיח (Harré & VanLangenhove, 1999). גישה זו טוענת, בקצרה, שבני שיח ממצבים את עצמם על פי תפקידים הקיימים במרחב החברתי (למשל, רופא-חולה, או מורה-תלמיד). מיצובים אלו מכתיבים, במידה רבה, את האופן שבו המשוחחים יבינו האחד את דברי השני. בעיות תקשורת עלולות להיווצר כאשר מתקיים מאבק (או משא ומתן) סביב מיצובים מסויימים.

לאור זאת, אנו שואלות:

אלו תפקידים לוקחים המנחים והמורים המשתתפים בקהילה במהלך הדיונים המתמטיים, וכיצד התפקידים האלה מאפשרים או מגבילים העלאת רעיונות מתמטיים חדשים?

מתודולוגיה

קהילות מחשב"ה פועלות במודל של מניפה – מתקיימת קהילת מנחים אשר מובלת על ידי כותבות המאמר, והמנחים בתורם מנחים, לרוב בזוגות, קהילות בת. צוות הניהול והפיתוח של הפרויקט מספק

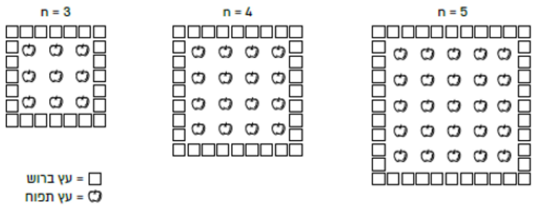
למנחים תכנים הכוללים משימות מתמטיות, דפי ניטור (הכוללים פתרונות שונים לבעיה), וכן מצגות מהמפגשים שבהם הם השתתפו במסגרת קהילת המנחים.

חלק ממפגשי קהילות הבת מוקלטים על בסיס שוטף, הן לצרכי מחקר והן לצרכי רפלקציה והדרכה של המנחים. למחקר הנוכחי בחרנו דיונים מתמטיים מחמש קהילות שבהן הדיון התמקד במשימה "מטע התפוחים" וזאת, על מנת לאפשר השוואה בין התפקידים שנוצרו בקהילות והרעיונות שעלו סביב בעיה אחידה. כמו כן, היות שבמפגש קהילת המנחים שדן בבעיה זו דנו רק בחלק מהסעיפים של הבעיה, נוצרה הזדמנות להתבונן במצב שבו המנחים נדרשים להתמודד עם תכנים מתמטיים שלא נדונו במסגרת קהילת המנחים.

שיטת ניתוח הנתונים

כדי לנתח את הנתונים צפינו תחילה בצילומי הוידאו של הדיונים שהתקיימו בעקבות העבודה על המשימה (כל המפגשים שבהם צפינו התקיימו בזום). לאחר מכן תמללנו את כל חמשת הדיונים המתמטיים. מתוך תמלולים אלו בחרנו קטעים שבהם יש חוסר-תקשורת (miscommunication), והתמקדנו בהם. במאמר זה אנו מדגימות, מפאת קוצר המקום, קטע אחד. קטע זה לקוח מאחת מקהילות מחשב"ה. את הקהילה מובילות שתי מנחות. במפגש זה, מנחה1 לקחה על עצמה את האחריות להוביל את הדיון המתמטי בעוד מנחה2 הובילה חלקים אחרים של המפגש והשתתפה בדיון רק מדי פעם. כל המשתתפים מוצגים באמצעות שמות בדויים.

הבעיה המתמטית איתה מתמודדים המורים נקראת "מטע התפוחים" והיא מציגה סדרה של מטעים כמוצג באיור 1.



איור 1 - התבנית מתוך בעיית "מטע התפוחים"

בבעיה היו חמישה סעיפים שבשלושה מתוכם דנו בדיון זה: (1) כמה עצי ברוש יש במטע בו n שורות של עצי תפוחים? מצאו שלוש דרכים שונות לבטא את מספר עצי הברוש (2) האם בשלב כלשהו מספר עצי התפוחים יהיה גדול ממספר עצי הברוש? אם כן, מתי? אם לא – מדוע לא? (3) נסתכל על סדרת מטעים המקיימת את החוקיות הנתונה. מה משתנה בקצב מהיר יותר. מספר עצי התפוח או מספר עצי הברוש? נמקו את תשובתכם.

ממצאים

בדקות הראשונות של הדיון, מנחה1 מובילה את הדיון בנוגע לסעיפים 1 ו-2 של הבעיה. המורים מציגים, כל אחד בתורו, את הביטויים שהם מצאו למספר הברושים במטע עם n שורות. התפקידים בחלק זה ברורים מאוד. מנחה1 לוקחת על עצמה את תפקיד המורה, תוך שהיא מזמינה מורים לחלוק את פתרונותיהם ומשבחת אותם על הנכונות או היופי של הפתרון, ואילו המורים ממלאים את תפקיד התלמידים בכך שהם משתפים את פתרונותיהם, כל אחד בתורו. במהלך החלק הזה, כמו בחלקים רבים אחרים במסגרת פעילות הקהילות, עלו בקהילה רעיונות מתמטיים מעמיקים שחלקם לא היו במערך המקורי. לאחר מכן, הדיון הגיע לסעיף 3. חשוב לציין כי זהו סעיף שלא נדון בדיון בקהילת המנחים.

1	מנחה1:	(קוראת את סעיף 3). נסתכל על סדרת מטעים המקיימת את החוקיות הנתונה, מה משתנה בקצב מהיר יותר, מספר עצי התפוח, או מספר עצי הברוש? נמקו את תשובתכם.. ואני אוסיף לשאלה הזאת האם יש קשר בין הסעיף הזה לסעיף הקודם

2	שחר:	אני בסעיף הקודם ציירתי פרבולה וקו ישר. ובפרבולה וקו ישר אפשר לראות שהשיפוע אממ נהיה גדול יותר בשלב מסויים מהקו ישר וגם שם ראיתי את ה - 8 ואת ה - 0 בחיתוכים ביניהם
3	מנחה1:	אז אני אשמח אם בדיון תעלה את זה, אחלה פתרון. מה לגבי הצד השמאלי של הפרבולה.?..

בתחילת הדיון המתמטי על שאלה 3, מנחה1 ממשיכה את התפקיד של "מורה": היא זו שחולקת את המסך, מקריאה את הבעיה, ואף מוסיפה שאלה משלה שלא כתובה במצגת [1]. בהמשך, מנחה1 משמרת את תפקיד ה"מורה" על ידי מתן משוב חיובי לתשובה של שחר ("אחלה פתרון" [3]) ומעבר מיידי לשאלה הבאה. דפוס זה ממשיך גם בשורות הבאות (שאינן מוצגות מפאת חוסר מקום). המורים המשתתפים בקהילה לוקחים תפקיד של תלמידים תוך שהם עונים על שאלותיה של מנחה1. עם זאת, מהקטע הבא מתחילה אינטראקציה בין שחר למנחה1 שבמהלכה מתהפכים התפקידים של המורה והתלמיד. שחר מתחיל לדבר על "גזירה". ועל כך שאלו "כלים שלא מתאימים לכתה ט" (הבעיה הוצגה כבעיה המתאימה לכתה ט'). בתחילה, המנחה לא מבינה את דבריו אך כשהוא מבהיר שמדובר בנגזרת, היא מתפלאת:

14	מנחה1:	למה אתה צריך גזירה פה? יש לך את ה(לא ברור) הראית פונקציה קווית ברמת..
15	שחר:	ב (לא ברור) את יכולה לראות את השיפוע אבל זה חקירה של- לא חקירה.. זו לא חקירה חד משמעית.
16	מנחה1:	לא אבל אני יכולה לראות קצב שינוי שהוא אחיד וקצב שינוי שהוא-
17	נעמי:	זהו, אני עשיתי עם טבלה
18	שחר:	נכון אבל כאן שאלת, כאן שאלת אה.. מה משתנה בקצב מהיר יותר ואני יכול לראות שהקצב, אה.. הקצב בהתחלה איטי ואחרי זה מתגבר ואז באיזשהו שלב הוא משתנה ובשביל זה הייתי צריך לגזור.. לראות באיזה שלב הוא משתנה

בקטע זה אנו רואים את שחר מתייחס לעצם חדש שלא הוזכר עד כה בדיון – הנגזרת. תגובתה של מנחה1 היא שאין צורך בגזירה [14] בכדי לענות על השאלה. לשיטתה, מספיק להסתכל על קצב השינוי – האם הוא "אחיד" או לא [16]. שחר מתנגד באופן שבתחילה איננו ברור לחלוטין [15] אך בשורה [18] מתחוור. טענתו (שהיא נכונה מתמטית) היא שבכדי לבדוק באיזו נקודה בדיוק הקצב משתנה, יש לבצע גזירה של הפונקציה. הדיון נמשך כ-100 תורי דיבור, תוך שמנחה1, מנחה2 והמורים הנוספים מאתגרים את טענתו של שחר ורומזות לו שהכיוון שהוא בחר לא מתאים. מנחה1 חוזרת פעמיים על נרטיב אחד כללי הקשור לקצב שינוי והוא ש"קצב שינוי של ישר הוא קבוע ואילו של פרבולה – משתנה". לעומת זאת, שחר מנסח נרטיבים מתמטיים שונים הקשורים לעצם הנגזרת, לדוגמה, "יש שלב שהעץ ברוש (הקצב שבו עצי הברוש גדלים) מהיר יותר ויש שלב שהעץ תפוח יותר מהיר ויש שלב שהם שווים בקצב" [26]. בהמשך, הוא אף מציין את הנקודה 4 (שהיא הנקודה שבה קצב השינוי משתנה) ומנסה לגייס את הסכמתם של שאר הנוכחים: "אני עדיין חושב שזה 4, אבל מה אתם אומרים?" [62]. בשלב זה, מנחה 2 מתערבת ומנסה לברר "מה זאת אומרת 4?" [63] ושחר מסביר: "עד n שווה 4 הקצב של עצי הברוש גדול יותר ומ-n גדול מ4 הקצב של עצי התפוח גדול יותר". המשתתפים עדיין מתקשים להבין את שחר, ומנחה2 מתפלאת: "אבל לא שאלו מאיפה עד איפה. שאלו מה משתנה בקצב מהיר יותר" [67]. נראה ששחר ושתי המנחות משתמשים בעצם "קצב שינוי" בצורה שונה, דבר שמביא לכשל בתקשורת ביניהם. בעוד שחר מדבר על קצב שינוי בנקודה (או בטווח מסוים), המנחות מדברות על "קצב שינוי" של פונקציה, שבחטיבת הביניים אכן מדובר לרוב כ"קצב שינוי קבוע" המשויך לפונקציות לינאריות, לעומת "קצב שינוי לא קבוע" המשויך לפונקציות "אחרות".

לקראת סוף הדיון בסעיף זה, מנחה1 מביעה הסכמה עם שחר אך הסכמה זו מובעת בקצרה "בסדר גמור, מקבלת. מסכימות?" ואין ניסיון אמיתי לוודא שיתר המשתתפות (כולל מנחה 2) אכן ירדו לעומק דעתו של שחר. נראה כי היפוך התפקידים שבו אחד המורים המשתלמים לקח על עצמו תפקיד של "יודע" והעלה רעיונות מתמטיים שהמנחות לא הכירו לפני הפגישה (משום שלא נחשפו להם בפגישת המנחים ואולי לא הקדישו להם מחשבה לפני מפגש הקהילה), עורר התנגדות מסוימת. התנגדות זו הובילה לכך שלקח זמן רב לנוכחים להיווכח בנכונות המתמטית שבטענותיו של שחר, וייתכן שחלקם לא הבינו אותן עד סוף הדיון.

דיון

במחקר המוצג כאן ניסינו ללמוד על הדיונים המתמטיים שמנחי קהילות מובילים, ועל האתגרים שאיתם הם מתמודדים. שאלנו אלו תפקידים לוקחים המנחים והמורים ביחס להעלאת רעיונות מתמטיים, וכיצד התפקידים האלה מאפשרים או מגבילים את התקשורת המתמטית בקהילה. חשוב לנו לציין שבמסגרת חמשת הדיונים שבהם צפינו, ניכר שהמורים חווים חווייה עשירה ומשמעותית של עשיית מתמטיקה. בחלקי המפגש השונים, הדיונים המתמטיים היו מעמיקים והאינטראקציה בין המנחות והמשתתפים הביאו לחשיפה של רעיונות מתמטיים רבים וליצירת קשרים בין רעיונות ועצמים מתמטיים שונים. המחקר שלנו מתמקד בכוונה תחילה בקטע שבו התקשורת בין המשתתפים ומנחות הקהילה, נפגעו. ממצאי המחקר, המודגמים רק בקצרה בקטע שנותח לעיל, מראים כי קיים מתח בין תפקידי "המורה" וה"תלמידים" המסורתיים, אותם לוקחים על עצמם המנחים והמורים בטבעיות רבה, לבין העובדה שפעמים רבות רעיון מתמטי מורכב או מקורי יכול לעלות דווקא מאחד המורים. מצב זה, שבו רעיון מתמטי מגיע מהמורים (ולא מהמנחות) הוא צפוי, שהרי, אחרי הכל, אין סיבה לצפות שמנחים בקהילה יהיו בעלי הכשרה מתמטית גבוהה יותר משל עמיתיהם המורים. יחד עם זאת, ככל הנראה, מאחר שתפקיד ה"מורה" שאחראי על "לדעת" את התשובות מוכר ושגור מאוד למשתתפים, הם מתקשים לייצר תפקידים שוויוניים יותר ביחס לייצור הנרטיבים המתמטיים בדיון. במצב כזה, כאשר עולים רעיונות מתמטיים שהמנחים לא חשבו עליהם מראש, המנחים עלולים לעסוק יותר ב"שימור מעמדם" כמובילי הדיון, במקום להתפנות להבין את הרעיון החדש שמובע בפניהם ותוך כדי כך לוודא שיתר המשתתפים מבינים אותו גם הם. התפיסה שהמנחים צריכים להיות "יותר מתקדמים" מתמטית מהמורים היא תפיסה שאיננה מתאימה לקהילות עמיתים, ולכן יש טעם לבדוק כיצד ניתן לשנות אותה.

רשימת מקורות

Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders' facilitation of mathematics professional development. The Journal of Mathematical Behavior, 33, 149-167.

Brodie, K. (2021). Teacher agency in professional learning communities. Professional development in education, 47(4), 560-573.

Harré, R., & van Langenhove, L. (1999). *Positioning theory*. Blackwell.

Horn, I. S., & Kane, B. D. (2015). Opportunities for professional learning in mathematics teacher workgroup conversations: Relationships to instructional expertise. Journal of the Learning Sciences, 24(3), 373-418.

Nachlieli, T., & Heyd-Metzuyanim, E. (2022). Commognitive conflicts as a learning mechanism towards explorative pedagogical discourse. Journal of Mathematics Teacher Education, 25(3), 347-369.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. Mathematics teaching in the middle school, 3(5), 344-350.

מסטודנטית למורה למתמטיקה: התפתחות מקצועית בשימת לב לאירועים קריטיים של משתתפת בתוכנית הכשרה

סיגל-חוה רותם, אוניברסיטת אתונה, מכללת אחוה, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

שימת לב לאירועים קריטיים (שאול מתוך Teacher professional noticing of students' mathematical thinking: Jacobs et al., 2010) הנה פרקטיקת ליבה בהוראת מתמטיקה. פרקטיקה זו כוללת שלוש מיומנויות: (1) זיהוי חשיבת תלמידים במהלך אינטראקציה בין מורה לתלמיד; (2) מתן פרשנות לחשיבה המתמטית של התלמיד; ו- (3) מתן תגובה המסתמכת על אותה פרשנות. מטרת התגובה היא להיבנות על החשיבה המתמטית של התלמיד ולהעמיק אותה כך שההבנה המתמטית שלו תבנה על סמך מה שהוא כבר מבין. בגלל חשיבותה של הפרקטיקה בהוראה יומיומית של מורים, תוכניות הכשרה רבות מלמדות מתכשרים להוראה לשים לב לאירועים קריטיים. אירוע קריטי הוא רגע שבו החשיבה המתמטית של התלמיד מתגלה ואז נוצרת הזדמנות למורה להעמיק ולהבנות את החשיבה המתמטית של התלמידים.

המחקר מצביע על כך ששימת לב (הכוללת את שלוש המיומנויות) היא פרקטיקה מורכבת שאינה מתפתחת באופן ספונטני אך ניתן לפתח אותה במהלך תכנית ייעודית הכוללת מסגרת מובנה (למשל Diamond et al., 2007). במחקרים רבים ההתפתחות של שימת לב נחקרת לאורך תהליך ההכשרה כאשר האירועים הקריטיים לפרשנות ותגובה נבחרים מתוך שיעורים מצולמים בווידאו על ידי מורי המורים. עם זאת, כדי להבין טוב יותר כיצד מורים לומדים לשים לב יש לבחון את התפתחות שימת הלב שלהם בהקשר המציאותי של הכיתה, אז המורים נדרשים לזהות, לתת פרשנות ולהגיב לאירועים קריטיים בזמן אמת תוך כדי התרחשותם (למשל, Ball & Forzani, 2009). יתרה מכך, יש לבחון התפתחות זו לא רק במהלך ההכשרה אלא גם כאשר הם מורים המלמדים בפועל. כדי לענות לצורך זה, מחקר זה מתמקד במקרה בוחן בו נבחן כיצד מורה אחת, עלמה, לומדת לשים לב לאירועים קריטיים, החל משנת ההכשרה בה למדה להיות מורה למתמטיקה ועד לשנתה הראשונה בהוראה. אנו נציג את התפתחותה של עלמה בזיהוי אירועים קריטיים (המרכיב הראשון במיומנות שימת הלב), עליו מתבססות הפרשנות והתגובה שעלמה מציעה לאירוע הקריטי. לפיכך, מטרת המחקר הנוכחי היא *לאפיין את השינוי של עלמה בזיהוי אירועים קריטיים על ידי השוואה בין אירועים שזיהתה בזמן אמת בכיתה במהלך ההכשרה לבין אירועים שזיהתה כאשר היתה מורה מתחילה.*

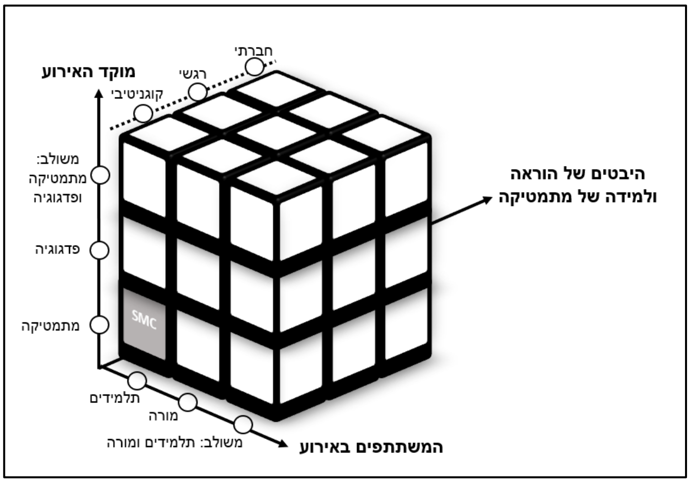
מסגרת תיאורטית

בספרות קיימים כינויים ושימושים רבים לאירועים קריטיים. כפי שציינו לעיל אנו מכנות אירועים קריטיים רגעים שבהם החשיבה המתמטית של התלמיד מתגלה ואז נוצרת הזדמנות למורה להעמיק ולהבנות את החשיבה המתמטית של התלמידים. מחקר זה הינו חלק מפרויקט מחקרי גדול בו אפיינו אירועים קריטיים שמתכשרים להוראה זיהו מתוך הצפייה וההוראה בכיתות במהלך תכנית הכשרה מבוססת שדה (Rotem & Ayalon, 2022). ממצאי המחקר הקודם, שבו נבחנו אירועים שהובאו על ידי המתכשרים להוראה, הצביעו על כך שהאירועים, בהם החשיבה המתמטית של התלמיד נגלית, כוללים היבטים רבים של הוראה ולמידה, ולא רק את החשיבה של התלמיד. אירועים קריטיים אלו מאופיינים על ידי מודל המורכב משלושה צירים: (1) המשתתפים באירוע הקריטי (תלמידים (S), מורה (T), משולב מורה ותלמידים (C)); (2) מוקד האירוע הקריטי (מתמטיקה (M), פדגוגיה (P), שילוב של מתמטיקה ופדגוגיה(C)); (3) היבטים של הוראה ולמידה של מתמטיקה (קוגניטיבי (C), רגשי (A), חברתי (S)). מודל זה נבנה באופן אינדוקטיבי על סמך האירועים הקריטיים שהובאו על ידי המשתתפים

במחקר ובאופן דדוקטיבי תוך הסתמכות על מחקר בשימת לב (van Es & Sherin, 2008) ועל מחקר העוסק באופן שבו היבטים קוגניטיביים, רגשיים וחברתיים של למידה והוראה קשורים זה בזה (Op't Eynde et al., 2006). מודל שלושת הצירים יוצר קובייה של 3 על 3 הכוללת 27 קומבינציות אפשריות. קומבינציה היא שילוב של מרכיב מכל ציר ומיוצגת על ידי האות הלועזית הראשונה של כל מרכיב מכל ציר (מופיעה בסוגריים בפירוט צירי המודל לעיל), למשל, החלק הכהה באיור 1 הוא הקומבינציה תלמידים-מתמטיקה-קוגניטיבי [SMC].

איור 1

מודל שלושת הצירים לאפיון אירועים קריטיים שזוהו על ידי מתכשרים להוראה תוך כדי צפייה בשיעורים (Rotem & Ayalon, 2022).



מתוך התפיסה ששימת לב לפרטים רבים של האירוע הקריטי מעידה על התפתחות מקצועית (Barnhart & van Es, 2015; Mason, 2011), במחקר זה נשתמש במודל שלושת הצירים כדי לבחון את השינויים בשימת הלב של עלמה. לפיכך, שאלת המחקר עליה נענה במאמר זה היא: *מהו השינוי בקומבינציות המאפיינות את האירועים הקריטיים שזיהתה עלמה כאשר היתה מורה מתחילה בהשוואה לאלו המאפיינות את האירועים שזיהתה בזמן אמת בכיתה במהלך ההכשרה?*

מתודולוגיה

מחקר זה עקב אחר עלמה במהלך שנתיים, 2016-2018. בשנה הראשונה (2016-2017) עלמה השתתפה בתכנית הכשרה בשם הקלי"ם-5 (הכשרה קלינית להוראה ייחודית מתמטיקה 5 יחידות). בתכנית, כחלק מההכשרה המעשית להוראת מתמטיקה ברמת חמש יחידות לימוד, התבקשו משתתפי התכנית לתאר אירועים קריטיים מתוך הצפייה וההוראה שלהם בשיעורים. לאחר תיאור האירוע, התבקשו המתכשרים להוראה לתת פרשנות ולהציע דרכי הוראה חלופיות בהתאם למסגרת ייעודית של התכנית (עוד על התכנית והמסגרת ב-Rotem & Ayalon, 2022) ולדווח על כך בכתב בטופס ייעודי. בשנה זו עלמה דיווחה על ארבעה אירועים קריטיים. בשנה השנייה של המחקר (2017-2018), עלמה התנדבה להגיע לשיחות אישיות באוניברסיטה עם הכותבת הראשונה. בשיחות עלמה דיברה על דברים שקרו לה במהלך ההוראה והחוקרת דובבה אותה לדבר על אירועים קריטיים. תיאור האירוע, מתן פרשנות לו והצעת אלטרנטיבות להוראה הועלו על-ידיה בעל-פה במהלך השיחה. לאחר כל שיחה עלמה דיווחה בכתב בטופס הייעודי על אירוע קריטי שקרה לה (כזה שדובר עליו בשיחה או אחד אחר) וניתחה אותו לפי אותה מסגרת ייעודית. בסך הכל במהלך שנה זו עלמה הגישה שלושה אירועים קריטיים. לסיכום, לאורך המחקר עלמה דיווחה על שבעה אירועים קריטיים. במחקר זה אנו מתמקדות בחלק התיאורי של הדיווח על האירוע הקריטי, בו עלמה תיארה את האירוע הקריטי שזיהתה.

שבעת התיאורים של האירועים הקריטיים אותם זיהתה עלמה נותחו בעזרת מודל שלושת הצירים לאפיון אירועים קריטיים. טבלה 1 מדגימה ניתוח של אירוע קריטי בעזרת המודל. העמודה הראשונה מציגה את האירוע הקריטי כפי שתואר על-ידי עלמה. העמודה השנייה כוללת את הניתוח שביצענו בעזרת המודל לקטע המופיע בעמודה הראשונה. הסוגריים המרובעים בעמודה השנייה מתייחסים

לקומבינציה מתוך המודל שרלוונטית עבור הקטע המנותח. אירוע זה הינו האירוע הראשון שעלמה זיהתה בשנתה הראשונה להוראה.

טבלה 1: אירוע קריטי שעלמה זיהתה ותיארה במהלך השנה הראשונה שלה להוראה

האירוע הקריטי	ניתוח האירוע לפי המודל
שיעור 3 יח"ל כיתה י'. נושא השיעור: לימוד ושימוש בטבלת התפלגות. הסברתי להם את משמעות x_i כקטגוריות (שמות) ו-f_i כשכיחויות (כמות אנשים שנמצאים באותה קטגוריה). לאחר מכן דיברנו על ממוצע. גם לפי הנוסחה. לצד הנוסחאות נתתי לכיתה עבודה עצמית של שני תרגילים לחשב ממוצע ולאחר מכן הגדרתי את המושג חציון "הקטגוריה שנמצאת בדיוק במקום האמצעי" ולכן החציון תלוי במספר האנשים הכולל.	שיטת הוראה של המורה: להתחיל את השיעור בהגדרה של מושג לאחר מכן תרגול עצמי של המושג החדש ומעבר למושג הבא [TPC: מורה-פדגוגיה-קוגניטיבי].
בר: "מה ההבדל בין חציון זוגי לאי זוגי?" בועז: "זה כמעט אותו דבר" אמיתי: "אתה טועה, יש גם שלב שעושים ממוצע".	התלמידים דנו ברעיון לפיו יש הבדל באופן שבו מחשבים חציון כאשר יש מספר זוגי ומספר אי זוגי של קטגוריות [SMC: תלמידים-מתמטיקה-קוגניטיבי].
הקמתי מספר אי זוגי של תלמידים וביקשתי מהם להחזיק דף עם ציון מומצא של מבחן. בדקנו את החציון, היה קל לראות מי נמצא במקום האמצעי. בנינו ביחד את האלגוריתם למציאת חציון אי זוגי. $x_{\frac{(n+1)}{2}}$ = חציון כאשר מספר האנשים אי זוגי ובמילים הקטגוריה (x) שנמצאת במקום ה- $n+1$ חלקי 2.	המורה ממחישה את ההבדל בין שני המקרים בעזרת הפעלה של תלמידים. זהו רעיון פדגוגי נוסף ולכן הקומבינציה המתאימה לקטע זה היא [TCC: מורה-משולב מתמטיקה ופדגוגיה-קוגניטיבי]. קטע זה מאופיין גם בקומבינציה [CCS: משולב מורה ותלמידים-משולב מתמטיקה ופדגוגיה-חברתי]: המורה מבנה את הדיון תוך התבססות על הרעיונות המתמטיים שהעלו התלמידים בקטע הקודם.
כאשר בדקנו את החציון במספר תלמידים זוגי ראינו שנשארו שני תלמידים באמצע ואז בועז **קפץ** ואמר: "עכשיו נעשה להם ממוצע ונתייחס כאילו יש מישהו באמצע, ואז הממוצע הזה יהיה מי שנמצא בדיוק באמצע"	בועז מתקן (באופן לא מפורש) את הטיעון הקודם שלו ועושה הבחנה בין שני המקרים, המקרה בו יש מספר זוגי של קטגוריות למקרה בו יש מספר אי זוגי. בנוסף הוא קפץ, הוא היה נלהב לשתף את הכיתה בתובנה החדשה שלו [SMA: תלמידים-מתמטיקה-אפקטיבי]

ממצאים

טבלה 2 מציגה את הקומבינציות שמאפיינות כל אחד משבעת האירועים שהגישה עלמה בשנתיים בהן השתתפה במחקר. ניתן לראות כי האירועים הקריטיים שעלמה זיהתה בשנה הראשונה, כאשר היתה בשנת ההכשרה להוראה, מאופיינים בעזרת מספר קומבינציות של המודל. הקומבינציה היחידה שחזרה על עצמה בכל ארבעת האירועים עוסקת בחשיבה המתמטית של התלמידים והיא SMC [תלמידים-מתמטיקה-קוגניטיבי]. לעומת זאת, במהלך השנה השנייה של המחקר, בשנת ההוראה הראשונה של עלמה, האירועים הקריטיים שזיהתה מאופיינים בעזרת מספר גדול יותר של קומבינציות, וביניהן ישנן קומבינציות רבות יותר שחוזרות על עצמן. בנוסף לקומבינציה SMC, האירועים בשנה הראשונה להוראה מאופיינים בקומבינציה שעוסקת בדרכי ההוראה שלה TCC [מורה- משולב מתמטיקה ופדגוגיה-קוגניטיבי] ובקומבינציה העוסקת בהיבטים חברתיים של הכיתה CCS [משולב מורה ותלמידים-משולב מתמטיקה ופדגוגיה-חברתי].

טבלה 2: אפיון שבעת האירועים שעלמה תיארה בעזרת קומבינציות המודל

	שנת ההכשרה להוראה				השנה הראשונה להוראה		
מספר אירוע	1	2	3	4	5	6	7
קומבינציות המודל המתארות את האירוע	SMC	SMC	SMC	SMC	SMC	SMC	SMC
	TPC	TCC	CPS	CPS	SMA	TCC	SMS
	CCS	CCA	CCA		TPC	CCS	TPC
					TCC		TCC
					CCS		CCS

דיון

ההתבוננות באירועים של עלמה במשך שנתיים מאפשרת לנו הצצה לתהליך התפתחות שימת הלב של מורה, כאשר היא הופכת להיות מורה ב"אמת". הממצאים מראים כי האירועים עליהם עלמה דיווחה בשנת ההכשרה היו מגוונים ולא נמצא אירוע שניתן להחשיבו כאירוע מייצג. במהלך שנה זו היתה שונות רבה באפיון האירועים בעזרת קומבינציות של המודל. בנוסף, ניכר כי בשנה הראשונה להוראה עלמה מתמקדת בסוג מסוים של אירועים קריטיים, **המאופיינים על ידי קומבינציות רבות יותר של המודל.** ניתן אם כך להסיק כי בעוד שימת הלב שלה לחשיבה המתמטית של התלמידים מתרחשת כבר בשנת ההכשרה, בשנה הראשונה להוראה שימת הלב מתרחבת ומגבשת תבניתיות מסוימת הכוללת היבטים נוספים של האירוע, בעיקר שיטות ההוראה של המורה וההיבט החברתי של הכיתה. בכנס נרחיב על המודל ועל הקומבינציות המרכיבות אותו, נדגים בעזרתו ניתוח של אירועים נוספים, ונדון ביישומים אפשריים של מחקר זה.

רשימת מקורות

Ball, D. L, & Forzani, F. M. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of teacher education*, *60*(5), 497-511.

Barnhart, T., & van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45,* 83-93.

Diamond, J. M., Kalinec-Craig, C. A., & Shih, J. C. (2018). The Problem of Sunny's Pennies: A Multi-Institutional Study about the Development of Elementary Preservice Teachers' Professional Noticing. *Mathematics Teacher Education and Development, 20*(2), 114-132.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education, 41*(2), 169-202.

Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35–50). New York: Routledge.

Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2006). "Accepting emotional complexity": A socio-constructivist perspective on the role of emotions in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 193-207.

Rotem, S. H., & Ayalon, M. (2022). Building a model for characterizing critical events: Noticing classroom situations using multiple dimensions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *66*, 100947.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher education, 24*(2), 244-276.

איך הוא ייגש לבעיה? מאפיינים של חיזוי פתרונות התלמידים על ידי מורים

רחל זקס, מכון ויצמן למדע, מכללת שאנן
בוריס קויצ'ו, מכון ויצמן למדע

מבוא

חיזוי התגובות הצפויות של התלמידים לפעילות הוראה היא שלב חיוני בכל מערך שיעור. למשל, סיימון (Simon, 1995) מציע לבחון את מחזור הלמידה באמצעות מסלול למידה היפותטי – HTL (Hypothetical learning trajectory, שבו החלטות העיצוב של המורה מבוססות על חיזוי אופטימלי של אופן הלמידה שיתרחש בפועל. סטיין ועמיתיה (Stein et al., 2008) מונים, בין חמש הפרקטיקות לתזמור דיון מתמטי בכיתה, את פרקטיקת החיזוי (anticipating): ניבוי התגובות האפשריות של התלמיד לבעיה נתונה. לטענתם, על המורים לשים את עצמם במקומו של התלמיד, להתעלם מהפתרון שהיו נוקטים אילו נדרשו לפתור את הבעיה בעצמם, ולנסות לדמיין כיצד תלמידים שונים יפעלו בניסיונם לפתור את הבעיה. סטיין וחוב' מציעים מספר משאבים לביסוס החיזוי, וביניהם פתרון הבעיה במגוון דרכים, דיון עם מורים עמיתים והישענות על מחקרים רלוונטיים ועל תיעוד של תגובות התלמידים משנים קודמות. החיזוי מופיע בשלב התכנון גם בדגם של חקר שיעור, (LS- Lesson study), שם הוא מוצג כמסייע להבהיר את הערך המתמטי של המשימה ומסייע למורים לוודא את השגת מטרתו של השיעור (Fujii, 2019).

תפקידו של החיזוי, המופיע כאמור בדגמים של תכנון פעילויות הוראה מתמטיות שונות, חיוני במיוחד כשמדובר בתכנון פעילות הכרוכה בפתרון בעיות; שכן אפיון משימה כבעיה תלוי בתלמיד, זה שעליו מוטל לפתור את הבעיה (Schoenfeld, 1985). תהליך פתרון בעיות מתרחש, לפי שונפלד (1985) כאשר לפותר לא ידוע מראש איזו דרך פתרון עליו לנקוט כדי לפתור את המשימה שלפניו, אך יש לו הרקע הנחוץ לכך. חיזוי פתרונות התלמידים עוד בשלב תכנון פעילות ההוראה הוא חלק מידע המורים אודות תלמידים כפותרי בעיות (Chapman, 2015). כדי שפעילות ההוראה המתוכננת תזמן פתרון בעיות, על המורה להתעלם מדרך הפתרון שהוא היה בוחר לו הוא היה מתבקש לפתור את המשימה בעצמו, ולמשך זמן מה להתבונן במשימה מבעד לעיני תלמידו (Stein et al., 2008). מטעמי נוחות, נשתמש להלן במושג המקוצר *חיזוי* עבור תיאור שנותן המורה למהלך פתרון דמיוני של משימה נתונה שמבצע תלמיד נבחר.

אף שפרקטיקת החיזוי נפוצה בספרות מקצועית העוסקת בתכנון פעילויות הוראה, נראה שלא נעשה עדיין מחקר אמפירי לזיהוי המאפיינים של חיזוי והערכת טיבו. מטרת מחקר זה היא להציע מאפיינים של *חיזוי עשיר*, בהשראת המונח *תיאור עשיר* (thick description) הלקוח מתחום ניתוח נתונים איכותי, ומתייחס לתיאור פרטני החושף תמונה כוללת, לוכד מחשבות, רגשות ואינטראקציות חברתיות ומוביל לפרשנויות עשירות (Ponterotto, 2006). שאלת המחקר המוצעת היא: כיצד מתאפיין החיזוי של פתרונות התלמידים על ידי מורי מתמטיקה בעלי עמדות שונות כלפי שילוב פתרון בעיות בשיעורי המתמטיקה?

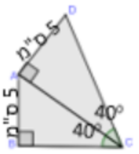
מתודולוגיה

במחקר השתתפו עשרה מורים למתמטיקה (שמונה מורות ושני מורים) המלמדים במגוון בתי-ספר על-יסודיים ברחבי הארץ. המורים נענו באופן וולונטרי להצטרף למחקר בעקבות פנייה ברשימת תפוצה של מורים.

כלי המחקר הם שניים, ריאיון ושאלון. הריאיון הוא ריאיון חצי מובנה (שקדי, 2003) מבוסס משימה (Goldin, 2000), שבו מתבקש המרואיין לדמיין תרחישים המתארים כיצד ניגשים תלמידים שלו לפתרון שלוש משימות נתונות. לגבי כל משימה, הוראת המראיינת הייתה: "בחרו אחד מהתלמידים שלכם, ספרו לי בבקשה קצת עליו, איך קוראים לו? באיזה כיתה הוא לומד? איזה מן תלמיד הוא?" ובהמשך: "בוא נשחק משחק. אתה התלמיד (המראיינת נוקבת בשם), איך אתה ניגש למשימה?" לאחר שענו לשאלה זו, התבקשו המרואיינים לבחור תלמיד אחר ולחזור שוב על אותו משחק. דוגמאות למשימות שסביבן הוזמנו המרואיינים לבצע את החיזוי מוצגות באיור 1. משך הריאיון 25- 60 דקות. כל הראיונות צולמו בווידאו ותומללו במלואם בסמוך למועד קיום הריאיון. התמלולים נותחו וקודדו בדרכים המקובלות לניתוח נושאי (Saldaña, 2021) לשם בניית קטגוריות להגדרה של *חיזוי עשיר*, וכפועל יוצא הערכת החיזוי והשוואה בין מהלכי חיזוי של מורים שונים או של אותו מורה למשימות שונות ולתלמידים שונים. סבב הראיונות המשיך במקביל לניתוח, והוא הסתיים רק כאשר הסתמנה רוויה באיסוף הנתונים עם התייצבות מערכת הקטגוריות (Wiersma, 2000).

איור 1

דוגמאות למשימות בריאיון

א. היקף מלבן 24 ס"מ, מהו השטח המקסימלי של המלבן?	. ב. לפניכם שרטוט בלתי אפשרי, מה לא בסדר בשרטוט? 

השאלון הוא שאלון עמדות מורים כלפי שילוב פתרון בעיות בשיעורי המתמטיקה (Zaks & Koichu, 2022), כאשר עמדה נחשבת כנטייה לדפוסי התנהגות מסוימים או כנטייה לסוגים מסוימים של תחושות רגשיות (Goldin et al., 2009). בהנחה ששינויים באמונות של מורים ובפרקטיקות הוראה שלהם שלובים אלו באלו ומניעים אלו את אלו (Swan, 2011), חלק מההיגדים בשאלון עוסקים באמונותיו של המורה וחלק במעשי ההוראה שלו. בשאלון 20 היגדים בסולם ליקרט 1- 4. מהימנות אלפא של קרונבך עבור כל 20 הפריטים היא 0.77. ציון גבוה בשאלון מעיד על תמיכה גבוהה בפתרון בעיות בשיעורים ולהפך. המרואיינים מילאו את השאלון באופן מקוון בזמנם הפנוי, לפני הריאיון, במהלכו או ימים אחדים לאחר מכן. לכל מרואיין חושב ציון למידת תמיכתו בשילוב פתרון בעיות בשיעורים. מורה שהציון שצבר גבוה לפחות בסטיית תקן אחת מהציון הממוצע של מורים במחקר גישוש (n=62) נחשב תומך בפתרון בעיות, ומורה שהציון שלו נמוך בסטיית תקן אחת או יותר נחשב מתנגד.

ממצאים

מניתוח החיזויים נמצאו חמישה רכיבים לאפיון חיזוי: הפותר, המהלך המתמטי, התארגנות לפתרון, בגוף ראשון ומגוון תרחישים.

הפותר: האם המורה מתייחס לתלמיד ספציפי, נוקב בשם התלמיד ו/או מתאר את הרגלי העבודה שלו? האם המורה מתייחס *לתלמיד גנרי*, למשל "תלמיד חזק של חמש יחידות"? האם מתייחס לקבוצת תלמידים כאל יישות אחת, "הם"? ואולי בכלל במקום לתאר מה יעשה התלמיד הוא גולש לספר איך הוא היה מתערב ומנחה את התלמיד? **המהלך המתמטי:** האם המורה מסתפק בכותרת של המהלך המתמטי, למשל "בכלים טריגונומטריים" או "ניסוי וטעייה"? האם מפרט את שלבי הפתרון? ואם כן, מהי מידת הפירוט? למשל, "מנסה כל מיני מספרים" או "יציב 12 ו-1, אחר כך 10 ו-2". **התארגנות לפתרון**: האם לצד דרך הפתרון המתמטי המורה מתאר פעולות התארגנות של התלמיד, כמו "משרטט על דף משבצות גדול", "רושם בצד", "מדפדף במחברת", "פונה לחבר". **בגוף ראשון:** האם המורה משלב בחיזוי ציטוטים של התבטאויות או מחשבות של הפותר בגוף ראשון? ואם כן, באיזו שכיחות?

למשל, "הוא יגיד לי: המורה, מה הבעיה?" **מגוון תרחישים:** האם המורה ממשיך מיוזמתו לבצע חיזוי נוסף לגבי תלמיד אחר? כמה חיזויים שונים עבור תלמידים שונים לאותה משימה הוא מוכן לבצע?

לפי רכיבים החיזוי שנמצאו, אנו מציעים להגדיר חיזוי כחיזוי עשיר, אם הוא מתאפיין ב: (1) התייחסות לתלמיד ספציפי עבור כל תרחיש, (2) תיאור רב שלבי של המהלך המתמטי ופירוט השלבים, (3) תיאור פעולות נוספות שמבצע הפותר בתגובה למשימה, פעולות התארגנות, הכנה ותקשורת, (4) שילוב ציטוטים בגוף ראשון של התבטאויות או של מחשבות של הפותר, ו-(5) תרחישים שונים עבור תלמידים שונים הפותרים אותה משימה. נעיר שחיזוי עשיר אינו מעיד בהכרח על פתרון מוצלח. חיזוי עשוי לתאר כישלון של התלמיד להגיע לפתרון, ועם זאת להיות עשיר; בעוד שניתן לתאר דרך פתרון מקורית של תלמיד בכלים של חיזוי דל.

משימה א באיור 1 היא משימה נפוצה בספרי לימוד אנליזה בתיכון, והתרחיש הדמיוני שהמורה מתבקש לתאר סביבה דומה לאירוע שהוא חווה בעבר. במקרה כזה, נאמר שהחיזוי בסיטואציה מוכרת למורה. חלק מההנחיות לחיזוי בראיונות היו בסיטואציות מוכרות, ובכולן כל המורים נענו וביצעו חיזוי. מהשוואה בין מורים שנמצאו תומכים בפתרון בעיות (4 מורים) למורים שנמצאו מתנגדים (3 מורים), נמצאו בסיטואציות המוכרות חיזויים עשירים יותר בקרב התומכים בפתרון בעיות לעומת חיזויים של המתנגדים. לעומת זאת, בסיטואציות בלתי מוכרות, למשל אותה משימה שהיא בעיית ערך קיצון, עבור מורה שמלמד רק בחט"ב, מתנגדי פתרון בעיות לרוב התחמקו מחיזוי, ולעתים אף גלשו לתיאור התערבות המורה במקום תיאור פתרון של תלמיד. אצל מורים תומכי פתרון בעיות נמצאו חיזויים דלים יותר בסיטואציות בלתי מוכרות לעומת סיטואציות מוכרות: פחות תרחישים, מעבר מפותר ספציפי לגנרי ותיאור חד שלבי של דרך הפתרון.

חלק מהמשימות בריאיון שסביבן נסוב החיזוי היו משימות *לא-סטנדרטיות*, כאלו שלא ניתן למצוא בדרך כלל בספרי המתמטיקה (Pehkonen et al., 2013). משימה ב באיור 1 (לפי שיר ואחרים, 2021) היא דוגמה למשימה כזו. כל ארבעת המורים שנמצאו תומכים בפתרון בעיות, ללא יוצא מן הכלל, הצהירו שהם אינם יודעים כיצד לבצע את החיזוי למשימה הלא סטנדרטית. הם הגיבו, למשל: *"אין לי משהו אינטלגנטי להגיד כאן", "מה היא הייתה עושה? לא יודעת, לא יודעת, לא יודעת איך היא הייתה פותרת את זה."* לעומתם, המורים המתנגדים לפתרון בעיות הביעו התנגדות לחיזוי סביב המשימה הלא סטנדרטית. הם סירבו בנחרצות לבצע את החיזוי המבוקש והצדיקו את הסירוב בנימוק שהדרישה לא רלוונטית, שכן סיטואציית ההוראה המתוארת לעולם לא תתרחש במציאות. למשל: *"תלמידי שלוש יחידות זה לא רלוונטי. זה סינית. סינית בשלוש יחידות", "אני, כמו שאמרתי לך, לא הייתי זורקת אותם לתרגיל הזה, כי זה נראה לי לא הוגן[...], אני לא הייתי עושה את זה בחיים."*

סיכום ודיון

היכולת להבין במה אחרים מתקשים, מה מרתק אותם או כיצד הניסיון שלהם מעצב את הפרשנויות שלהם, אינה פשוטה כלל; ולכן חיוני להכשיר את המורים ולהקנות להם שליטה במיומנויות לא טבעיות אלה (Ball & Forzani, 2011). המחקר הנוכחי מציע כלי להערכת איכות של חיזוי פתרונות התלמידים על ידי המורים כחלק מתכנון ההוראה. תוצאות אלו עשויות לשמש למעקב אחר התקדמות המורים במיומנות של חיזוי, למשל במסגרת של התפתחות מקצועית. ההבדלים שנמצאו באיכות החיזוי למשימות מסוגים שונים עשויים לסייע בבחירת המשימות ובעיצוב הפעילויות להכשרת מורים לשימוש בפרקטיקה של חיזוי.

הכשרת תלמידים להיות פותרי בעיות גמישים ועצמאיים היא תפקיד מרכזי של מורי המתמטיקה (NCTM, 2014), אך למרות תשומת הלב הרבה להוראה מבוססת פתרון בעיות הן במחקר והן בשדה, נראה שעדיין תלמידים כמעט אינם חווים תהליך עצמאי של פתרון בעיות (Schoenfeld, 2021). ממצאי המחקר הנוכחי, הרומזים לקשר בין איכות החיזוי של המורה ובין עמדתו כלפי שילוב פתרון בעיות בשיעורים, עשויים לסייע בשיפור המצב הנוכחי. דרוש מחקר המשך שיבחן אם חיזוק פרקטיקת החיזוי במסגרת הכשרת מורים מהווה גורם המעודד את המורים לשלב פעילויות הוראה של פתרון בעיות.

רשימת מקורות

שיר, ק', זודיק, א', זסלבסקי, א' ורון, ג' (2021). "דוגמאות" בלתי אפשריות בגיאומטריה, ותרומתן ללמידה. בתוך: ב' זילברמן, נ' חן-חדד ות' עובדיה (עורכים), *כנס ירושלים התשיעי למחקר בחינוך מתמטי, ספר מאמרי הכנס* (עמ' 75- 79).

שקדי, א' (2003). *מילים המנסות לגעת: מחקר איכותני תיאוריה ויישום*. רמות.

Ball, D. L., & Forzani, F. M. (2011). Teaching skillful teaching. *The Effective Educator, 68*(4), 40– 45.

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT - International Journal on Math, Science and Technology Education, 3*(1), 19-36.

Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of Lesson Study. *ZDM - Mathematics Education*, *48*, 411–423.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). Lawrence Erlbaum.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs: No longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maaß, & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education* (pp. 1-18). Brill.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all.* Author.

Pehkonen, E., Näveri, L., & Laine, A. (2013). On teaching problem solving in school mathematics. *CEPS Journal 3*(4), 9-23.

Ponterotto, J. G. (2006). Brief note on the origins, evolution, and meaning of the qualitative research concept thick description. *The Qualitative Report, 11*(3), 538-549.

Saldaña, J. (2021). *The coding manual for qualitative researchers*. Sage.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. (2021). Reflections on 50 years of research & development in science education: What have we learned? And where might we be going? In A. Hofstein, A. Arcavi, B. Eylon, & A. Yarden (Eds.), *Long-term research and development in science education* (pp. 387-412). Brill.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Swan, M. (2011). Designing tasks that challenge values, beliefs and practices: A model for the professional development of practicing teachers. In O. Zaslavsky & P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (pp. 57-71). Springer.

Wiersma, W. (2000). *Research methods in education: An introduction* (7th Ed.). Allyn and Bacon.

Zaks, R. & Koichu, B. (2022). How do teachers adopt autonomous problem solving as a classroom practice? In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 147-154). PME.

יצירתיות קבוצתית במציאת חוקיות לתלמידי כיתה י' (תת- משיגים) עם התערבות חברתית והתערבות מתמטית

מחאמיד אייה, אוניברסיטת תל אביב
אסתר לוינסון, אוניברסיטת תל אביב

מבוא ורקע תיאורטי

יצירתיות מתמטית הוגדרה בהגדרות שונות על ידי חוקרים שונים. אחדים תיארו יצירתיות כיכולת הקשורה לפתרון בעיות בדרכים שונות, לביטוי עצמי, למוטיבציה פנימית, ולביטחון עצמי (Silver, 1997). כמו כן, יצירתיות מתוארת כיכולת להבחין בקשרים חדשים בין רעיונות, המצאה, עצמאות ומקוריות. מחנכים וחוקרים בחינוך מתמטי (Leikin, 2009) טוענים שחשוב לעודד יצירתיות מתמטית בכיתה והציעו להתבסס על שלושה מדדים כדי לבחון יצירתיות: שטף, גמישות ומקוריות. שטף הוא מספר הפתרונות הנכונים הניתנים למטלה. גמישות מתייחסת ליכולת לעבור מגישה אחת לגישה אחרת בפתרון המטלה. מקוריות נמדדת בהשוואה של פתרון שניתן על ידי הפרט לפתרונות שניתנים על ידי עמיתיו לאותה מטלה.

סילבר (Silver, 1997) טען כי אפשר לפתח יצירתיות מתמטית בקרב כלל התלמידים ולא רק אצל תלמידים מצטיינים באמצעות הצגת פעילויות מתמטיות מתאימות. זה קורה כאשר התלמידים מוצאים דרכים חדשות ולא שגרתיות לפתרון בעיה (Sriraman, 2005), ובמהלך הדיון בשיעור הם מנתחים, משווים ומכלילים את המאפיינים הייחודיים של שיטות פתרון למיניהן. לפי יי (Yee, 2005), המאפיינים של פעילויות שעשויות לתרום לפיתוח יצירתיות התלמיד הם רבים: בעיות לא שגרתיות, בעיות פתוחות או בעלות דרכי פתרון רבות ומגוונות, העלאת שאלות, פעילויות המזמנות שיח מתמטי עשיר, הסקת מסקנות ובניית הכללות.

מרבית המחקרים התמקדו ביצירתיות מתמטית של הפרט. אולם, תלמידים בכיתה נמצאים בסביבה חברתית ובדרך כלל אינם פועלים לבדם. בסביבת ההוראה והלימוד מתקיימים תהליכי בנייה, שיח והערכה של רעיונות. לכן אפשר לטעון כי יצירתיות מתמטית של הפרט עשויה להיות תוצר של מאמץ קבוצתי (Levenson, 2011). מולד ואחרים (Molad et al., 2020) השוו את היצירתיות המתמטית בקרב תלמידים שעבדו באופן יחידני מול אלו שעבדו באופן קבוצתי. הם מצאו שאלו שעבדו באופן קבוצתי היה להם באופן מובהק יותר שטף וגמישות מאשר אלו שעבדו באופן יחידני. בנוסף, לוינסון (Levenson, 2011) טענה שעבודה קבוצתית מאפשרת לתלמידים להיחשף לפתרונות שלא העלו לבדם. עבודה זו חוקרת את היצירתיות הקבוצתית בקרב תלמידי י' תת-משיגים הלומדים מתמטיקה ברמה של שלוש יחידות.

מעט מבין המחקרים שהוקדשו ליצירתיות מתמטית בכיתה, התמקדו בתלמידים עם הישגים נמוכים במתמטיקה. תלמידים רבים עם הישגים נמוכים במתמטיקה, אינם זוכים להשתתף בפעילויות עשירות ופתוחות, בין השאר משום שמוריהם אינם מאמינים ביכולתם להתמודד עם פעילויות אלו (Zohar et al., 2001), לרבות פעילויות הנחשבות כמעודדות יצירתיות מתמטית (Levenson, 2020). תלמידים אלו זקוקים לתמיכה. לכן, מחקר זה בודק שני סוגי התערבות מטעם החוקרת, התערבות חברתית והתערבות מתמטית (ראה פירוט בהמשך).

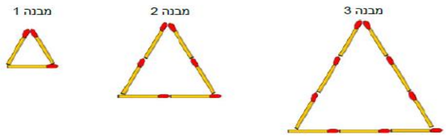
עבודה זו חוקרת את נושא היצירתיות המתמטית הקבוצתית עם התערבות חברתית והתערבות מתמטית, בקרב תלמידי כיתה י' (תת-משיגים), בקשר לנושא מציאת חוקיות. שאלת מחקר היא: האם יש הבדל במדדי היצירתיות הקבוצתית (שטף וגמישות) בין תלמידים שעובדים עם התערבות חברתית לבין התלמידים שעובדים עם התערבות מתמטית, וביניהם לבין תלמידים שעבדו בקבוצה בלי התערבות בכלל?

מתודולוגיה

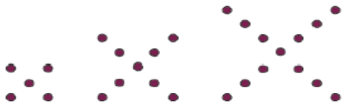
במחקר השתתפו 18 תלמידים מכיתה י', 3 יחידות (תת-משיגים, בציון של 65 ופחות), מחולקים ל 6 קבוצות. כל קבוצה כללה שלושה תלמידים. החוקרת קיימה שני סוגים של התערבות. בקבוצות 1 ו- 2 התקיימה התערבות חברתית. התערבות זו כללה עידוד מצד החוקרת לחפש עוד דרכי פתרון, נתינת מילות חיזוק (כל הכבוד, פתרון יפה, אתה יכול), ועידוד של שיתוף פעולה והקשבה בין חברי הקבוצה. בקבוצות 3 ו- 4 התקיימה התערבות מתמטית בלבד. החוקרת תיקנה טעויות במידת הצורך, נתנה רמזים בתחילת הדרך אם היה צורך, והסבירה דרך של תלמיד אחד לתלמידים האחרים בקבוצה. בקבוצות 5 ו- 6 לא התקיימה התערבות מתמטית או חברתית (קבוצת ביקורת).

המשתתפים במחקר עבדו על שלושת הפעילויות הבאות בנושא מציאת חוקיות.

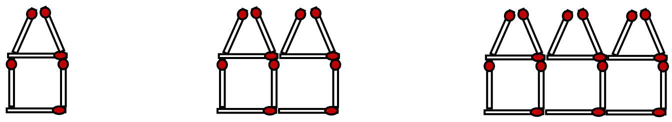
פעילות 1: משולשים, לפניכם סדרת מבנים מגפרורים. יש לספור את הגפרורים בכמה דרכים שונות.



פעילות 2: איקסים, לפניכם סדרת מבנים מנקודות. יש לספור את מספר הנקודות בכמה דרכים שונות.



פעילות 3: בתים, לפניכם סדרת מבנים בנויים מגפרורים. יש לספור את הגפרורים בכמה דרכים שונות.



בכל פעילות נמדדו שטף וגמישות. השטף נמדד לפי מספר הדרכים הנכונות להגעת הפתרון הנכון. דרכי הפתרון סווגו לקטגוריות והגמישות נמדדה על יד מספר הקטגוריות. המקוריות לא נמדדה בשל מספר הקטן של משתתפים. כל פגישה צולמה ותומללה על ידי החוקרת.

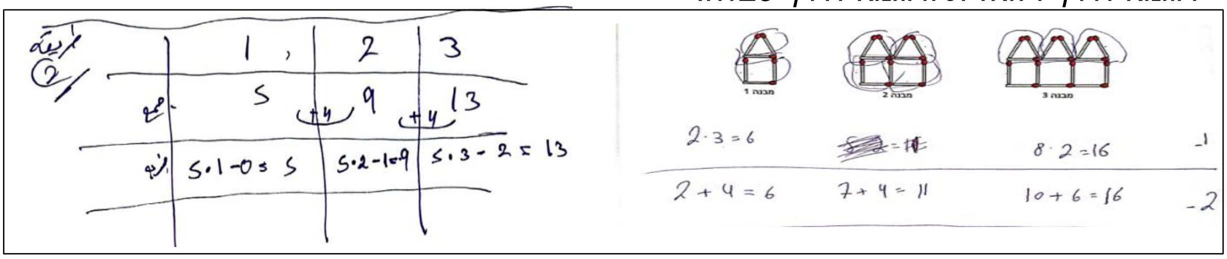
ממצאים

פרק זה מתחיל עם הדגמה של דרך הניתוח עבור פעילות 3 וממשיך בהצגת הממצאים עבור כל הפעילויות.

במטלה השלישית, בתים, התבקשו התלמידים לספור את מספר הגפרורים בכל מבנה בכמה דרכים שונות. לפי התשובות, הפתרונות סווגו לקטגוריות שונות: פעולת חשבון, ויזואלי (ראה דוגמא בצד ימין של איור 1), נוסחה, ספירה, וטבלה (ראה דוגמא בצד ימין של איור 1), ושימוש במקום הסידורי.

איור 1 א'

דוגמא לדרך ויזואלית ודוגמא לדרך טבלה.



בטבלה 1 מרוכזת מדדי השטף והגמישות של כל הקבוצות לפעילות השלישית.

טבלה 1

מדדי השטף והגמישות לפעילות 3

	חברתית-א'	חברתית-ב'	מתמטית-א'	מתמטית-ב'	ללא התערבות- א'	ללא התערבות- ב'
שטף	3	6	6	7	1	2
גמישות	2	3	5	6	1	1

כפי שרואים בטבלה, היה יותר שטף וגם יותר גמישות בקבוצת התערבות מתמטית-ב'. מעניין לראות שבקבוצות שקיבלו אותו סוג התערבות היו הבדלים בשטף ובגמישות, במיוחד בשטף בין קבוצת חברתית א' וקבוצת חברתית ב'. ייתכן שהבדלים אלו נבעו מרמת ההישגים של התלמידים, או ברמת ההתחברות של התלמידים יחד לשני. מחקר נוסף הבודק את האינטראקציות בין תלמידי הקבוצות יכול להאיר לנו סוגיה זו. לבסוף, הקבוצות שבהן החוקרת לא התערבה קיבלו ציונים די נמוכים בשטף ובגמישות.

דוגמא לחלק משיח של בקבוצת התערבות מתמטית א' בפעילות 3 מופיע למטה:

18 מ: יש לי פתרון שלישי והוא הסדרה החשבונית

19 חוקרת: אתם זוכרים מה היא הסדרה החשבונית?

20 ר, מ: כן. an=a1+(n-1)d

23 חוקרת: אתם יודעים מה גל דבר בחוק?

24 מ: a1=6 פלוס n=1 ואז כפול 5.

25 חוקרת: למה כפול 5?

26 ת: זה ההפרש.

27 חוקרת: האם האיבר הראשון ישתנה?

28 ר: לא. הוא לא ישתנה. יישאר כל הזמן אותו הדבר.

ניתן לראות שהתלמידה מ' התחילה רעיון, ר' ו מ' המשיכו יחד לפתח את הרעיון, ו- ת' ו ר' עונים לחוקרת ומראים שהם מבינים את השימוש כאן בנוסחה לסדרה חשבונית.

כעת נסכם את הממצאים של כל שלושת הפעילות. עבור כל שתי קבוצות שקיבלו את אותו סוג התערבות, חושב הממוצעים של המדדים עבור שטף וגמישות. בטבלה 2 מרוכז את מדדי השטף בעבודה לכל הקבוצות בשלושת הפעילויות ובטבלה 3 מרוכז מדדי הגמישות.

טבלה 2

ממוצע מדדי השטף לכל הקבוצות בשלושת הפעילויות

ממוצע מדדי השטף	התערבות חברתית-א + ב	התערבות מתמטית-א + ב	ללא התערבות
פעילות 1	4.5	6	3.5
פעילות 2	4.5	6.5	3.5
פעילות 3	4.5	6.5	1.5

לגבי השטף, עבור כל הפעילויות ציוני השטף והגמישות היו יותר גבוהים בקבוצות ההתערבות המתמטית מאשר קבוצות ההתערבות החברתית, שהיו יותר גבוהים מהקבוצות שלא קיבלו התערבות כלל. אך ההבדלים בציוני השטף בין השני סוגי ההתערבות לא היו גדולים. לעומת זה, בגמישות הייתה יותר שונות. בגמישות שהתקבל בפעילויות 1, ו 2

(טבלה 3) לא היה ממש הבדל בין הקבוצות שקיבלו התערבות חברתית והתערבות מתמטית, אבל בפעילות השלישית ההבדלים היו יותר משמעותיים.

טבלה 3

ממוצע מדדי הגמישות לכל הקבוצות בשלושת הפעילויות

ממוצע מדדי הגמישות	התערבות חברתית- א + ב	התערבות מתמטית-א + ב	ללא התערבות
פעילות 1	3.5	4	2.5
פעילות 2	3.5	5	2
פעילות 3	2.5	5.5	1

דיון

במחקר זה נבדקו מדדי יצירתיות מתמטית קבוצתית בקרב תלמידי כיתה י' (תת-משיגים), בנושא של חוקיות, בהתייחס לסוגים שונים של התערבויות. ממצאי המחקר מעידים כי מדדי השטף והגמישות לקבוצות שקיבלו התערבות מתמטית היו גבוהים מהקבוצות עם התערבות חברתית, שהיו גבוהים מהקבוצות ללא התערבות. ניתן לומר שעם תמיכה מתאימה, תלמידים עם הישגים נמוכים מצליחים לפתור בעיות של חוקיות ביותר מדרך אחרת. מבחינת התערבות חברתית, עידוד הוא גם גורם המשפיע ביצירתיות. העידוד בקבוצה מעלה את המוטיבציה של חברי הקבוצה ומפרה דיון בקרב החברים (Levenson, et al., 2020). למורה יש גם תפקיד חברתי בכיתה וגם תפקיד של נציג הקהילה המתמטית, המקשר בין רעיונות שהועלו במהלך השיעור ושמירה על רעיונות שלא יאבדו (Levenson, 2011). החשיבות במחקר זה מראה את האפשרות לעודד יצירתיות מתמטית גם בקרב תלמידים שהם תת-משיגים, אם המורה מאמין שאפשר ושזה חשוב, ועם תמיכה מתאימה.

רשימת מקורות

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–135). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Levenson, E. (2020). Mathematical creativity in the classroom: Teachers' beliefs and professional development. In D. Potari, & O. Chapman (Eds.). *Teacher knowledge, beliefs and identity in mathematics teaching and its development* (pp. 155-181). Koninklijke Brill NV.

Levenson, E. (2011). Exploring collective mathematical creativity in elementary school. *Journal of Creative Behavior*, *45*(3), 12–20.

Molad, O., Levenson, E., & Levy, S. (2020). Individual and group mathematical creativity among post-high school students. *Educational Studies in Mathematics*, *104*, 201-220.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM *Mathematics Education, 29(3),* 75-80.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education, 17(1),* 20-36.

Yee, F. P. (2005). Developing creativity in the Singapore primary mathematics Classes: Factors that support and inhibit. *Thinking Classroom*, *6*(4), 14-20.

Zohar, A., Degani, A., & Vaaknin, E. (2001). Teachers' beliefs about low-achieving students and higher order thinking. *Teaching and Teacher Education, 17*(4), 469-485.

על מפגש בין מטרות הוראה למשאבים- יישום משימות מסדר חשיבה גבוה תוך שימוש בסביבה משחקית ממוחשבת

אודליה צייאדה, אוניברסיטת תל אביב
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

מבוא ורקע תיאורטי

השימוש במשחקים מתמטיים ממוחשבים בלמידה הפך לרווח בעשורים האחרונים. לצד פריחת השימוש במשאב המשחקי בלמידת מתמטיקה, החל להתפתח גם המחקר בתחום זה. עיקר העיסוק במחקר הקיים בוחן את השפעת השימוש במשחקים מתמטיים ממוחשבים על התלמיד ועל הלמידה, אפקטיבית (Fadda et al., 2022) וקוגניטיבית (Byun & Joung, 2018). מעטים המחקרים אשר בחנו את נקודת המבט של המורה, ובפרט את האופן בו ניתן ליישם שילוב של משחקים מתמטיים ממוחשבים ברצף ההוראה.

באשר לנקודת המבט של המורה, ממחקרים מבוססי ראיונות עם מורים, עולה כי לתפישת מורים שילוב של משחקים מתמטיים ממוחשבים מקשה על ניהול שיעור (Watson & Yang, 2016), או יוצר קונפליקט בין תפישותיהם את האופן בו יש ללמד מתמטיקה לבין מה שמזמן הכלי המשחקי (Demirbilek & Tamer, 2010). למרות זאת, מורים מדווחים כי הם עושים שימוש במשחקים ממוחשבים בשיעורי מתמטיקה לפחות אחת לשבוע (Russo et al., 2021). מחקרים אלו לא סיפקו התבוננות קרובה יותר על תהליכי ההוראה עצמם, כגון שימוש בתכנוני שיעורים.

ראוי לבחון את האופן בו מורים למתמטיקה משלבים משחקים מתמטיים ממוחשבים בהתייחס למטרות ההוראה העומדות לפתחם, בהן עיסוק במשימות מסדר חשיבה גבוה. במערכת החינוך בישראל מקובל לסווג את פעילויות הלמידה לשתי רמות: פעילויות מסוג ידע וזיהוי וחשיבה אלגוריתמית כחשיבה מסדר נמוך; ופעילויות מסוג חשיבה תהליכית וחיפוש פתוח והנמקה כחשיבה מסדר גבוה (להלן: חס"ג) (על פי- גליקמן, 2017; בהתבסס על אביטל ושטלוורס, 1963, תרגום: מובשוביץ- הדר, 1970).

מחקר זה בוחן כיצד מורות מנוסות למתמטיקה עשו שימוש ראשון בסביבה משחקית ממוחשבת, כדי לקדם מטרות הוראה רחבות בשיעור מתמטיקה, בהן יישום משימות מסדר חשיבה גבוה, בהתייחס לשני מאפיינים: האחד, מאפיין הוראה גנרי, הבוחן את מטרת ההוראה בעת השימוש במשחקון/ים במהלך השיעורים, ומתאים לבחינת שילוב משחקים ממוחשבים בכל תחום דעת; השני, מאפיין מתמטי ספציפי, הבוחן את הקשר בין רמת החשיבה במשחקון לזה שניסחה המורה במשימת החס"ג.

מתודולוגיה

שאלות המחקר

1) מה הייתה מטרת ההוראה אותה ביקשה המורה להשיג באמצעות השימוש במשחקון בתוך השיעור? (מאפיין גנרי).
2) מה הקשר בין רמת החשיבה במשחקון הנבחר לזו שניסחה המורה במשימת החס"ג? (מאפיין תוכן מתמטי).

המשתתפים

42 מורות מנוסות בהוראת מתמטיקה בבתי-ספר יסודיים, שלקחו חלק בהשתלמות מורים שעסקה בשילוב משחקים מתמטיים ממוחשבים ברצף ההוראה. התנסות זו הייתה עבורן התנסות ראשונה בשילוב כזה. ההשתלמות התקיימה במרכזי פסג"ה בצפון הארץ ובמרכזה. המדגם הינו מדגם נוחות.

כלי המחקר

שני כלים משלימים שימשו בתהליך איסוף הנתונים: (1) עבודה כתובה שהגישו המורות. העבודה כללה תכנון לשיעור שבמהלכו נעשה שימוש במשחקון מתמטי ממוחשב, ושיושמה בו משימה מסדר חשיבה גבוה. בנוסף, כללה העבודה דיווח בעקבות היישום בכיתה ורפלקציה אישית ותובנות. (2) דיווח בעל-פה של כל מורה בהשתלמות על ההתנסות שחוותה. מפגשי ההשתלמות תועדו בווידאו.

אופן ניתוח הנתונים

תהליך ניתוח הנתונים כלל שני שלבים: ניתוח פרטני מקדים לכל אחד מ-42 השיעורים; וניתוח מכליל התר אחר הכללות חוצות שיעורים, שהתבסס על הניתוח הפרטני המקדים.

בהתייחס לשאלת המחקר הראשונה, הבוחנת את מטרת ההוראה בזמן השימוש במשחקון, נבחן חלק השיעור בו עשתה המורה שימוש במשחקון, ואיזה מטרת הוראה ביקשה המורה להשיג באמצעות השימוש במשאב המשחקי בחלק שיעור זה. טבלה 1 מפרטת את ההבחנה בין המטרות השונות.

טבלה 1

מטרות ההוראה להן שימש המשחקון במהלך השיעור

מטרת הוראה	הסבר
הטרמה	הפעילות במשחקון עוסקת בתוכן שנוגע לפעילות המרכזית בשיעור או לחלקה, ומטרת השימוש בו היא כניסה לנושא הנלמד, על ידי בירור מושגים.
הקניה	המשחקון עוסק בנושא שהוא בליבת השיעור, ומטרת השימוש בו היא ללמד נושא חדש, בהובלת המורה.
חקר	המשחקון עוסק בנושא שהוא בליבת השיעור, ומטרת השימוש בו היא ללמד נושא מתמטי חדש, בדרך של התנסות עצמית של התלמידים וגילוי.
תרגול	המשחקון עוסק בנושא שנלמד בשיעור זה או בשיעורים קודמים לו, ומטרת השימוש בו היא תרגול וביסוס של הנלמד.
הערכה	המשחקון עוסק בנושא שכבר נלמד, ומטרת השימוש בו היא הערכת ידע הלומדים על פי ביצועיהם בתוך המשחק.

בהתייחס לשאלת המחקר השנייה, העוסקת בקשר בין רמת החשיבה במשחקון לזו שיושמה במשימת החס"ג, זוהתה רמת החשיבה במשחקון ובמשימת החס"ג. פירוט רמות החשיבה בטבלה 2 להלן.

טבלה 2

רמות חשיבה וביטויים בפעילויות למידה

רמת חשיבה	הסבר
ידע וזיהוי	הפעילות עוסקת בזיהוי של עובדות ומושגים מתמטיים.
חשיבה אלגוריתמית	הפעילות עוסקת ביישום של אלגוריתמים פשוטים או מורכבים, שהדרך ליישומם סדורה ומוכרת לתלמיד.
חשיבה תהליכית-יישום	הפעילות עוסקת בהתאמה של מודל מתמטי לסיטואציה מילולית.
חשיבה תהליכית-תובנה	הפעילות מתבססת על שימוש בתובנה חשבונית מצד התלמיד, וביכולת של התלמיד לקשר בין מושגים.
חיפוש פתוח	הפעילות דורשת מן התלמיד ניתוח של הסיטואציה המתמטית (אנליזה וסינתזה), ו/ או חיפוש אחר דרך הפתרון הרצויה.
הנמקה	הפעילות דורשת מן התלמיד לנמק.

ממצאים

ביחס לשאלת המחקר הראשונה, הבוחנת את מטרת הוראה שימש המשחקון בתוך השיעור, נמצא כי-

הערכה – אף אחת מ- 42 המורות לא עשתה שימוש במשחקון לצורכי הערכה. ייתכן כי שימוש של המורה במערכת הדוחות הקיימת בסביבה המשחקית היה מורכב מדי לשימוש ראשון.

הקניה, הטרמה ותרגול- בקרב 42 המורות, השימוש במשחקון להטרמה, להקניה או לתרגול, הופיע בפיזור כמעט שווה (בין 27% ל- 28%).

חקר- מקרב תשע המורות שעשו שימוש במשחקון למטרת חקר, נבחן האם יישום החקר במהלך השימוש במשחקון התקיים במליאה או בהתנסות עצמית; וכן, האם מלבד השימוש במשאב המשחקי נעשתה הרחבה לשימוש במשאבים נלווים (נייר ועיפרון), בו-זמנית לשימוש בו. להלן פירוט אודות שני היבטים אלו.

חקר בהתנסות עצמית או מליאה- שבע מתוך תשע המורות אשר יישמו חקר במהלך ההתנסות במשחקון זימנו לתלמידיהם התנסות עצמית בו. מקרב קבוצה זו, שש מורות עשו שימוש במשחקון ברמת חשיבה גבוהה ורק אחת ברמה נמוכה.

חקר במשחק בלבד או בליווי משימת נייר ועיפרון- אצל שלוש מתוך ארבע מורות שהוסיפו משימת נייר ועיפרון בו-זמנית לשימוש במשחקון, הייתה הפעילות במשחקון מסדר חשיבה נמוך, ומשימת הנייר ועיפרון שניסחה המורה הפכה את הפעילות לפעילות חקר.

ביחס לשאלת המחקר השנייה, בטבלה 3 מוצג הקשר בין רמת החשיבה במשחקון הנבחר לזו שניסחה המורה במשימת החס"ג (מספר ואחוז). שתי רמות החשיבה הנמוכות הן ידע וזיהוי וחשיבה אלגוריתמית. שתי רמות החשיבה הגבוהות הן חשיבה תהליכית וחיפוש פתוח והנמקה. על מנת לאפשר דיוק בסוג פעילות החס"ג שיושמה, פורקו רמות החשיבה הגבוהות: חשיבה תהליכית- ליישום בנפרד מתובנה, וחיפוש פתוח בנפרד מהנמקה.

טבלה 3

פיזור השיעורים על פי רמת החשיבה במשחקון ובחס"ג

רמת החשיבה במשחקון		רמת החשיבה במשימת החס"ג				
		ח.ת יישום	ח.ת. תובנה	חיפוש פתוח	הנמקה	סך כל השיעורים
	ידע וזיהוי	2 (5%)	2 (5%)	4 (10%)	7 (17%)	15 (37%)
	חשיבה אלגוריתמית	3 (7%)	3 (7%)	8 (19%)	3 (7%)	17 (40%)
	ח.ת. יישום		1 (2%)	3 (7%)		4 (9%)
	ח.ת. תובנה		2 (5%)	3 (7%)	1 (2%)	5 (14%)
	חיפוש פתוח					
	הנמקה					
	סך כל השיעורים	5 (12%)	8 (19%)	18 (43%)	11 (26%)	42 (100%)

מקרא: ח.ת.= חשיבה תהליכית

ב- 32 שיעורים (77%) רמת החשיבה של המשחקון שנבחר על ידי המורה הייתה מסדר חשיבה נמוך: ידע וזיהוי או חשיבה אלגוריתמית, בחירה אשר בהכרח הובילה לכך שמשימת החס"ג שנוסחה באותו שיעור הייתה ברמה גבוהה מזו שבמשחקון. ב- 10 השיעורים הנותרים (23%) נבחרו משחקונים שרמת החשיבה בהם גבוהה. רמת החשיבה במשחקים אלו הייתה מסוג חשיבה תהליכית: יישום או תובנה, אף שבמאגר קיימים גם מעט משחקונים מסוג חיפוש פתוח. בסך הכל 29 מורות (69%) ניסחו משימת חס"ג ברמת חשיבה חיפוש פתוח והנמקה.

בזיקה לרמות החשיבה במשחקון ובמשימת החס"ג נבחן מה קורה כאשר המשימה במשחקון היא כשלעצמה משימת חס"ג. האם המורה במהלך ניסוח משימת חס"ג שימרה את רמת החשיבה

במשחקון (התאים המוצללים בטבלה), נסוגה לרמה נמוכה יותר (מסוג חשיבה תהליכית- יישום), או ניסחה משימת חס"ג ברמה יותר גבוהה. כפי שניתן לראות בטבלה 3, גם כאשר היה המשחקון ברמת חשיבה גבוה, אף מורה לא הסיגה את רמת החשיבה בו לרמה נמוכה יותר במהלך ניסוח משימת החס"ג. שתי מורות שימרו את רמת החשיבה (חשיבה תהליכית - תובנה) הקיימת במשחקון וניסחו את משימת חס"ג באותה רמה. כל שאר המורות (9, שהם 23%) ניסחו משימת חס"ג ברמה גבוהה מזו הקיימת במשחקון. ממצא זה מעיד שעל אף המגבלות הקיימות בסביבה המשחקית היא איננה גורעת מהיכולת של המורה למלא אחר מטרות ההוראה הרחבות בהם יישום משימות חס"ג.

דיון

חלקם היחסי של משחקונים מסדר חשיבה גבוה במחקר זה (23%) מכלל המשחקונים הנבחרים, זהה לחלקם היחסי של המשחקונים ברמה זו בסביבה הממוחשבת (Haleva et al., 2021). לכאורה היה מצופה כי בשיעורים של מורות שעברו את ההשתלמות יהיה ייצוג גבוה יותר למשחקונים ברמת חשיבה גבוהה יותר מאשר חלקם בסביבה הממוחשבת, אולם הדגש במסגרת ההשתלמות היה על התנסות בהתאמת משחקונים שרובם מסדר חשיבה נמוך (77%), לשיעור שיש בו עיסוק במשימות חס"ג.

ממצאי מחקר זה מעלים כי קצת מעט ממחצית (כ- 55%) מן המורות עשו שימוש במשחקון לפעילות הטרמה. ממצא זה שונה מזה שנמצא במחקרם של רוסו וחובריו, אשר בחנו תפישות של מורים למתמטיקה אודות השימוש שהם עושים במשחקים מתמטיים ממוחשבים על מנת לתמוך בהוראת המתמטיקה בכיתתם, אשר מצא שכ- 75% מהמורים מעידים על עצמם שהם עושים שימוש במשחקים כפעילות חימום (Russo et al., 2021). לעומת זאת בדומה למחקרם של רוסו וחובריו, אשר מציינים שכשליש מהמורים עושים במשחקון שימוש בפעילות המרכזית, גם במחקר זה כ 35% מהמורות עשו שימוש במשחקון למטרת הקניה או חקר.

הממצא המייחס למורות ניסוח של משימת חס"ג לפחות ברמת החשיבה אותה זימן המשחקון, צריך לעודד מפתחי סביבות משחקיות להציע יותר משחקים ברמות חשיבה גבוהות.

רשימת מקורות

אביטל ש. ושטלוורס ש. (1970). יעדים ללימוד מתמטיקה רעיונות אחדים למורים, בהוצאת "קשר-חם" תשס"ו, בולטין מס. 3, 1968, תרגום מאנגלית: נצה מובשוביץ- הדר, הטכניון, חיפה.

גליקמן, ח. (2017), מיצ"ב תשע"ז- דו"ח מבחני ההישגים, ראמ"ה. אוחזר ב- 13 בפברואר, 2018:

http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Rama/Meitzav/DochotMaarachtim.htm

Byun, J., & Joung, E. (2018). Digital game-based learning for K–12 mathematics education: A meta-analysis. *School Science and Mathematics*, 118(3-4), 113-126.

Demirbilek, M., & Tamer, S. L. (2010). Math teachers' perspectives on using educational computer games in math education. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 9,* 709-716.

Fadda, D., Pellegrini, M., Vivanet, G., & Zandonella Callegher, C. (2022). Effects of digital games on student motivation in mathematics: A meta-analysis in K-12. *Journal of Computer Assisted Learning*, *38*(1), 304-325.

Haleva, L., Hershkovitz, A., & Tabach, M. (2021). Students' activity in an online learning environment for Mathematics: The role of thinking levels. *Journal of Educational Computing Research, 59*(4), 686-712.

Russo, J., Bragg, L. A., & Russo, T. (2021). How primary teachers use games to support their teaching of mathematics. *International Electronic Journal of Elementary Education, 13*(4), 407-419.

Watson, W., & Yang, S. (2016). Games in schools: Teachers' perceptions of barriers to game-based learning. *Journal of Interactive Learning Research, 27*(2), 153-170.

פיתוח מקצועי למורים מובילים, ממוקד מידול מתמטי בהקשר הנדסי

הדס הנדלמן, הטכניון- מכון טכנולוגי לישראל
זהבית כהן, הטכניון- מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

מידול מתמטי מוזכר בסטנדרטים רבים כתהליך המאפשר לתלמידים לפתור בעיות מהעולם האמיתי, ובכך להבין את יישומיות המתמטיקה בחיים האמיתיים (Blum, 2015; Niss et al., 2007). מידול מתמטי הוא תהליך מחזורי של פתרון בעיה המתוארת עלי ידי סיטואציה מהעולם האמיתי, וכולל שימוש יישומי בכלים מתמטיים לפתרונה (Blum & Leiß, 2007; Kaiser, 2017) עם זאת, תלמידים מתמודדים עם מגוון אתגרים בכל הנוגע למידול מתמטי, אשר דורשת מהתלמידים להתמודד עם בעיות שדורשות הבנה של סיטואציה מהעולם האמיתי בהקשרים שונים, וליישם ידע מתמטי מתאים לצורך פתרונן (Borromeo Ferri, 2018). הוראת המידול המתמטי, במיוחד בהקשר מהעולם האמיתי מתחום ההנדסה, היא אתגר משמעותי גם עבור מורים מתמטיקה. כמורים, הם נדרשים להתמודד עם הקשיים של תלמידיהם, וכן להתמודד עם אותם הקשיים בעצמם ביישום מיומנויות מידול מתמטי בפתרון בעיות המידול (Verschaffel et al., 2020). לכן, חשוב לספק למורים סביבת התפתחות מקצועית תומכת כדי שיוכלו לפתח את המיומנויות הנדרשות כלומדים בעצמם (Darling-Hammond et al., 2017; Handelman & Kohen, 2022) פיתוח מקצועי יעיל הוא זה אשר תומך במורים בעת יישום הידע והפרקטיקות שרכשו במהלך התוכנית בסביבת ההוראה (Prediger et al., 2019).

משימות המידול המיושמות במחקר זה משקפות את מחזור המידול של בלום וקייזר (Blum, 1996; Kaiser, 1995) אשר הציגו את המידול המתמטי כתהליך מחזורי המורכב מארבעה שלבים עיקריים המשקפים את המעבר מהעולם האמיתי לעולם המתמטי, ובחזרה. השלב הראשון במודל, *אידיאליזציה*, מתרחש בעולם האמיתי ומתייחס להבנת הבעיה המתוארת בסיטואציה ופישוטה. השלב השני, *מתמטיזציה*, מתאר את המעבר מהעולם האמיתי לעולם המתמטי תוך בחירת המודל המתמטי המתאים לתיאור הבעיה המוצגת, או בנייתו. השלב השלישי, *חקירת המודל*, כולל את כל הפעולות המתמטיות הנדרשות לפתרון הבעיה והשלב האחרון, *פירוש*, מתאר את המעבר בחזרה לעולם האמיתי, התאמת הפתרון, פירושו ותיקופו לעומת הסיטואציה ההתחלתית.

דוגמה למשימת מידול המיושמת במחקר זה היא משימת 'המכונית האוטונומית', הנוסעת באופן עצמאי לחלוטין ונעזרת, בין היתר, בחיישנים אולטרסוניים הפועלים באמצעות גלי קול כדי להעריך את מיקומה ביחס לעצמים אחרים במרחב. בהתאם למחזור המידול המתואר, בשלב האידיאליזציה, ניתן לתלמידים רקע הנדסי המאפשר להם להבין את אופן פעולת החיישן. המתמטיזציה באה לידי ביטוי במשימה על ידי שאילת שאלה מרכזית: כיצד מחושב המרחק של המכונית מעצם כלשהו באמצעות החיישן האולטרסוני? חקירת המודל כוללת יישום של הפעולות הנדרשות כדי להפיק את הפתרון המתמטי- חישוב המרחק ע"י מכפלת מהירות הקול בזמן שעובר משידור גל הקול ועד קלטתו בחזרה בחיישן, וחלוקה ב- 2 מכיוון שהגל נע הלוך וחזור. בשלב הפירוש, בהתאם לפתרון המתמטי, התלמידים יכולים להעריך את מרחק המכונית מהעצם ולהסיק מסקנות הנוגעות לפעולת המכונית כגון: האם על המכונית לבלום? להאט? וכו'.

מטרת מחקר זה היא לחקור את השפעת תוכנית לפיתוח מקצועי ייעודית על קידום יכולות המידול של מורים מובילים, ושאלת המחקר המרכזית היא: מהם השינויים (אם קיימים) ביכולות המידול של המורים שהשתתפו בתוכנית לפיתוח מקצועי?

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר

המחקר מתמקד ב- 36 מורים מובילים למתמטיקה שהשתתפו בתוכנית לפיתוח מקצועי ייעודית בת 60 שעות, שמטרתה להכשיר מורים ליישם הוראה מבוססת מידול מתמטי. חלק מהמורים הם רכזי מתמטיקה, מדריכים או בעלי תפקידי מפתח במשרד החינוך. למורים ניסיון הוראה מגוון, כאשר רובם בעלי ניסיון של למעלה משבע שנים במערכת החינוך. 17 מהמשתתפים השתתפו במחזור הראשון של התוכנית אשר התחיל ביולי 2020 ונמשך כשנה, ו- 19 השתתפו במחזור השני שהחל ביולי 2021 ונמשך כתשעה חודשים. במהלך מפגשי התוכנית, המנחות הציגו את התיאוריה של שלבי המידול, המורים התנסות בפתרון משימות מידול בעלות הקשר הנדסי מהעולם האמיתי, וכן התקיימו דיונים בתכנים פדגוגיים לתמיכה בהתאמת הוראה מבוססת מידול מתמטי. כחלק מדרישות התוכנית, המורים נדרשו להוביל ולהנחות קהילות מקומיות של מורים למתמטיקה למטרת יישום הוראה מבוססת מידול מתמטי בכיתותיהם.

כלי המחקר וניתוח נתונים

כלי המחקר העיקרי היה פתרונות המורים לבעיות מידול מתמטי, שמטרתו להעריך את יכולות המידול המתמטי של המורים. המורים התבקשו לכתוב באופן מפורש את כל שלבי הפתרון לבעיה שהוצגה להם מתוך משימה אליה נחשפו במהלך המפגש (איור 1). בכל מחזור השתלמות, המורים התבקשו לפתור שלוש משימות מידול שונות: בתחילת התוכנית, באמצעה ולקראת סיומה. הפתרונות של המורים למשימות נותחו ודורגו בתהליך תלת-שלבי כמתואר בהמשך. לאחר מכן נערך ניתוח שונות אנובה חד-כיווני עם מדידות חוזרות כדי להעריך את השינוי לאורך זמן ביכולות המידול של המורים. נתאר את שלושת שלבי תהליך הניתוח בהתבסס על משימת המידול 'מכונית אוטונומית' המוצגת באיור 1.

איור 1 בעיית מידול מתוך משימת 'המכונית האוטונומית'

שלב 1 – הערכת המשימות

מטרת שלב זה הינה להעריך את רמת המידול שהמשימה מזמנת, תוך התייחסות נפרדת לכל אחד משלבי המידול, דהיינו מתמטיזציה, חקירת המודל ופירוש. הערכת המשימות התבצעה על-ידי שימוש במחוון שפותח להערכת משימות מידול (Kohen & Gerrah-Badran, in press), כאשר הציון שניתן לכל שלב במשימה הוא בין 1 (רמה נמוכה) לבין 3 (רמה גבוהה). מכיוון שמשימות אלו מותאמות לתוכנית הלימודים הפורמלית של חטיבת הביניים (Kohen & Orenstein, 2021), שלב האידיאליזציה המתרחש בעולם האמיתי ניתן לתלמידים באופן מפורש כחלק מהמשימה, ומתווך על ידי המורה בכיתה, ועל כן לא היווה חלק מתהליך ההערכה של המשימה.

עבור הבעיה מתוך משימת המכונית האוטונומית, הקידוד ניתן באופן הבא: שלב *המתמטיזציה* דורג ברמה 2 מכיוון שהמודל המתמטי קיים אך עדיין מצריך הנחת הנחות והתאמות: מהירות קבועה של מכוניות, וחלוקת המרחק ב- 2. שלב *חקירת המודל* דורג ברמה 3 כיוון שהשאלה מצריכה תכנון אסטרטגיה תוך שימוש בחשיבה מתמטית והגיון תוך הכללת המידע הקיים למצב מורכב. שלב *הפירוש*

דורג גם הוא ברמה 3 מכיוון שהשאלה מחייבת קישור ישיר בין הייצוגים וההיבטים של המצבים השונים כגון: מהי משמעות התוצאות המתמטיות שהתקבלו? האם הרכב בתנועה?

שלב 2 – הערכת פתרונות המורים על ידי מציאת עדויות לתהליך המידול המתמטי

שלב זה נועד כדי לאתר את שלבי המידול השונים בפתרונותיהם של המורים, על בסיס ביצוע שלב המידול המתאים הכולל תהליך פתרון נכון של הבעיה. נעשה שימוש במחוון ספציפי לכל משימה הכלל את התשובות המצופות מהמורים בכל שלב. כל אחד משלבי המידול (מתמטיזציה, חקר המודל ופירוש) קיבל ציון הנע בין 0 ל-2: את הציון 0 קיבל פתרון שבו לא הייתה עדות לביצוע השלב, או שהשלב יושם בצורה לא נכונה. הציון 1 ניתן לפתרון הנכון באופן חלקי, וציון 2 ניתן לפתרון נכון שהצביע על קיום השלב. הדוגמה הבאה מדגימה את הפתרון למשימת מכונית אוטונומית, ואת הציון שניתן לכל שלב בפתרון. להלן נתאר את הקידוד שניתן עבור הפתרון הבא: *"תוך חצי שנייה המכונית עוברת 0.208 מטרים, בעוד הפער שנמדד בחצי שניה הוא 1 מטר, כך שהמכונית מלפנים נמצאת בתנועה. אם המכונית הייתה בעצירה, היינו מצפים שהמרחק יהיה 10-0.208 מטרים".*

הפתרון אינו נכון במלואו כיוון שהמכונית עוברת בחצי שניה 2.08 מטרים ולכן שלב המתמטיזציה דורג בציון 1. חקירת המודל התבצעה באופן מלא תוך שימוש בפרוצדורות המתמטיות הנכונות ולכן שלב חקירת המודל דורג בציון 2. פירוש הפתרון המתמטי אינו נכון ביחס לשגיאה שזוהתה בשלב המתמטיזציה. לאור השגיאה, המסקנה שהייתה צריכה להתקבל היא הפוכה, ולכן שלב זה דורג כ- 1.

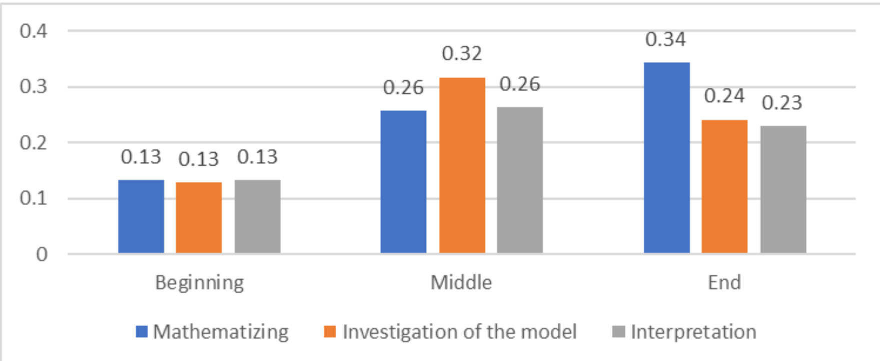
שלב 3 – קביעת ציון ליכולות המידול של המורה בהתייחס לכל שלב בנפרד

בשלב זה נערך מיזוג של שני השלבים הקודמים לקביעת יכולת המידול של המורים שבאה לידי ביטוי בכל אחת מהמשימות שנחקרו. עבור כל מרכיב בתהליך המידול, הכפלנו את הציון האובייקטיבי שניתן לו בשלב 1 בציון שניתן לפתרון בשלב 2 וחלקנו את המכפלה בסכום המכפלות המקסימלי לצורך נרמול הציון, כך שהציונים נעו בין 0 ל-1. עבור משימת המכונית האוטונומית, סכום המכפלות המקסימלי הוא $2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3 = 16$, ולכן, חישוב הציון למרכיב המתמטיזציה, נעשה כך: $(2\cdot 1){:}\,16 = 0.125$. באופן זה, חושבו הציונים לשאר המרכיבים בתהליך המידול.

ממצאים ומסקנות

הממצאים מצביעים על כך שבכל שלבי תהליך המידול שנבדקו (מתמטיזציה, חקר המודל ופירוש), הודגמה התקדמות לאורך זמן ביכולת המידול של המורים (איור 2).

איור 2. השינוי ביכולות המידול של המורים



בשלב המתמטיזציה נמצא השיפור המשמעותי ביותר, ונמשך לאורך כל התהליך, בעוד שבשלבים האחרים, עיקר השיפור נמצא בין תחילת הפיתוח המקצועי לבין אמצע ההשתלמות. ממצא זה מחזק את החשיבות של תמיכה בכישורי המודל של המורים כלומדים, באמצעות תוכניות ייעודיות לפיתוח מקצועי, שכן שלב המתמטיזציה מייצג את המעבר בין העולם האמיתי למתמטי, ומהווה את ההבדל העיקרי בין בעיה מילולית סטנדרטית לבין בעיית מידול (Borromeo Ferri, 2018; Kaiser, 2017).

ברמה התיאורטית, המחקר מעמיק את הספרות בתחום הן בהיבט של פיתוח יכולות מידול בקרב מורים, והן בהיבט של השפעת תוכניות לפיתוח מקצועי ממוקדות הוראה מבוססת מידול מתמטי. התרומה המעשית של המחקר באה לידי ביטוי בתוכנית לפיתוח מקצועי שהוצגה, שנמצאה יעילה בקידום יכולות המידול המתמטי בקרב משתתפיה. מבחינת תרומה מתודולוגית, מחקר זה מציג כלי למדידת יכולות המידול שעשוי להיות בעל ערך גם עבור מורים וחוקרים אחרים.

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematik-unterricht – Trends und Perspektiven. In Kadunz, G. et al. (Eds.), Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Vol. 23. Wien: Hölder-Pichler- Tempsky, 15 – 38. [in German]

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know,What Can We Do. In Sung Je Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congresson Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? *Mathematical Modelling*, 222–231. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo Ferri, R. (2018). Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education. In *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., & Gardner, M. (2017). *Effective Teacher Professional Development*. https://learningpolicyinstitute.org/product/teacher-prof-dev

Handelman, H., & Kohen, Z. (2022). A designated professional development program for promoting mathematical modelling competency among leading teachers. In C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. X* (pp. 339–346). PME.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, et al. (Eds.): Materialen für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht (pp 64 – 84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267–291). The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. United States.

Kohen, Z. & Gharra-Badran, Y. (in press). Mathematical modelling of Blockchain technology and its adaptation for the high school curriculum. Hogeg Blockchain Research institute, Tel-Aviv University, Israel, 55 pages.

Kohen, Z., & Orenstein, D. (2021). Mathematical modeling of tech-related real-world problems for secondary school-level mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(1), 71–91. https://doi.org/10.1007/S10649-020-10020-1

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L.Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 3–32). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_1

Prediger, S., Fischer, C., Selter, C., & Schöber, C. (2019). Combining material- and community-based implementation strategies for scaling up: the case of supporting low-achieving middle school students. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(3), 361–378. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9835-2

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, *52*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4

עד כמה מורי מתמטיקה המשתתפים בקהילות מקצועיות לומדות משנים את תפישותיהם בנוגע להוראה מעודדת חשיבה?

סורינה סבאח, טכניון, מכון טכנולוגי לישראל
עינת הד- מצויינים, טכניון, מכון טכנולוגי לישראל

מבוא ורקע תיאורטי

במהלך העשור האחרון נעשו מאמצים לקדם הוראה מעודדת חשיבה ואוריינות מתמטית בישראל. במתמטיקה בפרט, נעשים מאמצים - הן במגזר הערבי והן במגזר היהודי - לפתח פרקטיקות הוראה מעודדות חשיבה (Heyd-Metzuyanim et al., 2020). פרקטיקות הוראה אשר מעודדות חשיבה והשתתפות חקירתית, כוללות קידום הסמכות של התלמידים באמצעות דיונים עשירים בכיתה, שבהם התלמידים מעלים רעיונות מתמטיים והמורה, וגם תלמידים אחרים, דנים ברעיונות אלו (Heyd-Metzuyanim et al., 2020). יש סיבות להאמין שהוראה ממוקדת תלמיד מקדמת אוריינות מתמטית, שכן מטרתן המשותפת של פרקטיקות אלו היא קידום המשגה מתמטית מעמיקה וחיזוק העצמאות המתמטית של התלמידים (Heyd-Metzuyanim et al., 2020). למרות חשיבותן של פרקטיקות אלו, מחקרים קודמים הראו (e.g. Eilam, 2003) שמורים מסוימים מתקשים יותר ממורים אחרים ביישומן בכיתה. בישראל בפרט, ידוע שהכיתות הערביות ממוקדות מורה יותר מאשר הכיתות היהודיות, דבר הנובע מהבדלים תרבותיים של האוכלוסיות. הנורמות של התרבות הקוליקטיביסטית בבתי ספר ערביים מתורגמות לפרקטיקות הוראה סמכותיות יותר, דבר המרתיע תלמידים מלהתווכח או להביע את דעתם (Eilam, 2003). לפיכך, מחקרים אילו העלו השערות שאוכלוסיית המורים הערבים עשויה להזדקק לתמיכה נוספת במסגרות של פיתוח מקצועי כדי שהמורים יטמיעו בכיתות שיטות הוראה מעודדות חשיבה וממוקדות תלמיד. מטרת מחקר זה הייתה העמקת ההבנה של ההבדלים בין מורים ערבים למורים יהודים ביחס לאוסף הנרטיבים שיכולים לתמוך בפרקטיקת הוראה מסוימת- שיח פדגוגי- שהם מיישמים בכיתת המתמטיקה שלהם.

מחקרים קודמים הראו שאחת הסיבות לקושי ביישום הוראה מעודדת חשיבה בכיתה היא אמונות המורים או השיח הפדגוגי שהם מזדהים אתו (e.g. Heyd-Metzuyanim & Shabtay, 2019). מחקרים אלו הוכיחו שלעיתים קרובות, מורים הנכונים לאמץ שיטות הוראה מעודדות חשיבה, לא מיישמים אותן בכיתותיהם. הד-מצויינים ושבתאי (2019) הסבירו תופעה זו כ"אי- התאמה" בין השיח הפדגוגי האישי (אמונות) של מורים לבין השיח הפדגוגי החקירתי (הקיים במרחב הציבורי) שהם מנסים לאמץ. הן הבחינו בין השיח הפדגוגי התומך בפרקטיקות הוראה מסורתית וזה המבוסס "רפורמה" והגדירו שיח פדגוגי חקירתי (EPD – Explorative Pedagogical Discourse) כשיח העוסק במכלול של פרקטיקות שבאמצעותן ניתן לעודד חשיבה. פרקטיקות אלה כוללות בחירת משימות ברמה קוגניטיבית גבוהה, הובלת עבודה בקבוצות, עידוד שיח מחויב לידע, להנמקה ולקהילה, וקישור בין פתרונות שונים בעת דיון כתתי. שיח פדגוגי הקנייתי (DPD– Delivery Pedagogical Discourse) עוסק במכלול פרקטיקות בהן המורה מובילה את השיח הכיתתי, מקנה את הידע לתלמידים, מספקת הסברים ברורים והדגמת פרוצדורות במדויק ואילו התלמידים פאסיביים (Heyd-Metzuyanim & Shabtay, 2019).

עד כה, המחקרים המאמצים את העדשה הדיסקורסיבית לבחינת פרקטיקות הוראה התבססו בעיקר על שיטות איכותניות כגון ראיונות וניתוח שיח בכיתה. עם זאת, שיטות איכותניות אלה מוגבלות במקרה של הבחנה בהבדלים בין קבוצות מורים ביחס לשיח הפדגוגי שהם מזדהים אתו. לכן מטרת המחקר הנוכחי הייתה לייצר מתוך המסגרת הדיסקורסיבית האיכותנית לבחינת שיח פדגוגי של מורים, שאלון שיאפשר בחינה כמותית של הנרטיבים הפדגוגיים המוסכמים והפרקטיקות המדווחות של מורים. שאלות המחקר שלנו הן: האם ניתן למדוד את מידת ההסכמה של מורים עם נרטיבים הקשורים לשיח חקירתי, שיח הקנייתי ואוריינות מתמטית בעזרת מדד כמותי מהימן ותקף? אם כן, האם קיימים

הבדלים לאורך הזמן ועל פי מגזר במידת ההסכמה של מורות ומורים עם נרטיבים פדגוגיים מוסכמים ופרקטיקות מדווחות ביחס למדדי שיח חקירתי, שיח הקנייתי ואוריינות מתמטית? מהם ההבדלים?

מתודולוגיה

המחקר הנוכחי נערך במסגרת פרויקט קהילות מחשב"ה למאה-21, תכנית של פיתוח מקצועי למורים ולמורים מובילים הכולל קהילות מקצועיות לומדות. קהילות המורים מתמקדות בפרקטיקות הוראה המעודדות השתתפות חקירתית בשיעורי מתמטיקה. בזמן המחקר הפרויקט כלל ארבע קהילות שבהן רוב דובר עברית, ושלוש קהילות מורים דוברי ערבית. משתתפי הפרויקט מילאו שאלון לפני ואחרי ההשתתפות בקהילות המורים. השאלון הועבר פעמיים באחד ממפגשי הקהילות. שאלון ראשון הועבר במפגש הראשון - שני, והשיבו עליו 94 מורים (42 מורים ערבים, 52 מורים יהודים). שאלון שני הועבר במפגש האחרון של הקהילות, והשיבו עליו 73 מורים (45 מורים ערבים, 28 מורים יהודים).

השאלון כלל 31 היגדים; חלקם פותחו לצורך המחקר הנוכחי, חלקם נלקחו משאלון TIMSS למורי מתמטיקה, וחלקם ממחקרים קודמים (e.g. Stein et al., 2017). נערך תיקוף לתוכן השאלון על ידי התייעצות עם מומחים שעסקו בשיח פדגוגי מנקודת ראות איכותנית במחקרים קודמים. לאחר מכן נערכו ראיונות עם מורות למתמטיקה על מנת לבדוק את מידת הבהירות של פריטי השאלון, אז נערך תהליך אימות מחדש להבהרת הפריטים שלא הובנו היטב.

נערכו שני סוגים של ניתוחים סטטיסטיים. הראשון הוא ניתוח גורמים מגשש (EFA) כדי לקבוע את המבנה הפנימי של הכלי. מכיוון שלנתונים היה מבנה תיאורטי של מספר גורמים תלויים, ניתחנו את הנתונים באמצעות מיצוי סבירות מקסימלית של שלושה גורמים. בוצע EFA פעמיים, פעם עבור נרטיבים פדגוגיים מוסכמים, ופעם עבור פרקטיקות מדווחות. לבסוף, בדקנו האם הנתונים שהתקבלו תאמו את ההשערות של מומחי התוכן. לאחר מכן ניתחנו את המהימנות הפנימית בין תתי הסקאלות שנוצרו באמצעות EFA. כדי לבדוק האם קיימים הבדלים לאורך זמן ובין המגזרים השונים במידת ההסכמה עם נרטיבים פדגוגיים מוסכמים ופרקטיקות מדווחות, נערכו שני ניתוחי שונות רב משתנים דו-כיווני. המשתנה התלוי היה מידת ההסכמה עם הנרטיבים הנתונים, והמשתנים הבלתי תלויים: זמן המדידה (לפני ואחרי ההשתתפות בהשתלמות מחשב"ה), ומגזר (ערבים, יהודים).

ממצאים

פיתוח השאלון

ניתוח הגורמים המגשש, שהתבצע על 36 פריטים, העלה שישה גורמים מובחנים. מתוך 36 הפריטים הושמטו חמישה פריטים בניתוח מכיוון שרמת הטעינות שלהם בכל גורם הייתה (<.30) או פריטים שנטענו על יותר מגורם אחד. ארבעה פריטים מתוכם היו קשורים במקור לנרטיבים פדגוגיים מוסכמים התואמים לשיח פדגוגי הקנייתי, ואילו פריט אחד היה קשור לפרקטיקות המדווחות ונועד במקור לבדוק פרקטיקות התואמות לשיח פדגוגי חקירתי. לפיכך, נותרו 31 פריטים בשאלון לפי הפירוט בטבלה 1.

טבלה 1

עבור כל גורם בשאלון: מספר פריטים (N), עקיבות פנימית (Cronbach's α), דוגמא לפריט

גורמים בשאלון/ מדדים	נרטיבים פדגוגיים מוסכמים			פרקטיקות מדווחות		
	N	Cronbach's α	דוגמאות	N	Cronbach's α	דוגמאות

שיח חקירתי EPD	7	.77	"(חשוב ש) התלמידים יפתרו את אותה המשימה בדרכים שונות"	5	.72	"אני מבקשת מהתלמידים לקבוע בעצמם את הפרוצדורות לפתרון בעיות"
שיח הקנייתי DPD	4	.65	"התלמידים יקבלו ממני הסבר לרעיון לפני שהם חוקרים אותו"	5	.65	"אני מוודאת שתלמידים יודעים בדיוק מה הם צריכים לעשות לפני שאני שולחת אותם לתרגל"
אוריינות מתמטית ML	4	.69	"(חשוב ש) התלמידים ילמדו על העולם שמחוץ לבית הספר"	6	.87	"אני מתחילה ללמד נושא חדש באמצעות בעיות שקשורות לעולם שמחוץ לבית הספר"
סה"כ	15			16		

ביחס ל-15 הפריטים הקשורים לנרטיבים פדגוגיים מוסכמים, ניתוח הגורמים המגשש הניב שלושה גורמים ותתי סקאלות, כפי שמופיע בטבלה 1, שהסבירו בסך הכול 51.78 אחוז מהשונות המשותפת. בהקשר ל- 16 הפריטים הקשורים לפרקטיקות מדווחות, ניתוח הגורמים הניב שלושה גורמים ותתי סקאלות אשר הסבירו בסך הכול 55.46 אחוז מהשונות המשותפת.

ממצאים מהשאלונים

טבלאות 2 ו-3 מציגות את ממצאי ניתוח השונות הרב משתני. הניתוח נערך על מנת לקבוע אם למגזר ולזמן המדידה היה מתאם משמעותי עם מידת ההסכמה עם נרטיבים פדגוגיים מוסכמים ופרקטיקות מדווחות.

טבלה 2

ממוצע (M), סטיית תקן (SD), ערך F(1,163) ו η^2 של הנרטיבים הפדגוגיים המוסכמים ב-מדד השיח החקירתי-EPD, מדד השיח ההקנייתי- DPD ומדד האוריינות המתמטית- ML, לפי זמן מדידה ומגזר

	זמן מדידה						מגזר					
			לפני		אחרי				ערבי		יהודי	
	η^2	F	SD	M	SD	M	η^2	F	SD	M	SD	M
EPD	.002	.393	.050	4.187	.058	4.235	.010	1.645	.051	4.119	.056	4.260
DPD	.023	3.813	.063	4.003	.073	3.815	.085	***15.094	.065	4.097	.071	3.721
ML	.000	.065	.054	4.152	.063	4.173	.011	1.770	.056	4.108	.061	4.218

*p<.05. **p<.01. ***p< .001

מהממצאים עולה כי קיימים הבדלים מובהקים בין המגזרים השונים במידת ההסכמה עם נרטיבים פדגוגיים מוסכמים ($F(3,161)=8.37$, $p=.00$ $\eta^2=.14$). בניתוח המשך נמצא כי מידת ההסכמה של מורים ערבים עם היגדים התואמים למדד השיח ההקנייתי ($M=4.097$) היה גבוה באופן מובהק מזה של מורים יהודים ($M=3.721$). לעומת זאת, לא נמצאו הבדלים מובהקים במידת ההסכמה של מורים עם נרטיבים פדגוגיים מוסכמים לאורך זמן או באינטראקציה בין זמן מדידה ומגזר ($F(3,161)=1.98$, $\eta^2=.04$,$p=1.18$ $\eta^2=.012$ $F(3,161)=.65$, $p=.58$ בהתאמה).

טבלה 3

ממוצע (M), סטיית תקן (SD), ערך F(1,163) ו η^2 של הפרקטיקות המדווחות ב- מדד השיח החקירתי-EPD, מדד השיח ההקנייתי- DPD ומדד האוריינות המתמטית- ML, לפי זמן מדידה ומגזר

	זמן מדידה						מגזר					
			לפני		אחרי				ערבי		יהודי	
	η^2	F	SD	M	SD	M	η^2	F	SD	M	SD	M
EPD	.059	**9.843	.056	3.144	.064	3.411	.005	.728	.057	3.314	.063	3.241
DPD	.003	.461	.057	2.959	64.0	3.017	.024	3.803	.058	3.072	.063	2.905
ML	.050	**8.397	.064	2.511	.073	2.792	.000	.067	.066	2.639	.072	2.664

*p<.05. **p<.01

הממצאים בהקשר לפרקטיקות המדווחות מראים כי קיים שינוי מובהק לאורך זמן ($F(3,156)=4.08$, $p=.008$ η^2 =.07). ניתוח המשך מראה שהשינוי המובהק נמצא במדד השיח החקירתי ובמדד לאוריינות מתמטית ($F(1,158)=9.84$, $p=.002$ η^2 =.06, $F(1,158)=8.39$, $p=.004$ η^2 =.05 בהתאמה). הממוצעים, בטבלה 3, מראים שמידת ההסכמה עם פרקטיקות מדווחות הקשורות לשיח חקירתי ($M=3.411$) ולאוריינות מתמטית ($M=2.792$) אחרי ההשתתפות בקהילות מחשב"ה היו גבוהים באופן מובהק מממוצע ההסכמה לפני ההשתתפות ($M=3.141$, $M=2.511$ בהתאמה) .

הממצאים מראים גם שאין הבדל מובהק במידת ההסכמה עם פרקטיקות מדווחות על פי מגזר או על פי האינטראקצה בין מגזר וזמן מדידה ($F(3,156)=1.51$, $p=.213$ η^2 =.03, $F(3,156)=2.30$, $p=.08$ η^2 =.042 בהתאמה).

דיון

במחקר הנוכחי פיתחנו שאלון על מנת לבחון את השיח הפדגוגי של מורים המשתתפים בקהילות מקצועיות לומדות המכוונות להוראה מעודדת חשיבה. השאלון שפותח נמצא מהימן ותקף לבחינת נרטיבים פדגוגיים מוסכמים ופרקטיקות מדווחות באוכלוסייה הישראלית. הממצאים מהמחקר הנוכחי תואמים בחלקם לממצאי מחקרים קודמים (e.g. Eilam, 2003) המדווחים על ההערכה של מורים ערבים לפרקטיקות הוראה מבוססות שיח פדגוגי הקנייתי. מלבד ממצא זה, ובניגוד לממצאי מחקרים קודמים, המחקר הנוכחי הראה כי אין הבדל מובהק בין מורים ערבים ומורים יהודים במהלך ההשתתפות בקהילות המורים בהקשר לנרטיבים התואמים שיח פדגוגי חקירתי ואוריינות מתמטית. ממצאים אלו מצביעים על כך שלמרות שמורים ערבים מעריכים יותר את השיח הפדגוגי ההקנייתי, הם לא מפחיתים מערכן של פרקטיקות התואמות שיח פדגוגי חקירתי ואוריינות מתמטית.

רשימת מקורות

Eilam, B. (2003). Jewish and Arab Teacher Trainees' Orientations Toward Teaching-Learning Processes. *Teaching Education*, *14*(2), 169–186.

Heyd-Metzuyanim, E., Nachlieli, T., Weingarden, M., & Baor, R. (2020). Adapting a professional development program for cognitively demanding instruction across shifting contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *104*(3), 385–403.

Heyd-Metzuyanim, E., & Shabtay, G. (2019). Narratives of 'good' instruction: teachers' identities as drawing on exploration vs. acquisition pedagogical discourses. *ZDM Mthematics Education*, *51*, 541–554.

Stein, M. K., Correnti, R., Moore, D., Russell, J. L., & Kelly, K. (2017). Using Theory and Measurement to Sharpen Conceptualizations of Mathematics Teaching in the Common Core Era. *AERA Open*, *3*(1), 233285841668056.

מפיתוח מקצועי למורים לצמיחה אישית-מקצועית: המקרה של מורי מדעים ומתמטיקה מומחים

ענת אבן זהב, אקדמיית אלקאסמי, באקה אלגרביה; סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאמנויות, תל-אביב

מירלה וידר, המכללה האקדמית הדתית לחינוך שאנן, חיפה; מכון ויצמן למדע, רחובות

מבוא

בהתבסס על תיאוריית ההגדרה העצמית, חוקרים משערים כי רווחה מקצועית חיונית לשביעות רצונם של מורים ולצמיחתם האישית-מקצועית. עם זאת, תוכניות לפיתוח מקצועי (פ"מ) של מורים למדעים ומתמטיקה מתמקדות בתכנים התואמים את תכניות הלימודים במטרה לקדם הישגי תלמידים. המחקר המוצג עימת את התפיסות של מורים למדעים ומתמטיקה לגבי צרכי הרווחה המקצועיים שלהם עם האופן בו תכניות פ"מ אפקטיביות במדעים ומתמטיקה עונות על צרכים אלה. מתודולוגית, מרכיבי רווחה מקצועית, (מסוגלות, שייכות, אוטונומיה ושאיפות) זוהו באופן תימתי בתוך 20 ראיונות עם מורים מומחים (במונחים של הכשרה וניסיון מקצועי) למתמטיקה ולמדעים. במקביל, נעשה ניתוח תמתי לאיתור מרכיבי רווחה מקצועית גם בתכניות פ"מ אפקטיביות. הממצאים מראים כי מורים מייחסים חשיבות לרווחתם המקצועית ביחס לכלל מרכיביה. עם זאת, זיהינו כי תכניות הפ"מ נותנות מענה חלקי ואקראי בלבד למרכיבי הרווחה המקצועית. בפרט, אף שמרכיב השאיפות לצמיחה אישית-מקצועית צוין על ידי כלל המורים כחשוב ביותר, זכה מרכיב זה להתעלמות מוחלטת בתכניות הפ"מ האפקטיביות. הממצאים מדגישים את הצורך המשתנה ברווחה מקצועית בשלבים השונים של קריירת ההוראה. מתוך כך מוצע לכלול את רווחתם המקצועית של המורים כקריטריון נוסף בהערכת האפקטיביות של תכניות פ"מ.

מסגרת תיאורטית

במהלך העשורים האחרונים, מערכות חינוך עברו שינויים רעיוניים הנוגעים לתפיסת מקצוע ההוראה (Natale, Bassett, Gaddis, & McKnight, 2013). ההוראה אינה נתפסת עוד כעיסוק "צווארון כחול", אלא כמקצוע בו מורים יכולים לפתח קריירה ובעקבות כך להתקדם מקצועית (Tucker, 2014). במקביל לצורך בתכניות פ"מ של מורים כחלק מקידום קריירת ההוראה , גבר גם הצורך בפ"מ הנותן מענה גם לשיפור איכות ההוראה ולהכנת בוגרים לדרישות המשתנות של העידן.

פ"מ בתחומי המדעים והמתמטיקה מהווה חלק מהותי בחיים המקצועיים של מורים, אולם תוכניות הפ"מ למורים למורי מדעים ומתמטיקה משקפות בעיקר את ההתמקדות בשיפור איכות ההוראה וקידום הישגי התלמידים וכמעט ואינן מתייחסות לצרכי האדם–המורה הממלא תפקידו (Intrator & Kunzman, 2007) ואף נוטות להתעלם מהצרכים המקצועיים האישיים המשתנים של מורים למדעים ומתמטיקה בשלבים שונים של קריירת ההוראה שלהם כאשר אותן תוכניות פ"מ מיועדות לכלל המורים. רוב תכניות הפ"מ בהוראת המדעים והמתמטיקה מכוונות לקידום איכות ההוראה ומתייחסות למורים כמיישמי הוראה המצופים להתאים את הוראתם אל מטרות ופרקטיקות חיצוניות המוגדרות מראש (Lindvall & Ryve, 2019). גישה זו באה לידי ביטוי בעצם הגדרת תוכניות פ"מ אפקטיביות במדעים ובמתמטיקה ככאלו המובילות לשיפור בהישגי התלמידים (Darling-Hammond et al., 2017). לאור חוסר שביעות הרצון של מורים למדעים ומתמטיקה מהתפתחות הקריירה המקצועית שלהם, מתבררת גישה זו לתכניות פ"מ אפקטיביות כמצומצמת ובלתי מספקת (Song & Alpaslan, 2015).

ריאן, הוטה ודצ'י (Ryan, Huta & Deci, 2013), המזוהים עם מחקרי רווחה אישית-מקצועית, מצביעים על ארבעה מרכיבי רווחה מקצועית: שייכות (relatedness), אוטונומיה (autonomy), מסוגלות (competence), ושאיפות (aspirations). מחקרים רבים הראו כי רווחה מקצועית מהווה פן חיוני גם בקרב מורים, בצמיחתם האישית-מקצועית, בפיתוח קריירת ההוראה ובאיכות חייהם המקצועיים (Cuevas, et al., 2018; Roffey, 2012; Rubin & Brown, 2019). למרות זאת הספרות אודות תכניות פ"מ אפקטיביות במדעים ובמתמטיקה אינן מתייחסות באופן מכוון לרווחתם המקצועית של המורים,

ובולטת העבודה שקולות המורים המורים בנושא אינם נשמעים (Darling-Hammond et al., 2017; Lindvall & Ryve, 2019).

מחקר זה שם לו למטרה למקם את השיח על רווחה אישית מקצועית בקדמת הבמה, תוך בחינת החשיבות שמייחסים מורים מומחים למדעים ומתמטיקה לרווחתם האישית-מקצועית. מתוך כך, נוסחה שאלת המחקר: האם וכיצד משתקפים מרכיבי הרווחה המקצועית (שייכות, אוטונומיה, מסוגלות ושאיפות) בתפיסותיהם של מורי מדעים ומתמטיקה מומחים לגבי הצמיחה האישית-מקצועית שלהם?

מתודולוגיה

שיטת המחקר וכלי המחקר

במחקר זה נעזרנו במתודולוגיה איכותנית המשלבת ראיונות עומק מובנים למחצה עם ניתוח תמתי. הראיונות נועדו לזהות את תפיסות המורים לגבי רווחתם המקצועית ונוסחו לפי מבנה ניתוח SWOT (חוזקות, חולשות, הזדמנויות ואיומים), שמקורו מתחומי הניהול (Helms & Nixon, 2010). מבנה הראיון על פי ניתוח ה-SWOT מאפשר לחשוף את תפיסות מורי המדעים והמתמטיקה לגבי חייהם המקצועיים כמו גם היבטים שונים של הקריירה המקצועית שלהם. בפרט, התבקשו המרואיינים להתייחס לנושאים פנימיים וחיצוניים חיוביים ולא חיוביים בארבעת ממדי ניתוח ה-SWOT הנוגעים לחינוך למדעים ומתמטיקה בישראל, וזאת בארבע רמות: (1) הפרט, (2) בית הספר, (3) תוכנית הלימודים, ו-(4) מערכת החינוך. הראיונות התקיימו בבתי הספר בהם המורים מלמדים. כל ראיון נמשך 1-1.15 שעות. המרואיינים השתתפו בהתנדבות, הובטחה להם אנונימיות והתאפשר להם להפסיק את הראיון בכל זמן נתון.

משתתפי המחקר

המשתתפים במחקר היו 20 מורי מדעים ומתמטיקה מומחים משישה בתי ספר תיכוניים בישראל. מומחיות המורים נקבעה במונחים של הכשרה וניסיון מקצועי. ותק המורים נע בין 15 ל-31 שנים; כלל המורים בעלי תעודת הוראה, בעלי תואר אקדמי באחד במקצוע ההוראה ולימדו ותואר אקדמי נוסף בהתמחות בחינוך למדעים או מתמטיקה; כלל המורים פיתחו קריירה הקשורה למקצוע ההוראה בתוך בית הספר או מחוצה לו. ישנו גיוון של המורים הן בהיבט מגדר (12 נשים, 8 גברים) והן בהיבט של מקצועות ההוראה (מתמטיקה, פיזיקה, כימיה, ביולוגיה, מדעי המחשב).

ניתוח נתונים

הטקסטים של תמלולי הראיונות שימשו לניתוח נתונים תימתי (Braun & Clarke, 2006). אימצנו גישה תימתית סמויה, הכוללת קריאת הסאבטקסט כדי לזהות מרכיבי רווחה מקצועית המשתקפים בטקסט. בפרט, הקידוד נערך בצורה אנכית (עבור כל משתתף) ואופקית (על פני המשתתפים השונים) כאשר כל ראיון הושווה לכל האחרים (Corbin & Strauss, 2015). ההשוואה בין הראיונות סייעה להבין את הדומה והשונה בין המורים המשתתפים ולנסח את הממצאים המבטאים את החשיבות שמייחסים מורי מדעים ומתמטיקה מומחים לרווחתם המקצועית.

ממצאים

ממצאי המחקר זיהו את כל ארבעת מרכיבי הרווחה המקצועית (מסוגלות, שייכות, אוטונומיה ושאיפות) כצרכים מקצועיים בסיסיים של מורי המדעים והמתמטיקה. במיוחד הודגש הצורך במימוש שאיפות מקצועיות ובמתן אופק להתפתחות אישית-מקצועית בקריירת ההוראה, צורך שאינו מקבל כלל מענה בתכניות פ"מ בהם משתתפים המורים. להלן יודגם הביטוי לארבעת מרכיבי הרווחה המקצועית בציטוטי דברי המורים.

מסוגלות: מורי מדעים ומתמטיקה מומחים מתאפיינים בתחושת מסוגלות עצמית גבוהה בתחום הוראתם. ביטוי לכך ניתן במשפטים כגון: "הדבר היחיד שאני נהנה ממנו הוא לסגור את הדלת ולהעביר שיעור טוב... זה הכל הניסיון והידע הדיסציפלינרי שלי" (רחל, ביולוגיה) או "אפילו עם סמרטוט וגיר אני מסתדרת טוב" (שיפי, מתמטיקה ומדעי המחשב). עם זאת, המורים הביעו צורך מקצועי לפתח יכולת זו, להרחיב את הידע ולהיחשף למגמות עדכניות ורלוונטיות בתחומי המדע והמתמטיקה. ציטוטים אלו מעידים כך: "כמורה לפיזיקה בתיכון, אני מרגיש שאני לא מספיק מומחה כדי להשתמש

במגוון גישות הוראה" (זיגי, פיזיקה). קלי, מורה לכימיה הסבירה כי: "מורה צריך להיות איש אשכולות. אני צריך להיות אדם שיודע הרבה ולומד הרבה. אני צריך להיות גם אינטלקטואל... לשם כך אני חייב לראות עולמות שונים, לשאוב מהם ולעשות סינתזות".

שייכות: הצורך בשייכות מקצועית בא לביטוי בתחושות של חוסר קשר ובדידות מקצועית בעיקר אצל מורי מדעים. מורי פיזיקה, כימיה ומדעי המחשב משמשים לעיתים כמורה יחיד למקצוע בבית ספר ומעידים כי חסרה עבודת צוות שיתופית עם עמיתים מומחים נוספים. ביטוי נוסף לחוסר שיתוף פעולה דווקא בצוות מתמטיקה גדול: "הרכז המקצועי במתמטיקה הוא מאוד אנרגטי ומכוון עבודה, הצוות מאוד מקצועי, אבל יש מעט מאוד שיתוף פעולה ועבודת צוות" (שיפי, מתמטיקה ומדעי המחשב).

אוטונומיה: נראה כי לבדידות המקצועית שתוארה לעיל יש יתרונות משלה, שכן חלק ממורי המדעים והמתמטיקה בטאו שביעות רצון מחופש הפעולה שניתן להם בבית הספר: "אני עושה מה שאני רוצה. אני יודע שמעריכים אותי ומאמינים במאה אחוז. כלומר, אני מקבל חופש מוחלט. הם לא בודקים אותי ולא מבקרים אותי... אני לא אוהב שמכתיבים לי" (בארי, פיזיקה). ממצא זה עולה בקנה אחד עם מרכיב האוטונומיה של רווחה מקצועית (Ryan et al., 2013), המדגיש את החשיבות שמעניק איש המקצוע להתנהגות הנובעת מתחושת בחירה חופשית בניגוד לשליטה וסמכות (Deci & Ryan, 2008). עם זאת, תחושת העצמאות שתוארה לעיל אינה שלמה, משום שאינה קשורה לחופש אקדמי-מקצועי, כלומר, החופש לבחור ולשנות את תכני ההוראה, ולהחליט מה נכון, מתאים ומעודכן ללמד. המורים למדעים ומתמטיקה טענו כי תוכניות הלימודים מוכתבות על ידי מערכת החינוך ו"כשאתה אחראי על הכנת התלמידים לבחינות הבגרות, אין לך הרבה חופש" (מוטי, מתמטיקה ומדעי המחשב). המורים הוסיפו כי לעתים קרובות שינויים בתוכנית הלימודים וצמצום בשעות ההוראה מחמירים את המצב עוד יותר.

שאיפות: בניגוד לשלושת מרכיבי הרווחה האחרים מרכיב השאיפות המקצועיות צוין על ידי כל 20 המורים למדעים ומתמטיקה שרואיינו. המורים הדגישו את החשיבות שהם מייחסים להגשמת שאיפותיהם המקצועיות. הם ציינו שהאתגר למצוא כיוון מתאים לצמיחה האישית-מקצועית הינו גדול. לדוגמה, מירי, מורה ורכזת לפיזיקה טענה כי: "אופק ההתפתחות של מורי מדעים מוגבל מאוד... זו נקודה קריטית, האופק המקצועי... מורים למתמטיקה ופיזיקה הם אנשים שלרוב לא נכנסים לתפקידי ניהול... יש למצוא דרך אחרת... כמו לעשות קצת מחקר, ניסויים". המורים הביעו שאיפות לצמיחה אישית-מקצועית רחבה, כזו שמעבר לבית הספר. לדוגמה, פאולה, מורה לביולוגיה, תיארה שאיפותיה באופן הבא: "לעשות משהו מעבר להוראה... לעשות דברים שמקדמים... לנסות לעשות משהו לשיפור שיטות הוראה ודרכי חשיבה... לצאת למכללות, להיות מרצה, או אפילו ראש המחלקה, האפשרויות האלה מאוד מעניינות עבורי... אני גם רוצה לעשות קצת מחקר מלבד ללמד את אותם נושאים ופרקים שוב ושוב... זו הזדמנות עבורי כמורה... אבל אין לי הזדמנויות אמיתיות כאלו".

לסיום, מורי המדעים והמתמטיקה המומחים הביעו צורך בלתי מתפשר בנוכחותם של ארבעת מרכיבי הרווחה בחייהם המקצועיים, הם הדגישו במיוחד את הצורך לממש את שאיפותיהם המקצועיות. שאיפות אלו הן בדיוק מרכיב הרווחה שנמצא כחסר במאפייני תכניות פיתוח מקצועי יעילות שנסקרו על ידי דארלינג-המונד ועמיתיה (Darling-Hammond et. al., 2017).

דיון ומסקנות

במחקר זה ביקשנו להציב במרכז את רווחתם האישית-מקצועית של מורי המדעים והמתמטיקה כמרכיב נוסף שיש להכליל בתכניות פ"מ אפקטיביות המכוונות לתרום לצמיחה אישית-מקצועית של המורה במקביל להעשרת התוכן והידע הפדגוגי שלו/ה. יש לבחון כיצד ניתן לשפר תכניות פיתוח מקצועי אפקטיביות כדי שמורים המשתתפים בהם יתרמו גם בהקשר לאיתור כיוונים חדשים לחיים המקצועיים שלהם. הניתוח התמתי שביצענו לאיתור מרכיבי רווחה מקצועית בתכניות פ"מ אפקטיביות במדעים ומתמטיקה הראה התייחסות חלקית ואקראית בלבד. תכניות הפ"מ שנותחו (Darling-Hammond et. al., 2017) אימצו גישה כללית להתפתחות מקצועית של מורים שאינה מבדילה בין רמות שונות של מקצועיות המורים. עם זאת, הממצאים העולים מהראיונות שנערכו עם המורים המומחים סותרים גישה זו ועומדים בקנה אחד עם הקביעה של הוברמן (Huberman, 1995) כי "למורים יש מטרות שונות ודילמות שונות ברגעים שונים במחזוריות המקצועית שלהם, והרצונות שלהם להגיע למידע נוסף, ידע, מומחיות ומיומנות טכנית ישתנו בהתאם".

להתעלמות משאיפותיהם המקצועיות של מורי מדעים ומתמטיקה עשויה להיות השלכה חמורה על חייהם המקצועיים והמשך תרומתם למערכת החינוך. מתוך כך, מעצבי תכניות פ"מ צריכים לתת ביטוי לרווחה המקצועית בתכניות פ"מ ולהציגה כמרכיב בהערכת אפקטיביות של תכניות חדשות. מערכות החינוך צריכות לספק למורי מדעים ומתמטיקה הזדמנויות מקצועיות ולהרחיבם. התבוננות בפיתוח מקצועי דרך פריזמה מורחבת זו עשויה לתרום לתפיסת המורים את חייהם המקצועיים כמשמעותיים, מעוררי השראה ומתגמלים.

רשימת מקורות

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative research in psychology*, *3*(2), 77-101.https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Corbin, J. M., & Strauss, A. L. (2015). Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Cuevas, R., Ntoumanis, N., Fernandez-Bustos, J. G., & Bartholomew, K. (2018). Does teacher evaluation based on student performance predict motivation, well-being, and ill-being? *Journal of school psychology*, 68, 154-162.

Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., & Gardner, M. (2017). Effective Teacher Professional Development. Research Brief. *Learning Policy Institute*.

Deci, E. L., & Ryan R. M. (2008). Hedonia, Eudaimonia, and Well-Being: An Introduction. *Journal of Happiness Studies* 9 (1): 1–11. https://doi.org/10.1007/s10902-006-9018-1

Helms, M., & Nixon J. (2010). Exploring SWOT Analysis – Where Are We Now?: A Review of Academic Research from the Last Decade. *Journal of Strategy and Management* 3 (3): 215–251. https://doi.org/10.1108/17554251011064837

Huberman, M. (1995). Networks That Alter Teaching: Conceptualizations, Exchanges and Experiments. *Teachers and Teaching* 1 (2): 193–211. https://doi.org/10.1080/1354060950010204

Intrator, S. M., & Kunzman, R. (2007). The Person in the Profession: Renewing Teacher Vitality through Professional Development. *The Educational Forum* 71 (1), 16–32. https://doi.org/10.1080/00131720608984564

Lindvall, J., & Ryve A. (2019). Coherence and the Positioning of Teachers in Professional Development Programs. A Systematic Review. *Educational Research Review*, 27, 140–154. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2019.03.005

Natale, C. F., Bassett K., Gaddis L., & Mcknight, K., (2013). *Creating Sustainable Teacher Career Pathways: A 21st Century Imperative*. National Network of State Teachers of the Year.

Roffey, S. (2012). Pupil Wellbeing-Teacher Wellbeing: Two Sides of the Same Coin? *Educational and Child Psychology* 29 (4), 8-17.

Rubin A., & Brown A. (2019). Unlocking the Future of Learning by Redesigning Educator Learning. In *Sustainability, Human Well-Being, and the Future of Education.*, edited by Cook J., 235–68. Palgrave: Macmillan, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-78580-6_7

Ryan, R. M., Huta, V., & Deci E. L. (2013). Living Well: A Self-Determination Theory Perspective on Eudaimonia. In *Happiness Studies Book Series*, 117–139. Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-5702-8_7

Song, S. C., & Alpaslan M. M. (2015). Factors Impacting on Teachers' Job Satisfaction Related to Science Teaching: A Mixed Methods Study. *Science Education International* 26 (3): 361–378.

Tucker, M. S. (2014). Fixing Our National Accountability System. *National Center on Education and the Economy*.

הוראת ארבע פעולות חשבון במספרים טבעיים בכיתות א'-ב': תחושת חוללות עצמית של מורים לגבי הידע שלהם

ויסוצ'אנסקי לובה, סמינר הקיבוצים (עבודת תזה)
איריס שרייבר, סמינר הקיבוצים ואוניברסיטת בר אילן

מבוא ורקע תאורטי

מאמר זה מתאר חלק ממחקר אשר בדק שני גורמים העשויים להשפיע על תהליכי ההוראה-למידה של ארבע פעולות החשבון בכיתות א-ב: ידע המורים ותחושת החוללות העצמית שלהם לגבי ידע זה. הוראת ארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים הינה חלק מרכזי בתוכנית הלימודים למתמטיקה בבית הספר היסודי בכלל, ובכיתות א-ב בפרט. הוראת הנושא מהווה שני שלישים מהיקף תוכנית הלימודים ובמסגרתה מצופה מהמורים לעסוק במשמעות הפעולות, בשימוש בחוקים מתמטיים, ובלימוד אלגוריתמים חישוביים. כמו כן, מומלץ כי המורים יעשו שימוש במהלך ההוראה בהמחשות, בייצוגים מתמטיים של מצבים ובכתיבת ביטויים מספריים המתאימים למצבים מציאותיים (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006). הבנת תכונות המושגים והקשרים ביניהם, שימוש בשפה מתמטית, תובנה מספרית, אסטרטגיות שונות לפתרון – כל אלה נדרשים בתוכנית הלימודים של משרד החינוך, ולפיכך מחייבים את המורים לידע תוכן ולידע פדגוגי-תוכני רחב.

מחקר זה התבסס על הגדרת הידע המתמטי הנדרש למורים כפי שהגדירו דבורה בול ואחרים (Ball et. al., 2008). הם מציעים ארבעה מרכיבי ידע: ידע תוכן שגרתי (Common Content Knowledge – CCK), למשל הידע לפתור או לחשב; ידע תוכן ייחודי (Content Knowledge Specialize – CKS), למשל הידע לפתור בכמה דרכים שונות: ידע תוכן והוראה (Knowledge of Content and Teaching – KCT), למשל ידע כיצד להמחיש תרגילים; וידע תוכן ותלמידים (Knowledge of Content and Students – KCS), למשל ידע לגבי שגיאות אופייניות של תלמידים.

מלבד ידע מורים, אחד הגורמים העשויים להיות משמעותיים ביותר לתהליך ההוראה, ובו מתמקד מאמר זה, הוא תחושת החוללות העצמית (self-efficacy) של המורים. המושג חוללות עצמית הוגדר על ידי בנדורה (Bandura, 1977) כאמונה שיש לאדם ביכולתו לבצע בהצלחה את הדרוש על מנת להשיג תוצאה רצויה. בנדורה טען כי חוללות עצמית לצד הכישורים המתאימים יש בה כדי להשפיע על ההצלחה בביצוע המטלה כיוון שהיא משפיעה על תפקודו של הפרט, על בחירתו בדרכי הפעולה ועל המאמץ ומשך הזמן שהוא ישקיע בביצועה של מטלה מסוימת. במחקרים נמצא כי תחושת החוללות הינה גורם משמעותי לתהליכי הוראה-למידה: ככל שתחושת המסוגלות של המורה גבוהה יותר, הוא חש סיפוק רב יותר בעבודתו, מגלה מעורבות גבוהה יותר בקידום התלמידים ונוטה יותר לשתף פעולה עם צוות בית הספר ולעומת זאת, ככל שהמורה בעל תחושת מסוגלות נמוכה יותר, כך עולות רמת השחיקה שלו, רמת הניתוק מהלומדים וחוסר האמונה שלו ביכולותיהם (Brouwers & Tomic, 2000; Sarıçam & Sakız, 2014).

תחושת חוללות עצמית נבדקת בהתייחס לנושא ספציפי, ולמיטב ידיעתנו היא לא נבדקה בהתייחס לידע של מורים בנושא ארבע פעולות חשבון. מחקר זה בדק את תחושת החוללות העצמית של מורים המלמדים חשבון בכיתות א-ב, בהתייחס לידע שלהם תוך התייחסות לארבעת מרכיבי הידע שהגדירה דבורה בול.

מכך נגזרו מטרות המחקר הבאות: מהי רמת תחושת החוללות העצמית של המורים בנוגע לידע שלהם (על מרכיביו השונים) בהתייחס להוראת ארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים בכיתות א-ב? האם קיימים הבדלים בין מרכיבי הידע השונים? האם קיימים הבדלים בין הפעולות השונות?

מתודולוגיה

במחקר זה השתתפו 31 מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א-ב. כל המורים הם בעלי תואר ראשון בחינוך (B.ED.) אולם הם נבדלים בהכשרתם (10 התמחו במתמטיקה, 16 הוכשרו בהדרכה והשתלמויות, 5 ללא הכשרה למתמטיקה) ובוותק שלהם (בין 2 שנות וותק ל- 32 שנות וותק).

המחקר נערך באמצעות שאלון שפותח לצורך המחקר. השאלון כולל 25 היגדים (אותם דירגו המורים בסולם מ- 1 עד 5 על פי מידת הביטחון שלהם לגבי האמור בהיגד) הקשורים למרכיבי הידע השונים. 6 היגדים עסקו בידע תוכן שגרתי: למשל, דרג/י את מידת הביטחון והמסוגלות שלך לפתור תרגילי חיסור של מספרים דו-ספרתיים; 6 היגדים עסקו בידע תוכן ייחודי : למשל, דרג/י את מידת הביטחון והמסוגלות שלך לפתור תרגילי חיבור ביותר מדרך אחת 8 היגדים עסקו בידע תוכן והוראה : למשל, דרג/י את מידת הביטחון והמסוגלות שלך להמחיש דרכי פתרון לתרגילי חילוק; 5 היגדים עסקו בידע תוכן ותלמידים : למשל, דרג/י את מידת הביטחון והמסוגלות שלך להסביר טעות של תלמיד בפתרון תרגילי כפל וחילוק.

השאלון נשלח למשתתפי המחקר באופן מקוון , זמן משוער למילוי השאלון כ-8 דקות. בעיבוד הנתונים בוצעו השוואות של רמת החוללות העצמית של המורים בין סוגי הידע השונים וכן בין הפעולות השונות.

ממצאי המחקר

ממצאי המחקר מעידים כי באופן כללי המורים דירגו את הביטחון שלהם בידע שלהם גבוה ברמות 3- 5 והמעיטו בדירוג הביטחון ברמה של 1-2. ניתן לראות כמה היגדים בהם רמת הביטחון בלטה לטובה ואילו כמה היגדים בהם בלט יותר חוסר ביטחון. בטבלה 1 מובאים ממצאי 14 מתוך 25 ההיגדים (מבחר היגדים לדוגמא מכל אחד ממרכיבי הידע השונים). הממוצעים וסטיית התקן המוצגים בטבלה הם של כל ההיגדים בשאלון (כולל אלה שלא מופיעים בטבלה). הממצאים המוצגים העידו על הבדלים בין הפעולות השונות והבדלים בין מרכיבי הידע השונים.

טבלה 1

דירוג רמת החוללות העצמית לגבי היגדים שונים במרכיבי הידע השונים, ממוצע וס"ת (N=31)

סוג	היגד	5	4	3	2	1	M(sd)
ידע תוכן	לפתור תרגילי חיבור של מספרים דו-ספרתיים	27	2	2	0	0	4.53
שגרתי	לפתור תרגילי חיסור של מספרים דו-ספרתיים	25	4	1	1	0	(0.53)
CCK	לפתור תרגילי כפל מספר דו-ספרתי בחד-ספרתי	20	5	5	0	1	
	לפתור תרגילי חילוק מספר דו-ספרתי בחד-ספרתי	18	7	3	3	0	
ידע תוכן	לפתור תרגילי חיבור ביותר מדרך אחת	21	5	4	1	0	4.38
ייחודי	לפתור תרגילי חיסור ביותר מדרך אחת	21	4	4	2	0	(0.88)
SCK	לפתור תרגילי כפל ביותר מדרך אחת	21	3	3	4	0	
	לפתור תרגילי חילוק ביותר מדרך אחת	16	6	4	4	1	
ידע תוכן	להמחיש דרכי פתרון לתרגילי חיבור	21	6	4	0	0	4.44
והוראה	להמחיש דרכי פתרון לתרגילי חיסור	20	7	4	0	0	(0.74)
KCT	להמחיש דרכי פתרון לתרגילי כפל	19	7	5	0	0	
	להמחיש דרכי פתרון לתרגילי חילוק	15	9	3	4	0	
ידע תוכן	לאתר שגיאות בפתרון תרגילי חיבור וחיסור	17	6	7	1	0	4.01
ותלמידים	לאתר שגיאות בפתרון תרגילי כפל וחילוק	14	6	6	4	1	(1.09)
KCS							

בטבלה 1 ניתן לראות כי רמת החוללות העצמית של המורים איננה אחידה לגבי הפעולות השונות (המורים הכי בטוחים בידע שלהם לגבי חיבור והכי פחות בטוחים בידע שלהם לגבי חילוק) ואיננה אחידה לגבי מרכיבי הידע השונים (המורים הכי בטוחים בידע התוכן השגרתי שלהם והכי פחות בטוחים

בידע שלהם לגבי תלמידים). לאחר בדיקת מובהקות ההבדלים בין הפעולות השונות (טבלה 2) ניתן לראות כי ההבדלים בין הפעולות בשלושה מרכיבי ידע הם מובהקים.

טבלה 2

ההבדלים ברמת החוללות העצמית של המורים בין פעולות החשבון (מבחן T)

סוג הידע	פעולת חשבון	חיבור	חיסור	כפל
תוכן שגרתי CCK	חיסור	1.793	-	-
	כפל	3.724**	2.592*	-
	חילוק	3.049**	2.460*	0.891
תוכן ייחודי SCK	חיסור	1.438	-	-
	כפל	1.438	0.701	-
	חילוק	3.503**	3.243**	3.248**
תוכן והוראה KCT	חיסור	1.793	-	-
	כפל	2.108*	1.222	-
	חילוק	3.321**	3.013**	2.528*

p*<0.05 , p**<0.01

במרכיב הידע של תוכן ותלמידים (KCS) שאיננו בטבלה נמצא הבדל בין ידע לגבי חיבור וחיסור ביחד לעומת ידע בכפל וחילוק ביחד: המורים בטוחים יותר ביכולתם לאתר שגיאות בחיבור וחיסור לעומת יכולתם לאתר שגיאות בכפל וחילוק (T= 3.013, p**<0.01).

גם בבדיקת הבדלים בין מרכיבי הידע השונים בכל פעולה ופעולה נמצאו הבדלים משמעותיים. הממצאים מלמדים שבפעולות חיבור וחיסור רמת החוללות העצמית של המורים גבוהה באופן ניכר במרכיבי הידע: 'ידע תוכן שגרתי', 'ידע תוכן ייחודי' ו'ידע תוכן והוראה' על פני מרכיב הידע 'ידע תוכן ותלמידים' (בחיבור (T=4.062, p**<0.01) ובחיסור (T=3.574, p**<0.01)). כמו כן, בפעולת הכפל נמצאו הבדלים מובהקים בין רמת החוללות העצמית של המורים במרכיבי הידע 'ידע תוכן ייחודי' ו'ידע תוכן והוראה' על פני מרכיב הידע 'ידע תוכן ותלמידים' (T=2.886, p**<0.01) ובפעולת החילוק רמת החוללות של המורים בכל ארבע פעולות החשבון במרכיב הידע 'ידע תוכן ותלמידים' גם נמוכה ביותר.

דיון ומסקנות

מחקר זה בדק את תחושת החוללות העצמית של מורים בכיתות א-ב לגבי הידע שלהם על פי מרכיבי הידע השונים שהוגדרו על ידי דבורה בול (Ball et al., 2008). למחקר זה מספר ממצאים בולטים אשר הראשון שבהם הוא ההבדלים המשמעותיים ברמת החוללות העצמית של המורים בין הפעולות השונות. נמצא כי המורים בטוחים יותר בידע שלהם לגבי חיבור וחיסור מאשר בידע שלהם לגבי כפל וחילוק, ובפרט נמצא כי רמת הביטחון בידע לגבי פעולת החילוק נמוכה במיוחד לעומת הפעולות האחרות. ייתכן שחוסר הביטחון בפעולות הכפל והחילוק נובע מפריסת הנושאים המופיעים בתוכנית הלימודים של כיתות א-ב, כיוון שהרמה הנדרשת בפעולות הכפל והחילוק בשכבות גיל אלה היא במסגרת של לוח הכפל בלבד ורוב שעות ההוראה מתמקדות בחיבור וחיסור. חוסר הביטחון היחסי של המורים לגבי פעולת החילוק בא לידי ביטוי במרכיבי הידע השונים: המורים חשים רמת ביטחון פחותה יותר בפתרון תרגילי חילוק (מספר דו-ספרתי בחד-ספרתי), בפתרון תרגיל חילוק בדרכים מגוונות, ובהוראת פעולת החילוק. כמו כן, נמצא כי המורים חשים פחות ביטחון להסביר את משמעויותיהן השונות של פעולות הכפל והחילוק, חשים בטוחים פחות בהסבר ובהמחשת דרכים מגוונות להצגת משמעויות ופתרונות בתרגילי הכפל והחילוק, לאתר שגיאות בפעולות אלה ולהסבירן לתלמידים. סיבה אפשרית לכך היא שלמורים יש ידע תוכן חסר או חלקי בנוגע לפעולת החילוק המובילה לחוסר הביטחון שלהם. תחושת חוללות עצמית נמוכה בידע תוכני משפיעה על חוסר ביטחון במרכיבי הידע הפדגוגי-תוכני.

ממצא זה מחזק ממצאי מחקרים קודמים שגם בהם נמצא כי למורים ידע פדגוגי חסר בחילוק (Sitrava, 2018) וממצאי מחקרים קודמים בהם רמת החוללות העצמית של המורים בפעולת החילוק נמוכה יותר בהשוואה לפעולות אחרות (שרייבר ופילו, 2020). ממצאי המחקר מובילים להמלצה בהרחבת הידע בפעולות הכפל והחילוק הן במסגרות ההכשרה של המורים והן במסגרת הליווי וההדרכה שלהם בעבודתם. חשוב לפתח הבנה עמוקה בקרב המורים בכל הנוגע לפעולות הכפל והחילוק על מנת לחזק את תחושת הביטחון שלהם בהוראתם של נושאים אלה.

ממצא בולט נוסף במחקר זה הינו שבכל פעולות החשבון יש הבדל מובהק בין מרכיב הידע 'ידע תוכן ותלמידים' למרכיבי הידע האחרים. במובהק המורים חשים פחות ביטחון לאתר שגיאות תלמידים, לצפות מראש שגיאות תלמידים, ולדעת מה הסיבות האפשריות לשגיאות אלה, לעומת הביטחון שלהם לפתור תרגילים או להמחיש אותם. קיימת חשיבות לידע של מורים לגבי תלמידים כיוון שהוא מאפשר למורים להתאים את רמת התרגילים ואת רמת ההסברים שלהם לתלמידים. למשתתפי המחקר חוסר ביטחון בידע זה ולכן ייתכן וההוראה שלהם חסרה ואיננה מיטבית. סיבה אחת אפשרית לחוסר ביטחון זה היא השתתפותם של מורים חדשים יחסית במחקר (כשליש מהמורים המשתתפים) אשר להם ניסיון מועט יחסית עם תלמידים. ממצא זה מחזק ממצאי מחקרים קודמים שגם בהם נמצא כי למורים יש ידע חסר או חלקי בנוגע לתלמידים (Schreiber & Fillo, 2019) וחוסר ביטחון בידע זה.

באופן כללי במחקר זה נמצא כי למורים ביטחון גבוה יותר ביכולתם לפתור תרגילים (CCK) מאשר ביכולתם לפתור בדרכים מגוונות (SCK), להמחיש, ללמד (KCT) וכאמור- להכיר דרכי חשיבה של תלמידים (KCS). כדי לשפר את תהליך ההוראה-למידה רצוי לתת את הדעת על מרכיבי ידע אלה: על המורים לבחור מטלה שיש בה כדי לעורר מוטיבציה אצל התלמידים; עליהם להבין את דרכי החשיבה של התלמידים, לזהות תפיסות שגויות ולהעלות השערות טובות בנוגע לגורמים להן; כמו כן, חשוב שהמורים ישתמשו באסטרטגיות מגוונות המותאמות ספציפית לתלמידים הזקוקים להן ויבנו תוכניות התערבות המותאמות לתלמידיהם. ממצאים אלה מובילים להמלצה לשים דגש בתוכניות לקידום הידע המקצועי של המורים על ידע פדגוגי הנדרש להוראה – הכרת דרכי החשיבה של התלמידים בנוגע לארבע פעולות החשבון, בנוגע למגוון ההיבטים המתמטיים (נושאים קלים יותר ללמידה או קשים יותר) ובנוגע לסיבות האפשריות לשגיאותיהם של התלמידים ולקשייהם.

רשימת מקורות

משרד החינוך, התרבות והספורט (2006). *תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים*. ירושלים: ת"ל.

שרייבר, א. ופילו ר. (2020). ידע ותחושת מסוגלות של מורים למתמטיקה לתלמידים לקויי למידה: הבדלים בין כפל לבין חילוק. *החינוך וסביבו מ"ב*, 91-71.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389–407.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, 84(2), 191–215.

Brouwers, A., & Tomic, W. (2000). A longitudinal study of teacher burnout and perceived efficacy-self in classroom management. *Teacher and Teaching Education,* 16(2), 239-253**.**

Saricam, H., & Sakiz, H. (2014). Burnout and Teachers Self-Efficacy among Teachers Working in Special Education in Turkey. *Educational Studies*, 40, 423-437.

Sitrava, T. R. (2018). An investigation of prospective mathematics teachers' knowledge of basic algorithms with whole numbers: A case of turkey. *European Journal of Educational Research, 7* (3), 513-528.

Schreiber, I., & Filo, R. (2019). Teaching multiplication and division in classes of learning-disabled students: Teachers' knowledge and sense of self-efficacy associated with their knowledge. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.). *International Symposium Elementary Mathematics Teaching* (392–401). Charles University.

פיתוח חשיבה יצירתית באמצעות שברים ומקצבים

ליבי עזריהו[1], אורית ברוזה[1], שי כהן[2], שרה הרשקוביץ[1] ואסתר עדי-יפה[2]

1.מכללת לוינסקי לחינוך, ת"א

2. אוניברסיטת בר-אילן, ר"ג

מבוא

אחד היישומים להשכלה רב-תחומית (STEAM education: Science, Technology, Engineering, Arts, and Mathematics) צף ועולה כפדגוגיה חדשה שמטרתה להגביר את העניין והמיומנות של התלמידים בתחומים מדעים, טכנולוגיה, הנדסה, אומנויות ומתמטיקה (Daugherty, 2013;). שילוב התחומים תורם לחדשנות, יצירתיות ומקדם כישורי פתרון בעיות (Liao, 2016; Root-NAEA, 2016;). מחקר זה בדק למידה המשלבת שברים במתמטיקה ומקצבים במוזיקה, בדגש על חשיבה יצירתית. סוג חשיבה זה הוא מרכזי במסמכים הדנים במיומנויות המאה ה-21 אך לא מיושם בפועל באופן יחסי ככל שמתקדמים בשלבי החינוך.

רקע תיאורטי

במחקר פיזה הנערך על ידי ה OECD (PISA 2021), חשיבה יצירתית מוגדרת על-ידי "היכולת לעסוק באופן פרודוקטיבי בייצור, הערכה ושיפור של רעיונות, שיכולים להיווצר בפתרונות מקוריים ויעילים, התקדמות בידע וביטויים המשפיעים על דמיון". חוקרים מאמינים שחשיבה יצירתית בתחומים שונים ניתנת להוראה, למידה ושיפור (McWilliam, 2007;Murdock, 2003) וישנן עדויות אמפיריות המראות את ההשפעה של אימון על חשיבה יצירתית (Scott, Leritz & Mumford, 2004). שני החוקרים, Guilford (1973) ו- Torrance (1969), הגדירו וביססו תהליכים שונים לצורך ניתוח והערכת חשיבה יצירתית: שטף (ייצור רעיונות רבים), גמישות (ייצור קטגוריות שונות ויכולת לעבור מצורת מחשבה לאחרת) ומקוריות (ייצור רעיונות). כל אחד משלושת המרכיבים הללו בודק את רמת החשיבה היצירתית של הלומד מזווית ראיה שונה.

בעוד שחשיבה יצירתית מתמטית קשורה בדרך כלל לפתרון והצבת בעיות, (Leikin, 2009), בחשיבה יצירתית מוזיקלית שמים את הדגש על התהליך עצמו ועל הפקת תוצרים יצירתיים (Webster, 1990). במחקר זה בדקנו את מדדי היצירתיות בסולם של Guilford (1973) ו- Torrance (1969). מרכיב השטף בדק את הידע, המיומנויות, והיכולות מוזיקליות של התלמיד. מרכיב הגמישות בדק את יכולת התלמיד לסיים פסוק מוזיקלי בדרכים שונות. מרכיב המקוריות זהה עד כמה תשובת התלמיד ייחודית והאם תשובתו זהה לרוב תשובות התלמידים. במחקר הנוכחי, בדקנו את ההשפעה של תוכנית התערבות במתמטיקה ומוזיקה על ידע של שברים ומקצבים של תלמידי כיתות ד', בהשוואה לבני גילם שקיבלו הוראת מתמטיקה ומוזיקה סטנדרטית.

שאלות המחקר

1. האם למידה רב תחומית המשלבת מוזיקה ומתמטיקה משפרת את השגי הלומדים במתמטיקה ו/או במוזיקה?
2. האם למידה רב תחומית המשלבת מוזיקה ומתמטיקה בדגש בהוראה של חשיבה יצירתית תורמת לחשיבה יצירתית מתמטית ו/או מוזיקלית?

מתודולוגיה

משתתפים

אוכלוסיית המחקר כללה 86 תלמידי כיתות ד' ללא הכשרה מוזיקלית קודמת, מרקע סוציו-אקונומי ממעמד הביניים, בארבע כיתות של אותו בית ספר יסודי בפיקוח משרד החינוך בישראל. הכיתות חולקו אקראית לשלוש כיתות "מוזימטיקה" תוך שימוש בדגשים שונים בהוראה של חשיבה יצירתית: כיתת מתמטיקה יצירתית (n = 23), כיתת מוזיקה יצירתית (n = 21), וכיתת מתמטיקה ומוזיקה יצירתית (n = 23), וכיתת בקרה (n = 19).

תכנית ההתערבות

המורות למתמטיקה לימדו את נושא השברים במשך 6 שיעורים. בזמן זה התלמידים למדו על מהות ומשמעות השבר, ייצוג חלקים משלם במעגלים ואיורים והבנת שברים עם מונה גדול מ-1, גודל השבר ושוויון בין שברים שונים ובנוסף חיבור וחיסור שברים עם מכנים זהים ומוכלים. כל שיעור התחיל עם סקירה קצרה של השיעור האחרון והמשיך עם נושא חדש. המורות השתמשו בייצוגים גרפיים, עיגולים, וטבלאות כדי להדגים ולייצג שברים. במקביל לכך המורה למוזיקה למדה את נושא המקצב וחלוקת הזמן במוזיקה באופן חווייתי. הילדים למדו לדקלם, למחוא ולכתוב תבניות מקצב ולמדו להשוות את הערכים של מקצבי המוזיקה לשברים. בנוסף, התלמידים למדו לחבר ולחסר ערכי מקצב שונים ולהשוותם לשברים עם מכנים זהים או מוכלים. הנושאים נלמדו במקביל הן בשיעורי מתמטיקה והן בשיעורי מוזיקה כחלק ממערכת השעות הבית ספרית.

תוכנית ההתערבות בנושא שברים התקיימה ב-4 כיתות ד'. 3 כיתות היו קבוצות מחקר וכיתה אחת הייתה כיתת ביקורת. בכיתות המחקר התקיימה החלוקה הבאה: כיתת "יצירתיות מתמטית", כיתת "יצירתיות מוזיקלית" וכיתת "יצירתיות מוזיקלית ומתמטית".

כלי המחקר

א. מבחן מתמטי ממוחשב: מבחן השברים נלקח מתוכנית הלימודים של משרד החינוך לכיתות ד' ונערך לפני ואחרי ההתערבות. המבחן כלל שאלות בנושאים מהות השבר, השוואת שברים וחיבור וחיסור שברים בעלי מכנים זהים ו/או מוכלים ומשימה יצירתית בה התלמידים התבקשו לכתוב כמה שיותר תרגילים שתוצאותיהם היא שלם. המטלה היצירתית נותחה לפי מדדי היצירתיות בהשראת Guilford (1973) ו-Torrance (1969): שטף, גמישות ומקוריות.

ב. מבחן מוזיקלי ממוחשב: מבחן המוזיקה נערך לפני ואחרי ההתערבות וכלל 2 שאלות בנושא מקצבים: כתיבת מקצבים על פי הוראות וסימון תיבות מקצב יוצאות דופן ומשימה יצירתיות בה התלמידים התבקשו לכתוב כמה שיותר מקצבים שימלאו תיבה אחת שלמה בבחירה של 2/4, 3/4, 4/4 או 5/4. המטלה היצירתית נותחה לפי מדדי היצירתיות בהשראת Guilford (1973) ו-Torrance (1969): שטף, גמישות ומקוריות.

ממצאים

הישגי התלמידים במתמטיקה ובמוזיקה

ניתוח הציונים במתמטיקה לא הצביע על הבדלים קבוצתיים במבחן לפני הניסוי ($p=0.806$, $\eta2=0.01$). ציוני המבחנים במתמטיקה נותחו עוד באמצעות מדידות חוזרות של ANOVA 2 (לפני/אחרי) X 4 (קבוצות). הניתוח הצביע על השפעה עיקרית של נקודת זמן ($p's<.001$, $\eta2=0.74$), לפיה כל ארבע הכיתות השתפרו, ($p's<.001$), כמו גם את האינטראקציה של זמן X קבוצה ($p = .002$, $\eta2=0.02$). ניתוח פוסט-הוק של Bonferroni הצביע על כך שלמרות שכל ארבע הכיתות השתפרו, האינטראקציה הופיעה מכיוון שבמבחן לפני הניסוי כיתת הביקורת קיבלה ציונים נמוכים יותר משאר הכיתות (כיתת מוזיקה יצירתית/כיתת מתמטיקה יצירתית, $p<.001$, כיתת מוזיקה ומתמטיקה יצירתית $p = 0.01$). לא היו הבדלים נוספים בין שלוש כיתות הניסוי (Bonferroni, $p=1.00$)

ניתוח תוצאות המוזיקה לא הצביע על הבדלים קבוצתיים במבחן לפני הניסוי ($p=0.079$, $\eta2=0.08$). ציוני המבחנים במוזיקה נותחו בהמשך באמצעות מדידות חוזרות של ANOVA 2 (לפני/אחרי) X 4

(קבוצות). הניתוח הצביע על השפעה עיקרית של קבוצה ונקודת זמן ($p's<.001$), כמו גם אינטראקציית זמן X קבוצות ($p's<.001$). בשל ההבדל (הלא מובהק) במבחן שלפני הניסוי, התוצאות שלאחר המבחן נותחו עוד עם ציוני המבחן שלפני הניסוי כמשתנה. ניתוח פוסט-הוק של Bonferroni הצביע על כך שלמרות שכל ארבע הכיתות השתפרו, האינטראקציה הופיעה מכיוון במבחן אחרי הניסוי כיתת הביקורת קיבלה ציונים נמוכים יותר משאר הכיתות ($p<.001$). בנוסף, כיתת המתמטיקה והמוזיקה יצירתית קיבלה ציון גבוה משמעותית מכיתת המוזיקה היצירתית ($p = 0.013$). לא היו הבדלים נוספים בין שלושת כיתות הניסוי (כיתת מוזיקה יצירתית מול מתמטיקה יצירתית $p = .229$, כיתת מתמטיקה יצירתית מול כיתת מוזיקה ומתמטיקה יצירתית $p=1.00$)

חשיבה יצירתית במתמטיקה ובמוזיקה בדגשי הוראה שונים

ציוני מבחן החשיבה היצירתית המתמטית נותחו באמצעות מבחן Kruskal Wallis שאינו פרמטרי. הבדלים קבוצתיים משמעותיים התגלו בשלב שלאחר המבחן עבור שטף ($H=16.50, p<.001$) ומקוריות ($H=8.14, p=.043$), אך לא עבור גמישות ($H=4.67, p=.198$) (ראו טבלה 1). רק ציוני שטף ומקוריות נותחו בהמשך. השוואת פוסט-הוק הצביעה על כך שלא הופיעו הבדלים קבוצתיים בין שלוש כיתות הניסוי עבור שטף ($H=3.64, p=.162$) או מקוריות ($H=4.81, p=.095$). השוואה זוגית בין שלוש כיתות הניסוי לכיתת הביקורת הראתה שכל שלוש כיתות הניסוי הראו שטף רב יותר מכיתת הביקורת וכי כיתת מוזיקה ומתמטיקה יצירתית הראתה גם מקוריות רבה יותר (כיתת מוזיקה יצירתית, $H=12.16, p=.001; H=.091, p=.342$; כיתת מתמטיקה יצירתית $H=5.66, p=.017; H=0.83, p=.363$; וכיתת מוזיקה ומתמטיקה יצירתית $H=10.27, p=.001; H=4.56, p<.033$ עבור שטף ומקוריות בהשוואה כיתת הביקורת, בהתאמה.

ציוני מבחן החשיבה היצירתית המוזיקלית נותחו באמצעות מבחן Kruskal Wallis שאינו פרמטרי. הבדלים קבוצתיים מובהקים התגלו בשלב שלאחר המבחן עבור שטף ($H=29.94, p<.001$), גמישות ($H=24.85, p <.001$) ומקוריות ($H=18.26, p<.001$) (ראו טבלה 1). רק ציוני שטף וגמישות נותחו עוד יותר. השוואת פוסט-הוק הצביעה על כך שהופיעו הבדלים קבוצתיים משמעותיים בין שלוש קבוצות הניסוי עבור שטף ($H=9.14, p=.010$), גמישות ($H=9.37, p=.009$) ומקוריות ($H=7.21, p<. 027$). תיקון Bonferroni עומד על $p <. 0125$. ציוני שטף, גמישות ומקוריות נמוכים יותר נמצאו בכיתת הביקורת בהשוואה ל-3 כיתות הניסוי. ההשוואה בין שלוש קבוצות הניסוי הצביעה על ביצועים טובים יותר של כיתת מוזיקה ומתמטיקה יצירתית בשטף, גמישות ומקוריות בהשוואה לכיתות מוזיקה יצירתית ומתמטיקה יצירתית, אם כי הבדלים משמעותיים בתיקון Bonferroni התגלו רק בין כיתת מוזיקה ומתמטיקה יצירתית וכיתת מתמטיקה יצירתית בשטף וגמישות. לא הופיעו הבדלים בין כיתת המוזיקה היצירתית והמתמטיקה היצירתית.

טבלה 1
ממוצעי ציוני מבחן חשיבה יצירתית מתמטית ומוזיקלית בדגשי הוראה שונים

	מתמטיקה				מוזיקה			
	ביקורת	מוזיקה יצירתית	מתמטיקה יצירתית	מוזיקה ומתמטיקה יצירתית	ביקורת	מוזיקה יצירתית	מתמטיקה יצירתית	מוזיקה ומתמטיקה יצירתית
שטף	4.79	7.62	6.57	7	1.16	2.28	2.69	4.17
מגוון	1.53	1.81	2	2.04	1.16	1.95	2.08	3.13
מקוריות	0	0.05	0.04	0.26	0.21	0.8	0.78	1.43

דיון

הישגי התלמידים במתמטיקה ובמוזיקה

לאחר תוכנית ההתערבות, השיגו 3 קבוצות הניסוי, כיתת מתמטיקה יצירתית, כיתת מוזיקה יצירתית וכיתת מתמטיקה ומוזיקה יצירתית, ציונים גבוהים יותר במבחני שברים במתמטיקה ומקצבים במוזיקה

ביחס לקבוצת הביקורת. הממצאים עולים בקנה אחד עם מחקרים קודמים המראים שאימון מוזיקלי מפורש משפר מיומנויות קוגניטיביות ואקדמיות אחרות (Azaryahu et al., 2020; Courey, Balogh, Siker, and Paik, 2012;). בנוסף, הממצאים עולים בקנה אחד עם מחקרים קודמים המציינים את הלמידה הרב-תחומית כמסגרת פדגוגית הכוללת מתודות חינוכיות מפורשות, כאשר תחום אחד טבוע בתחום השני, והוראת המורה מכוונת את התלמידים לקשר ביניהם (Mejias , Thompson, Sedas, Rosin, Soep, Peppler, and Bevan, 2021).

חשיבה יצירתית במתמטיקה ובמוזיקה בדגשי הוראה שונים

במחקר הנוכחי התלמידים בשלוש כיתות הניסוי פיתחו את החשיבה היצירתית שלהם בהשוואה לכיתת הביקורת. מבחן החשיבה היצירתית במתמטיקה הראה כי כל שלוש כיתות הניסוי הראו שטף רב יותר מכיתת הביקורת וכי כיתת מוזיקה ומתמטיקה יצירתית הראתה גם מקוריות רבה יותר, אך לא היו הבדלים בין שלוש כיתות הניסוי. מבחן היצירתיות במוזיקה הראה כי ציוני שטף, גמישות ומקוריות נמוכים יותר נמצאו בכיתת הביקורת בהשוואה ל-3 כיתות הניסוי. ההשוואה בין שלוש קבוצות הניסוי הצביעה על ביצועים טובים יותר של כיתת מוזיקה ומתמטיקה יצירתית בשטף, גמישות ומקוריות בהשוואה לכיתות מוזיקה יצירתית ומתמטיקה יצירתית.

רשימת מקורות

Azaryahu, L., Courey, S. J., Elkoshi, R., & Adi-Japha, E. (2020). ‘MusiMath’and ‘Academic Music’–Two music-based intervention programs for fractions learning in fourth grade students. *Developmental science,* 23(4), e12882.

Courey, S. J., Balogh, E., Siker, J. R., & Paik, J. (2012). Academic music: Music instruction to engage third-grade students in learning basic fraction concepts. *Educational studies in mathematics,* 81(2), 251-278.

Daugherty, M. K. (2013). The prospect of an "A" in STEM education. *Journal of STEM Education: Innovations and Research*, 14(2), 10–15.

Guilford, J. P. (1973). *Characteristics of Creativity.* Springfield, IL: Illinois State Office of the Superintendent of Public Instruction, Gifted Children Section.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students,* 9, 129-145.

Liao, C. (2016). From interdisciplinary to transdisciplinary: An arts-integrated approach to STEAM education. *Art Education,* 69(6), 44-49.

McWilliam, E. (2007). Is creativity teachable? Conceptualizing the creativity/pedagogy relationship in higher education. In *Proceedings of the 30th HERDSA Annual Conference* (pp. 1-8). Higher Education Research and Development Society of Australasia Inc.

Mejias, S., Thompson, N., Sedas, R. M., Rosin, M., Soep, E., Peppler, K., ... & Bevan, B. (2021). The trouble with STEAM and why we use it anyway. *Science Education,* 105(2), 209-231.

Murdock, M. C. (2003). The effects of teaching programmes intended to stimulate creativity: A disciplinary view. *Scandinavian Journal of Educational Research,* 47(3), 339-357.

National Art Education Association [NAEA] (2016). Using art education to build a stronger workforce. Accessed December 10, 2017.

Scott, G., Leritz, L. E., and Mumford, M. D. (2004). The effectiveness of creativity training: A quantitative review. *Creativity Research Journal*, 16(4), 361-388.

Torrance, E. P. (1969). Creativity: What research says to the teacher, *Series*, No. 28.

Webster, P. R. (1990). Creativity as creative thinking. Music Educators Journal, 76(9), 22-28.

התייחסות של מבוגרים לגבי הערכת ידע גיאומטרי של ילדים צעירים- המקרה של משולשים

רותי ברקאי, מכללת סמינר הקיבוצים, אוניברסיטת תל אביב
אסתר לוינסון, אוניברסיטת תל אביב
דינה תירוש, אוניברסיטת תל אביב
פסיה צמיר, אוניברסיטת תל אביב

רקע תיאורטי

מחקרים רבים חקרו ידע של מורים לגיל הרך בהקשר של ילדים צעירים ופעילויות מתמטיות (למשל, Ginsburg, 2016; Tsamir, et al., 2015), מחקר זה מתייחס למבוגרים (שאינם גננות), המבלים זמן רב עם ילדים, ויכולים להשפיע על הידע המתמטי שלהם (למשל, הורים, סבתות, דודים וכדומה).

תכניות לימודים ומחקרים הצביעו על החשיבות של מעורבות ילדים צעירים בפעילויות גיאומטריות. עם זאת, מחקרים הראו כי הורים נוטים יותר לערב את ילדיהם בפעילויות מספריות, מאשר בפעילויות גיאומטריות (למשל, Zippert, et al., 2020). ילדים נחשפים לצורות גיאומטריות מגיל צעיר. לפיכך, חשובה התערבות והכוונה נכונה לגבי חשיבה גיאומטרית שלהם כבר בגיל צעיר. בתכנית הלימודים במתמטיקה לקדם יסודי מצוין שילדים צעירים, לפני כניסתם לכיתה א', אמורים להבחין בין מצולעים שונים על פי מספר הצלעות והקודקודים של כל מצולע, וכן לזהות ולשיים צורות גיאומטריות שונות (משרד החינוך, 2010). כמו כן, יש חשיבות לקידום ולפיתוח יכולת הנמקה מתמטית בגיל הרך (למשל, NCTM 2006).

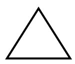
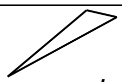
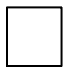
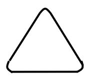
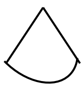
מחקר זה מתמקד במושג הגיאומטרי: משולש. שאלות המחקר הן: (1) האם מבוגרים מזהים נכון דוגמאות ואי-דוגמאות של משולשים? (2) האם הם מציגים נימוקים גיאומטריים מספקים לקביעתם האם הצורה היא משולש (או שאינה משולש)? (3) כיצד מבוגרים מעריכים תשובות של ילד, בגיל גן, לגבי זיהוי משולשים? (4) כיצד הם מעריכים את הנימוקים המוצגים להם?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 148 מבוגרים. המשתתפים היו בגילאי 20 עד 60, כאשר 88% הם בעלי רקע אקדמי ואף לא אחד מהם בעל מקצוע שקשור בגיל הרך (למשל, גננות).

המשתתפים במחקר השיבו על שני שאלונים. השאלון הראשון כלל חמש צורות. לגבי כל צורה המשתתפים התבקשו לענות: האם זה משולש? כן / לא. מדוע? הצורות כללו דוגמאות ואי דוגמאות, ידידותיות ולא ידידותיות, של משולשים (ראו טבלה 1). השאלון השני כלל את אותן חמש צורות שהוצגו בשאלון הראשון ותשובות של ילד בגיל גן (יוסי- שם בדוי- ילד בן חמש) לשאלות שהוצגו בשאלון הראשון. כלומר, לגבי כל צורה, יוסי קבע האם הצורה היא משולש (או לא) ונימק את קביעתו. המבוגרים נשאלו, לגבי כל תשובה של יוסי, האם יוסי זיהה נכון את הצורה? האם היית מקבל את ההסבר של יוסי? מדוע? נציין כי יוסי זיהה נכון חלק מהצורות (משולש שווה צלעות, ריבוע). כל הנימוקים שיוסי הציג לא היו מספקים גיאומטרית (ראו טבלה 1).

טבלה 1- התשובות של יוסי

האם זה משולש?	*ידידותיות*	*לא ידידותיות*
דוגמאות:		
התשובה של יוסי:	*"זה משולש כי רואים שזה משולש"*	*"זה לא משולש כי זה יותר מדי ארוך"*
אי דוגמאות:		 
התשובה של יוסי:	*"זה לא משולש כי זה ריבוע"*	*"זה משולש כי יש לו 3 קווים"* *"זה משולש כי זה כמו משולש פיצה"*

ממצאים

טבלה 2 מציגה את שכיחות השיפוטים הנכונים של המבוגרים לגבי חמש הצורות שהוצגו להם (דוגמאות ואי-דוגמאות של משולשים).

טבלה 2- שכיחות (%) השיפוטים הנכונים של המבוגרים (N=148)

	דוגמאות של משולשים		אי דוגמאות של משולשים		
	ידידותי	לא ידידותי	ידידותי	לא ידידותי	
הצורה	שווה צלעות	קהה זווית	ריבוע	"משולש" מעוגל	"משולש" פיצה
שכיחות	148 (100)	140 (95)	148 (100)	65 (44)	141 (89)

כצפוי, הדוגמא הידידותית של משולש (משולש שווה הצלעות) והאי-דוגמא הידידותית של משולש (ריבוע) זוהו נכון על ידי כל המשתתפים. פחות ממחצית המשתתפים זיהו נכון וקבעו כי "משולש" מעוגל הפינות אינו משולש.

ההסברים שהציגו המבוגרים לקביעותיהם הנכונות לגבי חמש הצורות, מוינו להסברים גיאומטריים מספקים ולכאלו שאינם מספקים. למשל, הסבר גיאומטרי מספק לכך ש"משולש" הפיצה אינו משולש הוא: "בגלל שיש לצורה קו שאינו ישר". הסבר שאינו מספק גיאומטרית היה: "כי ככה לא נראה משולש". באופן כללי, מרבית המבוגרים הציגו הסברים גיאומטריים מספקים, המתייחסים לתכונות קריטיות של משולש. מעניין לציין שגם בהתייחס לריבוע, שבשונה משאר אי-הדוגמאות למשולש שהוצגו, יש לו שם גיאומטרי אחר, מרבית המבוגרים (86%) התייחסו לתכונות קריטיות של משולש ורשמו שזה אינו משולש כי "יש לו ארבע צלעות" או "אין לו בדיוק שלוש צלעות".

טבלה 3 מציגה את שכיחות התשובות הנכונות של המבוגרים לגבי השיפוטים של יוסי. לגבי כל צורה, שכיחות התשובות הנכונות מתייחסת רק למבוגרים שהם עצמם זיהו נכון את אותה צורה.

טבלה 3- שכיחות (%) תשובות נכונות לגבי השיפוטים של יוסי

	דוגמאות של משולשים		אי דוגמאות של משולשים		
	ידידותי	לא ידידותי	ידידותי	לא ידידותי	
הצורה	שווה צלעות (N=148)	קהה זווית (N=140)	ריבוע (N=148)	"משולש" מעוגל (N=65)	"משולש" פיצה (N=141)
יוסי ענה:	נכון	שגוי	נכון	שגוי	שגוי
שכיחות	147 (99)	134 (96)	143 (97)	65 (100)	122 (87)

מטבלה 3 ניתן לראות כי מרבית המבוגרים העריכו נכון את השיפוטים של יוסי. מעניין לציין כי היו מבוגרים שזיהו נכון כי המשולש קהה הזווית הוא אכן משולש אך קבעו כי יוסי ענה נכון כאשר אמר שזה לא משולש והוסיפו: "יוסי הוא רק ילד ולכן הוא לא מבין שזה משולש". במילים אחרות, הם קיבלו תשובה לא נכונה של ילד צעיר בגלל גילו. בהתייחס ל"משולש" פיצה, אחד המשתתפים כתב: "לא חשבתי על זה ככה. אבל זה באמת משולש פיצה". מבוגר זה התייחס להסבר שיוסי הציג וייתכן שהסבר זה העלה אצלו את המחשבה שהצורה היא אכן משולש. בהתייחס לריבוע, נמצא שמי שרשם שיוסי טעה התייחס לנימוק שיוסי נתן (ולא רק לשיפוט). למשל, אחד המבוגרים רשם: "יוסי טעה. זה לא משולש כי יש לו ארבע צלעות".

בהתייחס להערכת המבוגרים את הנימוקים שהציג יוסי לקביעתו התייחסנו, לגבי כל צורה, רק למבוגרים שהם עצמם זיהו נכון את הצורה וגם העריכו נכון את השיפוט של יוסי. נזכיר כי הנימוקים שהציג יוסי לא היו מספקים גיאומטרית ולא התייחסו לתכונות הקריטיות של משולש. כמו כן נזכיר כי מרבית המבוגרים הציגו הסברים גיאומטריים מספקים כאשר הם עצמם הסבירו את קביעתם לגבי הצורות.

מטבלה 4 ניתן לראות שפרט למשולש קהה הזווית, המבוגרים נטו לקבל את הנימוקים של יוסי.

טבלה 4- שכיחות (%) התייחסות לנימוקים של יוסי

	דוגמאות של משולשים		אי דוגמאות של משולשים		
	ידידותי	לא ידידותי	ידידותי	לא ידידותי	
הצורה	שווה צלעות (N=147)	קהה זווית (N=134)	ריבוע (N=143)	"משולש" מעוגל (N=65)	"משולש" פיצה (N=122)

הנימוק של יוסי:	רואים שזה משולש	זה ארוך מדי	זה ריבוע	יש לו שלושה קווים	זה כמו פיצה
לא קיבלו	50 (34)	66 (49)	12 (8)	14 (22)	31 (25)
קיבלו	71 (48)	43 (32)	118 (83)	41 (63)	61 (50)
לא ענו	26 (18)	25 (19)	13 (9)	10 (15)	30 (25)

ההסברים שהציגו המבוגרים לקבלת הנימוקים של יוסי חולקו לארבע קטגוריות עיקריות:

א. התייחסות לגיל של יוסי. למשל, בהתייחס לנימוק של יוסי לגבי משולש שווה צלעות, אחד המשתתפים רשם: "בשביל ילד צעיר ההסבר מתקבל". בהתייחס לריבוע, אחד המשתתפים הסביר: "מילד בגן ילדים זה מאוד יפה שהוא הצליח לזהות שזה ריבוע". אחד המשתתפים כתב, לגבי המשולש קהה הזווית: "הוא [יוסי] עדיין צעיר ולא מבין את עניין אורך הצלעות".

ב. התייחסות לתכונות קריטיות. בקטגוריה זו נכללו מבוגרים שקיבלו את הנימוק של יוסי אבל התייחסו גם לתכונות קריטיות. למשל, בהתייחס למשולש שווה הצלעות אחד המשתתפים רשם: "אני מקבל את הנימוק של יוסי, אבל אפשר להיות יותר מדויקים ולהוסיף שיש לו שלוש צלעות". לגבי ה"משולש" פיצה: "אני אכן מקבל את זה כי זה באמת נראה כמו פיצה. אבל במשולש אין קו עקום".

ג. התייחסות להיבטים רגשיים. חלק מהמבוגרים ציינו כי הנימוק של יוסי היה יצירתי, נחמד או 'מגניב'. למשל, בהתייחס למשולש קהה הזווית, מבוגר כתב: "כל תשובה תהיה מקובלת בעיניי כי קשה לילדים להסביר רעיונות מופשטים". מבוגר זה מביע את חוסר הרצון שלו לומר לילד שהוא טועה .

ד. התייחסות להיבטים ויזואליים. בקטגוריה זו נכללו מבוגרים שקיבלו את הנימוקים של יוסי כי הם קשורים להיבט הוויזואלי של הצורה. אחד המבוגרים כתב, בהתייחס למשולש שווה הצלעות: "ככה הוא מזהה משולש, עם העיניים שלו". בהתייחס ל"משולש" מעוגל הפינות: "זה מקובל כי הצורה הכללית באמת נראית כמו משולש".

טבלה 5 מציגה את שכיחות כל אחת מארבע הקטגוריות האלו. הטבלה מתייחסת רק למבוגרים שזיהו נכון את הצורה, העריכו נכון את השיפוטים של יוסי וקיבלו את הנימוק שיוסי הציג. כפי שניתן לראות מטבלה 5 מרבית המבוגרים התייחסו לגילו של יוסי. כלומר, הם טענו כי הנימוק מתאים לאור גילו הצעיר של יוסי. בהתייחס לריבוע, מרבית המבוגרים, שקיבלו את הנימוק של יוסי, לא הסבירו מדוע. ממצא זה עולה בקנה אחד עם הממצא בטבלה 4 המראה כי הנימוק של יוסי לריבוע היה המקובל ביותר מבין הנימוקים.

טבלה 5- שכיחות (%) ההסברים שהציגו המבוגרים בקבלתם את ההסבר של יוסי

	דוגמאות של משולשים		**אי דוגמאות של משולשים**		
	ידידותי	**לא ידידותי**	**ידידותי**	**לא ידידותי**	
הצורה	שווה צלעות (N=71)	קהה זווית (N=43)	ריבוע (N=118)	"משולש" מעוגל (N=41)	"משולש" פיצה (N=61)
ההסבר של יוסי	רואים שזה משולש	זה ארוך מדי	זה ריבוע	יש לו שלושה קווים	זה כמו פיצה
הגיל	43 (61)	32 (74)	25 (21)	20 (49)	32 (52)
תכונות קריטיות	2 (3)	0 (0)	13 (11)	6 (15)	3 (5)
היבטים רגשיים	2 (3)	1 (2)	7 (6)	0 (0)	4 (7)
ויזואליות	5 (7)	2 (5)	12 (13)	6 (15)	13 (21)
לא ענו	19 (27)	8 (19)	61 (52)	9 (22)	9 (15)

דיון

שאלת המחקר הראשונה הייתה האם מבוגרים מזהים דוגמאות ואי-דוגמאות של משולשים. מהממצאים עולה כי כמעט כל המבוגרים זיהו נכון הדוגמאות והאי- דוגמאות, הידידותיות והלא ידידותיות, של משולשים. בדומה למחקר לגבי ידע גננות (Tsamir, et al., 2015), ולמחקר לגבי ידע ילדי גן (Tsamir, et al., 2008), הצורה היחידה שהיה קושי רב בזיהוי שלה היה ה"משולש" מעוגל הפינות. ואכן, צורה זו דומה לאב הטיפוס של משולש. בנוסף, צורה זו זהה לתמרור בכביש, המכונה "משולש אזהרה". לפיכך, ייתכן כי המבוגרים לא הבחינו או התעלמו מהפינות המעוגלות של הצורה.

מעניין לציין, שלא כל המבוגרים שזיהו נכון את הצורות, העריכו נכון את השיפוט של יוסי. מההסברים שהמבוגרים הציגו נראה כי חלקם קיבלו את השיפוט השגוי של יוסי, כי הוא ילד צעיר. קבלה של שיפוט שגוי בשל גילו הצעיר של הילד, עלולה לחזק, אצל הילד, חשיבה חזותית שגויה לגבי משולש (van Hiele & van Hiele, 1958). מחקרים מראים כי ילדים צעירים מסוגלים להבחין בתכונות גיאומטריות של הצורה, גם אם הם לא בהכרח יוצרים קשרים בין תכונות אלו (Sarama & Clements, 2009; van Hiele & van Hiele, 1958).

בהתייחס להסברים שהמבוגרים הציגו לגבי זיהוי הצורות, נמצא שרוב המבוגרים נתנו הסברים גיאומטריים מספקים והתייחסו לתכונות הקריטיות של משולש. עם זאת, רוב המבוגרים היו מוכנים לקבל את הנימוקים של יוסי, שלא כללו התייחסות לתכונות הקריטיות של משולש. כך, למשל, בהתייחס למשולש שווה הצלעות, מבוגרים קיבלו את הנימוק של יוסי שזה משולש כי רואים שזה משולש (סביר להניח כי סוג זה של נימוק הוא שהביא להחלטה של יוסי שמשולש קהה הזווית אינו משולש). נציין כי הנימוק של יוסי, לגבי הריבוע ש"זה לא משולש כי זה ריבוע" אינה מספקת. עם זאת, מתוך 118 המבוגרים שקיבלו את הנימוק של יוסי, רק 13 מבוגרים כתבו שהם יוסיפו לנימוק זה התייחסות לתכונות קריטיות. מכאן עולה השאלה: האם ראוי לקבל את ההסבר של יוסי? ומה אם יוסי יטען שריבוע הוא לא מלבן כי הוא ריבוע?

הממצאים הצביעו על כך שחלק ניכר מהמבוגרים קיבלו את נימוקיו של יוסי בגלל גילו הצעיר. ייתכן וממצא זה יכול להסביר מדוע הורים מעדיפים לעסוק עם ילדיהם בפעילויות מספריות יותר מאשר בפעילויות גיאומטריות (למשל, Zippert, et al., 2020). ייתכן שמבוגרים אלו סבורים שילדים צעירים מתקשים להבחין בתכונות גיאומטריות של צורות. מכאן עולה הסוגייה לגבי מודעות של מבוגרים לגבי יכולות מתמטיות של ילדים. ממצאי מחקר זה יכולים לסייע בתכנון סדנאות למבוגרים שמטרתן קידום יכולות גיאומטריות של ילדים. סדנאות כאלה יכולות גם להציע פעילויות משחקיות להעלאת מודעות המבוגרים להזדמנויות שיש לקידום ידע של ילדים לגבי תכונות קריטיות ותכונות לא קריטיות של צורות גיאומטריות.

המחקר שמתואר במאמר זה ממומן על ידי הקרן הלאומית למדע (מענק מחקר 1631/18)

רשימת מקורות

משרד החינוך והתרבות (2010). תכנית לימודים במתמטיקה לגן הילדים. האגף לתכנון ופיתוח תכניות לימודים, ירושלים.

Ginsburg, H. P. (2016). Helping early childhood educators to understand and assess young children's mathematical minds. *ZDM Mathematics Education*, *48*(7), 941-946.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). Curriculum focal points for kindergarten through grade 8 mathematics. Reston, VA: NCTM.

Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 81-95.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: Triangles, circles, and cylinders. *ZDM Mathematics Education*, *47*(3), 497-509.

van Hiele, P. M., & van Hiele, D. (1958). A method of initiation into geometry. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on Methods of Initiation into Geometry*. Walters.

Zippert, E. L., Douglas, A. A., Smith, M. R., & Rittle-Johnson, B. (2020). Preschoolers' broad mathematics experiences with parents during play. *Journal of Experimental Child Psychology*, 192, https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.104757.

השפעת ההקשר החוץ-מתמטי של מילוי מים בבריכה על הבניית ידע ופיתוח חשיבה הצטברותית במבוא ללימוד חשבון אינטגרלי בתיכון

גילת פלאח, אוניברסיטת תל אביב ובית ספר תיכון עירוני מקיף גולדווטר
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב
אנטולי קורופטוב, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט

מבוא

תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה ל-5 יחידות לימוד בנושא האינטגרציה השתנתה באופן משמעותי; ותוצג בפני התלמיד באמצעות גישת ההצטברות (אתר המפמ״ר, 2021; Dreyfus et al., 2021). השינויים בתכנית דורשים בחינת תהליכי הלמידה והבניית הידע על האינטגרל כהצטברות המאפשרים את הצעדים הראשונים של התלמידים בגישה זו. מחקר זה בוחן פיתוח של *חשיבה הצטברותית* המוגדרת כשילוב של ידע הכולל את ה"חתיכות" המצטברות, את הדינמיות של תהליך ההצטברות של ה"חתיכות" ויישום ידע זה לאחר בנייתו (פלאח ואחרים, 2022) דרך פעילות למידה של פונקציית הצטברות תוך הקשר חוץ-מתמטי של מילוי מים בבריכה, כמבוא ללימודי האינטגרציה בכיתה יא ברמה של 5 יחידות במתמטיקה.

רקע תיאורטי

תמצית מתמטית

למושג האינטגרל ניתן לגשת בשתי דרכים: או באמצעות גישת הפונקציה הקדומה המשתמשת בהגדרת האינטגרציה כפעולה הפוכה לנגזרת; או באמצעות *גישת ההצטברות* המשתמשת בהגדרת האינטגרציה כסכום רימן של קטעי זמן כפול קצב השינוי באותו הזמן הנותנים את הכמות המצטברת.

רקע מהמחקר

חוקרים מדווחים על קושי של סטודנטים בנושא האינטגרל (למשל Orton, 1983; Rösken & Rolka, 2007) וייתכן כי הסתמכות על האינטגרל כפונקציה קדומה היא אחת הסיבות כי סטודנטים אינם תופסים את משמעות ההגדרה של האינטגרל המסוים (Bressoud, 2009).

מאידך, אחת הסיבות לקושי של סטודנטים בהבנת פונקציית הצטברות היא מורכבות תהליך ההצטברות והיותו חדש להם (Thompson & Silverman,2008). עם זאת, מושג האינטגרל המבוסס על רעיון ההצטברות הינו פרודוקטיבי (למשל, Carlson, et al. , 2003; Kouropatov, 2016).

חוקרים מתייחסים להצטברות בשני אופנים שונים מבחינת הפרספקטיבה הדידקטית: הצטברות הנובעת מקצב שינוי (למשל, Carlson et al., 2003; Kouropatov & Dreyfus, 2013; Thompson & Silverman, 2008); והצטברות הנובעת מהתווספות "חתיכות" (למשל, Jones, 2015).

הקשר חוץ מתמטי

בשאלות אינטגרציה ישנו שימוש נפוץ בהקשר של מהירות ודרך המשמש למציאת הכמות המצטברת (מרחק) מתוך פונקציית קצב השינוי (מהירות כפונקציה של זמן); והקשר של מילוי מיכל במים המשמש למציאת הכמות המצטברת (כמות המים) מתוך פונקציית קצב השינוי (קצב מילוי המים). הקשרים אלו מאפשרים לתלמיד לפתח אסטרטגיית פתרון בלתי פורמלית ותלוית הקשר אשר עשויה לסייע בהמשך לפתח הכללה של הנושא (Gravemeijer & Doorman, 1999). מאידך, מחקרים בחינוך מתמטי

ומדעי מראים כי תלמידים מתקשים ליישם את הידע המתמטי שלהם בהקשרים שונים (למשל, Jones, 2015) כיוון שהקשר חוץ-מתמטי דורש הבנה של המשתנים בביטוי המתמטי על מנת ליישמו.

הפשטה בהקשר

הפשטה בהקשר (Abstraction in Context- AiC) (Dreyfus et al., 2015) היא מסגרת תיאורטית המציעה כלי לניתוח תהליכי למידה והבניית ידע מתמטי חדש ללומד ובה ההקשר מהווה מרכיב מרכזי. מודל RBC, המשמש ככלי תיאורטי-מתודולוגי ב-AiC, מגדיר שלוש פעולות אפיסטמיות הרלוונטיות לתהליך למידה: (1) *זיהוי* (2) *בניה-עם* (3) *בניה*. הבניית הידע אצל הלומד מנותחת באמצעות שלוש פעולות אפיסטמיות אלו.

רציונל המחקר

למידת האופן שבו התלמידים מפתחים *חשיבה הצטברותית* עשויה לסייע למורים לתכנן את השיעורים הראשונים בנושא פונקציית ההצטברות באופן שיסייע לתלמידים להתגבר על קשיים בהבנת פונקציית ההצטברות. על מנת לאפשר הבנה אינטואיטיבית של קצב השינוי ותפקידו במציאת ערך של פונקציית הצטברות, הבסיס הדידקטי שנבחר במחקר זה הוא *קצב שינוי* המאפשר הקשר חוץ-מתמטי המוכר ללומד. מטרות המחקר הן: (1) לעצב פעילות למידה בעלת פוטנציאל לפתח *חשיבה הצטברותית* (2) לנתח את תהליך הלמידה ואת תפקיד ההקשר החוץ-מתמטי של מילוי מים בבריכה בתהליך ההבנייה.

שאלות מחקר

1. מהם מרכיבי הידע של *חשיבה הצטברותית?*
2. אילו מרכיבי ידע של *חשיבה הצטברותית* תלמידים מבנים באמצעות פעילות הלמידה וכיצד?
3. מהו תפקיד ההקשר החוץ-מתמטי של מילוי מים בבריכה בהבניית *חשיבה הצטברותית?*

במאמר זה אתייחס לממצאים הנוגעים לשאלה 3.

מתודולוגיה

כלי המחקר הוא פעילות למידה ובה מוצגות פונקציות חיוביות המייצגות קצב מילוי מים בבריכה המובילה לבנייה של פונקציה המתארת את כמות המים המצטברת בבריכה כפונקציה של זמן על ידי חקירה של סכום כמויות המים המתווספות לבריכה בפרקי זמן עוקבים. הפעילות עוסקת, שלב אחרי שלב, בפונקציית ההצטברות של קצב שינוי (i) קבועה, (ii) קבועה למקוטעין, ו- (iii) לינארית יורדת.

3 זוגות תלמידים בכיתה יא הלומדים מתמטיקה ברמה של 5 יחידות אשר טרם למדו אינטגרציה ביצעו את הפעילות בנוכחות החוקרת והראיונות עמם הוקלטו ותומללו. הראיונות נותחו על פי מודל הפעולות האפיסטמיות RBC לאור ההגדרות האופרטיביות למרכיבי הידע השונים שנקבעו בניתוח המקדים, הבאות להעריך האם אמירות התלמיד ו/או פעולותיו מעידות על הבניית הידע של מרכיב ידע מסוים. מרכיבי הידע עודכנו כאשר הניתוח חשף מרכיבי אשר לא עלו בניתוח המקדים.

ממצאים

התלמידים במחקר הבנו את כל מרכיבי הידע אשר הוגדרו פרט למספר מרכיבי ידע אשר הובנו באופן חלקי ואחד שלא הובנה כלל. בתהליך ההבניה ישנן עדויות להשפעת ההקשר של מילוי מים בבריכה בתהליך ההבניה ובפיתוח *חשיבה הצטברותית*. להלן מספר ממצאים:

1. אחת התלמידות השתמשה בדימוי של "מים עולים" כדי לתאר מדוע השם של הפונקציה הוא פונקציית הצטברות: "לדעתי הפונקציה נקראת כך משום שהיא תמיד נמצאת בעליה. ה-y שמדמה את כמות המים עולה 'ומסתמך' על ה-y שהיה לפניו. כך המים מצטברים בעצם ועולים, אין נק' ירידה עקב ההצטברות". נראה כי התלמידה נעזרה בדימוי החזותי של הסיטואציה – מים מצטברים בבריכה ולכן מפלס המים עולה ובכך תארה פונקציה עולה באמצעות ההקשר.

2. בקטע התמלול הבא מתארת תלמידה א לתלמידה ר את תהליך הצטברות המים בבריכה במקרה של קצב שינוי קבוע של 30 ליטר לדקה:

א: נכון אבל תדמייני שיש לך בריכה עכשיו, אין לך ישר מים ב-30.

ר: נכון זה בהדרגה.

א: נכון זה בהדרגה כאילו, זה מה שהיה לי בראש.

ר: לא הבנתי את זה.

א: תדמייני שיש לנו כמו... כזה מיכל.

ר: וממלאים אותו.

א: אנחנו רוצים למלא בו 30... אהה... 30 ליטר, אנחנו לוקחים אהה צינור ואנחנו לא ממלאים ישר נכון?

ר: נכון זה בהדרגה.

התלמידה א מתארת את התהליך כהדרגתי ובכך נראה כי ההקשר של מילוי מים בבריכה אפשר לה לתפוס את תהליך ההצטברות כרציף.

3. למרות שתלמידים הביעו תפיסה מוגבלת (chunky) למושג "קצב שינוי", הם הצליחו להתגבר על תפיסה זו. נראה כי הצלחתם נבעה מההקשר ומכך ששני החלקים הראשונים של הפעילות עסקו בקצב שינוי קבוע והחלק השלישי בהכללה באשר לשטח כמייצג הכמות המצטברת.

4. זוג תלמידים שלומדים גם פיסיקה השתמשו באנלוגיות מלימודי הפיסיקה להצדקת פעולותיהם. לדוגמה, התלמידים נימקו כי על מנת לחשב את כמות המים המצטברת יש לסכום את הכמויות המתווספות מכיוון ש"כמות המים שהצטברה בבריכה היא בעצם כל העבודה שביצעה המערכת, לכן יש לחבר בסכימה את כל המילויים". השימוש באנלוגיות מהקשרים שונים עשוי להצביע על כך שההקשר של מילוי מים בבריכה הינו נגיש ומובן לתלמידים באופן המאפשר זיהוי אנלוגיות מוכרות ושימוש בהן.

5. בתהליך הלמידה שלושת הזוגות הגיעו להכללה וקבעו כי פונקציית קצב המילוי של הבריכה היא פונקציית הנגזרת של פונקציית ההצטברות ומעיד על כך שההקשר לא מנע מהתלמידים להגיע להכללה זו ויתכן כי אף סייע בתהליך שהוביל להכללה.

דיון

מהממצאים עולה כי ההקשר הנבחר של 'מילוי בריכה במים' מילא תפקידים שונים אשר סייעו לתלמידים בתהליך הלמידה: **1.** הדמיית תהליך ההצטברות אשר סייע בתפיסת תהליך ההצטברות (ממצאים 1,2) **2.** מאפשר את הבסיס הדידקטי *לחשיבה הצטברותית* (ממצאים 1,3) **3.** מאפשר חיבור לאנלוגיות מלימודי פיסיקה (ממצא 4). **4.** הכללה (ממצא 5) התואם את טענתם החוקרים Gravemeijer & Doorman (1999) כי הקשר חוץ-מתמטי מאפשר לתלמידים לפעול ולהגיב בצורה משמעותית ולפתח אסטרטגיות בלתי פורמליות, תלויות הקשר, העשויות לעזור לתלמיד בהכללה.

בגישה המוצעת במחקר זה, רעיון ההצטברות מוצג ומפותח תוך הקשר של מילוי מים בבריכה בדרך יישומית. תפקיד ההקשר כמאפשר חיבור לאנלוגיות מלימודי פיסיקה תומך בכך שהגישה במחקר זה עשויה לעזור לתלמידים ליישמו גם בהקשרים אחרים; ובכך לעקוף את הקושי שהעלו חוקרים (למשל, Jones, 2015) באשר ליכולת תלמידים ליישם ידע מתמטי בהקשרים שונים.

תודות

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק מספר 1743/19).

מקורות

אתר המפמ״ר (2021). פיתוח תכניות לימודים חדשות – 5 יח״ל. אוחזר ביום 7 באוקטובר 2021 מהאתר https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika/chativa-elyona/teaching-mathematics/tohnit-limudim/

פלאח ג', דרייפוס ט' וקורופטוב א' (2022). פיתוח חשיבה הצטברותית כמבוא ללמודי חשבון אינטגרלי בתיכון בתוך ת' אבישר, ר' אובודנקו, מ' וידר, נ' חן חדד, ע' לביא, ג" קופר, א' שרייבר (עורכים), *כנס ירושלים העשירי למחקר בחינוך מתמטי* (149-152).
https://www.jct.ac.il/media/6430/ucrme_10_takzirim_22-3.pdf

Bressoud, D. M. (2009). Restore the integral to the fundamental theorem of calculus. Retrieved from http://www.maa.org/external_archive/columns/launchings/launchings_05_09.html.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context - Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 185-217). Dordrecht: Springer, Advances in Mathematics Education series.

Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. *ZDM Mathematics Education, 53*(3), 679-693. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1), 111-129. http://dx.doi.org/10.1023/A:1003749919816

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 9-28. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.001

Kouropatov, A. (2016). The Integral concept in high school: Constructing knowledge about accumulation. Unpublished PhD thesis. Tel Aviv University.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 641-651. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.798875

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18. https://doi.org/10.1007/BF00704699

Rösken, B., & Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*, 181-204.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America. http://dx.doi.org/10.5948/UPO9780883859759.005

כיצד סטודנטים להנדסה מתקשרים את פתרונותיהם למשימות בחדו״א ?

ענת רוזן, התוכנית להוראת המדעים והטכנולוגיה, אוניברסיטת בן גוריון בנגב
אוסאמה סוידאן, התוכנית להוראת המדעים והטכנולוגיה, אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מבוא

מיומנויות של תקשורת כגון הצגת רעיונות באופן מילולי או כתוב הינן חשובות מאד לעוסקים בפרוצדורות מתמטיות כמו פתרון בעיות (Esmonde,2009). תקשורת הינה למעשה תהליך בו אנשים מחליפים ביניהם מידע באמצעות מערכת סמלים, סימנים או התנהגויות שונות והינה גם מיומנות משמעותית שמוסדות החינוך מבקשות לפתח בקרב סטודנטים ותלמידים. במחקר זה שילבנו שלושה נושאים בחינוך מתמטי: תקשורת, פתרון בעיות, וחדו״א. התייחסנו לפתרון בעיות ולתקשורת כאל שתי פרקטיקות המשלימות זו את זו היות ובעת כתיבת פתרון ו/או הסבר פתרון למישהו אנו למעשה מתקשרים עימו את הפתרון. לפיכך בחנו את הפרקטיקה של פתרון בעיות בחדו״א. הוראת חדו״א בקרב סטודנטים להנדסה מסייעת להם ליישם אותו בדיסציפלינה הרלוונטית כמו למשל במדעי המחשב. מניסיוננו, אנו יכולים לומר כי מרצים לחדו״א המלמדים סטודנטים להנדסה מדגישים את הפרוצדורות ומתמקדים בפעילויות עם ביטויים סימבוליים בה בעת הם ממעיטים בדיון על הקשר בין המושגים השונים באופן גרפי. עובדה זו קשורה לכך שהבנה מושגית של רעיונות בחדו״א דורשת מהסטודנטים להיות מודעים לקשרים בין המושגים ולא רק להסתפק בשינון פרוצדורות אלגוריתמיות (למשל, Swidan, 2019). לכן **מטרת המחקר** היא לזהות כיצד סטודנטים להנדסה פותרים משימות בחדו״א באופן גרפי וכיצד הם מתקשרים את הפתרונות שלהם למשימות אלו.

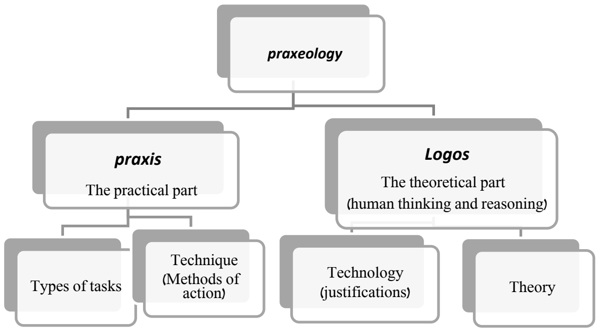
רקע תאורטי

בכדי לשפוך אור על האופן שבו הסטודנטים מעבירים את הפתרונות שלהם ולהעריך את יעילות התקשורת שלהם, התבססנו על מודל שהציעה אלבנו ועמיתיה (2021). המודל נועד להגדיר את הקשר בין תקשורת לבין פתירת בעיות והוא סייע לנו להבין כיצד סטודנטים להנדסה מתקשרים את הפתרונות שלהם לבעיות גרפיות בחדו״א. המודל של אלבנו ועמיתיה (2021) מורכב משילוב שתי תיאוריות:

התיאוריה האנתרופולוגית של הדידקטיקה (ATD) של שוואלארד (Chevallard, 1985)

תיאורית ATD מספקת מסגרת לחקירה ולאפיון פעולות מתמטיות ודידקטיות במונח של פרקסאולוגיות בהתמקדות במרכיבים של הפעולות ובתנאים שמשקפים את היתכנותן והתפתחותן בסיטואציות מסוימות. תיאוריה זו מניחה כי כל פעילות הקשורה לתפוקה, הקניה או רכישת ידע צריכה להיות מתורגמת לפעילות אנושית רגילה ולכן מוצע מודל של פעילויות אנושיות על בסיס המושג פרקסאולוגיה (*praxeology*) (Bosch & Gascón , 2014). בהסתמך על אטימולוגיה, המילה פרקסאולוגיה מורכבת משתי מילים ולכן כל פעולה אנושית מורכבת משני חלקים, החלק המעשי והחלק התיאורטי כפי שמתואר באיור 1.

איור 1 – מושג הפרקסאולוגיה



עקרון שיתוף הפעולה וארבעת המַקְסִימוֹת של גרייס (Grice, 1975)

תיאוריה פרגמטית, המנחה תקשורת בין בני אדם ולה עקרונות בסיסיים הנקראים מַקְסִימוֹת. גרייס האמין שמי שרוצה להיות מעורב בשיח משמעותי ומשכנע חייב לפעול לפי ארבע מַקְסִימוֹת: **כמות** : אמור לא פחות ממה שצריך ולא יותר ממה שהשיחה דורשת (Quantity Maxim). **איכות** : אל תאמר מה שאינך מאמין בו או שהוא שקרי או שאין לך הוכחות עבורו (Quality Maxim). **סגנון** : אל תהיה מעורפל, אל תהיה דו משמעי, דבר בצורה תמציתית ומסודרת ככל האפשר (Manner Maxim). **רלוונטיות** : היה רלוונטי (Relevance Maxim).

מודל משולב של שתי התיאוריות

המודל המשולב שהציעה אלבנו ועמיתיה (2021) מאפשר לנתח את השיטות שבהן השתמשו הסטודנטים בכדי לפתור את המשימות הנתונות וגם מאפשר להעריך את איכות התקשורת של הפתרונות. מודל ה-ATD מספק תובנות לגבי התוצרים המקוריים של הסטודנטים ומאפשר לנו לגלות פערים או טעויות אפשריות בהנמקה. עקרון שיתוף הפעולה של גרייס מאפשר לנו לזהות באיזו מידה שולטים הסטודנטים בידע שלהם וכיצד הם משתמשים בו בכדי לפתור משימות בחדו״א.

להלן טבלה1 המשקפת את המודל המשולב ובה השתמשנו לניתוח כל תשובה.

ATD	Theorem	Technologies	Techniques	Data
Four Maxims of Grice				
Quantity (Poor/ Enough/ Over)				
Quality (Good /Fair/ Bad)				
Relation (Relevant / Irrelevant)				
Manner (Clear/Obscure/Ambiguous)				

שאלות המחקר

באילו פרקסאולוגיות משתמשים סטודנטים לתואר ראשון וכיצד הם מתקשרים אותן כאשר הם פותרים משימות גרפיות בחדו״א ?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו שבעה סטודנטים להנדסה מאוניברסיטת בן גוריון בנגב. כולם השלימו לפחות קורס אחד בחדו״א וכולם בוגרי 5 יח״ל במתמטיקה. הבחירה הייתה מכוונת והתבססה על שני קריטריונים (Gray, 2004): 1. לסטודנטים להנדסה יש בסיס מתמטי איתן הודות ללימודי מתמטיקה בתיכון, כאמור לעיל. 2. ההנחה היא שסטודנטים שלמדו לפחות קורס אחד בחדו״א יוכלו להתמודד עם שאלות בסיסיות בחדו״א, ומאפייני התקשורת שלהם לא תהיה קשורה למערכת הידע שלהם._במחקר נעשה שימוש בראיון מבוסס משימה. כל אחד מהסטודנטים התבקש לפתור חמש משימות בסיסיות בחדו״א שהתבססו על שלושה מושגי יסוד: פונקציה, נגזרת ואינטגרל. המשימות נועדו לבחון את ההבנה הגרפית של הסטודנטים. משימות אלו חייבו את הסטודנטים לבחון את הגרפים הנתונים של פונקציות שונות ולספק הצדקות לפעולותיהם על סמך הידע שרכשו. הסטודנטים התבקשו לשתף את הרעיונות שלהם בקול ושיתפו גם בעל פה את תשובתם, מעשיהם, חשיבתם והבנתם. הראיונות נערכו ללא כל התערבות ו/או הכוונה, תועדו וצולמו בווידאו ונמשכו כ- 50 דקות. תמלול התשובות המילוליות והכתובות נותחו באמצעות המודל המשולב שהוצע ע״י אלבנו ועמיתיה (2021) לפי טבלה1 המופיעה לעיל כדלקמן: 1. כל תשובה כתובה וכל תשובה מילולית קודדו על פי ארבעת מאפייני הפרקסאולוגיות השונות (נתונים, טכניקה, הצדקה, תיאוריה) 2. כל אחד ממרכיבי הפרקסאולוגיות קודד לפי ארבעת מַקְסִימוֹת של גרייס. (הגדרות הקודים כפי שמופיעים בטבלה 1 יוצגו ויודגמו בכנס)

ממצאים

להלן הקטגוריות המאפיינות את תקשורת הסטודנטים בעת מענה על השאלות בהתייחס לעקרון גרייס.

שמירה על ארבעת מאפייני גרייס

תשובת סטודנט נחשבה כתקשורת טובה כאשר הסטודנט תיקשר את תשובתו בצורה ברורה ומדויקת ומרכיבי תשובתו (טכניקה, הצדקות, תיאוריה) היו קוהרנטיים מבחינה מתמטית ורלוונטיים לשאלה.

שמירה על שלושה מאפייני גרייס

איכות נמוכה של תקשורת – תשובות סטודנטים הוגדרו באיכות נמוכה של תקשורת אם לפחות אחד מהקריטריונים הבאים התקיים: א. סטודנט הסתמך על תיאוריה שגויה או על תפיסה שגויה מבחינת נכונות מתמטית בכדי להצדיק את טענותיו. ב. סטודנט הסתמך על מסקנה אישית שגויה או על נתונים שגויים.

שמירה על שני מאפייני גרייס

מצאנו עדויות לתשובות שבהן הן מַקְסִימַת הכמות והן מַקְסִימַת האיכות היו פגומות או חסרות, ותשובות שבהן לא הייתה הקפדה על מַקְסִימַת הכמות ועל מַקְסִימַת הרלוונטיות .

תקשורת דלה באיכות נמוכה – לדוגמה : תשובת סטודנט תהיה חסרה בתיאוריה הנדרשת למענה על המשימה הגורר שימוש בטכניקה לא נכונה והנחה שגויה של התשובה. ***תקשורת דלה ולא רלוונטית*** – לדוגמה : תשובת סטודנט תהיה חסרה בתיאוריה המתאימה ותהיה מלווה בהצדקות המבוססות על תיאוריה לא רלוונטית. ***תקשורת דלה ולא ברורה*** – לדוגמה : תשובה חלקית בשאלות רב ברירה הגדירה את אופן התקשורת של הסטודנט כלא ברור וכמות הפעולות שבוצעו הייתה דלה למרות שאיכות הפתרון הייתה טובה היות והסטודנט השתמש בתיאוריה נכונה.

שמירה על מאפיין אחד של גרייס

תקשורת דלה ולא רלוונטית באיכות נמוכה – בקטגוריה זו מצאנו תשובות ששמרו רק על מאפיין הסגנון בעוד ששאר המַקְסִימוּת היו לקויות. תשובות אלו אופיינו בכמות דלה ובאיכות נמוכה של מאפייני התקשורת, שימוש באלמנטים לא רלוונטיים ובתפיסות אישיות שגויות.

דיון

קושי במענה על השאלות - הממצאים מראים שהסטודנטים שהשתתפו במחקר שלנו התקשו להעביר את הרעיונות המתמטיים שלהם, בעל פה או בכתב. ממצא זה תואם את ממצאי המחקר של אלבנו ועמיתיה (2021). בנוסף לכך מצאנו שרוב הפתרונות של הסטודנטים (≈60%) אופיינו בכמות ובאיכות פגומים, דבר שהוביל לתשובות שגויות מבחינה מתמטית. **ניחוש תשובות -** דוגמה נוספת לחוסר היכולת של הסטודנטים לתקשר כראוי את תשובתם ולראייה למַקְסִימוּת איכות וכמות פגומות היא ניחוש תשובה. התלמידים השתמשו בביטויים כמו "אני מהמר, בלי יותר מדי הבנה", "אני מניח ש...", ״ כנראה ש...״

צורך בביטויים סימבוליים וזיהוי גרפים כגרפים של פונקציות ממעלה שניה או שלישית למרות שלא היה נתון - מצאנו כי פתרונות שבהם הייתה חסרה התיאוריה הנדרשת למענה על המשימה ושהוגדרו כתקשורת דלה, הוביל את הסטודנטים להסתמך על פרוצדורות שגויות ו/או לא רלוונטיות דבר שהשפיע על איכות התקשורת. הסבר אפשרי לכך, הוא סוג המשימות שניתנו, משימות שהתבססו על נתונים גרפיים ודרשו התייחסות לרגיסטר הגרפי ולרגיסטר הנומרי. הבחנו כי סטודנטים חיפשו ביטויים סימבוליים עבור הגרפים הנתונים במטרה למצוא ערך פונקציה בנקודה מסוימת או ערך נגזרת בנקודה מסוימת. יתרה מכך, הבחנו כי הסטודנטים ראו בגרפים הנתונים רק פונקציות ריבועיות או פונקציות ממעלה שלישית למרות שעובדה זו לא ניתנה במפורש בגוף המשימה. אנו משערים כי הייצוג הגרפי לא הספיק לסטודנטים בכדי לפתור את המשימה או שהצורך בביטויים סימבוליים נבע מהעובדה שהרבה סטודנטים חושבים שפונקציות מוגדרות רק ע״י ביטויים סימבוליים (Oehrtman et al. 2008) הסבר נוסף לכך יכול להינתן ע״י ברי ונײמן (2003) שטענו כי סטודנטים שלקחו קורס מבוא בחדו״א הכירו את הטכניקה שבהשוואת הנגזרת לאפס בלי להבין מדוע זה נחוץ וחשוב. עוד נטען ע״י דובל (2006) כי לומדים צריכים לדעת לעבור

בין הייצוגים השונים בכל שלב בתוכנית הלימודים. לפיכך, נטען כי להבנה מעמיקה נדרש לא רק להבין ייצוג אחד של פונקציה אלא להיות מסוגל להכיר מגוון ייצוגים ולהיות מסוגל לנוע בגמישות ביניהם.

האם יש הבדל בין תשובה מילולית לתשובה כתובה? - מאחר והסטודנטים הציגו תשובות בשני אופנים, מילולית וכתובה, יכולנו לבחון את ההבדלים ביניהם. מצאנו כי גם התשובה הכתובה וגם התשובה המילולית הציגו איכות זהה של פתרון, למרות שתשובה כתובה נחשבת כ "לחשוב בקול על הנייר" (Rose, 1989) התשובה המילולית חשפה את תהליך החשיבה, תפיסות ומערכת ידע של הסטודנטים שלא עלו מהתשובה הכתובה. באופן כללי התשובה המילולית לא השפיעה על מַקְסִימַת איכות הפתרון אלא רק על מַקְסִימַת הכמות אך דרך הפתרון הייתה ברורה יותר. פים ווגנר (1999) ציטטו את קנדיה מורגן שטענה כי לא תמיד יש התאמה בין תשובה כתובה לבין מה שהסטודנט באמת יודע וכדוגמה לכך נוכל לבחון את המקרה שבו סטודנטית לא כתבה תשובה לאחת המשימות אבל כאשר תקשרה באופן מילולי קשייה נחשפו וזאת למרות שהחזיקה במערכת ידע די רחבה. ממצא זה מדגיש את חשיבות התשובה המילולית ומצביע על הצורך בדיונים בין הסטודנטים, עם המורה או המרצה שלהם.

מקורות

Albano, G., Swidan, O., & Pierri, A. (2021). A model for analyzing the explanatory writing of undergraduate students when solving mathematical tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-15.

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495.

Bosch M., & Gascón J. (2014). Introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD). In: A. Bikner-Ahsbahs, S. Prediger (Eds.), *networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 67-83), advances in mathematics education. Cham: Springer.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique . du savoir savant au savoirenseigné*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Esmonde, I. (2009). Ideas and Identities: Supporting Equity in Cooperative Mathematics Learning. *Review of Educational Research*, *79*(2), 1008–1043.

Gray, D. (2004). *Doing research in the real world (3th edition)*. Sage.

Grice, H.P. (1975). Logic and Conversation. In P. Cole, & J. Morgan (Eds.), *Syntax and Semantics* (pp. 41-58). New York, NY: Academic Press.

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education*, (73), 27.

Pimm, D., & Wagner, D. (2003). Investigation, Mathematics Education and Genre: An Essay Review of Candia Morgan's" Writing Mathematically: The Discourse of Investigation". *Educational studies in mathematics*, *53*(2), 159-178.

Rose, B. J. (1989). Writing and math: Theory and practice in P.Connolly and T.Vilardi, (Eds.). Writing to learn mathematics and science. Teachers College Press: New York.

Swidan, O. (2019). Construction of the Mathematical Meaning of the Function–Derivative Relationship Using Dynamic Digital Artifacts: a Case Study. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *5*(3), 203–222

ניתוח תהליכי פתרון בעיות מכוונות יצירתיות באמצעות מעקב תנועות עיניים

עדי עראקי, אוניברסיטת חיפה
רוזה לייקין, אוניברסיטת חיפה
בת שבע חדד, אוניברסיטת חיפה

מבוא ורקע תיאורטי

מחקרים על פתרון בעיות מתמטיות הינם מרכזיים במחקר בחינוך המתמטי. פיתוח מיומנויות פתרון בעיות נחשב לאחת המטרות העיקריות של החינוך המתמטי, ומשמש כצורה ראשונית של הערכה של התפתחות הידע המתמטי וההבנה (Polya, 1975; Schoenfeld, 1985). חשיבות מיוחדת למחקר המוצג במאמר זה היא תשומת הלב הספציפית הניתנת במחקר פתרון בעיות בגאומטריה (Levav-Waynberg & Leikin, 2012) ויצירתיות בפתרון בעיות (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). במחקר זה נעשה שימוש במשימה מרובת פתרונות (Multiple Solution Task - MST), משימה זו דורשת במפורש פתרון בעיה בדרכים מרובות (כלומר, שימוש באסטרטגיות מרובות), ככלי שימושי להערכת יצירתיות מתמטית (Leikin, 2009). אנו קוראים לתהליך של פתרון MST מכוון יצירתיות מכיוון שאיננו דורשים במפורש מהמשתתפים לבצע פתרונות יצירתיים. משימות מרובות פתרונות (Multiple Solution Tasks - MSTs) דורשות התעסקות באסטרטגיות שונות בעת פתרון בעיה אחת. פתרון MSTs קשור לשילוב חשיבה מסתעפת ומתכנסת תוך כדי פתרון בעיה, ובכך לחשיבה מתמטית יצירתית (ראה, Guilford, 1967). חשיבה מתכנסת מבוססת על מציאת פתרון יחיד לבעיה, בעוד שחשיבה מסתעפת מופעלת כאשר מייצרים פתרונות מרובים לבעיה ומתחשבים בבעיה מנקודות מבט שונות. טורנס (1974) הציג מודל בן ארבעה מרכיבים של עיבוד יצירתי: שטף, גמישות, עיבוד רעיונות ומקוריות. סילבר (1997) הדגיש כי קטגוריות אלה שימושיות לפיתוח יצירתיות מתמטית תוך פתרון בעיות בדרכים רבות או הצבת בעיות חדשות. לייקין (2009) לקחה צעד אחד קדימה והציעה כי MSTs הם כלים שימושיים להערכת יצירתיות מתמטית תוך התייחסות לאסטרטגיות פתרון בעיות בשימוש. במודל שלה, השטף קשור ליצירת פתרונות מרובים הקשורים לבעיה, גמישות קשורה לפתרון בעיה באמצעות אסטרטגיות שונות, והמקוריות מאופיינת בנדירות האסטרטגיות בהן נעשה שימוש ובחדשותן ביחס לחוויית הפותר.

בעשור האחרון, החינוך המתמטי עשה שימוש בכלים נוירו-קוגניטיביים כדי להעמיק את ההבנה של עיבוד מתמטי (למשל, שני גליונות ZDM - לנושאים מיוחדים בחינוך מתמטי (Stern, et al., 2010; Grabner & De Smedt, 2016). מתודולוגיית המעקב אחר העיניים נכנסה גם היא לשטח של מחקר החינוך המתמטי והוכחה כמועילה. במחקר המתואר במאמר זה השתמשנו במעקב אחר העיניים כדי לאפיין עיבוד פתרון בעיות ברמות שונות של יצירתיות. מחקרים השתמשו גם בתנועות עיניים כבסיס למדידת עומס קוגניטיבי, התרחבות האישונים, קצב המצמוץ ומספר הקיבועים והסקאדות בשנייה מגיבים בנפרד לשינויים בפעילות הקוגניטיבית (למשל, Zagermann, et al.,2018). בורלסטון ומולדנר (2015) מצאו כי דפוסי תנועת עיניים שונים בין אלה המפגינים יצירתיות גבוהה לבין אלה המפגינים יצירתיות נמוכה ב-MSTs בגיאומטריה. מעקב אחר תנועות עיניים מספק תובנות חשובות לגבי תהליכים לפתרון בעיות שאחרת עשויים להישאר מטושטשים. שינדלר ולילנטהל (2020) חקרו את היתרון של מעקב אחר תנועות העיניים בהשוואה לפרוטוקולים של חשיבה בקול רם, ומצאו שהם סיפקו מידע מפורט יותר ונראה שהם מועילים במיוחד לניתוח האסטרטגיות המשמשות תלמידים חלשים יותר במתמטיקה (Lilienthal& Schindler, 2020). שיטות אלו יעילות באיתור בעיות קריטיות, והמידע הנוסף עם רמזי העין מעודד את המשתתפים לבטא יותר הערות חזותיות (Alhadreti, et al., 2017). לפיכך, מטרת המחקר היא אפיון ועיבוד מכוון יצירתיות לפתרון בעיות על ידי משתתפים עם

רמות שונות של יצירתיות באמצעות שילוב פרספקטיבות התנהגותיות ונוירו-פיזיולוגיות המתמקדות באסטרטגיות לפתרון בעיות ובדפוסי מעקב עיניים תואמים. כדי להשיג את מטרת המחקר, שאלנו כיצד דפוסי מעקב אחר העיניים עשויים להיות שונים על פני סוגים שונים של אסטרטגיות לפתרון בעיות המשמשות אצל משתתפים הנבדלים זה מזה ברמת היצירתיות המוצגת בעת פתרון ה-MSTs?

מתודולוגיה

מחקר זה עקב אחר תהליך פתרון הבעיות של ארבעה סטודנטים באוניברסיטה עם רקע מתמטי חזק אשר נבחרו על סמך ההבדלים ברמות הביצועים היצירתיים שלהם ב- MSTs. המשתתפים הרכיבו משקפיים אשר עקבו אחר תנועות העיניים (Pupil Labs GmbH) ותהליך הפתרון הוקלט על ידי מערכת הקלטה (Camtasia software). ציוד זה אפשר הקלטה וסנכרון של תהליך פתרון בעיות בחשיבה-בקול רם, מעברים בין אסטרטגיות הפתרון השונות (אם בוצעו) לבין תנועת העיניים וכתב היד המתאימים. נתוני מעקב העיניים מספקים את תבנית תנועת העיניים עבור כל משתתף, בכל אחת מהמשימות. עוקב העיניים מפיק רצף של מיקומים (x,y קואורדינטות) בתוך שדה הראייה של המשתתפים בכל שלב זמן. מעקב העיניים מספק גם את גודל האישון בכל שלב זמן. נתונים אלה מתורגמים ל-2 צורות של נתונים: א) מאפייני תנועת העין עצמה, כולל הכמות, התדירות והאורך של הסקאדות וכן התפלגות הכיוונים. ב) מיקום הקיבועים, כלומר מספר הקיבועים ומשך הקיבועים באזורים הספציפיים השונים של תיאור המשימה.

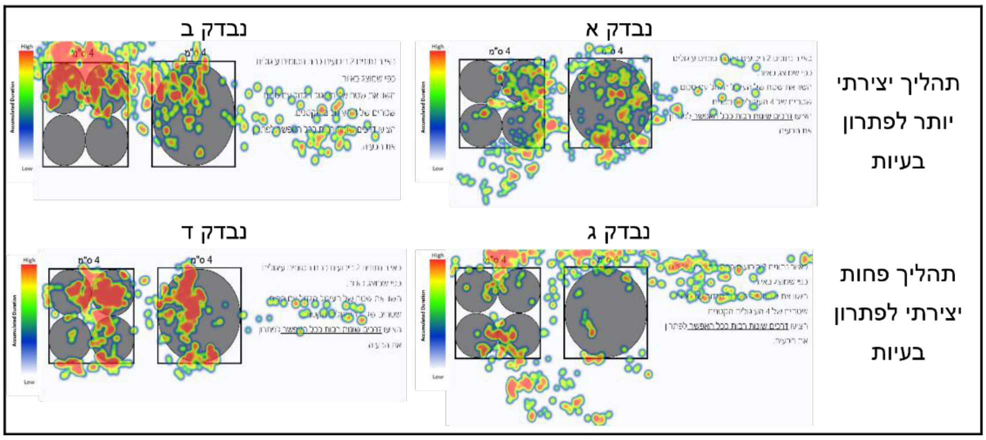
השתמשנו במתודולוגיות התנהגותיות ונוירו-פיזיולוגיות: אסטרטגיות לפתרון בעיות ששימשו את המשתתפים נותחו לצורך שטף, גמישות, ומקוריות תהליך פתרון הבעיות באמצעות כלי להערכת יצירתיות מתמטית (ראה, Leikin, 2009). דפוסי המעקב אחר העיניים המתאימים נבחנו באמצעות מפות חום, נתיבי סריקה ואנטרופיה. חקרנו כיצד תהליכים יצירתיים ודפוסי מעקב אחר העיניים נבדלים בין סוגי משימות, סוגי אסטרטגיות ורמות היצירתיות של התלמידים. יצרנו מפת חום סטנדרטית מנקודות הקיבוע של הנושא על ידי ספירת קיבועים וצבירת הזמן שהנבדק בילה בכל מיקום על המסך. איור 1 מציג דוגמאות למפות חום שמונחות על התמונה המוצגת על המסך, הצבע מציין את משך הקיבועים המצטבר בכל נקודה בתמונה.

ממצאים

ניתוח המעקב אחר העיניים מתמקד במפות החום המתאימות לביצועים המלאים במשימה מרובת פתרונות של כל אחד מהנבדקים (איור 1). ניתוח זה מדגים קשרים בין רמת היצירתיות בפתרון בעיות לבין מוקדי הקשב של המשתתפים כפי שהם משתקפים במפות החום ומבוסס על ההנחה שמפות החום זיהו תחומי עניין ומוקדי קשב במהלך העיבוד המנטלי במשימה, ובנוסף זיהו הן היבטים של תלות בנושא והן היבטים של תלות במשימה בתהליכי פתרון בעיות.

איור 1

מפות חום של תנועות עיניים הקשורות לפתרון בעיה מכוונת יצירתיות באמצעות MST.

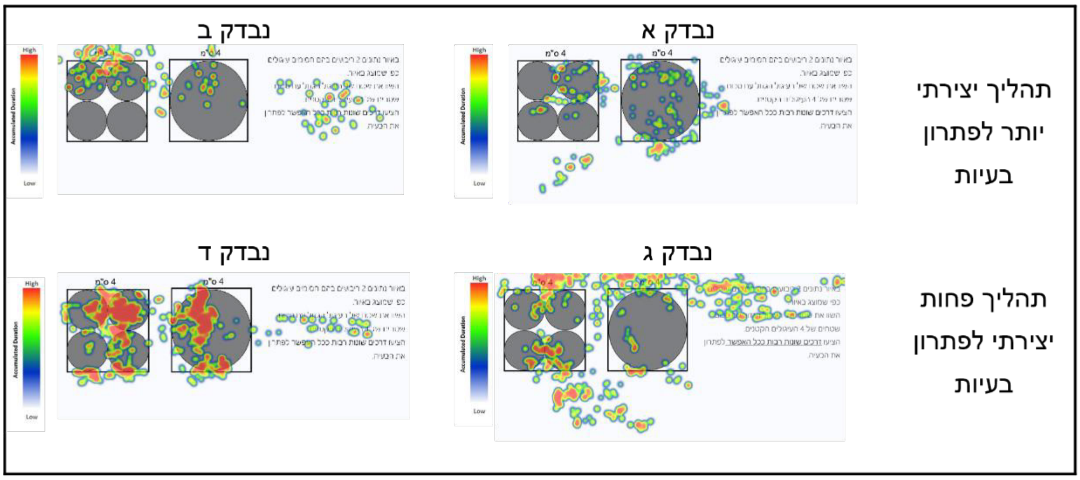


על פי איור 1 ישנם הבדלים בתהליך החשיבה של הנבדקים היצירתיים לעומת תהליך החשיבה של הנבדקים הפחות יצירתיים. נבדקים א ו-ב השתמשו בכמות קיבועים דומה יחסים לעומת נבדקים ג ו-ד. נבדקים א' ו-ב' הקדישו את מירב תנועות העיניים לאזור הוויזואלי של המשימה (המעגלים) ובחיפוש אחר אזורי עניין חשובים במשימה, לדוגמא הצלע העליונה של הריבועים ומרכזי המעגלים. בנוסף מעניין לראות כי נבדק ב' ונבדק ד' הקדישו את אותו הזמן לפתרון המשימה, אך הניבו דפוסים שונים של תנועות עיניים, נבדק ב' התמקד באזורים ספציפיים במעגלים עם מעט מאד קיבועים באזורים התחתונים והפחות רלוונטיים של המשימה. ביגוד לנבדק ד' אשר חילק את זמן ההתבוננות באזור התחתון של המשימה.

ניתוח נוסף שהתבצע בחן את הבדלים בין הנושאים הקשורים לפתרון בעיה מכוון יצירתיות, ניתוח זה חושף את תלות הנושא של עיבוד מנטלי הקשור לפתרון מסוים אחד. איור 2 מציג את מפות החום של ארבעת הנבדקים לאותה אסטרטגית פתרון.

איור 2

מפות חום של תנועות העיניים הקשורות לפתרון מבוסס למידה זהה אצל הנבדקים השונים בבעיה מכוונת יצירתיות.



נבדק א' ונבדק ג' השקיעו את אותו הזמן באסטרטגיה מבוססת למידה זו, ועדיין פיזור תנועות העיניים של נבדק ג' היו רבות יותר מאשר נבדק א', וגם כמות הקיבועים של נבדק א' היו קטנות יותר מאשר כמות הקיבועים של נבדק ג'. ניתן לראות כי תנועות העיניים של נבדק א' היו מינימליות והתמקדו באזור העניין. אנו טוענות כי קווי הדמיון בין הדפוסים קשורים להבדלים בין משתתפים אשר תהליך היצירתי לפתרון הבעיות היה גבוה לעומת המשתתפים שתהליך היצירתי לפתון בעיות היה נמוך. נבדקים א' ו-ב' ביצעו פתרונות מהירים יותר, פיזור הקיבועים היה פרוש והקיבועים היו יותר ממוקדים בתשומת הלב על העיגולים ופחות על הטקסט. כאשר במקביל, נבדקים ג' ו-ד' ביצעו את הפתרונות לאט יותר, עם מספר גדול יותר של קיבועים, ופיזור הקיבועים מקובץ בצפיפות. אותה אסטרטגיה אבל תהליך חשיבה שונה. אנו משערות כי המספר הנמוך יותר של קיבועים הקשורים לאותה אסטרטגיית פתרון משקף עומס קוגניטיבי נמוך יותר הקשור לביצועי הפתרון.

מסקנות

ניתוח מעקב אחר העיניים חושף עוד הבדלים בתהליכי חשיבה הקשורים לשימוש באסטרטגיות פתרון דומות לכאורה. ממצא זה מבוסס על תצפית ועל הבדלים במפות חום של אסטרטגיות פתרון זהות. ההבדלים קשורים לאזורי העניין, אזורי פיזור הקיבועים ומספרי הסקאדות והקיבועים הכוללים. מספר גדול יותר של סקאדות ומשך זמן ארוך יותר בשילוב עם מספר גדול יותר של קיבועים יכולים להצביע על רמה גבוהה יותר של עומס קוגניטיבי הקשור לעיבוד פתרון בעיות מכוון יצירתיות או לרמה הגבוהה יותר של מורכבות הבעיה. לסיכום, בהתבסס על ממצאי המחקר שלנו אנו טוענים כי מתודולוגיית מעקב אחר העיניים יכולה לתרום תרומה משמעותית למחקר בחינוך המתמטי, שכן היא מאפשרת את גילוים של תהליכי פתרון הבעיות הבסיסיים שלא ניתן לגלותם על ידי ניתוח התנהגותי בלבד. בכנס נרחיב על תהליך הניתוח והממצאים ונדון ביישומים אפשריים של מחקר זה.

ביבליוגרפיה

Alhadreti, O., Elbabour, F., & Mayhew, P. (2017). Eye-tracking in retrospective think-aloud usability testing: is there added value? *Journal of Usability Studies*, *12*(3), 95–110.

Grabner, R. & De Smedt, B. (2016). Special issue "Cognitive neuroscience and mathematics learning – revisited after five years". *ZDM - Mathematics Education*, 48(3).

Guilford, J. P. (1967). Creativity: Yesterday, today and tomorrow. *The Journal of Creative Behavior*, *1*(1), 3-14.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM - Mathematics Education*, *45*(2), 159-166.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students.* (Ch. 9, pp. 129-145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and Insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, 55(4), 385-400.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). Using Multiple Solution Tasks for the Evaluation of Students' Problem-Solving Performance in Geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *12*(4), 311–333.

Muldner, K., & Burleston, W. (2015). Utilizing sensor data to model students' creativity in a digital environment. *Computers in Human Behavior*, 42, 127–137.

Obersteiner, A., Moll, G., Beitlich, J. T., Cui, C., Schmidt, M., Khmelivska, T., & Reiss, K. (2014). Expert mathematicians' strategies for comparing the numerical values of fractions: Evidence from eye movements. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, 4(May 2015), 338–345.

Polya, G. (1973). *How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Schindler, M., & Lilienthal, A.J. (2020). Students' Creative Process in mathematics: Insights from Eye-Tracking-Stimulated Recall Interview on Students' Work on Multiple Solution Tasks*. International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 1565–1586.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM - International Journal of Mathematics Education, 3, 75-80.*

Stern, E., Grabner, R., Schneider, M., Ansari, D. (Eds.) (2010). Special Issue Cognitive Neuroscience and Mathematics. *ZDM - Mathematics Education*, 42(5-6).

Torrance, E. P. (1974). *Torrance tests of creative thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Zagermann, J., Pfeil, U., & Reiterer, H. (2018, April). Studying eye movements as a basis for measuring cognitive load. In *Extended Abstracts of the 2018 CHI Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 1-6).

דימוי מושג עודף ודימוי מושג חסר: המקרה של מקבילים

דינה תירוש, אוניברסיטת תל אביב
פסיה צמיר, אוניברסיטת תל אביב

רקע תיאורטי

המושגים ***הגדרת מושג*** ו***דימוי מושג***, אותם טבעו מספר חוקרים בראשית שנות השמונים (Vinner & Herskowitz, 1980; Tall & Vinner, 1981) משמשים גם כיום את הקהילה העוסקת בפיתוח ובמחקר בחינוך מתמטי (למשל Beach, 2020). תיאור מילולי בו נעשה שימוש כדי לייחד את המושג נקרא ***הגדרת המושג*** ואילו ***דימוי המושג*** הוא קבוצת כל התמונות המנטליות וכל התכונות והתהליכים המתקשרים למושג בתודעתו של האדם. בצמוד להגדרת המושגים אלה, הוגדרו על ידי טול ווינר (Tall & Vinner, 1981) מושגים נוספים והם ***הגדרה פורמלית של מושג***, שהיא הגדרת המושג המקובלת בקהיליה המתמטית, **הגדרה אישית של מושג**, שהיא תיאור מילולי בו משתמש התלמיד להגדרת המושג ו**דימוי מתעורר של מושג** שהוא החלק הפעיל, בזמן מסוים, של דימוי המושג.

בשנים האחרונות אנו מתבוננות, התבוננות מחודשת, במחקרים שנערכו לשם אבחון ידע מתמטי לגבי מושגים מתמטיים שונים, וזאת תוך שימוש במושגים שהוגדרו בהקשר להגדרת מושג ודימוי מושג. התבוננות זו הובילה לתחושה שיש חשיבות להגדרת שני מונחים נוספים: ***דימוי מושג עודף ודימוי מושג חסר*** (Tirosh & Tsamir, 2022; Tsamir & Tirosh, in press) . דימוי מושג הוא עודף כאשר בקבוצת הדוגמאות של המושג נכלל איבר (או איברים) שאינו משתייך לקבוצה, בהתאם להגדרה הפורמלית של המושג. לעומת זאת, דימוי המושג הוא חסר כאשר דוגמא (או דוגמאות) של המושג מסווגת כאי דוגמא של המושג. כך למשל, בהקשר למושג אלכסון, ידועה הטענה השגויה כי "אלכסון חייב להיות קו משופע בתוך מצולע" (כהן, 2020). בהתאם לכך, קיימת נטייה אצל תלמידים לטעון כי קו משופע בתוך מצולע אשר אינו אלכסון, הוא אלכסון (זהו דימוי מושג עודף) וכי אלכסון שנמצא מחוץ למצולע במצולע קעור אינו אלכסון (דימוי מושג חסר).

במאמר זה נתמקד בדימויי מושג לגבי ישרים מקבילים. נתייחס לשתי תכונות קריטיות של ישרים מקבילים, כלומר לכך שישרים מקבילים הם ישרים ולכך שהם מקבילים. המאמר מציג חקר מקרה של תלמידה בכתה ה' כאשר שאלות המחקר הן:

1. מהם דימויי המושג של ישרים מקבילים שבאים לידי ביטוי בחקר המקרה?
2. האם אפשר לזהות דימויי מושג עודפים ודמויי מושג חסרים בחקר המקרה?

מתודולוגיה

מאמר זה הינו, כאמור, תוצר של התבוננות מחודשת בנתונים שנאספו במסגרת פרויקט שנמשך מספר שנים אשר מטרתו הכוללת הייתה לאבחן ידע תלמידים. במסגרת הפרויקט קיימנו, בין היתר, ראיונות אישיים מובנים למחצה עם תלמידים בכיתה ה'. נפגשנו לפגישה אחת או שתים עם כל תלמיד.

חלק מהראיונות שערכנו התמקדו בידע תלמידים לגבי משפחת המקביליות. בתחילת הפגישה הראשונה בקשנו מהמרואינים לומר מהי מקבילית, זאת כדי לעמוד על ההגדרה האישית שלהם של מקבילית ועל מידת ההתאמה בין ההגדרה הפורמלית לבין ההגדרה האישית. לאחר מכן הצגנו להם, בזו אחר זו, כרטיסיות אשר על כל אחת מהן שורטטה צורה אחת. על חלק מהכרטיסיות שורטטו מקביליות ועל אחרות צורות שאינן מקביליות. התלמידים התבקשו למיין את הכרטיסיות לשתי קבוצות כך שהאחת תכלול את הכרטיסיות עליהן שורטטו מקביליות והאחרת את הכרטיסיות שהצורות ששורטטו עליהן אינן מקביליות. המרואינים התבקשו להסביר את קביעותיהם. לאחר הפגישה

הראשונה עם כל תלמיד קיימנו בינינו שיחה בה ניתחנו את המידע שהתקבל בראיון לגבי ההגדרה האישית, דימוי המושג, הקשרים ביניהם והקשרים ביניהם ובין ההגדרה הפורמלית של מקבילית. בנוסף, במהלך השיחה קבענו האם לצורך אבחון מדוקדק יותר של ידע המרואינים לגבי מקביליות יש לערוך עמם ראיון נוסף בו יוצגו מטלות נוספות, ואם כן מהן המטלות אותן נציג.

ההתבוננות המחודשת בנתוני המחקר העלתה כי בחלק ניכר מהמקרים בהם קיימנו שני ראיונות עם התלמידים, הבחנו במהלך הראיון הראשון בדימויי מושג שגויים של התלמידים לגבי מקבילות. בהתאם לכך הצגנו לתלמידים בראיון השני כרטיסיות עליהן משורטטים שני ישרים אשר חלקם מקבילים וחלקם אינם מקבילים. התלמידים התבקשו למיין את הכרטיסיות לשתי קבוצות, האחת תכלול את הכרטיסיות עליהן שורטטו ישרים מקבילים והאחרת את הכרטיסיות שעליהן שורטטו ישרים שאינם מקבילים. התלמידים התבקשו להסביר את קביעותיהם.

מאמר זה מתאר חקר מקרה של אחת התלמידות בכתה ה', אותה נכנה מירב, לגבי תפיסת המושג ישרים מקבילים. מירב אופיינה על ידי מורת הכתה כתלמידה ממוצעת במתמטיקה שיודעת להביע את דעותיה בצורה בהירה. המטרה הראשונית של ההחלטה לראיין את מירב היתה להתמקד בידע שלה לגבי משפחת המקביליות. בפרק הממצאים נציג בקצרה את ההתרחשויות במהלך הראיון הראשון שהניעו אותנו להתמקד, במהלך הראיון השני (שנערך שבוע לאחר הראיון הראשון) בדימויי המושג של מירב לגבי ישרים מקבילים. נתאר את הכרטיסיות של ישרים מקבילים ושל ישרים שאינם מקבילים אשר הוצגו למירב במהלך הראיון השני עמה, את האופן בו מירב מיינה את הכרטיסיות ואת ההסברים שהתלוו למיון. במהלך הראיונות נכחנו שתינו.

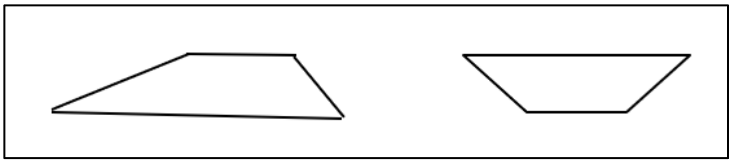
ממצאים

הפגישה הראשונה עם מירב – מקביליות וטרפזים

בפגישה הראשונה עם מירב הצגנו לה 12 כרטיסיות. על שתי כרטיסיות שורטטו טרפזים (ראו איורים א1 ו א2).

איור 1

טרפז שווה שוקיים ("הפוך") וטרפז לא שווה שוקיים



מראיינת: מירב, אני רואה שאת הכרטיסיה הזאת (מצביעה על הטרפז שווה השוקיים באיור 1) שמת בקבוצה של לא מקביליות....

מירב. כן. כי אלה (מצביעה על הבסיס העליון ועל הבסיס התחתון) לא מקבילים.

מראיינת (חוזרת לאט על דבריה של מירב): לא מקבילים...

מירב: כן. זה (מצביעה על הבסיס התחתון) ארוך וזה (מצביעה על הבסיס העליון) יותר קצר.

מראיינת: וזה? (מצביעה על הטרפז שאינו שווה שוקיים באיור 1).

מירב: זה דומה. גם כאן... כמו קודם (מצביעה על הבסיס העליון והבסיס התחתון) לא מקבילים כי זה יותר ארוך וזה יותר קצר, אבל כאן גם אלה (מצביעה על השוקיים) לא מקבילות.

ניתוח ההתייחסות של מירב לשני הטרפזים בפגישה הראשונה

מירב קבעה, באופן התואם את ההגדרות אותן למדה, כי שני הטרפזים אינם מקביליות. אך התבוננות מעמיקה יותר, המתייחסת להנמקות של מירב, יכולה לרמז על תפיסות בעיתיות לגבי מקבילות. תפיסה אחת, אשר באה לידי ביטוי באופן ברור בראיון, קשורה בקביעה של מירב לפיה שני קטעים אינם מקבילים אם הם אינם שוים בארכם. התפיסה השנייה, אשר בה הבחנו בבירור רק כאשר נפגשנו לשוחח על הראיון, מתייחסת לשוקי הטרפז. מירב טענה כי בטרפז שאינו שווה שוקיים השוקיים אינן

מקבילות וזאת בניגוד לטרפז שהוא שווה שוקיים. מכאן מתעורר הרושם כי יתכן שלדעתה של מירב בטרפז שווה שוקיים השוקיים מקבילות זו לזו.

בהתאם לתשובותיה של מירב, פיתחנו את 12 הכרטיסיות שהוצגו לה בראיון השני (ראו איור 2).

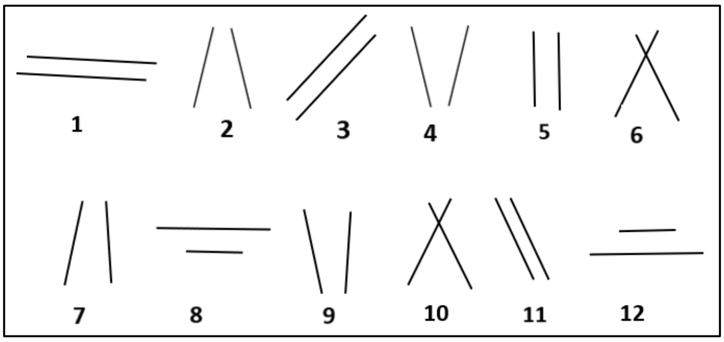
הפגישה השנייה עם מירב – מתי שני ישרים הם מקבילים?

בתחילת הפגישה הצגנו למירב את השאלה: האם את יודעת מתי שני ישרים הם מקבילים? מטרת השאלה היתה ללמוד אם למירב יש הגדרה אישית של המושג ישרים מקבילים ואם כן מהי, והאם היא תואמת את ההגדרה המקובלת.

לאחר שמירב השיבה על השאלה הצגנו לה, בזו אחר זו, את 12 הכרטיסיות באיור 2 (הכרטיסיות מסומנות במספרים בהתאם לסדר בו הוצגו). בשש כרטיסיות (כרטיסיות 1, 3, 5, 8, 11, 12) משורטטים קטעים מקבילים ובשש כרטיסיות אחרות משורטטים קטעים שאינם מקבילים (כרטיסיות 2, 4 ,6, 7, 9, 10). מירב התבקשה למיין את הכרטיסיות לשתי קבוצות: קבוצת הישרים המקבילים וקבוצת הישרים שאינם מקבילים, ולנמק את המיון.

איור 2

ישרים מקבילים וישרים שאינם מקבילים



תשובתה של מירב לשאלה: האם את יודעת מתי שני ישרים הם מקבילים? היתה: "כן. אני יודעת. ישרים מקבילים – הם לא נחתכים. אסור שהם יהיו ככה". מירב שרטטה, על נייר, שרטוט דומה לשרטוט 10 באיור 2).

במשימת המיון מירב החליטה במהירות רבה לאיזו קבוצה לשייך את כל אחת מהכרטיסיות. היא כללה בקבוצת הישרים המקבילים את הכרטיסיות 1, 2, 3, 4, 5, 11 ובקבוצת הישרים הלא מקבילים את כרטיסיות 6, 7, 8, 9, 10, 12.

מראיינת: אני רואה שאת כרטיסיות 1, 2, 3, 4, 5, 11 שמת בקבוצה של ישרים מקבילים?

מירב (מחייכת) כן. 1 עומד כמעט כמו שבדרך כלל עומדים ישרים מקבילים. 5, זה אותו דבר רק מלמעלה למטה, 3 ו 11 הם אותו דבר רק ששניהם קצת יותר באלכסון, אבל זה מותר שהם יהיו באלכסון. 2 ו 4 דומים – שניהם פתוחים אותו דבר (פותחת את שתי הידיים ומראה שהן פתוחות באותה זווית).

מראיינת: ואת 6, 7, 8, 9, 10, 12 שמת בישרים הלא מקבילים?

מירב: כן. זה קל כי 6 ו 10 נחתכים וזה אסור. 7 ו 9 לא נפתחים אותו דבר (מדגימה עם הידיים פתיחה שונה) ו 8 ו 12 הם לא באותו האורך.

מראיינת: אנחנו עוד מעט מסיימות את החלק הזה. יש עוד משהו שאת רוצה להגיד?

מירב (חושבת): כן. זה קל. כי אם רואים בשרטוט שהם נחתכים אז הם לא מקבילים. ואם הם לא באותו אורך אז הם לא מקבילים. הם צריכים להיות בדיוק ככה (מדגימה עם אותן שתי אצבעות בשתי הידיים פתיחה באותה זווית באותו כיוון ופתיחה "באותה זווית" בכיוונים שונים).

מראיינת: תודה רבה מירב.

דיון

במאמר זה הצגנו שתי שאלות מחקר. השאלה הראשונה היתה: מהם דימויי המושג של ישרים מקבילים שבאים לידי ביטוי בחקר המקרה? מתוך תשובתה של מירב לשאלה: "האם את יודעת מתי שני ישרים הם מקבילים?" ("ישרים מקבילים – הם לא נחתכים" והשרטוט אותו הוסיפה) ומהאופן בו מיינה את כרטיסיות 6 ו 10 ניתן ללמוד כי, על פי מירב, ישרים שנחתכים אינם מקבילים. עם זאת, מירב קובעת כי השרטוטים המתוארים בכרטיסיות 2 ו 4 מתארים ישרים מקבילים, כיוון שהם "פתוחים אותו דבר". מהאופן בו מירב ממיינת את הכרטיסיות האלה נוצרת תחושה שהיא אינה מודעת לכך שכאשר ישרים הם מקבילים, הנקודות על האחד חייבות להימצא באותו מרחק מהישר המקביל לו. בנוסף, מירב מסווגת את השרטוטים בכרטיסיות 8 ו 12, בהם משתמר המרחק, כישרים שאינם מקבילים כיוון שאחד הקטעים ארוך יותר. על פי מירב, אחד הקטעים ארוך מהשני ולכן אינם מקבילים.

שאלת המחקר השנייה התייחסה לזיהוי דימויי מושג עודפים ודמויי מושג חסרים בחקר המקרה. הראיונות עם מירב מציגים מצב בו בקבוצת הדוגמאות של המושג ישרים מקבילים, על פי מירב, נכללים איברים שאינם ישרים מקבילים (כרטיסיות 2 ו 4). בנוסף, מירב לא כוללת בקבוצת הדוגמאות של ישרים מקבילים חלק מהישרים המקבילים (כרטיסיות 8 ו 12). מספר שאלות שנשאלות, בהקשר לדימויי המושג העודפים ודימויי המושג החסרים של מירב, הן: מהם גורמים אפשריים לכך שנוצרו אצל מירב דימויי מושגים עודפים של ישרים מקבילים? מהם גורמים אפשריים לכך שנוצרו אצלה דימויי מושגים חסרים של ישרים מקבילים? גורם אפשרי ליצירת דימויי מושג עודפים ודימויי מושג חסרים של ישרים מקבילים אצל מירב הוא הקושי הנובע מהפער בין התיאור הצורני של מושגים גיאומטריים לבין התיאור הפורמלי שלהם (Fischbein, 1993). במקרה של ישרים מקבילים, קושי זה בא לידי ביטוי בפער בין השרטוט (הסופי) של הקטעים לבין האופי האינסופי של הישרים. פער זה יכול להביא, כפי שמודגם בחקר המקרה של מירב, הן ליצירת דימויי מושג עודפים והן ליצירת דימויי מושג חסרים.

במאמר זה הצגנו את המושגים דימוי מושג עודף ודימוי מושג חסר. שאלות נוספות שעולות לגבי המושגים דימוי מושג עודף ודימוי מושג חסר הן: האם אבחנה זו מסייעת לאבחן ידע של לומדים לגבי מושגים מתמטיים נוספים, בנוסף למושגים שנבדקו עד כה? האם האבחנה מסייעת בבניית ידע לגבי מושגים מתמטיים? מהם מהלכים דידקטיים אפשריים לגבי דימויי מושגים עודפים? מהם מהלכים דידקטיים אפשריים לגבי דמויי מושגים חסרים? שאלות אלה יבחנו במחקרים נוספים.

רשימת מקורות

כהן, נ. (2020). לראות, לנתח ומה שביניהם. *מספר חזק*, *31*, 29-45.

Beach, J.M. (2020). *Examining the concept images of function held by preservice secondary mathematics teachers with varying levels of prior mathematical experiences* [Unpublished doctoral thesis]. University of Texas, USA.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2022). Missing and mis-in concept images of parallelograms: The case of Tal. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20,* 981-997.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (in press). Mis-in concept and mis-out concept images: The case of even numbers. *Educational Studies in Mathematics.*

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept mages and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the PME* (pp. 177–184). Lawrence Hall of Science, University of California.

בחינת הגדרות חלופיות למושג ככלי איבחון וכמנוף ללמידה: המקרה של הפונקציה העולה

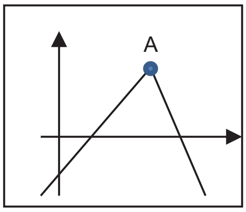
קרני שיר, האקדמית שאנן, המרכז האקדמי לוינסקי וינגייט
אורית זסלבסקי, אוניברסיטת ניו-יורק, הטכניון חיפה

מבוא

מושג ההגדרה המתמטית הִנּוֹ מושג מרכזי במתמטיקה ובלימודי המתמטיקה. הגדרות מתמטיות משמשות כאבני בניין לבניית תיאוריות מתמטיות ומהוות בסיס להוכחות ופתרון בעיות. בנוסף הן משמשות ככלי לתקשורת בין בני אדם, וליצירת אחידות במשמעותם של מושגים (Pimm, 1993; Edwards & Ward 2008). בבחירה של הגדרה מתמטית למושג יש לעיתים קרובות מרכיב של שרירותיות. מרכיב זה בא לידי ביטוי בכך, שכאשר יש אוסף של היגדים השקולים להגדרה מסוימת, ניתן למעשה לבחור כהגדרה כל אחד מההיגדים הללו (שיר וזסלבסקי, 2016), ומשמעות המושג תישמר.

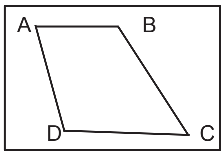
כאשר אנו צריכים להחליט איזה היגד יכול לשמש כהגדרה של מושג מתמטי מסוים, או כאשר אנו מסווגים אובייקטים מתמטיים לדוגמאות ואי-דוגמאות של המושג הנדון, אנו משתמשים לרוב באופן אוטומטי בדימוי המושג שלנו או בהגדרת המושג בה אנו מחזיקים, כלומר, ההגדרה "האישית" שלנו, ולא בהכרח בהגדרה הפורמלית של המושג (Tall & Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1989). הגדרת המושג האישית שלנו לא תמיד שקולה להגדרה הפורמלית של המושג וגם לא תמיד תואמת את דימוי המושג שלנו. מצב זה עלול להביא אותנו לפעול בחוסר עקביות מבלי שנהיה מודעים לכך.

איור 1



ייתכן מקרה בו אובייקט שהלומד תופס כדוגמא של המושג לא יהיה דוגמא על פי ההגדרה בה הוא מחזיק. לדוגמא, תלמיד עלול להחזיק בקריטריון (תנאי מספיק) לנקודת מקסימום, לפיו נקודת מקסימום של פונקציה $f(x)$ הנה נקודה אשר עבורה מתקיימים שני התנאים הבאים: $f'(x) = 0$ וגם $f''(x) < 0$, ובכל זאת לתפוס את הנקודה A (איור 1) כנקודת מקסימום למרות שהיא אינה מקיימת את התנאים של הגדרת המושג האישית בה הוא מחזיק.

איור 2



ייתכן גם מקרה הפוך בו אובייקט שאינו נתפס אצל הלומד כדוגמא של המושג, יהיה דוגמא על פי ההגדרה בה הוא מחזיק. לדוגמא, המרובע ABCD (ראה איור 2) אינו נתפס אצל הלומד כטרפז למרות שהוא תואם את הגדרת המושג בה הוא מחזיק על פיה טרפז הנו מרובע בעל זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.

בשני המקרים ניתן לראות "השתלטות" של דימוי המושג על ההגדרה הפורמלית. חשיפה לקונפליקטים מסוג זה יכולה לגרום ללומד לחשוב מחדש על הגדרת המושג האישית שלו, ולנסות לדייק אותה.

המושג 'פונקציה עולה' איננו מושג טריוואלי. ההגדרה הפורמלית של מושג זה הנה: פונקציה f נקראת פונקציה עולה בתחום D אם לכל x_1, x_2 בתחום D מתקיים $x_1 < x_2 \Leftarrow f(x_1) < f(x_2)$. במהלך הלימודים בתיכון התלמידים משתמשים בקריטריון של סימן הנגזרת של הפונקציה על מנת לקבוע תחומי עלייה וירידה. בשאלות רבות בהן מתבקשים התלמידים לקבוע אם פונקציה מסוימת עולה, או מהם תחומי העלייה של הפונקציה, הם משתמשים בקריטריון הנגזרת החיובית כתנאי לעלייה של הפונקציה. שימוש תכוף זה בקריטריון עלול להפוך את הקריטריון לתחליף להגדרת המושג (Vinner, 1994).

בהתבסס על האמור לעיל, המחקר המתואר בוחן את הפוטנציאל של עיסוק בהיגדים המהווים מועמדים לשמש כהגדרת המושג "פונקציה עולה" לחשוף תפיסות של פרחי הוראה את המושג, ולמנף למידה וחידוד ההבנה של המושג והגדרתו.

תיאור המחקר

<u>מטרת המחקר</u>: מחקר זה הנו חלק ממחקר גדול יותר שמטרתו לעמוד על התרומה של העיסוק במגוון היגדים המועמדים לשמש כהגדרת מושג כמנוף ללמידה. במסגרת ההצגה בכנס נתמקד בשאלה: כיצד

תופסים פרחי הוראה את המושג 'פונקציה עולה', ומהם השינויים שחלים בעקבות דיון קבוצתי אשר החשיפה לאוסף זה של היגדים זה מעוררת.

אוכלוסיית המחקר כללה 46 פרחי הוראה הלומדים לתעודת הוראה במתמטיקה בביה"ס העל יסודי.

כלי המחקר: במסגרת המחקר נחשפו פרחי ההוראה לשבעה היגדים המועמדים לשמש כהגדרה של המושג "פונקציה עולה" (ראה איור 3), ולארבע דוגמאות ואי דוגמאות של מושג זה (ראה איור 4). עבור כל היגד היה על פרחי ההוראה לקבוע האם הוא יכול לשמש כהגדרה של המושג, ולנמק, ועבור כל דוגמא היה עליהם לומר האם היא מהווה דוגמא או אי-דוגמא של המושג, ולנמק. בנוסף התבקשו פרחי ההוראה לרשום באיזה היגדים היו משתמשים כדי ללמד מהי פונקציה עולה, ומדוע. בשלב הראשון המשימות ניתנו כמשימות אישיות, בשלב השני התבקשו פרחי הוראה לחזור על המשימות בקבוצות קטנות.

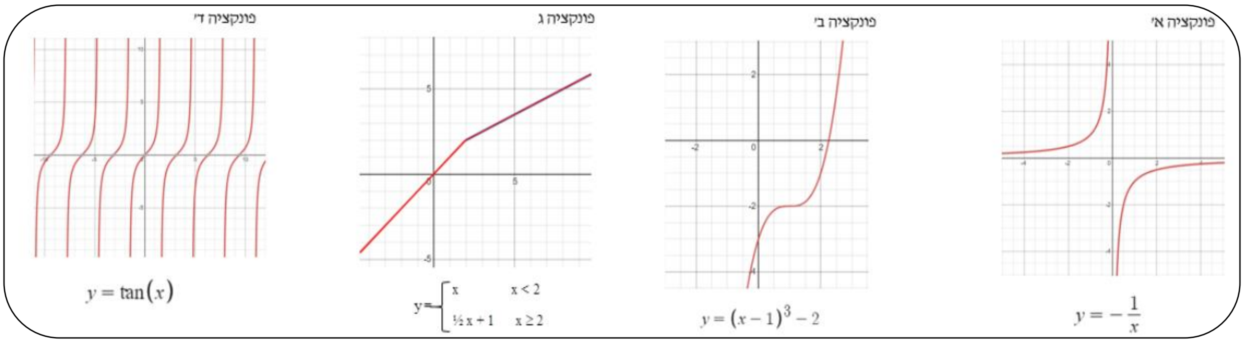
איור 3

ההיגדים לגביהם התבקשו פרחי ההוראה לקבוע אילו מהם יכולים לשמש כהגדרה של פונ' עולה

1. פונקציה f נקראת פונקציה עולה בתחום הגדרתה אם לכל x השייך לתחום ההגדרה מתקיים $f'(x) > 0$.
2. פונקציה f נקראת פונקציה עולה בתחום הגדרתה אם לכל x_1, x_2 בתחום ההגדרה מתקיים $f(x_1) < f(x_2) \Leftarrow x_1 < x_2$.
3. אם $f'(x_0) > 0$ אז הפונקציה $f(x)$ עולה בנקודה x_0.
   פונקציה אשר עולה בכל הנקודות שבתחום ההגדרה שלה (D) הנה פונקציה עולה בתחום הגדרתה.
4. פונקציה f נקראת פונקציה עולה בתחום ההגדרה שלה אם ערכי ה- y שלה גדלים ככל שגדלים ערכי ה- x.
5. f נקראת פונקציה עולה בתחום הגדרתה אם השיפוע שלה בכל נקודה בתחום ההגדרה שלה חיובי.
6. פונקציה f עולה בתחום הגדרתה, אם לכל x_1, x_2 הנמצאים שניהם באותו קטע בו הפונקציה רציפה, מתקיים $f(x_1) < f(x_2) \Leftarrow x_1 < x_2$.
7. אם לכל- h חיובי וקטן מספיק מתקיים: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ אז הפונקציה $f(x)$ עולה בנקודה x_0.
   פונקציה אשר עולה בכל הנקודות שבתחום ההגדרה שלה (D) הנה פונקציה עולה בתחום הגדרתה.

איור 4

הדוגמאות לסיווג אותן קיבלו פרחי ההוראה



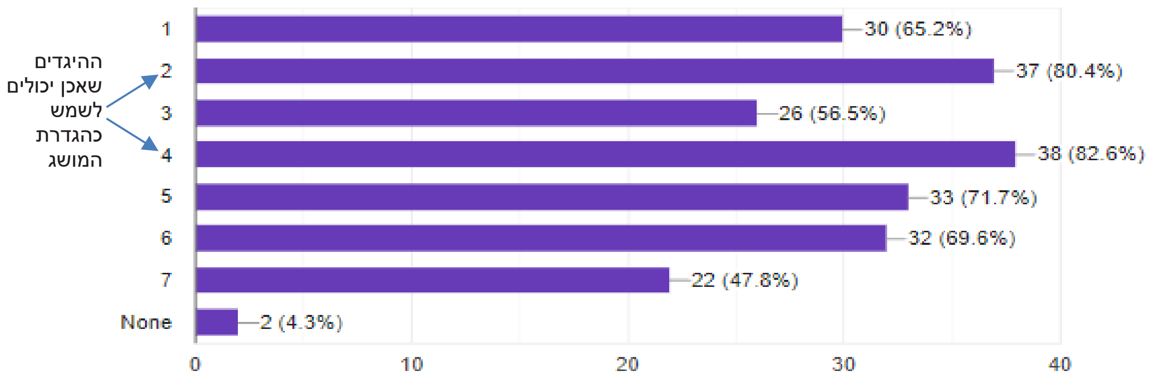
המטרה של הצגת אוסף ההיגדים והדוגמאות היתה כפולה: גם לבדוק האם פרחי ההוראה יודעים לזהות את ההיגדים שיכולים להוות את הגדרת המושג, ואת הדוגמאות המתארות את המושג, ולראות האם קיימת הלימה בין הגדרת המושג האישית ובין הדוגמאות אותן הם כן או לא מקבלים.

ממצאים ודיון

כתגובה לשאלה הראשונה בה נשאלו פרחי ההוראה אילו היגדים **יכולים לשמש כהגדרה** של המושג פונקציה עולה, רק אחד מתוך 46 פרחי ההוראה קיבל כהגדרה את היגדים 2 ו- 4 בלבד, שני ההיגדים היחידים מהשבעה שאכן מתארים פונ' עולה. אומנם בסך הכל 37 פרחי הוראה (80%) קיבלו את היגד 2 כהגדרה, ו 38 פרחי הוראה (82%) קיבלו את היגד 4 כהגדרה. אך בו בזמן, 44 מהם (96%) קיבלו כהגדרה של מושג זה היגדים נוספים, אשר אינם שקולים להגדרת המושג (ראה איור 5).

איור 5

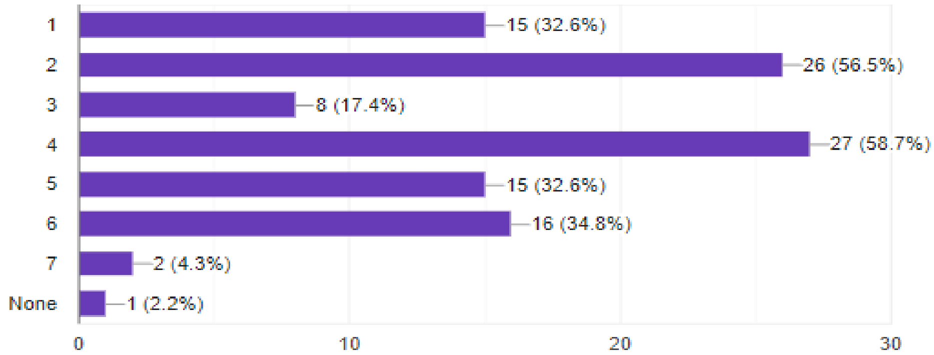
התפלגות קביעות 46 פרחי ההוראה ביחס להיגדים אותם היו מקבלים כהגדרה של המושג פונק' עולה



כפי שניתן לראות באיור 6, כאשר נשאלו פרחי ההוראה באיזה היגד היו **מעדיפים** להשמש על מנת ללמד את המושג פונקציה עולה בכיתה, קרוב ל 60% מפרחי ההוראה ציינו את היגדים 2 או 4 כאילו אשר היו מעדיפים להשתמש בהם. יחד עם זאת אחוז לא מבוטל (32-34%) סימן גם היגדים אחרים.

איור 6

התפלגות קביעות 46 פרחי ההוראה ביחס להיגדים בהם היו מעדיפים להשתמש כדי ללמד את המושג בכיתה



כתגובה <u>לשאלה השנייה</u> בה נשאלו פרחי ההוראה אילו מבין ארבע הפונקציות שהוצגו בפניהם מתארות פונקציה עולה, אחד מתוך 46 פרחי ההוראה (2%) סימן את פונקציה ב' בלבד. שני פרחי הוראה (4%) סימנו את פונקציה ג' בלבד, ורק 8 (17%) סימנו את התשובה הנכונה שהיא פונקציות ב' ו ג' בלבד. 29 פרחי הוראה (63%) חשבו שפונקציה א' מהווה דוגמא של פונקציה עולה, ו- 31 פרחי הוראה (67%) חשבו שפונקציה ד' מהווה דוגמא של פונקציה עולה (ראה איור 7).

איור 7

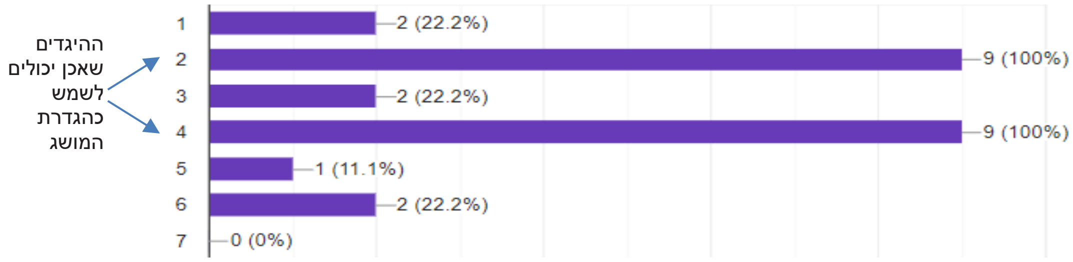
התפלגות קביעות פרחי ההוראה ביחס לפונקציות אשר לדעתם מהוות דוגמא של פונ' עולה

התשובות של פרחי ההוראה לחלק האישי של המשימה מצביעות על כך כי פרט לסטודנט אחד, פרחי ההוראה לא הבחינו בחוסר השקילות בין ההיגדים אשר לדעתם יכלו לשמש כהגדרה של המושג וקיבלו כהגדרה אפשרית היגדים שונים אשר אינם שקולים זה לזה. בנוסף, לא היתה הלימה בין ההגדרות אותן הם קיבלו (או העדיפו), לבין הדוגמאות אותן קיבלו כדוגמאות של המושג. ניתן לראות כי דימוי המושג 'פונקציה עולה' של פרחי ההוראה אינו תואם את המשמעות המתמטית של המושג, ורובם (72%) השתמשו בקריטריון של הנגזרת החיובית כתחליף להגדרת המושג וכמדד לסיווג הדוגמאות.

העבודה בקבוצות: בחלק השני של הפעילות התבקשו פרחי ההוראה לענות על אותן משימות, הפעם בקבוצות של 4-6 פרחי הוראה בכל קבוצה (החלוקה לקבוצות נעשתה באופן אקראי). כתגובה לשאלה לגבי ההיגדים אותם היו מקבלים כהגדרה של המושג פונ' עולה, כל תשע הקבוצות קיבלו את היגדים 2 ו- 4 כהגדרה של המושג. שלוש קבוצות קיבלו כהגדרה רק את שני ההיגדים הללו. כאשר נשאלו באיזה היגד היו מעדיפים להשתמש על מנת ללמד את המושג, כל תשע הקבוצות בחרו את היגדים 2 ו- 4, ו- 7 קבוצות בחרו את שני ההיגדים הללו בלבד (ראה איור 8).

איור 8

התפלגות קביעות 9 הקבוצות ביחס להיגדים בהם היו מעדיפים להשתמש כדי ללמד את המושג בכיתה



בהתייחס לפונקציות שהוצגו להם, אותן שלושת הקבוצות שקיבלו כהגדרה רק את אותם היגדים שאכן מתארים פונקציה עולה, ידעו גם לזהות בצורה נכונה מה כן ומה לא מהווה דוגמא של פונקציה עולה.

מעניין לראות כי למרות שרוב פרחי ההוראה בשלושת הקבוצות הללו (94%) לא ענו נכון על המשימה האישית, ויתרה על כך 12 (75%) מהם עבדו על המשימה הקבוצתית בקבוצות בהן כל חברי הקבוצה לא ענו נכון על המשימה האישית. החשיבה המחודשת והדיון הקבוצתי הביאה אותם לכך שהם יכלו בתום המשימה הקבוצתית להגדיר במדוייק את המושג, לסווג נכון את הדוגמאות, ולנמק, בעזרת דוגמאות ואי-דוגמאות, את השיקולים שעמדו מאחורי הקביעות שלהם.

הממצאים של המחקר קשורים גם בהיבטים חברתיים קבוצתיים (Tabach & Nachlieli, 2015), ומצביעים על העמקת ההבנה של המושגים המתמטיים שנידונו בעקבות אינטראקציה קבוצתית סביב מגוון הגדרות של מושגים מתמטיים. בהקשר זה נמצא כי דיון במגוון היגדים המהווים מועמדים לשמש כהגדרת מושג מתמטי המלווה באפיזודות אי הסכמה וויכוח הנו בעל פוטנציאל רב להתפתחות מושגית, מכיוון שהוא נותן ביטוי לקונפליקטים הגוררים שיח מתמטי סביב המושג המוגדר (Zaslavsky & Shir, 2005). בנוסף לממצאים המתוארים בהצעה, במסגרת ההצגה בכנס יוצגו הנימוקים השונים שעלו על ידי פרחי ההוראה, וסיווג התפיסות אשר באו לידי ביטוי בנימוקים אילו.

רשימת מקורות

שיר, ק. וזסלבסקי, א. (2016). הגדרות שונות ל"אותו מושג" - מנוף או מכשול? המקרה של הטרפז. על"ה 54. 7-15

Edwards, B., & Ward, M. B. (2008). The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics. *Research and teaching in undergraduate mathematics education*, 73(2), 223-232.

Pimm, D. (1987). Speaking mathematically: Communications in mathematics classrooms. London & New York: Routledge & Kegan Paul.

Tabach, M and Nachlieli, T (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics, 90,* 163-187

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2),* 151-169

Vinner, S. (1994). A different test and a different result analysis - An example from a calculus exam. *Journal für Mathematik Didaktik, 15(3/4),* 311-326.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(4),* 356-366.

Zaslavsky, O., & Shir, K (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36 (4),* 317-346

הזדמנויות להוכחות והנמקות במשימות מתמטיות:
עדשה דיסקורסיבית
מרב וינגרדן, University of New Hampshire
אורלי בוכבינדר, University of New Hampshire

פעולות חשיבה-הנמקה מתמטיות ופעולות לוגיות-דדוקטיביות

מחקרים רבים מצביעים על החשיבות של הוכחות והנמקות (Reasoning-and-Proving) בלימודי המתמטיקה לצורך שיפור יכולת החשיבה וההבנה של תלמידים (Hanna & deVillers, 2012). מורים יכולים לזמן עבור תלמידיהם הזדמנויות שונות להוכחות והנמקות על ידי בחירה ועיצוב של משימות מתמטיות. הזדמנויות אלה יכולות לכלול זיהוי דפוסים או תבניות בסדרה של מספרים או צורות, הכללה, העלאת השערות לגבי חוקיות מתמטית, והוכחת טענות (Stylianides, 2008; Thompson et al., 2012). במטרה להגדיר פעולות חשיבה הקשורות בהוכחות והנמקות, Jeannotte & Kieran (2017) פיתחו מסגרת מושגית, על בסיס המסגרת הקומוגניטיבית, בה הן הגדירו תשע פעולות חשיבה מתמטיות (mathematical reasoning processes): הכללה, העלאת השערות, זיהוי תבניות, השוואה, סיווג, תיקוף, הצדקה, הוכחה והדגמה, כפעולות מטה-דיסקורסיביות על עצמים מתמטיים.

פעולות חשיבה אלו דורשות מהתלמידים יישום של חוקים לוגיים ודדוקטיביים ההכרחיים לבניית טיעונים ולהסקת מסקנות. למשל, ההבדל בין טענת "לכל" וטענת "קיים", כיצד מוכיחים או מפריחים טענות אלו, ומה אפשר להסיק מהן. שאלות אלו ותהליכי החשיבה המגולמים בהן אינם בהכרח באים לידי ביטוי במשימות הכוללות זיהוי דפוסים, הכללה, והדגמה, אלא בסוג אחר של משימות המתמקדות בפעולות לוגיות הקשורות לרעיון המהותי של הוכחה וטענה ולמבנה שלהן (Cirillo & May, 2020).

שני סוגי הפעולות הללו – פעולות חשיבה ופעולות לוגיות, קשורות ומזינות אלו את אלו ושתיהן חיוניות לשימוש בהוכחות והנמקות בלימוד והוראת המתמטיקה, אולם הן מתמקדות בהיבטים שונים של הלמידה. בחינת ההזדמנויות להוכחות והנמקות שניתן לזמן לתלמידים, ובפרט על ידי משימות מתמטיות, לא נבחנו בצורה הכוללת את שני סוגי פעולות אלו. מטרתנו להציע מסגרת מאוחדת לניתוח, סיווג ואפיון משימות מתמטיות ולבחון באמצעות מסגרת זו *אלו סוגי הזדמנויות להוכחות והנמקות ניתן למצוא במשימות שעוצבו על ידי פרחי הוראה?*

מסגרת לניתוח משימות מתמטיות וההזדמנויות להוכחות והנמקות

המסגרת לניתוח משימות והפוטנציאל שלהן לזמן הזדמנויות להוכחות והנמקות באמצעות סוגי הפעולות הכלולות בהן מבוססת על התיאוריה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008). תיאוריה דיסקורסיבית זו ממשיגה *חשיבה* כהשתתפות בשיח על אובייקטים (עצמים) מתמטיים *ולמידה* כתהליך של שינוי בשיח. מאחר וכל משימה מזמנת תהליכי חשיבה ולמידה, ניתן לאפיין אותה באמצעות *האובייקט* העומד במרכז המשימה – מה המשימה מבקשת למצוא (לדוגמה: משוואה) *והפעולות* – תהליכים ודפוסי פעולה אחריהן התלמיד נדרש לעקוב בבואו לפתור את המשימה (כגון: כינוס איברים, הכללה).

למשל, בסעיף א' של המשימה המופיעה באיור 1, הפעולות אותן נדרש התלמיד לבצע על אובייקט הפונקציה הן להציב ערכי x ולמצוא את ערכי ה-y, למקם את הנקודות על מערכת הצירים וכו'. אם התלמיד היה נדרש גם להסביר מדוע תשובתו נכונה או להוכיח את טענתו, פעולות החשיבה המתמטיות (הכללה, הנמקה, תיקוף, הוכחה וכו') היו גם כן מאפיינות את המשימה. פעולות אלו הוגדרו על ידי Jeannotte & Kieran (2017) כפעולות מטה-דיסקורסיביות, מכיוון שהן אינן מבוצעות על האובייקט המתמטי (למשל, להציב x=1 בביטוי הפונקציה), אלא על השיח המתמטי עצמו ועל הדרך בה המשתתפים בשיח פועלים על אובייקטים מתמטיים ומפתחים נרטיבים על אובייקטים אלו ועל

הקשרים ביניהם. נרטיבים אלו מיוצרים כמענה לשאלות כגון: מדוע זה נכון? איך את יודעת שזה נכון? למה זה תמיד יעבוד? איך אפשר להוכיח את זה? וכו'.

איור 1

דוגמה למשימה מתמטית

א. ציירו את הגרף של הפונקציות הבאות: (i) y=-3x+7 (ii) 2/3x-4=y.
ב. כתבו משפט תנאי שקשור לפונקציות המופיעות בסעיף א' וציינו איזה חלק ממשפט התנאי הוא ה"תנאי" ואיזה חלק הוא ה"מסקנה".
ג. קבעו האם המשפט שכתבתם בסעיף ב' הוא נכון או לא והסבירו מדוע.

פיתוח נרטיבים מטה-דיסקורסיביים וביצוע פעולות חשיבה מתמטיות מצריך סוג נוסף של פעולות, כאלו המתמקדות בהוכחה עצמה, במבנה שלה ובחוקים לוגיים הנדרשים בשביל לבנות טיעונים ולהוכיחם. פעולות לוגיות אלו, כמו למשל אלו המאפיינות את סעיף ב' במשימה באיור 1, הדורשת כתיבת משפט תנאי (בצורת: אם... אז...) וזיהוי התנאי והמסקנה, מבוצעות על אובייקטים לוגיים, כמו למשל משפט תנאי. סעיף ג' הוא דוגמה לשאלה המכילה גם פעולות לוגיות (לקבוע מה נדרש כדי להוכיח/להפריך טענה), גם פעולות חשיבה מתמטיות (לתקף ולנמק) וגם פעולות מתמטיות (זיהוי קשרים, תכונות ומאפיינים של פונקציה לינארית והגרף שלה). שאלה זו עוסקת גם באובייקט המתמטי *פונקציה לינארית* וגם באובייקט *משפט תנאי*. בטבלה 1 ניתן למצוא את מרכיבי המסגרת.

טבלה 1

מסגרת לניתוח משימות מתמטיות וההזדמנויות להוכחות והנמקות

	מאפייני המשימה	דוגמאות
אובייקטים	אובייקט מתמטי (א"מ)	משוואה, מספר, פונקציה
	אובייקט לוגי (א"ל)	טענה, משפט תנאי, דוגמה
פעולות	פעולות מתמטיות (פ"מ)	להכפיל, לגזור פונקציה, לחפוף משולשים
	פעולות חשיבה מתמטיות (פח"מ)	להכליל, לנמק, להוכיח, לסווג, לתקף, לשער
	פעולות לוגיות (פ"ל)	לכתוב טענה, לזהות השערה/מסקנה, לסווג טענות

יישום המסגרת לניתוח משימות: הקשר ומערך המחקר

המחקר המתואר הוא חלק מפרויקט נרחב הבוחן כיצד פרחי הוראה שהשתתפו בקורס *הוכחות והנמקות למורי מתמטיקה בעל-יסודי* מיישמים הוכחות והנמקות במהלך שנותיהן הראשונות בהוראה. במסגרת הקורס, פרחי ההוראה למדו על מבנה טענות מתמטיות וסוגי הוכחות, ועל הפן הפדגוגי: קשיים ותפיסות מוטעות של תלמידים בהקשר של הוכחות, שאלות שהמורה יכול לשאול כדי לתמוך בחשיבת התלמידים ועוד. כמו כן, פרחי ההוראה תכננו ארבעה שיעורים המשלבים הוכחות והנמקות עם נושאים מתמטיים מתכנית הלימודים של חט"ב וחט"ע, העבירו את השיעורים הללו בבתי ספר וכתבו משוב רפלקטיבי. כדי לבחון את ההזדמנויות להוכחות והנמקות במשימות שעיצבו פרחי ההוראה, ניתחנו 12 מערכי שיעור של שלושה פרחי הוראה שכללו 106 שאלות. יחידת הניתוח היא השאלה המצומצמת ביותר במשימה, כגון כל סעיף בשאלה (למשל, המשימה באיור 1 מכילה שלוש שאלות). בכל שאלה, זיהינו את סוגי האובייקטים והפעולות המאפיינות את המשימה (בדומה לטבלה 1). חלק מהשאלות הכילו אובייקט אחד וסוג פעולות בודד, כמו למשל סעיף א' במשימה באיור 1 (א"מ, פ"מ). חלק מהשאלות קודדו באמצעות כמה מאפיינים, כמו למשל סעיף ג' במשימה באיור 1 שקודד באמצעות כל חמשת המאפיינים (א"מ, א"ל, פ"מ, פח"מ, פ"ל). שתי החוקרות קודדו בנפרד מדגם של שאלות, ערכו דיון לגישור אי ההסכמות וקודדו מדגם נוסף בו הגיעו למידת הסכמה גבוהה: Cohen's Kappa=0.707. על מנת לזהות את סוגי ההזדמנויות להוכחות והנמקות בשאלות, ביצענו ניתוח אשכולות (Two-Steps Cluster Analysis) על חמשת המאפיינים המופיעים בטבלה 1. ניתוח אשכולות הוא אלגוריתם סטטיסטי המאגד אובייקטים על ידי זיהוי דפוסים דומים, במקרה שלנו: שילובים של מאפייני השאלות.

ממצאים: ארבעה סוגים של הזדמנויות להוכחות והנמקות

הניתוח העלה ארבע קבוצות הנבדלות זו מזו בשילובים של חמשת מאפייני המשימה. טבלה 2 מתארת את ארבע הקבוצות, המספר של שאלות בכל קבוצה והשכיחות של כל משתנה בקבוצה. מדדי האיכות של ניתוח האשכולות לפי מדד Silhouette נמצא טוב (בין 0.5 ל-1), מבחן Chi-Square הראה שיש הבדל משמעותי בין כל אחד מחמשת המשתנים בארבע הקבוצות (א"מ, א"ל, פ"מ, פ"ל: $\chi2(3,106) = 106, p<0.001$, פח"מ: $\chi2(3,106) = 81.042, p<0.001$).

טבלה 2

ארבע הקבוצות המתארות סוגי הזדמנויות להוכחות והנמקות בשאלות שתיכננו פרחי הוראה

מאפייני המשימה	קבוצה 1	קבוצה 2	קבוצה 3	קבוצה 4
	שיח מתמטי גרידא	פעולות חשיבה מתמטיות בשיח מתמטי גרידא	שיח מתמטי-לוגי על הוכחות וטענות	פעולות חשיבה מתמטיות בשיח מתמטי ולוגי
	N = 37	N = 12	N = 36	N = 21
א"מ	**100%**	**100%**	0%	**100%**
פ"מ	**100%**	**75%**	0%	**76.2%**
פח"מ	0%	**100%**	0%	**100%**
א"ל	0%	0%	**100%**	**100%**
פ"ל	0%	0%	**100%**	**100%**

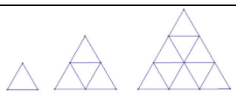
ארבע הקבוצות המופיעות בטבלה 2 מתארות ארבעה סוגים של הזדמנויות להוכחות והנמקות. קבוצה 1 כוללת שאלות בהן האובייקט במרכז המשימה והפעולות שהתלמיד צריך לבצע לפתרון המשימה מבוססים על שיח מתמטי גרידא. לדוגמה, "סרטטו את גרף הפונקציה y=-3x+7", "ציירו משולש שווה צלעות ורשמו את תכונותיו", "סובבו את המרובע הנתון 90° עם כיוון השעון סביב הנקודה P". שאלות אלו, מספקות הזדמנויות מוגבלות להוכחות והנמקות, אם בכלל.

קבוצה 2 כוללת שאלות השייכות לשיח מתמטי, אך בשונה מקבוצה 1, שאלות אלה מצריכות פעולות חשיבה מתמטיות (ראה פח"מ בטבלה 1). לדוגמה, בשאלה באיור 2 האובייקט המתמטי (א"מ) הוא משוואה/ביטוי אלגברי והפעולה המתמטית (פ"מ) היא בניית משוואה. בנוסף, שאלה זו מאופיינת בפעולות חשיבה מתמטיות (פח"מ): זיהוי תבנית והכללת חוקיות.

איור 2

דוגמה לשאלה מקבוצה 2

צרו משוואה שניתן להשתמש בה כדי לתאר את מספר המשולשים הקטנים המרכיבים כל משולש גדול בסדרה הבאה:



בשונה משתי הקבוצות המתמקדות בשיח מתמטי, קבוצה 3 כוללת שאלות משיח לוגי על הוכחות וטענות, למשל: "בכל אחת מהטענות הנתונות קיבעו האם מדובר בטענה אוניברסלית (טענת לכל) או טענה קיומית (טענת קיים)", "בכל אחת מהטענות הנתונות, זהו את התנאי ואת המסקנה, ונסחו את הטענה כ-"אם... אז..."", "נסחו טענה הפוכה לכל אחת מהטענות הנתונות". בשאלות אלו, האובייקט

הוא לוגי (א"ל): טענה, משפט תנאי, וגם הפעולות מתמקדות בשיח לוגי – בזיהוי המבנה הלוגי של טענה ובסוגי טענות (פ"ל).

קבוצה 4 כוללת שאלות המשלבות שיח לוגי (כמו קבוצה 3) עם שיח מתמטי יחד עם פעולות חשיבה מתמטיות (קבוצה 2). לדוגמה, שאלה שבה תלמידים התבקשו לצייר משולש חד זוית ומשולש שווה צלעות ולאחר מכן לכתוב משפט תנאי על משולשים אלו ולדון עם חבריהם על משפטי תנאי שונים שאפשר לטעון על משולשים אלו. שאלה זו שייכת לשיח לוגי מכיוון שהיא עוסקת במשפטי תנאי שהתלמידים נדרשים לפתח. במקביל, היא עוסקת גם באובייקטים מתמטיים כמו משולש שווה צלעות ומשולש חד זווית שהתלמידים מציירים ומזהים את תכונותיהם. בנוסף לעיסוק המקביל וההדדי בשני אובייקטים אלו, שאלה זו גם מאופיינת בפח"מ כמו העלאת השערות וסיווג תכונות המשולשים.

סיכום ודיון

אידאלית, למידת מתמטיקה המעודדת חשיבה והבנה צריכה לכלול את השתתפות התלמידים הן בשיח המתמטי והן בשיח הלוגי, שצריכים להיות משולבים זה בזה. במציאות, כמו שהראו מחקרים שונים (לדוגמא, Thompson et al., 2012), משימות מתמטיות לרוב לא מאפשרות שילוב זה. המסגרת לניתוח משימות מתמטיות, המוצגת כאן, מבחינה בין משימות שונות ובין סוג השיח אליו המשימה מעודדת השתתפות – השיח המתמטי הבית ספרי או השיח הלוגי. באמצעות יישומה של מסגרת זו על 106 שאלות שעיצבו פרחי הוראה זיהינו ארבעה סוגים של הזדמנויות להוכחות והנמקות: (1) הזדמנויות מועטות: שיח מתמטי בית ספרי צר, (2) הזדמנויות לחשיבה מתמטית בשיח המתמטי הבית ספרי, (3) הזדמנויות להשתתפות בשיח לוגי, (4) הזדמנויות לחשיבה מתמטית בשיח מתמטי ולוגי. איפיון וזיהוי הקבוצה הרביעית, שהיא מעין סינרגיה של הקבוצות הקודמות, מהווה תרומה פרקטית משמעותית במיוחד. קבוצה זו, בהיותה מאפיינת משימות המאפשרות השתתפות בשיח המתמטי הבית ספרי, תוך כדי ביצוע פעולות חשיבה מתמטיות ובו זמנית השתתפות בשיח הלוגי מהווה מודל יעיל להטמעה ויישום של הוכחות והנמקות בלימודי המתמטיקה. ברמה התיאורטית, המסגרת אותה הצגנו, בהיותה מעוגנת במסגרת תיאורטית מבוססת כמו קומוגניציה, מאפשרת להמשיג הזדמנויות אלו בצורה אופרטיבית ומפורשת יותר, המקושרת לתהליך הלמידה של הלומד. מסגרת זו תוכל לסייע לחוקרים ולמורי מורים לתקשר בצורה יעילה יותר עם פרחי הוראה על הזדמנויות להוכחות והנמקות תוך התמקדות במאפיינים אופרטיביים ומוגדרים כמו אובייקט ופעולות. מחקרים עתידיים יתמקדו בשימוש של מסגרת זו בהקשר של הכשרת מורים ופיתוח המקצועי ובבחינת השיח הכיתתי ופעולות המורה המזמנות הזדמנויות להוכחות והנמקות.

מקורות

Cirillo, M., & May, H. (2020). Decomposing proof in secondary classrooms: A promising intervention for school geometry. *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education*.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study. In *New ICMI Study Series* (Vol. 15). New York: Springer.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9–16.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(3), 253–295.

התבונה המרחבית ויחסי הגומלין שלה עם תפיסה מרחבית וחזותית

אביגיל צברי, מכללה אקדמית לחינוך תלפיות,

מבוא

האם חשבתם פעם כיצד מוחנו מתרגם תמונות דו-ממדיות לתמונות תלת- ממדיות? מהם הכישורים הנחוצים כדי להבין את המרחב ולהתמודד עם משימות מרחביות? מה הקשר בין כישורים אלה לידע ולהישגים בגאומטריה של המישור והמרחב? כמורים ומרצים למתמטיקה אנו פוגשים במהלך עבודתנו תלמידים, מורים למתמטיקה וסטודנטים להוראת מתמטיקה, בגילים שונים וברמות שונות, המתקשים להתמודד עם בעיות בגאומטריה יותר מבכל תחום מתמטי אחר. צעירים ובוגרים ניצבים בפני בעיה גיאומטרית ואינם יודעים כיצד לשרטט תרשים שיוביל לפתרונה, אין הם רואים את הצורות הגאומטריות המופיעות בשרטוט נתון, ומתקשים להציע אסטרטגיה שתסייע להם לפתור משימה הקשורה לגאומטריה. לעיתים קרובות הם מנמקים את קשייהם ב"קשיים בתפיסה המרחבית". אך מהי אותה תפיסה מרחבית? האם היא יכולת מולדת או תכונה מתפתחת שאפשר לשכללה בעקבות אימון ותרגול? מה הקשר בין תבונה מרחבית לתפיסה מרחבית ולתפיסה חזותית? (צברי וטסלר, 2022) במטרה לענות על שאלות אלה נערך מחקר פעולה באמצעותו ניסינו לברר מהי תפיסה מרחבית, מהי תבונה מרחבית, כיצד ניתן לקשר ביניהן להישגים בהנדסת המישור והמרחב, והאם ניתן לפתח את התבונה המרחבית (צברי וקובלר, 2016).

ממצאי המחקר הובילו לחקירה עיונית של הנושא, במטרה לנתח ולהבהיר מהי תפיסה מרחבית, מהם יחסי הגומלין בינה לבין תפיסה חזותית ותבונה מרחבית, ואילו משימות מאפשרות למדוד שליטה בכל אחד ממושגים אלה (צברי וטסלר, 2022).

בהרצאה זאת יוצגו ממצאים ותובנות שהתקבלו משני מחקרים אלה.

רקע תיאורטי

אנשי חינוך מייחסים לשליטה בידע מרחבי חשיבות מרובה (Kell et. al., 2013 ; NCTM ,2000), ולמרות זאת במערכת החינוך אין די משימות המפתחות מיומנות זו (Olkun, 2003).
מניתוח מבחני TIMSS בשנת 2019 עולה שההישגים של תלמידים בישראל בתחומים מרחביים חלשים יחסית להישגיהם בתחומים מתמטיים אחרים (מחלוף ואח׳, 2019). כן מתברר שהידע של מורים למתמטיקה בישראל בנושאים של מרחב לוקה בחסר (צרפתי ופטקין, 2010), והם חשים שמוכנותם ללמד נושאים אלה נמוכה ממוכנותם ללמד תחומים מתמטיים אחרים (נחמיאס וזוזובסקי, 2009), נתון שהשתפר במבחני TIMSS 2011. מומחים בתחום מדווחים כי היכולת המרחבית נרכשת ואיננה אינטואיטיבית בלבד, ואפשר לפתח ולשפר אותה במהלך החיים (צברי וקובלר, 2016; Hoffer, 2007; Mohler, 1977), עובדה המאפשרת למורים ומרצים בתחום לשאוף להתפתחותו של ידע מרחבי אצל לומדים צעירים ובוגרים.

1

שאלות המחקר

1. מהי תפיסה מרחבית ?
2. מהם יחסי הגומלין בין תפיסה חזותית, תפיסה מרחבית ותבונה מרחבית?
3. האם תבונה מרחבית היא יכולת מולדת או תכונה מתפתחת שאפשר לשכללה בעקבות אימון ותרגול?

מתודולוגיה מחקרית

בהרצאה יוצגו ממצאים משני מחקרים שנערכו (בשיתוף עם עמיתות), האחד מחקר פעולה והאחר מחקר עיוני.

א. **במחקר הפעולה** השתתפו 25 סטודנטים להוראה שלמדו בקורס הנדסת המרחב, ובעזרתו ניסינו לברר האם ניתן לפתח תבונה מרחבית בקרב אוכלוסיה זאת. מטרת המחקר היתה לבחון תהליך שעוברים המשתתפים בקורס האקדמי בנושא, ולזהות מרכיבים בידע מרחבי שהתפתחו אצל הלומדים בעקבות תכנית התערבות.

כלי המחקר

1. שאלונים הבודקים מדדי הישג בתחום. השאלונים הועברו לנבדקים לפני הקורס ובסיומו.
2. שאלון אמונות ותחושת מסוגלות. השאלון הועבר לנבדקים לפני הקורס ובסיומו.
3. משוב שהועבר בסיום הקורס. במשוב התבקשו הסטודנטים לכתוב אילו מיומנויות מרחביות רכשו לעצמם במהלך הקורס.
4. ניתוח פתרונות הסטודנטים למשימות, העוסקות בתפיסה מרחבית, שניתנו במהלך הקורס.

ניתוח הממצאים נעשה במתודולוגיה משולבת, לאמור, ניתוח כמותי ואיכותני לממצאים. המתודולוגיה המשולבת, מאפשרת להשלים נקודות חולשה של סוגה מחקרית אחת בעזרת נקודות החוזק של האחרת (קניאל, 2014). הניתוח המשולב של הממצאים סייע לחוקרות לנטרל את ההטיות של שיטה אחת על האחרת, ובכך לתרום לתיקוף הממצאים.

ב. **במחקר העיוני** נסרקו מסמכים רשמיים כמו תכניות לימודים ומדריכים למורה, דיווחי מחקרים, ספרות תיאורטית המשלבת ידע מתחומי הפסיכולוגיה, המתמטיקה והוראת המתמטיקה, וחוות דעת מומחים.

כלי המחקר

מסמכים רשמיים, ספרות תיאורטית ומחקרית.

2

ניתוח הממצאים נעשה על ידי ניתוח המסמכים הרשמיים, ניתוח הממצאים שהתקבלו מדיווחי המחקרים, וניתוח ופרשנות לספרות התיאורטית. נערך מיון לחומר שהתקבל על-פי רעיונות חוזרים וקטגוריות המוכרות ממחקרים קודמים. תוקף המחקר התקבל על ידי טריאנגולציה (שימוש במגוון של מקורות מידע כדי להגביר את התוקף של הממצאים) ובדיקה ביקורתית חוזרת ונשנית של החוקרות עד לקבלת הסכמה.

ממצאי המחקר

בעקבות שני המחקרים המתוארים לעיל הציעו החוקרות את המונח **תבונה מרחבית**, ונבנה מודל המציג את יחסי הגומלין שבין תפיסה מרחבית, תפיסה חזותית ותבונה מרחבית. על פי מודל זה **התבונה המרחבית**, היא יכולת קוגניטיבית המורכבת משני היבטים: יכולת מרחבית ויֶדע מרחבי. היכולת המרחבית משמעה תפיסת המרחב באמצעות החושים, והאפשרות לבצע מניפולציה מנטלית על עצמים מרחביים. הידע המרחבי משמעו היכולת לבצע מטלות הדורשות שכילה קוגניטיבית של המרחב (כמו ידע של הגדרות ומונחים, חשיבה אלגוריתמית, יכולת להכליל, לנמק או להוכיח). בלוח 1 מוצג המודל לתבונה מרחבית, שנבנה על סמך מחקרים אלה, וקשרי הגומלין שבין תבונה מרחבית ליכולת מרחבית ולידע מרחבי .

תבונה מרחבית

1. יכולת מרחבית: תפיסה חושית של המרחב ומניפולציה מנטלית על עצמים מרחביים:
   א. תפיסה מרחבית.
   ב. יצירת תמונה מנטלית מתוך מידע מילולי או חזותי.
   ג. הכרת אובייקט מנקודות ראות שונות.
   ד. הנעה של האובייקט בדמיון.
   ה. ביצוע מנטלי של מניפולציות על גופים או עצמים מרחביים.
   ו. מעבר בין ממדים.

2. ידע מרחבי: שכילה קוגניטיבית של המרחב:
   א. ידע של הגדרות ומונחים.
   ב. חשיבה אלגוריתמית.
   ג. יכולת להכליל, לנמק או להוכיח.

לוח 1:

התבונה המרחבית ורכיביה (צברי וקובלר, 2016)

כפי שאפשר לראות בלוח 1 כל אחד משני ההיבטים של התבונה המרחבית מורכב מסדרה של רכיבי משנה.

בהרצאה יוצג המודל בפירוט המרכיבים השונים שבו, וכן תוצגנה מטלות הבוחנות שליטה בכל אחד ממרכיבים אלה. מטלות שבהן התנסו הנחקרים במהלך המחקר.

תרומת המחקר

במחקרים שנערכו נמצא כי הקישור בין היכולת המרחבית לידע המרחבי הוא רב עוצמה, ומאפשר שכילה קוגניטיבית של המרחב. ממצאי המחקרים עשויים לתרום לפיתוח מקצועי של מורים ומתמחים להוראת מתמטיקה. המחקר העיוני התפרסם בספר "קוד התבונה המרחבית", והוא מכיל שלל דוגמאות המאפשרות נקודת מבט חדשנית על יכולת מרחבית ועל ידע מרחבי. יש לציין כי ההגדרה של תבונה מרחבית, שתוצג בהרצאה, מתאימה לתחומי דעת שונים, כשבכל אחד מהם הידע המרחבי תלוי בתוכן הרלוונטי לאותו תחום דעת .

מקורות

מחלוף, י', חילו, ג', ליפשטט, שלומי, י, ליפשטט, נ' (2020), גליקמן, ח'. **מחקר טימס 2019, – TIMSS** **T**rends in **I**nternational **M**athematics and **S**cience **S**tudy**.** מחקר בין-לאומי להערכת הידע והמיומנויות של תלמידי כיתות ח' במתמטיקה ובמדעים, מבט ישראלי. ראמ"ה - הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך ומשרד החינוך.
http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Rama/MivchanimBenLeumiyim/TIMSS_2019.htm

נחמיאס, ר' וזוזובסקי, ר' (2009). **ההישג הלימודי וההקשר החינוכי של תלמידי כיתות ח' בישראל במתמטיקה ובמדעים. ממצאי המחקר הבינלאומי TIMSS 2007**. אוניברסיטת תל אביב ומשרד החינוך.

צברי, א' וטסלר, ב. (2022). **קוד התבונה המרחבית**. מכון מופ"ת, רעננה.

צברי, א' וקובלר, ש' (2010) . **ידע ותפיסה מרחבית אצל מתמחי מתמטיקה במכללות להוראה, דוח מחקר**. תלפיות .

צברי, א' וקובלר, ש' (2016). יכולת מרחבית של מתכשרים להוראת מתמטיקה . **כעת: כתב עת לענייני חינוך חברה ומורשת, 2** , 64 - 90 .

צרפתי, י' ופטקין, ד' (2010). השפעת פעילויות בגיאומטריה של המרחב בקרב מתכשרים להוראת מתמטיקה בבית ספר יסודי על הבנת מושגים ושליטה ברמות חשיבה גיאומטרית. **החינוך וסביבו, ל"ג**, 177-189.

קניאל, ש' (2014). שילוב בין המחקר האיכותני והכמותי בארגז הכלים של החוקר. **אורשת, 5**, 257-284.

Hoffer, A. R. (1977). *Mathematics Resource Project: Geometry and visualization*. Creative Publications.

Mohler, J. M. (2007). An instructional strategy for pictorial drawing. *Journal of Industrial Teacher Education, 44 (3)*, 5 – 26.

Kell, H. J., Lubinski, D., Benbow, C. P., & Steiger, J. H. (2013). Creativity and Technical Innovation: Spatial Ability's Unique Role. *Psychological Science, 24(9)*, 1831–1836.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Olkun, S. (2003). Making connections: Improving spatial abilities with engineering drawing activities. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning, 3 (1)*, 1 – 10.

אפיון שיח אלגברי מוקדם באמצעות ראיון דרך עדשה קומוגניטיבית

לארה שהלה דמירדג׳יאן, אביטל אלבוים-כהן, עינת הד-מצויינים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

מבוא ותשתית תיאורטית

האלגברה נלמדת לראשונה לפי תכנית הלימודים בישראל במהלך כיתה ז'; היא אחד מהתחומים החשובים שנלמדים בבית הספר, ושליטה בה היא דרישה קריטית להצלחה בלימודי המתמטיקה המתקדמת בתיכון ובלימודים הגבוהים. המודעות לחלק המשמעותי שהאלגברה ממלאת במהלך חייו המתמטיים של הפרט הובילה לצורך באבחון מדוקדק של מה תלמיד יודע לעשות בתהליך הלמידה שלו (למשל: Radford, Bardini & Sabena, 2007). בעבודה זו אנו מבקשות לקחת חלק במאמץ לאפיין את למידת האלגברה של תלמידים, על ידי בנייה ותיקוף של כלי אבחוני שנשען על המערכת המושגית של התיאוריה הקומוגניטיבית. מהימנותו של כלי דומה שמאבחן את השיח החשבוני (הד-מצויינים, אלבוים-כהן וטבח, 2022), מהווה סיבה טובה לבנות כלי דומה על אותו בסיס תיאורטי.

התאוריה הקומוגניטיבית היא תאוריה סוציו-תרבותית ייחודית ללמידת המתמטיקה, אשר יחידת הניתוח בה היא שיח שמוגדר כאירוע תקשורת (או אוסף של אירועים כאלה) שמתנהל לפי דפוסים ייחודיים לקהילה מסוימת (Sfard, 2008). עבור שיח מתמטי בפרט, קיימים ארבעה מאפיינים ייחודיים: א. מילים והשימוש בהן – מילות מפתח בשיח מתמטי ספציפי. באלגברה הן יכולות להיות פונקציות ,סדרות או משתנים ב. מתווכים ויזואליים – ייצוגים ויזואליים באמצעותם המשתתפים בשיח מנהלים תקשורת סביב עצמים מתמטיים, לדוגמה גרפים ג. נרטיבים מקובלים – סיפורים שמקובל בשיח לראותם כאמיתיים, כמו למשל $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ ד. רוטינות – דפוסי שיח או פעולות שחוזרות ונשנות במהלך פעילות תקשורתית. רוטינות מורכבות משני חלקים: מטלה והליך. המטלה היא המטרה שהמבצע רוצה להשיג וההליך הוא הפרוצדורה שהוא מיישם. הליך יכול להיות מורכב ממספר תתי הליכים. אנו מבחינים בין רוטינות של ריטואל ורוטינות של חקירה. רוטינות ריטואליות, מתמקדות בחיקוי ביצועים של אחרים ומכוונת לרצות אחרים. לעומת זאת, רוטינות חקירתיות ממוקדות בפיתוח עצמאי של נרטיבים על עצמים מתמטיים (Lavie Steiner & Sfard 2019). רוטינות חקירתיות בשיח אלגברי כוללות בניית סיפורים על עצמים אלגבריים כגון משתנה, נעלם, ביטוי אלגברי ומשוואה.

לפי הגישה הקומוגניטיבית, למידה היא תהליך של דה-ריטואליזציה של רוטינות (.Lavie et al 2019). כלומר, מעבר מהשתתפות ריטואלית בשיח להשתתפות חקירתית בו. כדי שלומד יוכל להשתתף בשיח באופן חקירתי, או במילים אחרות, כדי שלומד יוכל לבנות נרטיבים על עצמים מתמטיים, העצמים הללו צריכים להיבנות בשפתו בתהליך שנקרא עיצום. אנחנו יכולים לזהות מאפיינים של עיצום בשפתו של הלומד אם (1) הוא מדבר על עשייה מתמטית ללא מעורבות של המבצע (הזרה – alienation). (2) הוא מחליף דיבור על פעולות בדיבור על עצמים (reification). (3) הוא מזהה מימושים שונים של אותו עצם כ "אותו דבר״ (האחדה saming), או (4) הוא מחליף דיבור ברבים על אוסף של עצמים בדיבור על עצם אחד (encapsulation). כספי (2014) מיפה במחקר אורך את התפתחות השיח האלגברי המוקדם של תלמידים בדגש על תהליך העיצום.

בנוסף לעיצום, השתתפות חקירתית בשיח מתאפיינת ב**גמישות**– המבצע משתמש ביותר מהליך אחד כדי לבצע מטלה אחת. **סמכות פנימית** –ההחלטות מתקבלות בביטחון על-ידי המבצע. **מיקוד במטרה** ו**קישוריות** – כל צעד וצעד בפתרון מכוון לעבר התוצאה וקשור בצעד שלפניו ובזה שאחריו (Lavie et al. 2019).

מטרתנו ארוכת הטווח היא לגייס את ההמשגה התיאורטית הקומוגניטיבית כדי לבנות כלי שמאפיין את השיח האלגברי המוקדם של תלמידים על הרצף בין ריטואלי לחקירתי ולבחון את יעילותו.

בהצגה זו נתמקד בשאלת המחקר הבאה: **באיזו מידה המאפיינים של ריטואל וחקירה יעילים באפיון שיח אלגברי של תלמידים בראשית לימודי האלגברה?**

שיטת המחקר

הכלי המתודולוגי שאנחנו עמלות על פיתוחו נקרא EADP, (Early Algebraic Discourse Profile). בשלב זה הוא מתבסס על ניתוח הנתונים של ראיונות אלגבריים שהתבצעו עם 10 תלמידים שהיו בסוף כיתה ז', במטרה למפות את השיח האלגברי שלהם אחרי שהתחילו ללמוד אלגברה בתחילת השנה. התלמידים דוברי עברית, וברמות הישגים שונות. הראיונות נערכו לכל תלמיד באופן יחידני, כאשר כל תלמיד התבקש לפתור מספר משימות ולאחר מכן להסביר בקול רם את דרך הפתרון.

פרוטוקול הריאיון נבנה בהתבסס על הנושאים שנלמדו במהלך כיתה ז'. הפרוטוקול מכיל 13 משימות אלגבריות שנלקחו מבחינות המפמ"ר ומכספי (2014). המשימות כללו: משימת הכללה, פתרון משוואות, בעיות מילוליות עם מציאת נעלם/ משתנה מסוים, שקילות של ביטויים אלגבריים ושאלות על סדר פעולות חשבון בשילוב מספרים שליליים. הראיונות נערכו בחדר נפרד, על ידי המחברת הראשונה וארכו בין 30-60 דקות. הם הוקלטו בווידאו ובאודיו ותומללו במלואם. כמו כן, כל התוצרים הכתובים של התלמידים נכתבו והוקלטו על מחשב-לוח (טאבלט). הניתוח התבצע בשלושה שלבים. בשלב הראשון חיפשנו עדויות להזרה או האנשה על ידי סימון מילות מפתח, פעלים וכינויים שקשורים לעשייה מתמטית של התלמידים. בשלב השני, חילקנו את רוטינת הפתרון של כל מטלה להליכים ותת-הליכים. בשלב השלישי, הערכנו את מידת החקירתיות של הרוטינה על פי המאפיינים שפורטו בתשתית התאורטית ומאפיינים נוספים שפותחו אד הוק בעת פיתוח הממפה של שיח חשבוני – (RDP) והם: קאנוניות של הליך ושל נרטיבים- אם ההליכים שנעשו והנרטיבים שהתקבלו הם מקובלים (קאנוניים), זוהי עדות לחקירתיות; ותיווך-האם הפתרון נעשה באופן שתווך על ידי המראיין (ריטואליות) או לא (חקירתיות). כל הקידודים הוסכמו על ידי שתי המחברות הראשונות, וחלקם על ידי כל ארבע המחברות. בדיווח הנוכחי אנו מסתפקות, מפאת קוצר המקום, בהצגת ניתוח מלא של פתרון של תלמיד - אלון שפותר בעיה אחת וניתוח חלקי של פתרון של תלמידה – טליה שפותרת את אותה בעיה (שמות בדויים).

להלן הבעיה: ***חשבתי על מספר מסוים. אם אכפול אותו בשבע ואחסר מהמכפלה חמישים וארבע, אקבל את המספר שעליו חשבתי. מהו המספר שעליו חשבתי? הסבירו כיצד פתרתם.***

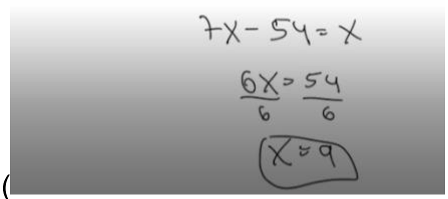
מטלה זו נבחרה מכיוון שהיא מזמנת ביצוע של טווח רחב של רוטינות שמאפיינות את השיח האלגברי: רוטינת סימון נעלם באמצעות אות לועזית, רוטינת תרגום הבעיה המילולית למשוואה, רוטינת פתרון משוואה אלגברית ומציאת הנעלם.

ממצאים

מתוך עשרת התלמידים שנבדקו, חמישה לא נגשו אל השאלה כלל, שניים פתרו אותה (אחד באופן אלגברי והשני על ידי ניסוי וטעיה) ושלושה פתרו אותה רק באופן חלקי.

להלן עדויות כתובות ודבורות לאופן בו פתר אלון את הבעיה הנתונה.

1 ((אלון קורא את השאלה בשקט ומתחיל לכתוב))



2 אלון ((כותב))

3 אלון (עונה לאחר הכתיבה) המספר הוא תשע

4 מראיינת אוקיי... תוכל להסביר לי?

5 אלון כן...מממ... נתתי למספר נעלם שהוא איקס, כפלתי אותו בשבע, שבע איקס ואז אני מחסר מהמכפלה חמישים וארבע ואומרים שנקבל את המספר עצמו, אז עשיתי שהוא איקס, עכשיו עשיתי אה... שבע איקס... להעביר את זה לכאן (את האיקס לאגף שמאל של המשוואה) אז זה מינוס איקס ואז זה שש איקס, ואז זה עובר לכאן (חמישים וארבע לאגף ימין) יוצא חמישים וארבע, שש איקס שווה לחמישים וארבע, צמצמתי את שניהם בשש, ואז יצא תשע...

נבחן את השיח של אלון במטלה זו על פי התבחינים שפורטו לעיל: (1). שיח מועצם/ סינטקטי: בשיח של אלון אפשר למצוא עדויות להאחדה (saming) בין ה"מספר המסוים", כלומר הנעלם בבעיה, ובין ״איקס״. מתוך העדות הכתובה אנחנו עדים ל-האחדה בין הכפל של הנעלם בשבע ובין 7x. יתר על כן, מתוך השיח הדבור [5] והכתוב של אלון אנו למדים כי המילה ״מכפלה״ והביטוי האלגברי 7x הם מייצגים של אותו עצם. בנוסף, אלון מפרש את המילים ״אקבל את המספר עליו חשבתי״ כשוויון בין שני ביטויים אלגבריים. כמו כן, אנו רואים עדות לביצוע אותה פעולה על שני האגפים באמירה "צמצמתי את שניהם בשש", מה שמהווה עדות לשקילות בין ״שש איקס שווה לחמישים וארבע״ לבין ״איקס שווה תשע״. מצד שני "להעביר את זה כאן" הוא דיבור תהליכי שלא מבליט את השקילות בין שני הייצוגים של המשוואה. אנו שמים לב כי הדיבור של אלון בפתרון שאלה זו הוא דיבור מעורב, כלומר, מכיל עדויות להזרה וגם לעשייה מתמטית עם הנוכחות של המבצע. לכן, לסיכום, הדיבור של אלון עדיין אינו מועצם באופן מלא, אבל ניתן להבחין שקיימות בו התחלות של עיצום; (2). גמישות/ נוקשות: אלון מבצע רוטינה יחידה באופן מקובל. אין לנו עדויות על גמישות שכן הוא לא ביצע הליך נוסף שהוא ראה כשקול. מצד שני, הוא לא התבקש לכך ולא ראה בכך צורך ולכן אין עדות לנוקשות; (3). סמכות פנימית/ חיצונית: אלון עצמאי בפתרון שלו, מסתמך על עצמו ולא מחכה לאישור או לתיווך של המראיינת. לכן ניתן להגיד שאלון בעל סמכות פנימית, לכן זו עדות לחקירה; (4). מיקוד בהליך/מטרה: כבר בראשית דבריו, אלון קובע את פתרון המשוואה להיות ״המספר״ אותו הוא התבקש למצוא ("המספר הוא תשע" [2]). זוהי עדות למיקוד של אלון במטרה של משימה זו. (חקירה); (5). קישוריות: כל ההליכים והתת הליכים שאלון מבצע מקושרים אחד לשני ומשרתים את המטלה המרכזית. הוא יוצר את המשוואה $7x - 54 = x$ מעביר את 54 ואת איקס כל אחד לצד השני, מחלק את שני האגפים ב- 6 ומקבל את המספר המבוקש. כלומר, יש קישוריות (חקירה); (6). קאנוניות של הליך: כל ההליכים ותת ההליכים שהוא מבצע הם קאנוניים, החל מסימון המספר בעזרות אות, כתיבת משוואה שמתארת את הבעיה הנתונה ופתרון תקין שלה (חקירה); (7). קאנוניות של נרטיבים: כל הנרטיבים המתמטיים שאלון משתמש בהם הם קאנוניים; (8). תיווך: לא היה תיווך (סיוע) של המראיינת בפתרון המטלה ולכן אין תיווך (חקירה). לסיכום, אצל אלון, נמצאו 6 קריטריונים שבהם נמצאה עדות לחקירה ו- 2 קריטריונים שבהם נמצאה עדות לריטואל. לכן ניתן לסכם כי השיח של אלון הוא חקירתי ברובו, וזאת למרות שלא קיימות אצלו עדויות לעיצום מלא.

להלן נתבונן בניתוח של אפיזודה מהשיח של טליה כדי לקבל הדגמה למיקום נוסף על הרצף בין רוטינות ריטואליות לרוטינות חקירתיות. להלן עדויות כתובות ודבורות לפתרון של טליה.

1 מראיינת (מנסה לסייע, לאחר שטליה ניסתה לפתור באופן חשבוני, נתקלה בקושי והחלה להתייאש) או קיי. ונגיד שיטה אחרת? משהו שקשור למה שלמדתם, משוואות או דברים כאלה יש לך שיטה?

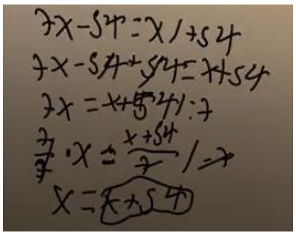
2 טליה ((רושמת: $7x - 54 =$)). אבל אני לא יודעת מה זה שווה.

3-12 ((המראיינת מסייעת לתלמידה להגיע לְמשוואה))

13 מראיינת מה זה? מה רשמת פה? שבע איקס מינוס...

14 טליה שבע איקס מינוס חמישים וארבע.

15 מראיינת שווה לכמה?

16 טליה רגע. ((כותבת )). נראה לי לאיקס פלוס חמישים וארבע

נבחן את השיח של טליה לפי: (1). שיח מעוצם/ סינטקטי: מתוך העדות הכתובה והדבורה [2] אנו עדים בדומה לאלון ל- saming בין הכפל של הנעלם בשבע ובין 7x. יתרה מכך, היא מבצעת באופן עצמאי saming הן בכתב והן בדיבור בין הבעיה המתוארת לבין אגף שמאל במשוואה שהוא $7x-54$. יחד עם זאת ההשוואה לאיקס באגף ימין נעשית באופן מתווך. לסיכום, ניתן להגיד כי הדיבור של טליה אינו מעוצם אולם, ניתן לראות בו התחלות של עיצום של ביטויים אלגבריים. (3). סמכות פנימית/ חיצונית: לטליה אין סמכות פנימית, היא פותרת בהססנות וחוסר ביטחון וניתן לראות זאת בשורות [2] ו-[16]. (4). מיקוד בהליך/ במטרה: ממוקדת הליך מכיוון שהיא מבצעת פעולות תקינות [16 ארבע שורות ראשונות] לשם עשייה בלבד, שכן, הן לא מכוּונות אותה למציאת פתרון. (5). קישוריות: ניתן לראות שיש לה קישוריות חלקית, שכן חלק מהשורות מקושרות וחלקן לא. לסיכום, השיח של טליה, ריטואלי ברובו ורק בקריטריון של קישוריות אפשר למצוא עדות חלקית לחקירתיות.

דיון

מהממצאים ניתן לראות שהכלים המושגיים שפותחו בעבר עבור מיפוי שיח חשבוני (הד-מצויינים ושות', 2022) אכן יעילים גם למיפוי הרצף שבין ריטואל וחקירה בשיח האלגברי המוקדם. לפיכך, הממצאים מעודדים בנוגע להתכנות הבנייה של כלי אבחוני של שיח אלגברי של תלמידים שימפה את אימוץ השיח על רצף בין ריטואל וחקירה. יחד עם זאת, נראה כי מקומו של העיצום בשיח האלגברי מורכב יותר ממקומו בשיח החשבוני, שכן בפתרון בעיה אלגברית פשוטה יחסית, כבר מצויים מספר רב של מרכיבים שיש לבצע להם האחדה ועיצום (משתנה, ביטוי אלגברי, משוואה). בנוסף ההבחנה בין מרכיבים שונים של עיצום (האחדה, הזרה וכד') מאפשרים להבחין בכך שלמרות שלכאורה, הפתרון של אלון חקירתי יותר מהפתרון של טליה, השיח האלגברי אצל שני התלמידים עדיין אינו מעוצם. מחקרים קומוגניטיביים בעבר לא התייחסו לסדר שבו מרכיבי ההשתתפות החקירתית מתפתחים, וייתכן שהניחו שהם מתפתחים יחד (Lavie et al., 2019). כאן אנו רואים מקרה שהעיצום מאחר (או מתפתח באופן עצמאי) לעומת מאפיינים כמו עצמאות, קישוריות וקאנוניות.

תודות

המחקר המדווח נתמך על ידי הקרן הלאומית למדע, מענק מס' 744/20.

מקורות

כספי, ש. (2014) . התפתחות השיח האלגברי בקרב תלמידים בחטיבת -הביניים (חיבור לשם קבלת התואר "דוקטור לפילוסופיה"). אוניברסיטת חיפה.

הד-מצויינים, ע., אלבוים-כהן, א., טבח, מ. (2022). ממפה שיח חשבוני (משי"ח) ככלי להערכת השיח של תלמידים על הרצף בין ריטואל לחקירה. אצל ת. אבישר, ר. אובודנקו, מ. וידר, נ. חן חדד,ע. לביא, ג׳. קופר, א. שרייבר (עורכים), כנס ירושלים העשירי למחקר בחינוך מתמטי, 55-58.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 153–176.

Radford, L., Bardino, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for research in Mathematics Education,* 38(5), 507-530.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press.

התפתחות השיח האלגברי בסביבת גיליון אלקטרוני: בין רוטינות מעשיות לרוטינות שיח

תמר אבירם, מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב
עינת הד-מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא ורקע תיאורטי

להצלחה בלימודי המתמטיקה יש חשיבות במהלך הלימודים בתיכון וכן בקבלה להשכלה הגבוהה, אך יחד עם זאת תלמידים רבים מתקשים בכך. המעבר מלימודי החשבון של בית הספר היסודי ללימודי האלגברה של תחילת כיתה ז' אינו פשוט עבור תלמידים רבים (Rojano, 2002), אך חשוב לבצע אותו בצורה טובה כדי לפתח הבנה מתמטית ברמה גבוהה ולהבין רעיונות מופשטים ומורכבים (Tabach et al., 2008). נמצא שעבודה עם גיליון אלקטרוני (כדוגמת אקסל) מאפשרת מעבר הדרגתי מחשבון לאלגברה, תורמת ללמידת ראשית האלגברה ועוזרת ללומדים להפוך לעצמאיים יותר (Tabach et al., 2013). נשאלת השאלה כיצד עבודה בגיליון אלקטרוני מקדמת את הלמידה? מהו המנגנון המאפשר זאת? מטרת המחקר היא לענות על שאלות אלו.

כדי ללמוד על תהליכי למידה ועל המנגנון המאפשר התקדמות בלמידה בעת עבודה בגיליון אלקטרוני, השיח והעשייה המתמטית של זוג תלמידות בכיתה ז' בסביבת גיליון אלקטרוני תועדו ונותחו בהתאם לגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2007). גישה זו רואה במתמטיקה סוג של שיח, ובלמידת מתמטיקה תהליך בו הלומד הופך למשתתף מרכזי בשיח. למידה, לפי הגישה הקומוגניטיבית, היא שינוי באחד או יותר מארבעת המאפיינים של השיח: מילים ואופן השימוש בהן, מתווכים ויזואליים, נרטיבים ורוטינות (Sfard, 2007). במחקר זה נתמקד ברוטינות אותן מבצעות התלמידות. רוטינה היא תבנית מוגדרת החוזרת על עצמה במצב מסוים, והיא מוגדרת כצמד: מטלה והליך. מטלה כפי שרואה אותה מבצע הרוטינה במצב בו האדם מחשיב את עצמו כמחוייב לפעול, לעשות משהו; הליך הוא המרשם לפעולה המתאימה, אוסף המרכיבים של הפעולה (Lavie et al., 2019). רוטינות נחלקות לרוטינות מעשיות ולרוטינות שיח. רוטינה היא מעשית אם המבצע מפרש את המצב כדורש יצירה, שינוי או ארגון מחדש של אובייקטים בעולם. המטרה שלה היא לעשות משהו, לייצר שינוי. רוטינה היא רוטינת שיח אם המבצע מפרש את המצב כדורש פעילות תקשורתית. כלומר רוטינות שיח הן תבניות על פיהן אנו פועלים בזמן שאנחנו מתקשרים עם אחרים או עם עצמנו (כלומר חושבים).

הן הרוטינות המעשיות והן רוטינות השיח נחלקות לרוטינות מכוונות הליך ולרוטינות מכוונות תוצר (Lavie et al., 2019). המטרה של רוטינה מכוונת הליך היא הביצוע עצמו, ההליך, ולא התוצאה של הרוטינה. הרוטינה מבוצעת ביוזמת אדם אחר ומטרתה היא חברתית – פעולה של סולידריות עם המומחה איתו מבצעים את הרוטינה. המבצע אינו נדרש לקבלת החלטות עצמאיות והוא תלוי לחלוטין באישור המומחה. מטרתה של רוטינה מכוונת תוצר היא התוצאה שלה, ויכולים להיות הליכים שונים להגיע לתוצאה זו. מכיוון שכך, על מבצע הרוטינה לקבל החלטות עצמאיות במהלך ביצוע הרוטינה.

אנו מציעות להתייחס לחלקים בפעילות עם כלי טכנולוגי דינאמי, כדוגמת גיליון אלקטרוני, כאל ביצוע של רוטינה מעשית. כתיבה בתא של ביטוי העושה שימוש בנתון מתא אחר (תא מקור), ולחיצה על מקש "אנטר", גורמות להסתרת הביטוי וליצירת מספר בתא. כאשר גוררים ביטוי לאורך העמודה, נוצרים מספרים בתאים בעמודה כתלות במספרים שבתאי המקור. שתי פעולות אלה (כתיבת ביטוי וגרירה) יוצרות אובייקטים מתמטיים חדשים עליהם אפשר לעשות פעולות. לכן אנו מתייחסות אליהן כאל שתי רוטינות מעשיות. השאלה העולה מכך היא מה יחסי הגומלין בין רוטינות השיח והרוטינות המעשיות בעת עבודה בגיליון אלקטרוני, והאם הקשר בין הרוטינות האלה יכול לשפוך אור על המנגנון בו הגיליון האלקטרוני מקדם למידה של ראשית האלגברה. שאלות המחקר, אם כן, הן אלה: (1) האם קיימים יחסי גומלין בין רוטינות מעשיות ובין רוטינות שיח בעת עבודה בסביבת גיליון אלקטרוני, ואם כן, מהם? (2) האם אפשר להסביר את המנגנון המאפשר שינוי בשיח של תלמידים הפועלים בסביבת

גיליון אלקטרוני בעזרת יחסי גומלין אלה? במסגרת זו נענה על השאלה הראשונה בלבד מפאת קוצר המקום.

שיטת המחקר

במחקר השתתפו שתי תלמידות בכיתה ז', נועה ומאיה (שמות בדויים), אשר נפגשו עם הכותבת הראשונה עשר פעמים, פעם בשבועיים בשעות אחר הצהריים. התלמידות עבדו על משימות הדורשות שימוש בגיליון אלקטרוני, בנושאים מתמטיים הנלמדים בכיתה ז'. הפגישות צולמו ותומללו במלואן. בניתוח זיהינו רוטינות מעשיות ורוטינות שיח, וסיווגנו את הרוטינות לרוטינות מכוונות הליך ולרוטינות מכוונות תוצר.

ממצאים

נציג שתי דוגמאות מתוך העשייה המתמטית של נועה ומאיה. דוגמאות אלה שונות זו מזו באופן עבודתן בגיליון האלקטרוני, ואנו ננסה להסביר מניין נובע הבדל זה. הדוגמה הראשונה לקוחה מתוך פעילות 1, בה אחת המשימות הייתה לחשב מחיר מבצע של בקבוקי מים: "בקניון יצאו במבצע: על כל בקבוק מים שקונים משלמים רק שני שליש ממחירו. הוסיפו לטבלה עמודה עם המחיר החדש." באפיזודה 1 מוצג השיח בין התלמידות בנוגע למשימה זאת.

אפיזודה 1 – חישוב שני שליש ממחיר בקבוק מים

854	נועה:	שני שליש ממחירו. נגיד בקניון זה עולה 9, שני שליש,
855	מאיה:	זה 3. 6.
856	נועה:	6 כי כל שליש זה כאילו יעני לחלק ב- 3, אז 6. אז משלמים 6. צריך להוסיף לטבלה עוד עמודה.

המטלה של התלמידות באפיזודה 1 הייתה לחשב כמה זה שני שליש מתשע ("שני שליש ממחירו" [854]). ההליך שביצעו היה לחשב כמה זה שליש מתשע ולהכפיל בשתיים. מאיה אמרה "3. 6." [855], ונועה אף הסבירה את ההליך שביצעה [856]. התלמידות יצרו את הנרטיב ששני שליש של 9 (המחיר הרגיל של בקבוק מים אחד) הם 6. הן התייחסו לשליש כאל עצם, וידעו לבצע פעולות עם העצם הזה. אפשר לומר שביצעו רוטינת שיח מכוונת תוצר.

בהמשך ביצעו התלמידות רוטינת שיח וכן רוטינה מעשית (ראו אפיזודה 2). המטלה של רוטינת השיח הייתה לייצר ביטוי המתאים לחישוב שני שליש בגיליון האלקטרוני, "איך אנחנו עושות שני שליש" [863], וההליך שהן החליטו עליו היה לכתוב את הביטוי "9 חלקי 2" [909-918]. הרוטינה המעשית השלובה ברוטינת השיח הזו מורכבת משתי תת-רוטינות: כתיבת ביטוי בתא הראשון, וגרירה. הן המטלה והן ההליך של תת הרוטינה הראשונה הייתה כתיבת הביטוי "$=C2/2$" בתא F2, כאשר בתא C2 כתוב המספר 9 (ראו איורים באפיזודה 2), ולחיצה על המקש "אנטר" [919]. תוצאת ההליך הייתה המספר 4.5 (בתא F2). מספר זה שונה מתוצאת ההליך שביצעו ברוטינת השיח באפיזודה 1, לפני הכתיבה בגיליון האלקטרוני (המספר 6), אך דבר זה לא גרם לתלמידות לשנות את הביטוי שכתבו. הן המשיכו לתת-הרוטינה המעשית השנייה. המטלה של תת-הרוטינה השנייה הייתה לייצר עמודת מספרים, וההליך שביצעו היה גרירה של הביטוי בתא F2 לעמודה F [921]. הן גררו את התאים בעמודה, היו מרוצות מהמספרים שקיבלו ומחאו כפיים [921].

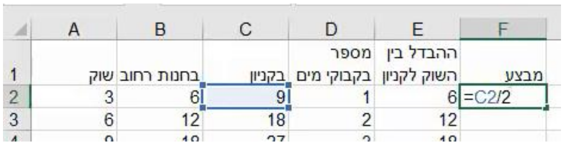
כלומר, קיים ניתוק בין הרוטינה המעשית (כתיבת הביטוי בתא הראשון וגרירתו ליצירת עמודה) לבין רוטינת השיח הראשונה (חישוב של שני שליש מ-9). רוטינת השיח היא מכוונת תוצר – המספר שני שליש מועצם והתלמידות יודעות לחשב שני שליש מתשע. לעומת זאת הרוטינה המעשית היא מכוונת הליך – התלמידות ממוקדות בהליך, בכתיבת הביטוי וביצירת העמודה בגיליון האלקטרוני, ואינן מתייחסות למספרים שקיבלו בעמודה, לתוצאת ההליך שביצעו.

אפיזודה 2 – כתיבת ביטוי בגיליון האלקטרוני לשני שליש ממחיר בקבוק מים

863 מאיה: איך אנחנו עושות שני שליש?

864 נועה: מה עושים עכשיו?

...



	A	B	C	D	E	F
1	שוק	בחנות רחוב	בקניון	מספר בקבוקי מים	ההבדל בין השוק לקניון	מבצע
2	3	6	9	1	6	=C2/2
3	6	12	18	2	12	

909 נועה: 9, *(מעמודה C2)*

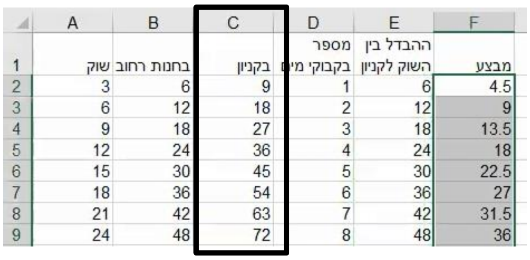
910 מאיה: ואז חלקי.

...

918 מאיה: 2...

	A	B	C	D	E	F
1	שוק	בחנות רחוב	בקניון	מספר בקבוקי מים	ההבדל בין השוק לקניון	מבצע
2	3	6	9	1	6	4.5
3	6	12	18	2	12	

919 נועה: *(כותבת חלקי 2 ומקישה אנטר. כשרואה 4.5 בתא F2 אומרת:)* בום בום בום. 9 חלקי.. *(מנסה לגרור את העמודה)*



	A	B	C	D	E	F
1	שוק	בחנות רחוב	בקניון	מספר בקבוקי מים	ההבדל בין השוק לקניון	מבצע
2	3	6	9	1	6	4.5
3	6	12	18	2	12	9
4	9	18	27	3	18	13.5
5	12	24	36	4	24	18
6	15	30	45	5	30	22.5
7	18	36	54	6	36	27
8	21	42	63	7	42	31.5
9	24	48	72	8	48	36

920 מאיה: כן. *(מאיה מאשרת לנועה שאיך שהיא מתכוונת לגרור זה נכון)*

921 נועה: כן. *(נועה גוררת את הביטוי. כשהן רואות את תוצאת הגרירה הן מוחאות כפיים)*

הדוגמה השנייה לקוחה מתוך פעילות 6, שהתרחשה כשלושה חודשים לאחר פעילות 1. בפעילות תואר בניין ובו עשר קומות מעל הקרקע ועשר קומות מתחת לקרקע. בכל קומה מעל הקרקע יש דירה אחת ולה מרתף בקומה זהה מתחת לקרקע. המשימה הראשונה של התלמידות הייתה לכתוב את המספרים 1 עד 10 (מספרי הקומות של הדירות) בעמודה A ואת המספרים הנגדיים להם (מספרי הקומות של המרתפים) בעמודה B. הדוגמה מתמקדת בעמודה B. באפיזודה 3 מוצגת רוטינת השיח שביצעו התלמידות.

אפיזודה 3 - החלטה על המספרים שיש לכתוב בעמודה B

17 נועה: בטור b כתבו באיזה קומה נמצא המרתף. מינוס 1 מינוס 2 מינוס 3 מינוס 4.

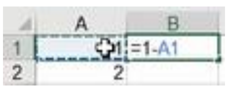
18 מאיה: לא, אבל תסתכלי, אם זה כאילו זה כמו תרגיל כזה.

19 נועה: משוואה

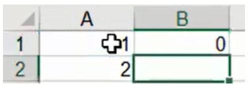
המטלה של התלמידות ברוטינת השיח הייתה להחליט אילו מספרים צריך לכתוב בעמודה B (1-, 2-, 3- וכו' [17]). ההליך היה להחליט איך לעשות זאת - לכתוב ביטוי, "זה כמו תרגיל כזה." [18]. לאחר מכן הן ביצעו רוטינת שיח וכן רוטינה מעשית. המטלה של רוטינת השיח הזו הייתה להחליט איזה ביטוי לכתוב בתא B1 ליצירת המספרים השליליים, והמטלה של הרוטינה המעשית הייתה לכתוב את הביטוי. התלמידות ביצעו כמה הליכים שונים של רוטינת השיח ושבעה הליכים שונים של הרוטינה המעשית כדי לעשות זאת. דוגמה להליך כזה מוצגת באפיזודה 4.

אפיזודה 4 - הליך ראשון לכתיבת ביטוי ליצירת מספרים נגדיים למספרים 1 עד 10

20 מאיה: זה *(עומדת בתא B1, כותבת שווה ומסמנת את A1)*. לא. אחד.. לא. אחד,



	A	B
1	1	=1-A1
2	2	



	A	B
1	1	0
2	2	

21 נועה: פחות אחד. *(מאיה כותבת)* פחות ה... לא טוב לנו. *(כשרואה 0 בתא)*

22 מאיה: לא.

בהליך זה המספר שהתקבל בתא הראשון בעמודה (תוצאת ההליך) אינו נכון (0 ולא 1-). נועה ומאיה הסכימו על כך ושינו את הביטוי. כך, לאחר ביצוע כל אחד משבעת ההליכים בדקו התלמידות את

המספרים שהתקבלו בעמודה לאחר כתיבת הביטוי, ופסלו את ההליך כיוון שהמספרים לא התאימו למה שרצו לקבל, למספרים שהחליטו עליהם ברוטינת השיח באפיזודה 3. התלמידות לא הצליחו לכתוב ביטוי שייצר מספרים לשביעות רצונן, אך הן לא השאירו מספרים שהן לא מרוצות מהם, אלא וויתרו על כתיבת ביטוי, וההליך האחרון שביצעו ברוטינה המעשית היה להקליד את המספרים 1- עד 10- ללא ביטוי.

המטרה של הרוטינה המעשית של התלמידות לכתיבת ביטוי לעמודה B היא התוצר שלה ולא ההליך – הן ידעו אילו מספרים הן צריכות לראות בעמודה ושינו את הביטוי שכתבו במטרה להגיע למספרים האלה – ולכן הרוטינה המעשית הזאת היא מכוונת תוצר. זאת בניגוד לרוטינה המעשית בדוגמה הראשונה, שם היא הייתה מכוונת הליך.

דיון

הראינו שתי דוגמאות של ביצוע רוטינות שיח ורוטינות מעשיות בעת עבודה בגיליון אלקטרוני. בדוגמה אחת הרוטינה המעשית הייתה מכוונת הליך ובדוגמה השנייה היא הייתה מכוונת תוצר. אנו מציעות שההבדל בין שתי הדוגמאות הוא ביצוע של תת-רוטינת שיח של השוואה: השוואת המספר המתקבל בגיליון האלקטרוני למספר המצופה מראש. תת-רוטינה זאת היא רוטינת שיח, אך היא חלק מהרוטינה המעשית של כתיבת ביטוי בגיליון האלקטרוני.

חלק מתת-הרוטינות עברו שינוי בין פעילות 1 לפעילות 6, מרוטינה מכוונת הליך לרוטינה מכוונת תוצר. ההתפתחות הזו מעידה על למידה של התלמידות. כמו כן הדבר מעלה שאלות לגבי יחסי הגומלין בין רוטינות השיח לרוטינות המעשיות. Sfard (2008) הציעה שההתפתחות של רוטינות מעשיות אפשרית הודות לרוטינות השיח. נציין כי בספרות כמעט אין דוגמאות לרוטינות מעשיות. מהמקרה המתואר כאן עולה שדרוש מחקר נוסף לבחינת הקשרים בין סוגי הרוטינות, ואולי גם הכיוון ההפוך מתרחש - ההתפתחות של רוטינות השיח אפשרית הודות להתפתחות של הרוטינות המעשיות, מרוטינות מעשיות מכוונות הליך לרוטינות מעשיות מכוונות תוצר.

תודות

המחקר המדווח נתמך על ידי הקרן הלאומית למדע, מענק מספר 744/20.

מקורות

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*, 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: students' access to significant mathematical ideas. In L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education.* 143–164. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781410602541

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 565–613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. New York: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Tabach, M., Arcavi, A., & Hershkowitz, R. (2008). Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(1), 53–71. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9125-5

Tabach, M., Hershkowitz, R., & Dreyfus, T. (2013). Learning beginning algebra in a computer intensive environment. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*(3), 377–391. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0458-2

דיווח קצר על מחקר

היבטים מונולוגיים ודיאלוגיים בעבודת המתמטיקאי

תמי שובל, אוניברסיטת תל אביב
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

רקע תאורטי

המתמטיקה כדיסציפלינה היא בעלת דימוי של ידע וודאי וחסין מטעויות, מתנת אל של אמת אחת ויחידה אשר לא נהגתה על ידי בני אנוש. גישה כזו למתמטיקה קרויה גישה מונולוגית. ברוח התקופה שבה מושג הדיאלוג הפך שגור בתחומי דעת רבים, מעניין לשאול האם הדימוי הזה של המתמטיקה אכן מתאר את תחום הדעת, או שגם במתמטיקה כמו בתחומי דעת אחרים העשייה היא חברתית ואנושית. ובפרט האם שיח ודיאלוג הם מהותיים לאופן שבו תחום הדעת מתהווה, מנוסח ומוצדק. גישה כזו למתמטיקה תיקרא גישה דיאלוגית. דיאלוגיות רואה משמעות כמשהו שאינו יחיד ואינו מוכן מראש, אלא כנוצרת בתוך דיאלוג של מספר קולות העוסקים בחקירה משותפת (Wegerif et al., 2019).

גישות פילוסופיות מונולוגיות למתמטיקה, הרואות בה גוף ידע אובייקטי, וודאי ואבסולוטי, מכונות גישות אבסולוטיסטיות. בבסיסן עומדות ארבע הנחות מונולוגיות לגבי המתמטיקה (Ernest, 1994): קיים בסיס יציב של אמת שעליו מבוסס הידע המתמטי; קיימים היסקים לוגיים אמינים לחלוטין של משפטים מתמטיים מתוך הנחות מפורשות; ידע מתמטי אבסולוטי המבוסס על הוכחות מושלמות הוא אידיאל בר השגה; המאפיינים הלוגיים של הוכחה מתמטית מספיקים בעצמם לבסס ידע מתמטי ללא הפניה לפעולה אנושית או למרחב חברתי. גישות פילוסופיות דיאלוגיות למתמטיקה מנסות לאתגר את הטענה כי המתמטיקה מכילה טענות והוכחות מונולוגיות המבוססות על בסיס ייחודי וחזק המייתר את הצורך בשיח או דיאלוג (Ernest, 1994). הן רואות במתמטיקה גוף ידע דינמי, לא וודאי, שעשויות ליפול בו שגיאות. גוף המתפתח באמצעות ביקורת, הסברים, הצדקות ודוגמאות נגד (Lakatos, 1976).

מתודולוגיה

מחקר זה בודק האם במתמטיקה הנתפסת כתחום דעת מונולוגי, ישנם גם מאפיינים והיבטים דיאלוגיים בעיני מי שעוסקים במקצוע זה ביום יום. למחקר זה לכן שתי שאלות מחקר:

1. מהם ההיבטים המונולוגיים והדיאלוגיים של המתמטיקה כתחום דעת כפי שהם נתפסים על ידי מתמטיקאים פעילים?
2. מהם ההיבטים המונולוגיים והדיאלוגיים בעבודה של מתמטיקאים פעילים המתוארים על ידם?

על מנת לענות על שאלות המחקר התקיימו ראיונות אישיים מובנים למחצה עם חמישה מתמטיקאים, ארבעה גברים – שי, שאול, דני וגדי ואשה אחת, גילי. הראיון מתמקד בפרקטיקות העבודה של המתמטיקאים על היבטיה השונים, ובעמדותיהם לגבי המתמטיקה כתחום דעת. הראיונות הוקלטו באודיו, ותומללו במלואם. בניתוח הנתונים זוהו תפיסות מונולוגיות ודיאלוגיות של המתמטיקה ופרקטיקות דיאלוגיות ומונולוגיות בעבודת המתמטיקאים. אלו יוצגו בפרק הממצאים.

ממצאים

<u>אמירות על המתמטיקה כתחום דעת</u>: מתוך האמירות של המרואיינים לגבי המתמטיקה כתחום דעת זוהו שתי קטגוריות מונולוגיות, וקטגוריה אחת דיאלוגית. טבלאות 1-2 מציגות את הקטגוריות המונולוגיות והדיאלוגיות בהתאמה.

טבלה 1
תפיסות מונולוגיות על המתמטיקה

היבט מונולוגי	תיאור	ציטוט מתוך הראיונות
המעמד של אמת מתמטית	טענות מתמטיות שהוכחו והתקבלו על ידי הקהילה כנכונות הן במעמד של אמת וודאית מוחלטת. אין מטילים בהן ספק, גם אם עלולה להימצא בהן טעות.	"כי מצד אחד אנחנו מניחים שיש איזושהי אמת, מצד שני אנחנו מניחים שאיך שאנחנו רואים אותה – כולם רואים אותה". (שאול, שורה 18 א)
כללי היסק	כללי ההיסק הקובעים מתי מותר לעבור מטענה אחת לטענה אחרת, והמשמרים אמת עומדים בלב העשייה של מתמטיקאים ואין עליהם עוררין.	"אני מאמין שכללי היסק מתמטיים הם כן סוג של אמת מוחלטת. כלומר אני לא יכול להעלות בדעתי איזשהו ספק בהם". (שי, שורה 20 ב)

טבלה 2
תפיסות דיאלוגיות על המתמטיקה

היבט דיאלוגי	תיאור	ציטוט מתוך הראיונות
אקסיומות מתמטיות	אקסיומה מתמטית היא הנחת יסוד בהוכחה אליה מתייחסים כנכונה. מתמטיקאים תופסים את האקסיומות כחיצוניות למתמטיקה, במובן מסוים שרירותיות, וכדורשות הסבר ושכנוע מדוע התאוריה הנגזרת ראויה לעיסוק המתמטי.	"אין שום אמת מתמטית באקסיומות המתמטיות. האקסיומות המתמטיות הן מוסכמה חוץ מתמטית, שהגענו אליה על סמך הרגשתינו, על סמך ניסיוננו בחיים". (שי, שורה 20 ג)

התמונה המתקבלת מתאימה לשתיים מן ההנחות שהציג Ernest (1994) – קיים בסיס יציב של אמת שעליו מבוסס הידע המתמטי, וכן קיימים היסקים לוגיים אמינים לחלוטין של היסקים מתמטיים מתוך הנחות מפורשות. האקסיומות נתונות לבחירה בשיח, אולם התורה הנגזרת מהן היא אבסולוטית.

שלוש הקטגוריות שנמצאו מהוות את שלושת המרכיבים של הוכחה דדוקטיבית, בראי הגישה האבסולוטיסטית. בבסיס הוכחה נמצאות אקסיומות אותן מניחים לצרכי פיתוח מערכת מתמטית, שנית חוקי ההיסק הלוגיים המשמרים אמת, ולבסוף על בסיס השניים הראשונים המסקנה היא אמת מתמטית. המתמטיקאים שהתראיינו למחקר זה רואים את המתמטיקה כתחום דעת מונולוגי בעיקרו. גם אם הנחות היסוד פתוחות לדיון, הרי שהמשפטים המתמטיים שהוצדקו באופן דדוקטיבי הם אמת וודאית, אבסולוטית, נצחית ושאינה ניתנת לערעור.

תהליכים והיבטים בעשיית מתמטיקה: בראיונות שהתקיימו זוהו 8 פרקטיקות דיאלוגיות, פרקטיקה מונולוגית אחת ושתי פרקטיקות בעלות מאפיינים דיאלוגיים ומונולוגיים גם יחד. מפאת חוסר מקום, הפרקטיקות המוצגות בטבלאות 3-5, יוצגו ללא דוגמאות וציטוטים אשר יפורטו בהצגה עצמה.

טבלה 3
היבטים דיאלוגיים בעשיית מתמטיקה

היבט דיאלוגי	תיאור
עבודת מחקר משותפת	מתמטיקאים עובדים יחד באופן יומיומי בפרויקטים מחקריים משותפים כדי לארגן את עבודתם, לחשוב יחד, לשתף ברעיונות, להסביר ולהצדיק לאדם אחר, לבקר ולשפוט רעיונות אחרים, ולתת ולקבל פידבק מיידי.

הנחייה כדיאלוג	מתמטיקאים מנחים סטודנטים במחקריהם. מעבר לעבודת המחקר המשותפת הרגילה, נדרש מהם שיח ייחודי העוזר לסטודנט ללמוד את הפרקטיקה של חקירה מתמטית.
דיאלוג מתמשך עם ידע קודם	עבודת מחקר מתמטית נעשית לרוב כהמשך והרחבה של ידע קודם. גם מבחינה היסטורית, ניתן לראות את התפתחות המתמטיקה כרצף של שאלות ותשובות, שיח שבו תוצאות חדשות מבוססות על תוצאות קודמות.
עיסוק בשאלה פתוחה	העיסוק בשאלות שנוסחו בעבר, ושאין להן פתרון ידוע במתמטיקה. עיסוק זה מתואר כגישוש באפלה, הדורש שיח, עבודה משותפת וחשיבה יצירתית.
דיאלוג יוצר משמעות	בתהליך החשיבה והיצירה המתמטית נוצרות הגדרות, הוכחות, סתירות ורעיונות חדשים. אלו הן משמעויות חדשות שנוצרו בתוך תחום הדעת.
דיאלוג מטא מתמטי	שיח מטא מתמטי עוסק בשאלות על אודות העיסוק המתמטי – האם זה מעניין? האם זה חשוב? האם ההוכחה קבילה?
דיאלוג בינתחומי פנים מתמטי	מתמטיקאים משתמשים בתוצאות מתמטיות שאינן מתחום הדעת הספציפי של החוקר, גם מבלי שתהיה להם היכולת להבין את ההוכחות שלהן.
דיאלוג עם הקהילה באמצעות פרסום	פרסום תוצאה מתמטית בכתב עת רשמי או בארכיב הוא פניה אל הקהילה המתמטית לקבלת אישור או ביקורת, והוא שיתוף הקהילה לצורך המשכיות.

טבלה 4

היבטים מונולוגיים בעשיית מתמטיקה

היבט דיאלוגי	תיאור
הסתרת התהליך האנושי	מתמטיקה כתובה מוצגת בצורה מונולוגית – מדויקת, פורמלית, מסודרת. כתיבה כזו מסתירה את העובדה שתוצאות מתמטיות אינן מתגלות באמצעות משחק בהיקשים אלא על ידי שימוש בדמיון, אינטואיציה וניסיון. לתהליכים הללו אין רמז באריזה הסופית שבה מוצגת המתמטיקה.

טבלה 5

היבטים דיאלוגיים ומונולוגיים בעשיית מתמטיקה

היבט דיאלוגי	תיאור
עבודה עצמאית	מתמטיקה היא בעלת דימוי של תחום דעת שבאופן תאורטי ניתן לחקור ולהתקדם בו באופן עצמאי, יחד עם זאת גם מתמטיקאי שעובד לבד עושה זאת בשיח עם תוצאות קודמות ועם תוצאות עתידיות.
האפשרות לתרום לשיח המתמטי	מתמטיקאים שופטים תקפות של טענות מתמטיות על פי אמות מידה מתמטיות בלבד, ולכן לא חשוב מי טוען טענה מתמטית המתקבלת על ידי הקהילה המתמטית (גם לפני שהפכה כזו). לכן כל אחד יכול לתרום במידה שווה לשיח, גם אם הוא נחשב זוטר בתחום, משום שמה שחשוב הוא התקפות המתמטית של הטענה ולא מי טוען אותה.

העשייה המתמטית, כפי שהיא מצטיירת במחקר זה, היא עשייה דיאלוגית ברובה. פרקטיקות העבודה של מתמטיקאים הם בעלות מאפיינים דיאלוגיים ונעשים תוך דיאלוג עם חברים בקהילה המתמטית. מתמטיקאים מבצעים מחקרים משותפים, מסבירים זה לזה, משכנעים, מטילים ספק ומבקרים, וכל זאת תוך פתיחות אינטלקטואלית וחשיבה יצירתית. הם מנהלים שיח עם תוצאות מתמטיות קודמות, ושיח בינתחומי בתוך המתמטיקה. אולם התהליך הדיאלוגי היצירתי שסופו בהוכחה מתמטית חדשה, נעלם כאשר המתמטיקאי כותב את ההוכחה בצורה פורמלית. מתמטיקה כתובה מציגה את תחום הדעת בצורה מונולוגית.

דיון

ממצאי המחקר מעלים כי יש סתירה בין האופן שבו המתמטיקה מפותחת ובין האופן שבו היא נתפסת ומוצגת על ידי מתמטיקאים. מתמטיקאים מחזיקים בראשם תמונה מונולוגית של מתמטיקה, ומציגים בכתב תמונה של מתמטיקה מונולוגית, למרות שהאופן שבו הם עושים ומפתחים את תחום הדעת הוא דיאלוגי למדי. Hersh (1991) טען באופן דומה שלמתמטיקה שני צדדים, קדמי ואחורי. בצד האחורי נמצאת העשייה המתמטית המבשלת את הידע. תהליך בישול הידע נעשה בצורה מקוטעת, לא פורמלית, אינטואיטיבית, לא סופית. כל אלו הם מאפיינים של הפרקטיקות הדיאלוגיות של עשיית מתמטיקה. הצד הקדמי של המתמטיקה הוא פורמלי, מדויק, מסודר ואבסטרקטי. הוא מוצג בגרסתו הסופית בספרי הלימוד ובכתבי העת.

העשייה המתמטית מתכנסת לרוב למטרה עיקרית אחת: הוכחת משפטים מתמטיים נכונים. מחקר זה מצא כי מתמטיקאים תופסים את התוצר המרכזי של העשייה המתמטית – ההוכחה – כאמת וודאית. מבנה תחום הדעת הנבנה כאן מדבר על ליבה מונולוגית שבה נמצאים המשפטים המתמטיים וההוכחות שלהם, המוקפת בעשייה דיאלוגית. המתמטיקה פתוחה לצורות עבודה דיאלוגיות ובתנאי שלבסוף תלבש עבודה זו את הצורה של השפה הפנימית, השפה הפורמלית של כללי ההיסק ושל הוכחות דדוקטיביות.

מדוע לא להציג את המתמטיקה כפי שהיא מתפתחת, בצורה דיאלוגית? מדוע מציגים את המתמטיקה בצורה מונולוגית? מחקר זה מציע שהתשובה לשאלה זו נעוצה באופן שבו מתמטיקאים תופסים את תחום הדעת. מתמטיקאים תופסים את המתמטיקה שהם עושים כאמת, ואת כללי ההיסק כאמת הבסיסית ביותר. החוזקה של הלוגיקה היא במונולוגיות שלה – אי אפשר לכתוב בשפת הלוגיקה הפורמלית את מה שאינו אמת, משום שהיא יודעת לעבוד רק עם אמת. לכן כדי שיוכלו להעניק למשפטים שהוכיחו מעמד של אמת מתמטית, בוחרים מתמטיקאים לכתוב אותם בשפה מונולוגית. הכתיבה הזו היא למעשה מתן גושפנקא של אמת. כלומר, כדי לעמוד בציפיות שלהם מתחום הדעת, המתמטיקאים דורשים מעצמם לקחת את התהליך הדיאלוגי ולכתוב אותו בצורה פורמלית. העבודה הדיאלוגית הכרחית משום שהיא מביאה את המתמטיקה אל הר סיני. אולם בסוף הדרך, אל ההר עולים לבד.

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק מספר 2699/2017)

רשימת מקורות

Ernest, P. (1994). The Dialogical Nature of Mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, Education, and Philosophy : An International Perspective* (pp. 33–48). The Falmer Press.

Hersh, R. (1991). Mathematics Has a Front and a Back. *Synthese*, *88*(2), 127–133.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: the Logic of Mathematical Discovery* (W. John & Z. Elie, Eds.). Cambridge: Cambridge University Press.

Wegerif, R., Mercer, N., & Major, L. (2019). Introduction to the Routledge International Handbook of Research on Dialogic Education. In N. Mercer, R. Wegerif, & L. Major (Eds.), *The Routledge International Handbook of Research on Dialogic Education* (pp. 1–8).

שיח מעבר ממתמטיקה תיכונית לאוניברסיטאית: נקודת מבט של מתרגלים ניו זילנדים מתחילים

תקוה עובדיה, מכללת אורנים
איגור קונטורוביץ', אוניברסיטת אוקלנד, ניו זילנד

המחקר המתואר מתייחס לניתוח נרטיבים רפלקטיביים שמתארים מתרגלי מתמטיקה בקורסי בסיס באוניברסיטה. מתוך הנרטיבים למדנו על ארבעה תפקידים של שיח המתייחס למעבר ממתמטיקה תיכונית לאוניברסיטאית.

מבוא

בהסתמך על המסגרת הקומוגניטיבית, אנו מפרשים שיחים פדגוגיים של קהילות מתמטיות שונות כמרכיב חשוב בתופעת המעבר של התלמידים מהתיכון לאוניברסיטה (STT- secondary-tertiary transition). התמקדנו בניתוח נרטיבים רפלקטיביים של מתרגלים באוניברסיטה, לאור ההכרה המתהווה בהשפעתם על למידת המתמטיקה של סטודנטים לתואר ראשון. אנו שואפים להבין את התפקידים של שיח שיש בו רמזים למעבר מתיכון לאוניברסיטה (STT), בנרטיבים של המתרגלים שדיווחו על אירועים שהתרחשו בכיתתם בזמן התרגול. המשתתפים היו סטודנטים לתואר ראשון בשלבים מתקדמים של התארים שלהם במתמטיקה באוניברסיטה גדולה בניו זילנד, וכאלו שנרשמו לקורס בחירה בחינוך מתמטי. במהלך הסמסטר, הובילו המשתתפים מפגשי הדרכה לתלמידי שנה א', וכתבו רפלקציות על אירועים בכיתה שמשכו את תשומת ליבם. קורפוס הנתונים שלנו כלל 58 נרטיבים שזוהו בקרב 38 מתרגלים, נרטיבים שנאספו במשך ארבעה סמסטרים. הניתוח חשף ששיח STT שהופיע בתיאורי המתרגלים באירועים בכיתתם, סייע להם להבין אירועים בלתי צפויים, מיקם את פעולות ההוראה שלהם כ"שכפולים" של מה שהיה מוכר להם מניסיון ה-STT שלהם, ותרם ליצירת נרטיבים פדגוגיים חדשים. אנו ממקמים את הממצאים הללו בספרות הנוגעת למתרגלים לתואר ראשון ולנקודות מבט של מורים על STT.

תרגול לתואר ראשון ונקודות מבט של מורים באוניברסיטה על STT

במהלך שני העשורים האחרונים, החל המחקר בנושא חינוך במתמטיקה באוניברסיטאות להתעניין במתרגלים לתואר ראשון. מחקר, המגיע ברובו מארה"ב ומאירופה, קשר את המאמץ הזה עם סטודנטים לתואר שני במתמטיקה המועסקים במחלקות שלהם כדי לתרום להוראה של קורסים ספציפיים (ראה Speer et al., 2005). המחקרים מראים שהיקף האחריות של המתרגלים משתנה ממדינה אחת לאחרת (למשל, Lawson & Croft, 2021 Yee et al., 2022). לא משנה מהו ההקשר - בהקשרים שלישוניים רבים, האינטראקציות בין מורה לתלמיד מהוות מרכיב משמעותי בקורס - כלומר לדרך שבה המורים מלמדים, יכולה להיות השפעה ניכרת על האופן שבו התלמידים לומדים (למשל, Speer et al., 2005). בניו זילנד, מורים אחראים לרוב על התכנון וההדרכה של מפגשי תרגול שבועיים שבהם צפויים תלמידי הקורס להשתתף באופן קבוע במהלך הסמסטר.

אנו מכירים רק קומץ מחקרים שביקשו להציג את נקודת המבט של מורים באוניברסיטה על STT. Klymchuk et al. (2011) פיתחו סקר פתוח קצר שענו עליו 63 מורים באוניברסיטאות מ-24 מדינות. אחת משאלות הסקר ביקשה מהמורים להציג סיבות לפער בין המתמטיקה של בית הספר לזו של האוניברסיטה. החוקרים קיבצו את תגובות המורים לקטגוריות, שהפופולרית שבהן הייתה "רמה גבוהה יותר של חשיבה במתמטיקה באוניברסיטה" (עמ' 109). הם הדגימו קטגוריה זו באמצעות ציטוטים צבעוניים, שבהם הנשאלים מבקרים את הוראת המתמטיקה בבית הספר ומדגישים את נחיתותה (למשל, "מתמטיקה בתיכון היא מאוד מכנית ומצבית [...] אנו [כלומר, האוניברסיטה] מצפים

ליותר מהתלמידים" - עמ' 111). בקונגרס הבינלאומי השלישי על חינוך מתמטי בשנת 1976, הכינה קבוצת מחקר צירים מ-15 מדינות, כדי לדון ב-STT. בדוח שלהם, מתואר ה-STT כ"בעיה", ששלושת ההיבטים העיקריים שלה הם חוסר הזמינות של "נושאים שכביכול מכוסים בתכנית הלימודים המשנית [...] בעת הצורך בלימוד מאוחר יותר" (Fey, 1977, עמ' 406); חוסר היכולת של "[כל] התלמידים לראות את היחסים בין רעיונות ספציפיים" (שם); ו"תלמידים עוזבים את בית הספר התיכון [בגישה] צרה ופורמלית למתמטיקה" (שם, עמ' 407). נקודות מבט דומות (במונחים פחות מזלזלים) ניתן למצוא בדו"ח של London Mathematical Society (1995): לשינויים האחרונים במתמטיקה בבית הספר אולי היו יתרונות עבור חלק מהתלמידים, אבל הם לא הניחו את היסודות הדרושים לשמירה על כמותם ואיכותם של יוצאי בית ספר מוכשרים מתמטית, ופגעו מאוד באלה שצריכים להמשיך את הכשרתם המתמטית מעבר לרמת בית הספר. ספרד (2014) טוענת שמתמטיקה בבית הספר ומתמטיקה באוניברסיטאות מהוות דיסציפלינות כמעט נפרדות. מתוך תמיכה בפרספקטיבה זו, דן פינטו (2019) בפדגוגיות שמורים באוניברסיטה יכולים ליישם כדי לתמוך בתלמידיהם לבצע את המעבר הזה.

3. המחקר

אנו ממשיגים את תקשורת STT, כמרכיב של שיח מתמטי פדגוגי שניתן להבחין בו באמצעות מילות מפתח ונרטיבים המצביעים על המעבר של התלמידים מההקשר החינוכי של המתמטיקה התיכונית לזו האוניברסיטאית.
שאלת המחקר המרכזית שלנו היא: "אילו תפקידים ממלאת תקשורת STT, כפי שהם משתקפים מתוך כתיבה פדגוגית רפלקטיבית של מתרגלי מתמטיקה על אודות האירועים שהתרחשו בתרגולי קורסי תואר ראשון שלהם?" אנו שואפים להציע פרשנויות מושכלות אנליטיות לראשית תקשורת STT של המתרגלים.
הקשר המחקר - הנתונים שלנו מגיעים מקורס לתואר ראשון בחינוך מתמטי (MathEd), המוצע במחלקה למתמטיקה באוניברסיטה גדולה בניו זילנד. הקורס לא נדרש על ידי תוכנית מסוימת, והוא מיועד בעיקר לתלמידים בשלבים האחרונים של מגמות המתמטיקה שהתעניינו בנושאי חינוך. הדרכת תלמידי מתמטיקה שנה א' הייתה הפעילות המרכזית של הקורס. במסגרת הקורס, המתרגלים מוקצים לקבוצות ספציפיות במשך כל הסמסטר, וצפויים לתרגל יחד, בזוגות, עשרה מפגשי תרגול בני שעה. שבוע לפני כל תרגול, מרצי הקורס מפרסמים סטים של שאלות לתרגול. כהכנה, מצפים מהמתרגלים לבחון את השאלות, להעלות סוגיות שעשויות לצוץ ולפתח אסטרטגיות לטיפול בהן.
אסוף וניתוח נתונים - כחלק מחובת הקורס, המתרגלים התבקשו להגיש קטע טקסט קוהרנטי שבו הם משקפים אירוע ספציפי שמשך את תשומת ליבם במפגש התרגול שלהם באותו שבוע. בהתאם לטענת Mason (2002), ההנחיות כיוונו את המורים להבחין בין האירוע לבין פרשנותו. כדי להגביר את התועלת הפוטנציאלית של כתיבה רפלקטיבית, המתרגלים התבקשו גם לנסח "מסקנות" להמשך הוראתם. הגשות נבחרות נקראו ונדונו בקורס MathEd, כדי לתמוך בכותבים ובקבוצה כולה בשלבי ההוראה הראשונים שלהם. בסך הכול, אספנו 363 נרטיבים מ-42 מתרגלים במהלך ארבעה סמסטרים. כדי לבנות את קורפוס הנתונים, השתמשנו בתוכנת AtlasTi, כדי לבחון את ההשתקפויות בחיפוש אחר נרטיבים של STT. התבססנו על ההגדרה של ספרד (2008) לנרטיב, כ"רצף של התבטאויות הממוסגרות כתיאור של אובייקטים, של יחסים בין אובייקטים או של תהליכים עם או על ידי אובייקטים" (עמ' 134). במסגרת החיפוש, כללנו יחידות טקסט קטנות יותר, כגון מילים, ביטויים והערות. תהליך זה העלה 14 מילות מפתח ששייכנו אותן ל-STT-communication (למשל, "שנה ראשונה", "סמסטר ראשון", "בית ספר", "לימודים קודמים", "אוניברסיטה", "מורה", "מרצה"...). בשלב הבא, בדקנו מחדש כל רפלקציה, כדי להחליט אם תקשורת ה-STT שבה, הייתה משמעותית מספיק כדי לכלול את הרפלקציה בקורפוס הנתונים. החלטנו זאת על סמך מספר מופעי STT והמשמעות הנתפסת שלהם. בסופו של דבר, הקורפוס שלנו כלל 58 נרטיבים שנוצרו על ידי 38 מתרגלים.

4 ממצאים

זיהינו ארבעה תפקידים של שיח STT בנרטיבים של המתרגלים: שזירת שיח STT בתיאורים של אירועי התרגול, פרשנות לאירועים בלתי צפויים, הצגת פעולות ההוראה של המתרגלים כשכפולים של חוויית ה-STT שלהם, ויצירת נרטיבים פדגוגיים חדשים. מפאת קוצר המקום, אנו מסבירים להלן רק שניים מתוך ארבעת התפקידים הללו.

שזירת STT בתיאורי אירועי תרגול- למתרגלים הייתה סמכות בבחירת "קטעי המציאות" שהם כללו בדיווחים הפדגוגיים שלהם. נקודה זו הוסברה בהנחיות הרפלקציה, שהפרידו בין תיאור אירוע (כלומר, "עובדות") לפרשנות שלו. הניתוח הצביע על כך שתקשורת STT חלחלה לעיתים קרובות לתיאורים של המתרגלים. אנו ממחישים זאת בעזרת קטעים מהנרטיבים. נבחן קטע מתוך רפלקציה שנכתבה על ידי בטי: "לאחר ביקור בכמה קבוצות, הפתיע אותי כשגיליתי שלמעשה היו הרבה תלמידים שנאבקו עם שברים. לרובם היה מושג מה זה שברים, אבל היו להם תפיסות שגויות רבות שהביאו מבית הספר. למשל, הם לא ידעו להכפיל או להוסיף שברים, או למצוא גורמים משותפים. [...] חלק מהתלמידים בעלי ידע עשיר יותר במתמטיקה, אכן סיימו את כל שאלות התרגול". בטי כותבת על "תלמידי ההכנה" שלה, אותם היא מזהה כ"בעלי רעיון כלשהו" ו"הרבה תפיסות שגויות". היא מצביעה על "בית ספר" כמקור של שניהם. עם זאת, תלמידים שהשלימו את שאלות התרגול, מזוהים באמצעות "ידע עשיר יותר במתמטיקה ברקע". אי אפשר להתייחס כמובן מאליו אל השיוך שעושה בטי בין "ידע במתמטיקה" של תלמידיה לבין לימודיהם בבית הספר. כזכור, התלמידים מגיעים לתרגול, פחות משבוע לאחר שנידונה בהרצאות המתמטיקה הרלוונטית. זה מה שמצאנו בדיווחים אחרים, שבהם המתרגלים זיהו את תלמידיהם עם שלבי ההתחלה של לימודים באוניברסיטה (למשל, "סטודנטים בשנה א'", "סטודנטים חדשים באוניברסיטאות"). חלק מהמתרגלים התייחסו ל"מתמטיקה", "נושא" או לשאלות ספציפיות שסביבן האירועים נסבו, עם הערות שקושרות אותם למתמטיקה של בית הספר או האוניברסיטה.

פרשנות לאירועים בלתי צפויים- רפלקציות רבות הכילו תיאורים של מקרים שבהם תלמידי התרגול פעלו בצורה שונה מכפי שהמתרגלים ציפו. זה פינה מקום להסביר את הבלתי צפוי - מה שהמתרגלים עשו לעיתים קרובות באמצעות שיח STT. להלן הקטע של אנני: "במהלך ההדרכה, היו לי יותר משלושה תלמידים ששאלו אותי איך לפתור את השאלה הזו. נתון: $f(x)=x^2-2$. מצאו את f(2-x). ניסיתי להסביר את זה בכך שאמרתי להם שהתפקוד הוא כמו מפעל. זה מה שהמורה שלי למתמטיקה השתמש בו כדוגמה כשהוא לימד אותנו את ההגדרה של פונקציות בבית הספר. אבל הם אמרו לי שהם לא מבינים את זה בכלל. אז הוספתי עוד תוכן להסבר שלי, שאומר שזה מפעל להכנת פאי תפוחים. מה שיש בסוגריים זה התפוח שאנחנו צריכים להכניס למכונה כדי להכין פאי תפוחים. אז כדי לפתור את השאלה, אנחנו פשוט משתמשים ב-2-x כדי להחליף את x. הם עשו את זה, אבל אני לא בטוחה שהם באמת הבינו למה. [...] אחרי התרגול נזכרתי בפעם הראשונה שהמורה שלי למתמטיקה השתמשה בדוגמה של המפעל, ובאותה תקופה גם לא הבנתי אותה. אבל הדברים מתנהלים אחרת בבית הספר. אני לא יכולה לדמיין כמה קשה זה חייב להיות לתלמידי שנה א' לפגוש את הרעיון הזה בפעם הראשונה". אנני כתבה כי לאחר שהסבירה ש"פונקציה היא כמו בית חרושת", היא לא הסתפקה בכך שהסטודנטים אומרים לה שהם "לא הבינו הכול". גם אחרי ש"הם עשו" את מה שהיא הציעה כדי למצוא f(2-x), היא עדיין "לא בטוחה שהם באמת הבינו למה". עם זאת, "אי הבנה" זו נראית אחרת, אם נתייחס לעובדה ש"סטודנט שנה א' פוגש את הרעיון הזה בפעם הראשונה". דרך העדשה של נרטיב STT כללי זה, מה שנראה מיוחד ובלתי צפוי, הופך לגזירה הגיונית של "אמת" פדגוגית רחבה יותר. ואכן, אם "הדוגמה של המפעל" היא "קשה", נראה שאין כל כך הפתעה בעובדה ש"יותר משלושה תלמידים" העלו שאלות והצהירו שוב ושוב על "אי הבנתם".

דיון

הממצא העיקרי של המחקר שלנו נוגע לארבעת התפקידים של תקשורת STT. באופן ספציפי, מצאנו שזה (i) מופיע בתיאורים של מתרגלים על אירועי הדרכה; (ii) סייע למתרגלים להבין אירועים בלתי צפויים; (iii) מיקם את פעולות ההוראה של המתרגלים כשכפולים של חווית ה-STT שלהם; ו-(iv) תרם ליצירת נרטיבים פדגוגיים חדשים של המתרגלים. מייסון (2002) הודה כי נדרשים זמן ומאמץ כדי ללמוד לכתוב דיווחי הוראה ללא הערכה ושיפוט. המאמץ להפריד בין אירועים לבין פרשנותם, נראה ברפלקציות רבות. עם זאת, התפקיד הראשון של תקשורת STT מוכיח ששמירה על ההפרדה אינה יכולה להיות קלה. לדוגמה, בכמה רפלקציות, המתרגלים זיהו את התלמידים שלהם כ"תלמידי שנה א'", וזיהו את המתמטיקה שעליה עבדו בהדרכות, כ"בית ספר" או "אוניברסיטה" . זה מאפשר להציע כי STT היווה חלק מהמציאות בכיתה של המתרגלים - חלק שהם לא יכלו להשאיר מאחור בדיווחים הפדגוגיים שלהם. התפקיד השני נוגע למתרגלים המטפלים באירועים שבהם פעולות התלמידים חרגו מציפיותיהם. זה המקום שבו נרטיבים כלליים של STT

הפכו לשימושיים, כשהם הפכו את פעולות התלמידים, על ידי הפיכתם ממוזרות מושכת תשומת לב לדפוסים רחבים יותר.

בהקשר הבית ספרי, תופעת המורים המתבוננים בלמידה של התלמידים באמצעות משקפי חסר, תועדה היטב, ונמצאו גם תוכניות התפתחות מקצועית בתחום (למשל, Anthony et al., 2018).

איננו מכירים מאמצים שיטתיים מסוג זה בהקשר השלישוני (Kontorovich, & Ovadiya, 2022) בניו זלינד וסביבתה. לפיכך, אנו מעריכים את המכללות והאוניברסיטאות בארה"ב, שבהן התכנון, היישום והבדיקה השיטתית של תוכניות פיתוח מקצועי למתרגלים, מוסדרו (לדוגמה, Speer et al., 2005; Yee et al., 2022).

רשימת מקורות

Adiredja, A. P., & Zandieh, M. (2020). The lived experience of linear algebra: a counter story about women of color in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 239-260.

Anthony, G., Hunter, R., & Hunter, J. (2018). Challenging teachers' perceptions of student capability through professional development: a telling case. *Professional Development in Education*, 44, 5, 650–662.

Klymchuk, S., Gruenwald, N., & Jovanovski, Z. (2011). University lecturers' views on the transition from secondary to tertiary education in mathematics: An international survey. *Mathematics Teaching-Research Journal Online*, 5, 1, 101-128.

Kontorovich, I., & Ovadiya, T. (2022). Novice tutors make sense of their teaching of first-year students. In RUME February 2022 conference. Boston.

Lawson, D., & Croft, T. (2021). Lessons for mathematics higher education from 25 years of mathematics support. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi, & C. Winslow (Eds.), *Research and development in university mathematics education* (pp. 22-40). Routledge.

London Mathematical Society. (1995). Tackling the mathematics problem. Retrieved on 8 July 2021 from https://mei.org.uk/files/pdf/Tackling_the_Mathematics_Problem.pdf.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: the discipline of noticing*. RoutledgeFalmer.

Nardi, E., Jaworski, & Hegedus, S. (2005). A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: from "tricks" to "techniques*". Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 4, 284-316.

Pinto, A. (2019). Towards transition-oriented pedagogies in university calculus courses. In J. Monaghan, E. Nardi, & T. Dreyfus (Eds.), *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics - Conference proceedings* (pp.139-142). MatRIC. https://matric-calculus.sciencesconf.org/data/pages/CalcConf2019_Papers_190910.pdf.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2014). University mathematics as a discourse – why, how, and what for? *Research in Mathematics Education*, 16, 2, 199-203. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918339.

Speer, N., Gutman, T., & Murphy, T. J. (2005). Mathematics teaching assistant preparation and development. *College Teaching*, 53, 2, 75-80.

Yee, S., Deshler, J., Cervello R. K., Petrulis, R., Potvin, C. D., & Sweeney, J. (2022). Bridging the gap between observation protocols and formative feedback. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25*,* 217-245. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09485-x

דפוסי תקשורת של מורים וסטודנטים בשיח מתמטי עם תלמיד מתקשה במהלך התנסות בסימולציה

עדי עראקי, מכון ויצמן למדע, המכללה האקדמית אחוה
ראיסה גוברמן, המכללה האקדמית אחוה
יוליה מוצ'ניק רוזנוב, המכללה האקדמית אחוה

מבוא

אחת המטרות העיקריות של מורה למתמטיקה היא לקדם ולהוביל את תלמידיה להצלחה (Marita & Hord, 2021). מחקרים מראים שלפעמים מורים מכתיבים לתלמידים כיצד להתמודד עם המשימות, לבצע אלגוריתם מסוים וכך הלאה (Marita & Hord, 2021). הוראה מן הסוג הזה מכוונת לזכירת עובדות ופרוצדורות ואינה מקדמת תלמידים עם קושי מסוים. לעומת זאת, הוראה ולמידה באמצעות השיח המתמטי מסוגיו השונים, המאפשרות השתתפות פעילה של התלמיד בתהליך הלמידה, מקדמים אותם ומובילים ללמידה משמעותית (Sfard, 2008). אחד הגורמים המרכזים המובילים מורים להצלחה בקידום תלמידים מתקשים הוא הגמישות והיכולת של המורה להבנות את השיח על סמך ההבנה של התלמיד, ובדרך זו להוביל אותו לקונפליקט קוגניטיבי וכך לעזור לו להתמודד עם קושי מסוים במתמטיקה (Springer & Borthick, 2007). מיומנות המורה להוביל שיח מן הסוג הזה היא מיומנות לא פשוטה וחשוב לפתח אותה וכוללת, בין היתר, יכולת לנהל שיח רפלקטיבי ומנחה עם תלמידיו. מחקר זה בוחן את דפוסי התקשורת של מורים וסטודנטים למתמטיקה בעבודה פרטנית עם הדמיית תלמידים. סימולציה היא כלי פשוט אך מדויק המאפשר התנסות במצבים המדמים מציאות לקידום פתרונות בסביבה בטוחה באמצעות דימוי של "מצבים אמיתיים" ורכישת מיומנויות תקשורת בין אישית (רן ונהרי, 2018). לפיכך, מטרת המחקר הנוכחי היא להתחקות אחר דפוסי תקשורת של מורות המתנסות בסימולציה של השיח בין מורה לתלמיד מתקשה בעקבות תפיסה שגויה לכאורה שהתגלתה אצל התלמיד בפתרון משימה מתמטית.

מסגרת תיאורטית

תקשורת מתמטית היא חלק חשוב ואף מרכזי בשיעור המתמטיקה. תלמידים יכולים להשתמש בשפה דבורה כדי להעביר את מחשבותיהם, להרחיב את החשיבה שלהם ולהבין מושגים, רעיונות ועקרונות מתמטיים. הם יכולים גם להשתמש בשפה כתובה כדי להסביר את הסיבה והתהליך של מחשבותיהם וכך לבנות ולהפנים רעיונות מתמטיים גדולים יותר (Cheah, 2008). התקשורת בכיתת מתמטיקה קשה יותר מאשר בדיסציפלינות אחרות. המורה למתמטיקה מלמד לא רק שפה חדשה אלא בעיקר מושגים מתמטיים מופשטים המלווים בהגדרות וסמלים ובעיקר דרכי חשיבה ייחודיות למקצוע (Sierpinska, 1998). ברנדפור ופריקהולם (Brendefur & Frykholm, 2000) מציעים ארבעה דפוסים לתקשורת זו:

1. תקשורת חד-כיוונית (Uni-directional communication): זהו דפוס התקשורת הנפוץ ביותר. המורה הוא ששולט בשיח ובעיקר מרצה. לעיתים המורה שואל שאלות בעל אופי סגור (התשובות הן "כן" או "לא") ומאפשר למעט ילדים להגיב.
2. תקשורת משתפת (Contributive communication): דפוס זה מתמקד בדיאלוג בין מורה לתלמיד או בין התלמידים עצמם. השיח הוא שטחי ומשתמשים בו בעיקר לצורך הבהרות או מתן הערות לתיקון, כלומר, שיח לא פורמלי המתנהל בין חברי הקבוצה.
3. תקשורת רפלקטיבית (Reflective communication) : דומה לתקשורת משתפת אך בשונה ממנה השותפים באינטראקציה משתמשים בשפה מתמטית.

4. תקשורת מנחה (Instructive communication) – דפוס המתייחס לרמה הגבוהה ביותר של תקשורת בין מורה לתלמיד. קיים שיח מעמיק המאפשר למורה לעמוד על אופי החשיבה של התלמיד ולהגיב לה.

על מנת לקדם תקשורת ושיח מתמטי הכולל איתור תפיסה שגויה, תמיכה בתלמיד במהלך בניית הטיעונים וניסוח מחדש של הרעיונות המתמטיים ניתן להציע ככלי לפתרון את השימוש בסימולציה. סימולציה בחינוך עם הדמיית התלמידה על-ידי השחקנית מהווה אחד הכלים המאפשרים לפתח את כל היכולות הנדרשות לשיח מתמטי פורה עם תלמיד/ה אצלם התגלתה תפיסה שגויה. הסימולציה מאפשרת התנסות במצבי הדמיית מציאות לקידום פתרונות בסביבה בטוחה באמצעות דימוי של "מצבים אמיתיים" ורכישת מיומנויות תקשורת בין-אישית. בתחום החינוך, לניהול קבוצת תלמידים, על המורה להיות בעל ידע פדגוגי ומקצועי, מיומנויות הוראה, אכפתיות ותמיכה, ומקצועיות ומיומנות ניהול ותכנון (רן ונהרי, 62018). לסימולציה בחינוך חשיבות רבה ביצירת מצבי למידה שיאפשרו למורים רכישת אסטרטגיות ומיומנויות תקשורת, הכרה והבנה כי אינטראקציות ניתנות לפתרון באמצעות שימוש יעיל באסטרטגיות ומיומנויות תקשורת בחינוך ויצירת קשר ברור ושקוף אצל כל אחד מהמורים בין עולמו הפנימי הסמוי מהעין לבין התנהגויותיו האוטומטיות במצבי לחץ כבסיס להבנת הצורך בפתרון מעמדה של תפקידו (איזנהמר, 2014). ההדמיות מאפשרות קבלת החלטות בסביבה בטוחה, מסייעות בפיתוח סטנדרטים של אכפתיות ומסייעות בפיתוח גישה אמפתית בתקשורת בין אישית. בהמשך לסקירת הספרות נענה במאמר זה על השאלה הבאה: מהם מאפייני המקרים בהם מורה המתנסה בסימולציה מתנהג בהתאם לסוג תקשורת ספציפי- בתקשורת חד-כיוונית, משתפת או מנחה?

מתודולוגיה

במחקר זה חקרנו שש סדנאות סימולציות והשתתפו בו 38 מורות וסטודנטיות המתמחות במתמטיקה. בכל סימולציה השתתפה נציגה אשר ניסתה להוביל את התלמידה בדרכה למהלך הנכון בעיניה. סדנאות הסימולציה התקיימו באמצעות הפלטפורמה zoom. הסדנאות המקוונות כללו מספר שלבים, נתוני פתיחה: המנחה מציגה את האירוע והרקע הנדרש ולאחר מכן נותנת למשתתפים זמן לחשוב על אפשרויות התגובה. התנסות בו זמנית: המורה הנבחר מנסה להתמודד עם המצב הנתון מול שחקנית. כל שאר המשתתפים צופים בסימולציה. שאלון: צופים ושחקניות ממלאים שאלון. תחקיר: המנחה מבקשת ומנחה את המורים לדון בתפיסות השגויות לכאורה, בשיטות ההוראה השונות, בתחושת התלמידה במהלך הסימולציה ובתגובות המורה. סיכום: סיכום הדיון וזמן למחשבה על התגובות לאירוע בהתחשב בכל הנאמר ולאחר מכן מריצים סיבוב שני של הסימולציה. תרחיש הסימולציה מתבסס על אירוע מתמטי המוצג במרקוביץ' (2003) האירוע נקרא "אירוע החילוק ב-0" והוא דן בחלוקה באפס. האירוע מתמקד בחילוק של אפס במספר כלשהו ובחילוק של מספר כלשהו ב-0.

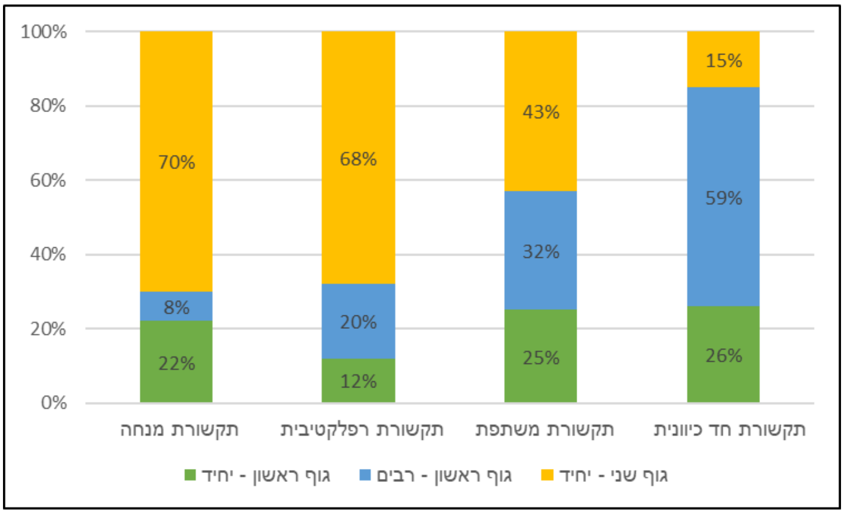
המחקר הינו מחקר איכותני אשר משלב שתי גישות מתודולוגיות לניתוח השיח: ניתוח תוכן פתוח וניתוח לינגוויסטי. ראשית ניתחנו את השיח שהתקיים בין מורה/סטודנטית המתנסה לבין תלמידה בשיעור פרטני ותחקיר הסימולציה לפי ארבעת קטגוריות דפוסי התקשורת של ברנדפור ופריקהולם (Brendefur & Frykholm, 2000). לאחר מכן ביצענו ניתוח לינגוויסטי שמיועד לזהות מסרים סמויים. בניתוח לינגוויסטי נותחו שני הסממנים הבאים: (1) כינויים אישיים של גוף ראשון ושני ו-(2) שימוש בהדגשה לינגווסטית בצורת מעצימים. הניתוח התבסס על תיאוריית הבלשנות הפונקציונלית מערכתית Systemic Functional Linguistics (SFL) Theory . תארי פועל מסוימים עשויים לשרת כמו אמצעי הדגשה לשוניים במטרת העצמה על ידי הבלטת של חוויות ורעיונות. השימוש באמצעי הדגשה לשוניים מהווים אחד מהמרכבים של Emotionally Coloured Language (ECL) (Halliday & Matthiessen, 2004). שימוש בשני סוגי הניתוח עזר לזהות ולהבין היכן מתרחשים האירועים הקריטיים בשיח בין מורה לתלמיד/ה ובהתאם לכך להציע דרך המאפשרת להטיב את השיח המתמטי במקרה זה.

ממצאים

להלן ממצאי הניתוח הלינגוויסטי על פי ארבעת סוגי דפוסי התקשורת של ברנדפור ופריקהולם (Brendefur & Frykholm, 2000).

איור 1

ממצאי הניתוח הלינגוויסטי על פי ארבעת סוגי דפוסי התקשורת.



בסימולציות בהן הודגמה תקשורת חד כיוונית, המורה משתמשת בכינוי גוף "את" (15%) בשיעור יחסית נמוך בהשוואה לגוף ראשון (85%) כאשר בתוכו רוב כינויי הגוף היו של גוף ראשון רבים "אנחנו" (59%) ורק 26% גוף ראשון יחיד "אני". השימוש המוגבר בכינוי גוף "אנחנו" נוטה לשרת שתי מטרות. ראשית, זה מאפשר יצירה של תחושת הזדהות ותמיכה עם התלמידה. שנית, שימוש בשיעור גבוה של כינוי גוף "אנחנו" ושימוש מצומצם בכינוי גוף "את" לא מעודד את התלמידה להיות פעילה בשיחה. השימוש בכינוי הגוף "אני" ברמה יותר גבוהה מכינוי גוף "את" בשיחה עם התלמידה מצביע על כך שהמורה שולטת בשיחה ומשמשת כמרצה. כלומר, "מעבירה חומר" מאשר יוצרת תהליך למידה מועיל. בנוסף, על פי הממצאים של הניתוח הבלשני, דפוס התקשורת החד כיוונית, הוא הדפוס היחיד שבו המורה השתמשה בכינוי גוף שני בצורת רבים (אתכם, לכם). חשוב לציין, שהשימוש בכינוי גוף שני רבים, מציין דפוס מחשבה אצל המורה לפיו היא מראה נכונות להרצות ולהסביר בצורה קולקטיבית מאשר לעודד את התלמיד האינדיבידואלי להיות פעיל במהלך השיעור.

בסימולציות שמדגימות תקשורת משתפת, המורה משתמשת בכינוי גוף "את" בשיעור יחסית גבוה (43%) בהשוואה לכינוי גוף "אני" (25%) ו"אנחנו" (32%). החלוקה הכמעט שווה של כינויי הגוף בין גוף ראשון ושני (57% נגד 43%) מצביעה על כך שהמורה מזמינה את התלמידה לענות על השאלות ולקחת חלק בשיחה למרות שהמורה עדיין שולטת בה. יחד עם זאת, שימוש בכינוי "אנחנו" (collective first person) בשיעור של 32% מצביע על הכוונה של המורה ליצור תחושת הזדהות ותמיכה עם התלמידה (דומה לתקשורת חד כיוונית) בלי לפגוע ביכולתה של התלמידה להשיב למורה ולהשתתף בשיחה. ההבדל הנוסף בין תקשורת חד כיוונית ותקשורת משתפת הוא השימוש בהדגשה לינגוויסטית בצורת מעצימים לינגוויסטים שיוצרים ECL. יש להדגיש כיצד השימוש ב-ECL מהווה חלק בלתי נפרד מהשיח האנושי. לעומת זאת, בשיח מתמטי ובהקשרים הספציפיים שהודגמו בסימולציות, השימוש במרכיבים של ECL הינו מועט ויוצא דופן. אימוץ לא מודע של מאפייני שיח אנושי כמו ECL, עלולים לשקף את הכוונה של המורה ליצור אמון וקירבה בינה לבין התלמידה.

על פי ממצאי הניתוח עבור תקשורת רפלקטיבית, הרוב המוחלט של כינוי גוף ראשון ושני הם "את" (68%). כינויי גוף ראשון מהווים רק 32% שמתוכם 20% הם כינוי גוף קולקטיבי "אנחנו". היחס בין השימוש בין "את" לכינוי גוף "אנחנו" מצביע על ניסיון של המורה לערב את התלמידה בשיחה ולעודד אותה לחשוב במונחים של שיח מתמטי ועל ידי כך להגיע להבנה של הכלל שאסור לחלק ב-0. עצם העובדה שהשימוש בגוף ראשון "אני" מהווה 12% בלבד, מראה כיצד המורה לא מציבה את עצמה כמקור הידע הבלעדי ומרכז הפגישה למרות שהיא כן שולטת בשיחה במטרתה להקנות דפוסי שיח מתמטי בכיתתה, שימוש בהסברים, הנמקות והצדקות בשפה מתמטית.

המאפיין הלינגוויסטי העיקרי של דפוס התקשורת המנחה, הוא השימוש בכינוי גוף שני יחיד "את" בשיעור מאוד גבוה (70%). חשוב לציין, שהמורה משתמשת בגוף ראשון יחיד "אני" ב22% מסך כל

כינויי הגוף, ראשון ושני ביחד. ואילו השימוש בגוף ראשון רבים עמד על 8%. מכאן ניתן להבין שבאופן לא מודע המורה לא מנסה ליצור מרחב דיסקורסיבי משותף על ידי שימוש בכינוי גוף "אנחנו", אלא בעזרת שימוש בכינוי גוף שני יחיד "את", המורה עושה מאמץ "להפעיל" את התלמידה ובכך לעודד את התלמידה לקחת יוזמה ולעורר חשיבה עצמאית. לפיכך, חשוב להדגיש את ההבדלים הבולטים ביחס בין השימוש בגוף שני יחיד (70%) לעומת כינוי גוף ראשון יחיד (22%) ורבים (8%). אמצעי בלתי מודע נוסף לחשיבה עצמאית הוא השימוש ב- ECL שנמצא בסימולציה שמדגימה תקשורת מנחה.

מסקנות

הממצאים מעידים כי הסימולציות אופיינו בסוגי התקשורת השונים, באופנים שונים אך לא כולם באופן מיטבי ומספק. נתוני המחקר עולים בקנה אחד עם מחקרים שבדקו ידע תוכן וידע פדגוגי של מורים למתמטיקה ומצאו כי ככל שלמורים היה ידע דיסציפלינרי ופדגוגי רחב יותר, התלמידים הפגינו ידע רחב יותר והצליחו יותר (Tchoshanov, 2011). גם במחקר הנוכחי, ככל שהמורות הפגינו ידע דיסציפלינרי ופדגוגי רחב יותר כך הן התקרבו יותר אל הטיפול בתפיסה השגויה של התלמידה. הניתוח הלינגוויסטי שהוצג הינו ניסיון ראשון ליצור פרופיל שמאפיין את התנהגות הלשונית של המורות בזמן הסימולציות בכל אחד מארבעה דפוסי תקשורת. כל אחד מדפוסי תקשורת יכול להיות מתואר בשילוב של כמה מאפיינים לינגוויסטיים כמו שימוש רב בניגוד לשימוש מצומצם של כינויי גוף שונים ושימוש או הימנעות משימוש באמצעי הדגשה לשוניים כחלק מ-ECL . בכנס נרחיב על תהליך הניתוח והממצאים ונדון ביישומים אפשריים של מחקר זה.

ביבליוגרפיה

איזנהמר, מ' (2014). מקומה של ההתנסות המעשית בהכשרה: על הסימולציה ככלי לקידום הפרקטיקה של ההכשרה. *ביטאון מכון מופ"ת*, 53, 37-43.

מרקוביץ, צ. (2003). *ניתוח אירועים מתמטיים בכיתה*. תל אביב: מכון מופ"ת.

רן, ע' ונהרי, ג. (2018). *סימולציות בחינוך קובץ להכשרת צוותים חדשים במרכזי סימולציה*. תל-אביב: מכון מופ"ת.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153.

Cheah, J. (2008). Talking Race in the Classroom–By Jane Bolgatz . *Teaching Theology & Religion, 11*(2), 107-108.

Marita, S., & Hord, C. (2017). Review of mathematics interventions for secondary students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 40*(1), 29-40.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, A. Sierpinska, & M. G. Bartolini-Bussi. (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Springer, C. W., & Borthick, A. F. (2007). Improving performance in accounting: Evidence for insisting on cognitive conflict tasks. *Issues in Accounting Education, 22*(1), 1-19.

Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76*(2), 141-164.

תפיסות פרחי הוראה למתמטיקה לגבי שילוב חינוך לערכים בשיעור

ח'ירייה מסארוה, המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל - חיפה
שאדיה ג'דבאן, המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל - חיפה

מבוא

חינוך לערכים חברתיים נתפס בדרך כלל כחלק משיעור החינוך (אדרי ומובשוביץ'-הדר, 2013) במטרה לסייע לתלמידים לחיות בחברה בעלת ערכים חברתיים ומוסכמות כמו שוויון, כבוד להורים, לזולת ולמסורת, וסבלנות וסובלנות. חוקרים בחינוך המתמטי הצביעו על חשיבות שילוב ערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה (Bishop, 2008; Ernest, 2012) לקידום הלמידה, אבל עדיין המחקרים העוסקים בשילוב חינוך לערכים חברתיים בהוראת מתמטיקה היא מעטה ביותר (אדרי ומובשוביץ'-הדר, 2013). מקצוע המתמטיקה נתפס כנטול ערכים חברתיים (Ernest, 2016) ונטול תרבות (Presmeg, 1998). תכניות הלימודים במתמטיקה (המזכירות הפדגוגית, 2013, 2006) הן לבית ספר יסודי, והן לבית ספר על יסודי, מדגישות את פיתוח היכולות הלימודיות, רכישת מושגים מתמטיים, פיתוח כישורים בנושאים הנלמדים, ומימוש הפוטנציאל המקסימלי של הלומד (לייקין וליבנה, 2015). על כן, המורה למתמטיקה מחויב בחינוך לחשיבה מתמטית ולהגיע עם התלמידים להישגים במתמטיקה (אדרי ומובשוביץ'-הדר, 2013). אבל את נושא החינוך לערכים חברתיים כמעט ולא מודגש במטרות תכניות הלימודים ולא בפירוט התכנים המתמטיים. העדר תכנים אלה לא מנחה את המורים למתמטיקה להדגיש ערכים חברתיים בשיעור (Seah, 2016). על כן, על המוסדות להכשרת עובדי הוראה לאמץ את נושא חינוך לערכים חברתיים ולשלבו בתחומי ההוראה השונים, כולל מתמטיקה (אדרי ומובשוביץ'-הדר, 2013) ע"י פיתוח חומרי לימוד מתאימים. מתוך ראיה זו, מצאנו לנכון לדון בערכים חברתיים בתכנים מתמטיים בקורס סמסטריאלי "תכנון תכניות לימודים במתמטיקה", אשר ניתן במכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל – חיפה, בשנה"ל תשפ"ב לפרחי הוראה במתמטיקה. אחד הנושאים בקורס עסק בשילוב ערכים במתמטיקה מתוך פעילויות ופתרון בעיות מילוליות אשר מציגות סיטואציות בהקשר ערכים. מכאן נוצרה ההזדמנות לערב את פרחי ההוראה לחקור את נושא ערכים חברתיים בתכנים מתמטיים, מתן דוגמאות לשילובם בפתרון בעיות, והצגת סימולציה של דיונים עם תלמידים לגבי ערכים אלו. מטרת המחקר הייתה לבחון כיצד תופסים פרחי הוראת מתמטיקה את נושא שילוב ערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה ואת נכונותם לשלבם בכיתות שלהם.

החידוש במחקר הנוכחי בכך שהוא התמקד בפרחי הוראה למתמטיקה מהמגזר הערבי הלומדים במכללה ערבית, הנחשפים בפעם הראשונה לאפשרות שילוב ערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה. כמו כן, המחקר בחן את נכונותם לשלב ערכים אלה בעתיד.

מטרת ושאלת המחקר

מטרת המחקר הייתה לבחון כיצד תופסים פרחי ההוראה למתמטיקה את שילוב ערכים חברתיים בשיעור. המחקר עסק בשאלות: (1) כיצד תופסים פרחי הוראת מתמטיקה את שילוב ערכים חברתיים בשיעור?, (2) מהי מידת הנכונות של פרחי הוראה במתמטיקה לשילוב ערכים חברתיים בשיעור?

משתתפי המחקר

המחקר הנוכחי עקב אחרי תפיסות פרחי ההוראה למתמטיקה לגבי שילוב נושא הערכים במהלך קורס במכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל בשנה"ל תשפ"ב. הקורס "תכנון תכניות לימודים במתמטיקה" אשר לימדה אותו החוקרת השנייה כלל נושא "חינוך לערכים

בהוראת מתמטיקה". הנושא נפרש על ארבעה מפגשים שבועיים, כאשר כל מפגש שעתיים אקדמיות. בקורס השתתפו 16 סטודנטיות, כאשר 15 מהן לומדות בשנה השלישית בלימודים במסלול חד חוגי מתמטיקה והתמחות בהוראה בבתי ספר על יסודיים, וסטודנטית אחת לומדת להרחבת הסמכה במתמטיקה והיא מורה בפועל בבית ספר יסודי. כל הסטודנטיות דוברות ערבית ובאות מאותו רקע תרבותי.

כלי המחקר

המחקר בעיקרו הוא מחקר איכותני. כלי המחקר כללו: תצפיות בשיעורים אשר בוצעו ע"י החוקרת הראשונה, שאלון משוב בסוף הקורס על ערכים, מטלות במהלך הקורס כאשר אחת מהן התייחסה לערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה, ורפלקציה אישית.

שאלון המשוב כלל שתי שאלות בנושא ערכים; השאלה הראשונה הייתה שאלה סגורה במטרה לחזק את הממצאים האיכותניים. בשאלה היה צריך לסמן את מידת ההסכמה עם עשרה היגדים בהקשר של שילוב ערכים בשיעור מתמטיקה. מידת ההסכמה הייתה בסולם מ- 1: לא מסכימה בכלל, עד 5: מסכימה בהחלט. השאלון התייחס לתרומת הקורס למידת חשיפת נושא ערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה, ולאופן תפיסת פרחי ההוראה את שילוב ערכים בשיעור. החלק הסגור של השאלון שימש כדי לענות על שאלת המחקר הבודקת את מידת נכונותם של הסטודנטיות לשלב ערכים בשיעור. השאלה השנייה בשאלון המשוב הייתה שאלה פתוחה שבה התבקשו הסטודנטיות לציין ולהסביר את מה שרכשו בקורס לגבי נושא שילוב ערכים בשיעור מתמטיקה. באחת המטלות הסטודנטיות התבקשו להתייחס לשילוב ערכים בתכנים מתמטיים ובבעיות מילוליות במתמטיקה. כמו כן, הן התבקשו לפתח פעילויות מתאימות לתלמידים בבית ספר ולהציע דיונים אפשריים סביב העיסוק בהן בכיתה. בנוסף, הסטודנטיות התבקשו לכתוב רפליקציה על התהליך שהן עברו במהלך הלימודים של הנושא "שילוב ערכים בהוראת מתמטיקה".

הליך המחקר

המחקר הנוכחי בחן למידת פרחי הוראת מתמטיקה את נושא ערכים כאחד הנושאים בקורס "תכנון תכניות לימודים במתמטיקה" בשנה"ל תשפ"ב. בתחילת הנושא הוצגה שאלה לגבי היתכנות למידת ערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה. המטרה של הדיון בשאלה הייתה לבחון כיצד תופסות הסטודנטיות את שילוב ערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה ואת מידת חשיפתן לנושא. התשובות שלהן היו חד משמעיות בכך שאין קשר בין ערכים למתמטיקה ושאין מקום לדיון בערכים בשיעור. במהלך חשיפת הסטודנטיות לנושא, הן התבקשו לבנות מונחון ערכים המתחילים כל אחד באות אחרת בשפה העברית מ א' עד ת'. כל ערך שהתווסף למאגר היה מלווה בתיאור קצר שמגדיר את הערך. המונחון שימש אותן כמאגר שממנו יכלו לבחור: (1) ערכים שניתן לקשר אותם לתכנים מתמטיים, כמו למשל האות ש' כתבו ערכים "שוויון" שניתן לשייך למשוואה מתמטית, ו- "שייכות" שניתן לקשר לשייכות איבר לקבוצה. (2) ערכים שניתן לשלבן בפתרון בעיות מילוליות ע"י בניית סיטואציות מתמטיות הקשורות לערכים שהסטודנטיות בוחרות. כך למשל, בקשר לאות ח' כתבו הסטודנטיות הערך "חופש בחירה" ובנו בעיה מילולית מתאימה, והוסיפו שאלות רלוונטיות לערך זה. התיאורים שסיפקו הסטודנטיות כללו הצגת הדיונים שהן יכולות לעורר סביב הערכים, הן כערכים חברתיים, והן כמושגים מתמטיים, ועל הקשר ביניהם בחיי היום יום. כמו כן, הן פיתחו בעיות מילוליות במתמטיקה הקשורות לערכים, הציגו בכיתה והציעו תרחישים אפשריים של הדיון שיכול להתעורר. בסוף למידת הנושא, הסטודנטיות הגישו מטלה וכתבו רפלקציה על תהליך הלמידה שלהן.

ניתוח נתונים

מתוך התצפיות נרשמו תגובות הסטודנטיות. בין היתר נרשמו תגובותיהן בתחילת הקורס בנוגע להיתכנות שילוב ערכים בשיעור מתמטיקה. בשאלה הסגורה בשאלון המשוב אשר ענו

עליו 10 סטודנטיות מתוך 16, בחלק מההיגדים כמו תרומת הקורס לחשיפה לדרכים לשילוב ערכים בשיעור מתמטיקה, סיכמנו את התשובות של ההסכמה הגבוהה 4 "מסכימה" ו- 5 "מסכימה במידה גבוהה". בחלק אחר, סיכמנו את התשובות שדירוגן הנמוך ביותר, כמו היגד "ערכים בשיעור מתמטיקה שונים מערכים בשיעור חינוך". במטלה שהגישו הסטודנטיות בנושא, נבחנו הערכים החברתיים ששולבו בבעיות מילוליות אשר פותחו ע"י הסטודנטיות. נבנו שתי קטיגוריות של ערכים: ערכים מתמטיים וערכים חברתיים. הנתונים מהרפלקציה באו כדי לחזק את הממצאים בקשר לשאלה הראשונה. כדי לענות על שאלת המחקר השנייה לגבי נכונות הסטודנטיות לשלב ערכים בשיעור מתמטיקה, סוכמו תשובות הסטודנטיות בשני ההיגדים: "אני מוכנה ללמד ערכים בשיעור מתמטיקה", ו- "כמורה למתמטיקה, ערכים הוא חלק מהשיעור בשבילי". כמו כן, נותחו הנתונים האיכותניים הן מתוך הרפלקציה והן מתוך השאלה הפתוחה בשאלון המשוב.

ממצאים

בתחילת הקורס, ציינו הסטודנטיות כי לא ניתן לשלב ערכים בשיעור מתמטיקה וכי זה אינו מתפקידו של מורה למתמטיקה וכי ערכים מלמדים בשיעור חינוך. כך למשל ציינו סטודנטיות: "אף פעם לא חשבנו שאנחנו יכולות לשלב ערך חברתי ובמיוחד בחינוך מתמטי", "שמתי לב שבספרי לימוד אין הרבה מקום לערכים". לאחר מעורבותן בפעילויות הקשורות לשילוב ערכים בשיעור ובתכנים מתמטיים, וכבר על ההתחלה, הנושא סקרן אותן וראינו שהמעורבות שלהן בשיעור הלכה וגברה. הסטודנטיות שיתפו פעולה, הציגו דוגמאות של ערכים כאלה ואף השתתפו בדיונים שהתקיימו בקורס בנושא. מתוך השאלות הסגורות בשאלון המשוב, התגלה כי רוב הסטודנטיות (80%) ציינו כי בעקבות הקורס הן לא מסכימות עם ההיגד "ערכים בשיעור מתמטיקה שונים מערכים בשיעור חינוך". התגלה גם כי רוב מוחלט מהסטודנטיות (90%) רואות חשיבות בשילוב והקניית ערכים בשיעור מתמטיקה. וכי ערכים הם חלק מהשיעור בשבילן (80%). מעט מאוד (20%) מהסטודנטיות עדיין רואות קושי בשילוב ערכים בשיעור מתמטיקה, ששילוב ערכים בשיעור מתמטיקה שונה משילוב ערכים בשיעור חינוך.

הממצאים מצביעים על כך כי רוב מוחלט מהסטודנטיות (90%) הביעו נכונות לשלב ערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה בעתיד, וכי באותה מידה ערכים יהיו חלק משיעור שלהם. חיזוק ממצא זה התקבל מתוך הרפלקציות כפי שציינו סטודנטיות כי "מתוך המטלה הבנתי את המשמעות של ערכים והצלחתי לפתח בעיות מילוליות שיאפשרו לי לקיים דיון עם התלמידים בנושא ערכים חברתיים וחשיבותם. כשאהיה מורה בעתיד אני אשלב ערכים בשיעור מתמטיקה". וכי:

> ערכים הם חלק בלתי נפרד מכל שיעור, אם מלמדים ערכים בשיעורי מתמטיקה ומביאים לפניהם של התלמידים כל אשר קשור אליהם בחיי היום יום וכל מה שהם מרגישים ו/או חושבים, אכן נוכל לגרום להם תחושת שייכות לשיעור ולחומר הנלמד וכך נתרום אפילו במידה מועטה להצלחתם. הקורס היה מעניין שגורם לכל מורה להבין ששילוב ערכים הם הדבר הכי חשוב לנו בחיינו.

הממצאים הצביעו על תרומה משמעותית של הקורס לגבי חשיפת הסטודנטיות לדרכים שונות לשילוב ערכים חברתיים בשיעור מתמטיקה. כאשר כולן הסכימו עם הטענה. רוב הסטודנטיות (90%) ציינו שהקורס תרם להן להבין חשיבות שילוב ערכים בשיעור מתמטיקה. מתוך הרפלקציה של סטודנטית שהיא מורה בפועל בבית ספר יסודי ולומדת להרחבת הסמכה ואשר הייתה מאוד פעילה במהלך השיעור:

> חינוך לערכים בשיעור מתמטיקה לא נתפס כחיוני במערכת החינוך, כי זה אכן דורש זמן הכנה נוסף וזה גוזל זמן הוראה יקר ואין חומרים מתאימים לשילובם. הזמן המוקצה למתמטיקה הוא מדוד ולא משאיר מקום לדיון בנושאים שלא קשורים ישירות לנושא הנלמד. אבל חשוב להדגיש שניתן לשלב ערכים במספר שיעורים כי כל מורה הוא איש חינוך ותפקידו להעלות סוגיות ערכיות במהלך ההוראה... ללא הבנת ערכים לא נוכל להתקרב לעולמו האישי של התלמיד... אין מקום להפרדה בין תכנים לערכים.

דיון

המחקר הנוכחי עולה בקנה אחד עם הקריאה שניתן לשלב ערכים בשיעור מתמטיקה (Bishop, 2008; Ernest, 2004, 2012), ושמתמטיקה אינה נטולת ערכים. המחקר הראה שיש מקום להכשיר סטודנטים להוראת מתמטיקה לשילוב ערכים בשיעור ודיון בהם מתוך תכנים מתמטיים. תוך מעורבות הסטודנטים פרחי הוראה בפעילויות מתאימות בהכשרתם, ניתן להעלות את נכונותם לשלב ערכים בכיתות שלהם. במחקר ההמשך תיעשה הרחבה לפעילויות והשוואה בין תפיסות פרחי ההוראה לפני חשיפתם לנושא ערכים במתמטיקה ולאחר למידת הנושא בקורס מתאים.

רשימת מקורות

אדרי, י' ומובשוביץ-הדר, נ' (2013). מורים למתמטיקה מתגייסים לחינוך לערכים. *דפים*, *55*, 90-117.

לייקין, ר' וליבנה, ר' (2015). תכנית הלימודים במתמטיקה לחט"ע - מבנה ועקרונות. *על"ה*, *51*, 5-13.

המזכירות הפדגוגית (2006). *תכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי בכל המגזרים*. משרד החינוך.

המזכירות הפדגוגית (2013). *תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לכיתות ז'-ט'*. משרד החינוך.

Bishop, A. J. (2008). Mathematics teaching and values education – an intersection in need of research. In P. Clarkson & N. Presmeg (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (231-238). Springer.

Ernest, P. (2012). What is our first philosophy in mathematics education?. *For the Learning of Mathematics, 32*(3), 8-14.

Ernest, P. (2016). Mathematics and values. In B. Larvor (Ed.), *Mathematical cultures* (pp. 189–214). Springer.

Presmeg, N. C. (1998). Ethno mathematics in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 317-339.

Seah, W.T. (2016) Values in the mathematics classroom: Supporting cognitive and affective pedagogical ideas, *Pedagogical Research, 1*(2),45-63.

אמונות ביחס למתמטיקה ומגדר בקרב מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים בחברה הערבית בישראל

מרים סלאמה, אוניברסיטת חיפה
לורי רובל, אוניברסיטת חיפה
ג'והיינה עוואודה-שחברי, מכללת אלקאסמי
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

רקע תיאורטי

בציבור הרחב ובמערכות חינוך במקומות רבים בעולם מדווחים על פערים מגדריים במתמטיקה (Else-Quest et al., 2010). רוב האנשים במערב רואים את המתמטיקה כמתאימה לגברים יותר מאשר לנשים (Beilock et al., 2010). אפיון המתמטיקה כתחום גברי עשוי להביא לכך שלבנות יהיו פחות הזדמנויות ללמוד מתמטיקה (Ernest et al., 2019), וההשפעה המצטברת של אפיון זה, בעיקר בתיווך מורים, הורים ובתי ספר, יכולה להסביר את הייצוג המועט של נשים בתחום המתמטיקה המתקדמת. בחברה היהודית בישראל, בדומה לרוב מדינות העולם, הפערים המגדריים במתמטיקה הם לטובת הבנים (Birenbaum et al., 2007; Birenbaum & Nasser ,2006; Rapp, 2015). בחברה הערבית, לעומת זאת, כיוון הפער הוא הפוך, ובנות מגיעות להישגים גבוהים יותר במבחני מתמטיקה ארציים ובינלאומיים, בדומה למצב במדינות ערביות (Rapp, 2015). עם זאת, על אף שלהבדיל מתלמידי בתי ספר יהודיים, תלמידים ערבים בישראל אינם נוטים לראות במתמטיקה תחום גברי (Fuchs et al., 2018; Forgasz & Mittelberg, 2008). בנות מהחברה הערבית בישראל פונות פחות ללימודי המשך בתחום המתמטיקה ולתעסוקה בתחום זה (Fuchs et al., 2018).

לאמונותיהם של מורים השפעה ידועה על החלטותיהם הפדגוגיות ועל נוהלי הכיתה שלהם (Thompson, 1992). המורים נחשבים לאחד הגורמים הסביבתיים בעלי השפעה גדולה על התפתחות התלמידים ועל היווצרות העמדה האקדמית שלהם (Tiedeman, 2002). כך כאשר למורה הטיה מגדרית לטובת הבנים ואמונה שתחום המתמטיקה הוא תחום גברי, מספר הבנות שיפנו להשכלה גבוהה בתחום זה ובתחומים הקשורים אליו יהיה נמוך (Lavy & Sand, 2015). אמונות המורים בנוגע למתמטיקה משפיעות על אמונות התלמיד (Beilock., 2010). בנוגע לאמונות המורים על תהליכי הלמידה של התלמידים, אפשר לבחון מנקודת מבט מגדרית. שני המחקרים שנערכו בבתי הספר היסודיים בעולם מראים שמורים מחזיקים באמונות מגדריות סטריאוטיפיות בנוגע לסיבות שהם מייחסים להצלחה או לכישלון במתמטיקה בקרב בנים ובנות. תפקידי מגדר סטריאוטיפיים והבדלים באינטראקציה של המורים עם התלמידים נחשבים לגורמים שמסבירים הבדלים באמונות של הבנים ושל הבנות ביכולות שלהם (Mittelberg et al., 2011). יש אינדיקציות המצביעות על כך שמורים רואים ומעריכים באופן שונה את התלמידים שלהם על רקע מגדרי (Tiedeman, 2000). בנוסף לכך, תפיסת המתמטיקה כ"תחום גברי" יכולה למנוע מבנות השתלבות בתחומי לימוד הקשורים למתמטיקה, והעמדה המגדרית הזאת נחשבת לסיבה העיקרית לשיעורי ההשתתפות הנמוכים של בנות בתחום זה ובתחומים הקשורים אליו (Forgasz & Mittelberg, 2008).

מטרת המחקר היא לחקור אמונות ביחס למתמטיקה ומגדר בקרב מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים בחברה הערבית בישראל. שאלת המחקר: מהם מאפייני האמונות של המורים המלמדים מתמטיקה בבתי ספר יסודיים בחברה הערבית בנוגע למתמטיקה ומגדר?

מתודולוגיה

כלי המחקר היה שאלון שכלל שתים עשרה שאלות. שתי השאלות הראשונות מתייחסות לאמונות המורים בנוגע לסיבות שהם מייחסים להצלחות ולקשיים של בנים ובנות בהבנת רעיונות מתמטיים. בחלק אחר של השאלון תשעה היגדים שמתארים תכונות המשויכות לבנים ולבנות בהקשר של למידת מתמטיקה, והמורים נדרשים לדרג את ההיגדים מ־1 עד 5, וכן שאלה פתוחה בעניין אמונות המורים בנוגע לקריירה העתידית המתאימה לתלמידיהם ולתלמידותיהן. האוכלוסיה כללה 43 מורים ומורות למתמטיקה המלמדים בכיתות ג–ו בבתי ספר יסודיים בחברה הערבית בישראל. ניתוח הנתונים בשתי השאלות הראשונות עבור כל גורם שייחסו המורים להצלחת תלמידיהם או לקשיים בהבנת רעיון מתמטי מסוים, של הבנים המצליחים ביותר במתמטיקה ושל אלה הפחות מצליחים בַּמקצוע, ושל הבנות המצליחות ביותר במתמטיקה ושל אלה הפחות מצליחות במקצוע זה, נבדק מה מספר המורים שציינו אותו, כמה אחוזים הם מהווים מכלל המורים שהשתתפו. זאת כדי להשוות בין אמונות מורים בנוגע למתמטיקה ומגדר. עבור ההיגדים שמתארים תכונות בשאלון חושבו באמצעות התוכנה SPSS הממוצע, סטיית התקן ומבחן t של כל אחת מתשע התכונות הקשורות ללמידת מתמטיקה ומשויכות לבנים ולבנות על ידי המורים. נוסף על כך נעשה שימוש בשיטות לניתוח איכותני של תשובות המורים לשאלה הפתוחה בנוגע לקריירה העתידית המתאימה לתלמידיהם ולתלמידותיהן.

ממצאים

טבלה 1 ו-2 מציגות את אמונות מגדריות בקרב מורים ביחס לסיבות שהם מייחסים להצלחה או לקושי בהבנת רעיון מתמטי מסוים אצל הבנים והבנות המצליחים ביותר לעומת אלה הפחות מצליחים במתמטיקה.

טבלה 1

אמונות המורים לתלמידים המצליחים ביותר במתמטיקה

הגורם העיקרי להצלחת התלמיד/ה במתמטיקה			הגורם העיקרי לקושי בהבנת רעיון מתמטי מסוים		
גורם אפשרי	מספר בנים	מספר בנות	גורם אפשרי	מספר בנים	מספר בנות
יכולת	25 (58.1%)	22 (51.2%)	חוסר יכולת	4 (9.3%)	1(2.3%)
מאמץ	2 (4.7%)	4 (9.3%)	חוסר מאמץ	22 (51.2%)	19 (44.2%)
רצון ומוטיבציה פנימית	15 (34.9%)	17 (39.5%)	חוסר רצון ומוטיבציה פנימית	2 (4.7%)	6 (14%)
מזל	0 (0%)	0 (0%)	חוסר מזל	1 (2.3%)	0 (0%)
קלות המשימה	0 (0%)	0 (0%)	קושי המשימה	13 (30.2%)	16 (37.2%)
סיוע מהמורה	1 (2.3%)	0 (0%)	אין מספיק סיוע מהמורה	1 (2.3%)	1 (2.3%)
סיוע מאחרים	0 (0%)	0 (0%)	אין מספיק סיוע מאחרים	0 (0%)	0 (0%)

טבלה 2

אמונות מורים לתלמידים הפחות מצליחים במתמטיקה

הגורם העיקרי להבנת רעיון מתמטי מסוים			הגורם העיקרי לאי־הצלחת התלמיד/ה במתמטיקה		
גורם אפשרי	מספר בנים	מספר בנות	גורם אפשרי	מספר בנים	מספר בנות
יכולת	4 (9.3%)	2 (4.7%)	חוסר יכולת	21 (48.8%)	15 (34.9%)
מאמץ	17 (39.5%)	11 (25.6%)	חוסר מאמץ	11 (25.6%)	10 (23.3%)
רצון ומוטיבציה פנימית	5 (11.6%)	12 (27.9%)	חוסר רצון ומוטיבציה פנימית	9 (20.9%)	14 (32.6%)
מזל	2 (4.7%)	0 (0%)	חוסר מזל	0 (0%)	0 (0%)
קלות המשימה	5 (11.6%)	5 (11.6%)	קושי המשימה	0 (0%)	0 (0%)
סיוע מהמורה	5 (11.6%)	3 (7%)	אין מספיק סיוע מהמורה	0 (0%)	0 (0%)
סיוע מאחרים	5 (11.6%)	10 (23.3%)	אין מספיק סיוע מאחרים	2 (4.7%)	4 (9.3%)

ממצאי המחקר המרכזיים מראים כי בהתייחסות לתלמידים המצליחים ביותר במתמטיקה, המורים רואים ביכולת מצד אחד וברצון והמוטיבציה הפנימית מצד שני את שני הגורמים העיקריים להצלחתם של בנים ובנות במתמטיקה. הקושי בהבנת רעיון מתמטי, לעומת זאת, מיוחס יותר לחוסר מאמץ ולרמת הקושי של המשימה. המורים מאמינים גם שחוסר יכולת, חוסר מאמץ וחוסר רצון ומוטיבציה פנימית הם שלושת הגורמים העיקריים לאי הצלחה של בנים ובנות שפחות

מצליחים במתמטיקה. בנוגע להבנת רעיון מתמטי מסוים, המורים מאמינים שהבנים יכולים להבין אם ישקיעו מאמץ, ואילו הבנות יכולות להבין רעיון מתמטי בעזרת מאמץ, רצון ומוטיבציה פנימית ועזרה מאחרים. כלומר, חוסר היכולת אינו חוסם את הצלחתם של התלמידים הפחות מצליחים.

טבלה 3

התפלגות תשובותיהם של המורים בנוגע לתכונות רלוונטיות ללמידת מתמטיקה המשויכות לבנים ולבנות

משפט	בנים מצליחים ביותר במתמטיקה		בנות מצליחות ביותר במתמטיקה			
	ממוצע	סטיית תקן	ממוצע	סטיית תקן	t(42)	P
שָקט......פעיל בשיעורי מתמטיקה	4.302	1.059	4.186	1.239	0.468	0.641
לא תחרותי......תחרותי	4.442	0.881	4.442	0.854	0.000	1.000
בעל חשיבה לוגית נמוכה......גבוהה	4.349	0.897	4.558	0.548	-1.306	0.195
חסר ביטחון עצמי......בעל ביטחון עצמי גבוה במתמטיקה	4.442	1.007	4.452	0.705	-0.056	0.956
לעיתים רחוקות......תמיד מתנדב לענות על שאלות בכיתה	4.465	0.984	4.488	0.768	-0.122	0.903
צריך הרבה......לא צריך עזרה במתמטיקה	4.070	1.033	4.070	0.768	0.000	1.000
מוותר......מתמיד כאשר המשימה מאתגרת	4.186	1.029	4.465	0.592	-1.541	0.127
מכין......אף פעם אינו מכין שיעורי בית	4.535	0.935	4.721	0.766	-1.009	0.316
לא אוהב בכלל......אוהב מתמטיקה	4.558	0.796	4.744	0.492	-1.304	0.196

משפט	הבנים הפחות מצליחים במתמטיקה		הבנות הפחות מצליחות במתמטיקה			
	ממוצע	סטיית תקן	ממוצע	סטיית תקן	t(42)	P
שקט......פעיל בשיעורי מתמטיקה	2.233	1.088	2.163	0.949	0.317	0.752
לא תחרותי......תחרותי	1.907	0.996	2	0.926	-0.449	0.655
בעל חשיבה לוגית נמוכה......גבוהה	2.047	1.045	2.070	0.961	-0.107	0.915
חסר ביטחון עצמי......בעל ביטחון עצמי גבוה במתמטיקה	2.279	0.826	2.233	0.922	0.246	0.806
לעיתים רחוקות......תמיד מתנדב לענות על שאלות בכיתה	2.070	1.033	2.023	0.988	0.213	0.832
צריך הרבה......לא צריך עזרה במתמטיקה	1.767	0.812	1.860	0.990	-0.476	0.635
מוותר......מתמיד כאשר המשימה מאתגרת	1.953	1.022	2.023	1.035	-0.314	0.754
מכין......אף פעם אינו מכין שיעורי בית	2.442	1.161	2.488	1.121	-0.189	0.851
לא אוהב בכלל......אוהב מתמטיקה	2.349	0.973	2.605	0.821	-1.318	0.191

המורים מאמינים שהתכונות הבאות לידי ביטוי בלמידת מתמטיקה דומות בקרב הבנים והבנות המצליחים ביותר במתמטיקה, וכך גם בקרב אלה הפחות מצליחים בַּמקצוע. מכאן שהתכונות שייחסו המורים לתלמידיהם היו לפי רמת הישגים ולא לפי מגדר.

בחלק האחרון הנוגע לבחירת תחום הלימודים האקדמי העתידי שמתאים לבנים ולבנות, הממצאים מראים שהמורים מאמינים שלבנים ולבנות המצליחים ביותר במתמטיקה יכולות להתאים אותן קריירות עתידיות הקשורות למתמטיקה. בנוגע לתלמידים הפחות מצליחים במתמטיקה, המורים מאמינים שלבנים מתאימות קריירות עתידיות שונות מאלה של הבנות. השונוּת אינה מתייחסת לקשר של הקריירה למתמטיקה, אלא לתחומי עיסוק שונים.

דיון ומסקנות

הממצאים מראים שהמורים מאמינים שהבנים והבנות המצליחים ביותר במתמטיקה, מצליחים בעיקר בשל היכולת שלהם, ובשל הרצון והמוטיבציה הפנימית. בנוסף המורים מאמינים שקושי בהבנת רעיון מתמטי מסוים על ידי הבנים והבנות המצליחים ביותר במתמטיקה נובע – גם אצל הבנים וגם אצל הבנות – מחוסר מאמץ ומקושי המשימה. ממצא זה עומד בסתירה לאינדיקציות המצביעות על כך שמורים מעריכים באופן שונה את יכולות התלמידים והתלמידות שלהם, וזאת על רקע מגדרי (Tiedeman, 2000). בנוגע לתלמידים הפחות מצליחים במתמטיקה, ממצאי המחקר מראים שהסיבות שמורים מייחסים לאי ההצלחה של הבנים הפחות מצליחים במתמטיקה, דומות לסיבות שהם מייחסים

לבנות – בקרב שני המינים חוסר יכולת נחשב כגורם העיקרי לאי הצלחה. סיבות נוספות לאי הצלחה במתמטיקה הן חוסר מאמץ וחוסר רצון ומוטיבציה פנימית. לפי ממצאי המחקר הנוכחי, אמונות המורים בנוגע לסיבות שהם מייחסים להבנת רעיון מתמטי מסוים בקרב הבנים והבנות הפחות מצליחים במתמטיקה, דומות: גם אצל הבנים וגם אצל הבנות הסיבות הן מאמץ רצון ומוטיבציה פנימית ועזרה מאחרים. מכאן, שחוסר היכולת אינו חוסם את הצלחתם של התלמידים הפחות מצליחים. מתוצאות המחקר הנוכחי עולה, שבבחינת התכונות המשויכות על ידי מורים לבנים ולבנות בהקשר של למידת מתמטיקה, אין למורים תפיסה סטריאוטיפית בנוגע למאפייני התלמידים ולתכונותיהם הבאים לידי ביטוי בלמידת מתמטיקה. המורים מאמינים שהמאפיינים של הבנים ושל הבנות הבאים לידי ביטוי בלמידת מתמטיקה דומים למדי, והם אינם משייכים אף תכונה לבן או לבת באופן ספציפי. מתברר כי המורים ייחסו את התכונות המאפיינות בנים ובנות ובאות לידי ביטוי בלמידת מתמטיקה לפי רמת הישגים ולא לפי מגדר. כך ש-המורים מאמינים שאת התלמידים (בנים ובנות) המצליחים ביותר במתמטיקה מאפיינות תכונות מסוימות ואילו את התלמידים (בנים ובנות) הפחות מצליחים במתמטיקה מאפיינות תכונות מנוגדות. לפי תוצאות המחקר, המורים מאמינים כי אין הבדל בין מספר הבנים המתאים לקריירה עתידית שקשורה למתמטיקה ובין מספר הבנות. מכאן שהמצב שבו בנות, אף שהן מצליחות במתמטיקה, אינן בוחרות בקריירה בתחום זה נובע כנראה מגורמים אחרים חוץ מאמונות המורים.

רשימת מקורות

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers’ math anxiety affects girls’ math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5), 1860-1863.

Birenbaum, M., & Nasser, F. (2006). Ethnic and gender differences in Mathematics achievement and in dispositions towards the study of Mathematics. *Learning and Instruction*, *16*(1), 26-40.

Birenbaum, M., Nasser, F., & Tatsuoka, C. (2007). Effects of gender and ethnicity on fourth graders’ knowledge states in Mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(3), 301-319.

Else-Quest, N.M., Hyde, J. S., & Linn, M. C. (2010). Cross-national patterns of gender Mathematics: a meta-analysis. Psychological Bulletin, *136*(1), 103.

Ernest, J. B., Reinholz, D. L., & Shah, N. (2019). Hidden competence: women’s mathematical participation in public and private classroom spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(2), 153-172.

Forgasz, H. J., & Mittelberg, D. (2008). Israeli Jewish and Arab students’ gendering of mathematics. *ZDM*, *40*(4), 545-558.

Fuchs, H., Yanay, G., & Blass, N. (2018). Technological education: Trends and developments, 2006 to 2017. *State of the Nation Report: Society, Economy and Policy*, 211-242.

Lavy, V., & Sand, E. (2015). *On the origins of gender human capital gaps: Short and long term consequences of teachers’ stereotypical biases*. *Journal of Public Economics, 167*, 263-279.

Mittelberg, D., Rozner, O., & Forgasz, H. (2011). Mathematics and gender stereotypes in one Jewish and one Druze grade 5 classroom in Israel. *Education Research International*, 1-10.

Rapp, J. (2015). Gender gaps in Mathematics and language in Israel-what can be learned from the Israeli case. *National Authority for Measurement and Evaluation in Education (RAMA) Report. Ramat-Gan, Israel*.

Thompson, A. (1992). *Teachers’ beliefs and conceptions: a synthesis of research*. In: D. Grouws (d.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 146-217.

Tiedemann, J. (2002). Teachers' gender stereotypes as determinants of teacher perceptions in elementary school Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(1), 49-62.

מורים בחברה הערבית: פרדוקס השוויון המגדרי במתמטיקה

ג'והיינה עוואדה שחברי, אקדמיית אלקאסמי
לורי רובל, אוניברסיטת חיפה

מבוא ורקע תיאורטי

ההנחה שעושר מדינתי נמצא בקורלציה חיובית עם שוויוניות, ובמיוחד עם שוויון בייצוג נשים בתחומים פוליטיים וחברתיים, כולל מתמטיקה (Breda et al., 2020; Stoet & Geary, 2022). עם זאת, מדינות גבוהות בסולם עושר היחסי (כמו הולנד, שוודיה ופינלנד) מדורגות מהנמוכות ביותר מבחינת ייצוג נשים בהתמחויות בלימודי מקצועות עתירי מתמטיקה (Charles & Bradley, 2009). לעומת זאת, מדינות כמו איראן, ירדן, טורקיה, אשר נמצאות במחצית התחתונה בהתפלגות המדינות לפי עושר, נמצאות בין שיעורי הייצוג הגבוהים ביותר של נשים בלימודים ב-STEM. באופן דומה, למדינות המדורגות הגבוהות ביותר מבחינת מדדים של הזדמנויות פוליטיות וחברתיות לנשים, נצפה אי שוויון בשאיפה לקריירות בתחומי STEM בקרב תלמידי על-יסודי. בניגוד לזה, נצפה יותר שוויון בשאיפות במדינות שיש להן את המדדים הנמוכים ביותר בהזדמנויות לנשים (Stoet & Geary, 2022). תופעה זו מכונה פרדוקס שוויון מגדרי, בכך שהפערים סביב שוויון והשתתפות במתמטיקה נוטים להיות גדולים יותר במדינות אמידות יותר, שהן גם אלו שבהן לנשים ולנערות יש יותר הזדמנויות בתחומים חברתיים ופוליטיים (Eriksson et al., 2020; Stoet & Geary, 2022). את פרדוקס השוויון המגדרי ניתן לזהות גם בישראל, בכך שבנות בחברה הערבית משיגות יותר מבנים במבחנים ארציים ובינלאומיים במתמטיקה, והייצוג שלהן גובר על ייצוג הבנים במגמות מתמטיקה מתקדמת, פיזיקה ומדעי המחשב (Pinson et al., 2020; Rapp, 2015). בנוסף, תלמידי בתי ספר ערביים בישראל לא נוטים לראות מתמטיקה כתחום גברי (Forgasz & Mittelberg, 2008). ממצאים אלה הניכרים בחברה הערבית שנחשבת כחברה פטריארכלית (Birenbaum & Nasser, 2006), לא משתקפים בקרב הרוב הישראלי.

השערה פוטנציאלית להסברת הישגי הבנות בחברה הערבית, היא שמתמטיקה לא מוצבת מבחינה חברתית כתחום גברי, כפי שהיא מוצבת במקומות אחרים, כמו ארצות הברית ובאירופה. מיצוב המתמטיקה בחברה מושפע מגורמים שונים, אחד הגורמים הם המורים למתמטיקה. מורים למתמטיקה-אמונותיהם, מעשיהם, ציפיותיהם וכדומה- משתקפים באינטראקציה הכיתתית, דבר המתבטא בהישגי התלמידים (Reinholz & Shah, 2018). בנוסף, אמונותיהם וציפיותיהם של מורים מעצבים השאיפות של התלמידים, כולל בחירות על המשך לימודים אקדמיים ומקצועיות עתידיים. המחקר הנוכחי מעשיר הידע הדל לגבי אמונות של מורים למתמטיקה הקשורות למתמטיקה ומגדר בחברה הערבית בישראל.

שאלות המחקר: 1) באיזו מידה מורים המלמדים בבתי ספר לדוברי ערבית בישראל מצביעים כי (א) מתמטיקה דורשת יכולת מתמטית מולדת וכי (ב) לבנים יש יכולת מתמטית גבוהה יותר בהשוואה לבנות? 2) באיזו מידה אמונות אלו קשורות?

שיטה

משתתפי המחקר הם 205 מורים שגויסו בשיטות דגימת כדור שלג. כולם מלמדים בבתי ספר לדוברי ערבית בישראל. רובם מלמדים בבתי ספר המכונים בארץ "בתי ספר ערביים" (152,74%); חלקם מלמדים בבתי ספר בנגב (29,14%) או בבתי ספר דרוזים (24,12%) כמעט שני שליש מהמשתתפים הן נשים (131,63%). רוב המשתתפים (148,72%) מלמדים בבתי ספר תיכוניים, הם הורים (157,77%) ועם מגוון של שנות וותק.

כלי המחקר התבסס על השאלון של קופור- ג'נקטראק ועמיתיה (Copur-Genctruck et al., 2020) שכלל פריטים לגבי משתני רקע כמו: מגדר, הכשרה, וותק, סוג בית ספר. בנוסף, המשתתפים התבקשו לדרג חמישה היגדים בסולם של 7 נקודות [(1) לא מסכים בכלל ו- (7) מסכים מאוד]. שני היגדים מתייחסים ליכולת מתמטית כמולדת ((Mathematical Ability as Innate, [MAI]): "להיות תלמיד מעולה במתמטיקה דורש כישרון מיוחד שפשוט לא ניתן ללמד" ו"אם אתה רוצה להצליח במתמטיקה, עבודה קשה לבדה לא תשיג את זה; אתה צריך להיות בעל כישרון מולד". שלושה היגדים מתייחסים לבנים בהקשר ליכולת מתמטית ((Boys' Mathematical Ability, [BMA]): "למרות שזה לא איתי להגיד את זה, בנים לרוב טובים יותר במתמטיקה מבנות"; "למרות שיש יוצאים מן הכלל, בנים בדרך כלל חכמים יותר במתמטיקה מאשר בנות" ו"בנות לרוב צריכות לעבוד קשה יותר מבנים כדי להיות טובות במתמטיקה".

ניתוח הנתונים: ערכנו מבחן אלפא קרונבך לבדיקת מהימנות כעקיבות פנימית בין ההיגדים בשאלון. ביצענו סטטיסטיקה תיאורית, חישבנו התפלגות התשובות, ממוצעים ומתאמים.

ממצאים

הנתונים שנגזרו מהשאלון קובצו לשני מדדים, המדד הראשון מתייחס לממוצע שני הפריטים המתייחסים ליכולת מתמטית כמולדת (MAI, α = .821) ((Mathematical Ability as Innate,[MAI]). המדד השני ממוצע שלושת הפריטים המתייחסים ליכולת המתמטית של הבנים (Boys' Mathematical Ability, [BMA]). הממצאים מעידים שבממוצע המורים הסכימו עם תפיסת היכולת המתמטית כמולדת [M=4.476, SD=1.506]. לדוגמה, רק 17% מהמדגם לא הסכימו עם ההיגד ש"להיות תלמיד מעולה במתמטיקה דורש כישרון מיוחד שפשוט לא ניתן ללמד" (ראה טבלה 1). ביחס ליכולת הבנים המתמטית, המורים בממוצע לא הסכימו שבנים טובים יותר במתמטיקה [M= 3.543, SD=1.849] כאשר כ-48% לא הסכימו עם ההיגד "למרות שזה לא איתי להגיד את זה, בנים לרוב טובים יותר במתמטיקה מבנות". ממצאים אלה שונים ממצאיה של קופור- ג'נקטראק ועמיתיה (Copur-Genctruck et al., 2020) שנערך בארה"ב ודווח על [MAI, M=2.249, SD=1.098] ו- [BMA, M=1.853, SD=1.074] שבהן רוב המורים נטו בממוצע לא להסכים עם שתי תפיסות אלו.

טבלה 1: שכיחות התגובות של המשתתפים להיגדים

תפיסות	פריטים	אי הסכמה (1, 2, 3)	תגובות הניטרליות (4)	תגובות הסכמה (5, 6, 7)
היכולת המתמטית של הבנים Boys' Mathematical Ability, [BMA]	למרות שזה לא איתי להגיד את זה, בנים לרוב טובים יותר במתמטיקה מבנות.	98(47.8%)	27(13.2%)	80(39%)
	למרות שיש יוצאים מן הכלל, בנים בדרך כלל חכמים יותר במתמטיקה מאשר בנות.	95(46.3%)	22(10.7%)	88(43%)
	בנות לרוב צריכות לעבוד קשה יותר מבנים כדי להיות טובות במתמטיקה.	96(46.8%)	35(17.1%)	74(36.1%)

היכולת המתמטית כמולדת Mathematical Ability as Innate, [MAI]	להיות תלמיד מעולה במתמטיקה דורש כישרון מיוחד שפשוט לא ניתן ללמד.	35(17.1%)	48(23.4%)	122(59.5%)
	אם אתה רוצה להצליח במתמטיקה, עבודה קשה לבדה לא תשיג את זה; אתה צריך להיות בעל כישרון מולד.	67(32.7%)	38(18.5%)	100(48.8%)

במטרה לענות על שאלת המחקר השנייה, חישבנו את מתאם פירסון בין BMA ל-MAI, נמצא מתאם חיובי מתון שמובהק סטטיסטי ($r=0.273$, $p<.001$).יש קשר בין האופן שבו המשתתפים הגיבו להיגדים של BMA ולהיגדים של MAI: ככל שאדם הסכים יותר עם ההיגדים שהיכולת המתמטית היא מולדת, כך הם הסכימו יותר עם ההיגדים שהיכולת המתמטית נמצאת יותר בקרב בנים. ממצא זה דומה לתוצאה של קופור- ג'נקטראק ועמיתיה (Copur-Gencturk et al., 2020), כשהמתאם שלהם מעט חזק יותר ($r=0.414$, $p<.001$). לפיכך, בשני הקשרים, הסכמה עם התפיסה כי יכולת מתמטית היא מולדת קשורה להסכמה עם התפיסה שבנים מוכשרים יותר מבנות במתמטיקה. עם זאת, בעוד שהמורים בארצות הברית לא הסכימו בתוקף עם שתי התפיסות הללו, המורים בבתי הספר לדוברי ערבית במחקר הנוכחי בממוצע הסכימו באופן מתון עם תפיסת המתמטיקה כמולדת ובמידה מועטה לא הסכימו בממוצע עם התפיסה שבנים מוכשרים יותר מבנות במתמטיקה.

דיון

ממצאי המחקר מעידים שמורים בבתי ספר לדוברי ערבית בישראל נוטים בממוצע להסכים באופן מתון עם ההיגדים שרואים ביכולת מתמטית כמולדת, ונוטים במידה מועטה לא להסכים בממוצע עם התפיסה שלבנים יש יכולת מתמטית גבוהה [M= 3.543, SD=1.849]. ממצאים אלו מאוששים את ההשערה הפוטנציאלית לגבי היות תחום המתמטיקה אינו מוצב כגברי בחברה הערבית מנקודת מבטם של מורים למתמטיקה. חשוב לציין, שההבדל בין הממצאים במחקר הנוכחי לממצאי מחקרם של קופור-ג'נקטראק ועמיתיה (Copur-Gencturk et al., 2020), המראים ממוצע גבוה יותר בקרב מורים בחברה הערבית לגבי התפיסה שלבנים יכולת מתמטית יותר מבנות, יכול להיות כתוצאה שמורים בארצות הברית הושפעו מהטיית הנורמות החברתיות לגבי שוויוניות מגדרית, לעומתם המשתתפים המחקר הנוכחי אולי לא הושפעו להגיב לשאלון בדרכים מסוימות. בנוסף, תגובות המורים לשאלון אינן בהכרח מנבאות את אופן ההוראה וגם אינן מנבאות בהכרח את דעותיהם של התלמידים. לנוכח ממצאים המחקר הנוכחי, ההישגים של בנות במתמטיקה יכולים להיות מוסברים על ידי מגמה של השקפות שוויוניות בקרב מורים למתמטיקה. ההסבר הזה מתווסף לאחד ההסברים שהוצעו במחקרים קודמים ((Birenbaum & Nasser, 2006; Pinson et al., 2020 הקשור לאופי החברתי של החברה הערבית כחברה פטריארכלית הוא דווקא שגורם לבנות להיות טובות יותר במתמטיקה. אנו מתעתדות להמשיך בחקר ובלמידת הצלחת הבנות מאספקטים נוספים.

רשימת מקורות

Birenbaum, M., & Nasser, F. (2006). Ethnic and gender differences in mathematics achievement and in dispositions towards the study of mathematics. *Learning and Instruction, 16*(1), 26-40.

Breda, T., Jouini, E., Napp, C., & Thebault, G. (2020). Gender stereo-types can explain the gender-equality paradox. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 117*(49), 31063–31069. https://doi.org/10.1073/pnas.2008704117

Charles, M., & Bradley, K. (2009). Indulging our gendered selves? Sex segregation by field of study in 44 countries. *American Journal of Sociology, 114*(4), 924-976.

Copur-Gencturk, Y., Thacker, I., & Quinn, D. (2020). K-8 teachers' overall and gender-specific beliefs about mathematical aptitude. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-19.

Dajani, R., Dhawan, S., & Awad, S. M. (2020). The increasing prevalence of girls in STEM education in the Arab world. *Sociology of Islam, 8*(2), 159–174.

Eriksson, K., Björnstjerna, M., & Vartanova, I. (2020). The relation between gender egalitarian values and gender differences in academic achievement. *Frontiers in Psychology*, *11*, 1–14.

Forgasz, H., & Mittelberg, D. (2008). Israeli Jewish and Arab students' gendering of mathematics. *ZDM Mathematics Education, 40*(4), 545–558.

Pinson, H., Feniger, Y., & Barak, Y. (2020). Explaining a reverse gender gap in advanced physics and computer science course-taking: An exploratory case study comparing Hebrew-speaking and Arabic-speaking high schools in Israel. *Journal of Research in Science Teaching, 57*(8), 1177–1198.

Rapp, J. (2015). Gender gaps in mathematics and language in Israel– What can be learned from the Israeli case? Working paper, *National Authority for Measurement and Evaluation in Education*. www.cms.education.gov.il. Accessed 9 September, 2022.

Reinholz, D. & N. Shah. (2018). Equity analytics: A methodological approach for quantifying participation patterns in mathematics classroom discourse. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(2), 140-177.

Stoet, G., & Geary, D. C. (2022). Sex differences in adolescents' occupational aspirations: Variations across time and place. *Plos one, 17*(1)

אפיון גישות הוראה של מושג הנגזרת בעזרת מודל מטרות-פעולות: השוואה בין גישות הוראה של שתי מורות

אמירה עאבד, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה
אנטולי קורופטוב, המרכז האקדמי לוינסקי, וינגייט

מבוא ורקע תאורטי

מושג הנגזרת הוא מושג בסיסי בלימודי אנליזה בתיכון, והבנתו היא תנאי מקדים ללימוד של מושגים אחרים ברמה של תואר ראשון. כמו כן הוא מופיע ברבים מקורסי המתמטיקה באוניברסיטה. עם זאת, תלמידים רבים מתקשים בהבנת המושג (Greefrath et al., 2016), ובעוד שמחקרים רבים עוסקים בתפיסות של תלמידים את מושג הנגזרת, רק מעטים מתמקדים בהוראתו. המחקר הנוכחי ניגש לנושא זה, ומתמקד באפיון גישות הוראה של מושג הנגזרת.

בשלב קודם של המחקר נבנה מודל ראשוני שניתן לו השם 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת'. מטרות ההוראה משפיעות על תכנון ההוראה של המורה, ולכן הגדרתן היא שלב ראשון והכרחי בתהליך ההוראה. גם הפעולות להשגת המטרות מרמזות על גישות ההוראה של המורה (Westbroek et al., 2017). המודל נבנה בצורה תאורטית ואמפירית על סמך ראיונות עם מורים מובילים למתמטיקה, והוא נועד להציע המשגה, שפה וכלים לדיון במטרות ובפעולות של מורים למתמטיקה ביחס להוראת מושג הנגזרת, לערוך השוואה בין גישות הוראה של מורים ולהעלות השערות ביחס להזדמנויות הלמידה הניתנות לתלמידים בכל גישה. במאמר זה נציג גישות הוראה למושג הנגזרת של שתי מורות. בעזרת ההשוואה בין שתי גישות ההוראה השונות של המורות, שזוהו באמצעות השימוש בו, נדגים את שימושיות המודל.

המודל 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת'

המודל 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת' נבנה על סמך ממצאים שעלו בראיונות אישיים חצי מובנים שנערכו עם עשרה מורים למתמטיקה המלמדים אנליזה בכיתה י' ברמת 5 יחידות לימוד. כל ריאיון נמשך 90–120 דקות וכלל ארבע שאלות עיקריות שבעזרתן ביקשנו ללמוד על מטרותיהם של המורים בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת ועל הפעולות שמשמשות אותם כדי להשיגן. ארבע השאלות התמקדו באסטרטגיות ההוראה של המורה בעת הצגת מושג הנגזרת, בחומרי ההוראה והמשימות שבהם משתמשים המורים בעת הצגת המושג, בשלבי ההוראה הבאים לאחר המבוא למושג הנגזרת והקשר שלהם למבוא ובציפיות המורים מתלמידיהם ודרכי המענה שלהם לחשיבה וללמידה של התלמידים. המודל 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת' מתייחס לגישות הוראה של מורים ביחס להוראה של מושג הנגזרת בשני היבטים: מטרות ההוראה והפעולות להשגת מטרות אלו. המודל בצורתו המוגמרת נבנה בתהליך שכלל שלושה שלבים, ובסופם זוהו המטרות והפעולות להשגתן.

שלב א': ניתוח מכוון שהבחין בין מטרות ההוראה של המורה לבין הפעולות להשגת מטרות אלו. ההבחנה התבססה על ההגדרה של מטרות ופעולות, כפי שמופיעה בספרות.

שלב ב': ניתוח מכוון של מטרות ההוראה באמצעות שימוש במודל 'הפוטנציאל המתמטי' (Leikin, 2009) וניתוח מכוון של פעולות ההוראה באמצעות שימוש במודל 'שלשת ההוראה' (Jaworski, 1992; Potari & Jaworski, 2002).

שלב ג': ניתוח אינדוקטיבי של הראיונות כדי לזהות תת-קטגוריות הקשורות למטרות ההוראה ולפעולות ההוראה.

'מטרות ההוראה' – זוהו מטרות משלושה סוגים: (1) מטרות המכוונות **לפיתוח היכולות המתמטיות** של התלמידים הקשורות ללמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה פיתוח דימוי למושג הנגזרת; (2) מטרות המכוונות ל**הזדמנויות למידה** לתלמידים במהלך ההוראה והלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה: בניית תשתית מתמטית חזקה שתאפשר לתלמידים להעמיק בלמידה ולהתקדם

בה; (3) מטרות שייעודן **פיתוח גורמים רגשיים** של התלמידים כלפי ההוראה והלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה פיתוח עניין, הנאה והגברת המוטיבציה ללמידה בקרב התלמידים.
'פעולות להשגת המטרות' – זוהו פעולות הקשורות לשלוש קטגוריות עיקריות: (1) פעולות הקשורות **לאתגר המתמטי** בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה יצירת דילמות ובניית הצורך בנגזרת ככלי חדש; (2) פעולות הקשורות **לרגישות לתלמידים** בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה יצירת הקשר בהוראה של מושג הנגזרת עם חוויות חיוביות קודמות; (3) פעולות הקשורות **לניהול הלמידה** בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת, לדוגמה יצירת אווירה בטוחה ונעימה. פירוט נוסף על המודל ועל תהליך בנייתו וכן המחשת השימוש בו לאפיון גישות הוראה של מורים יוצגו בכנס.
מלבד המטרות והפעולות שזוהו בראיונות נמצא כי כל המורים השתמשו ברצף הוראה דומה של מושג הנגזרת, הכולל שלושה שלבים: (1) 'לפני ההגדרה הפורמלית' של הנגזרת, המתייחס להוראה עד להגעה להגדרה פורמלית של נגזרת לפי גבול מנת ההפרשים; (2) 'ההגדרה הפורמלית', המתייחס להצגת ההגדרה הפורמלית של הנגזרת וההגעה לחוקי הגזירה; (3) 'אחרי ההגדרה הפורמלית', המתייחס ליישום מושג הנגזרת בחקירת פונקציות ובמציאת משוואת משיק. נשתמש ברצף ההוראה הנ"ל בתיאור הממצאים בהמשך.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר, כלי המחקר, איסוף נתונים וניתוח נתונים

במחקר מקדים ניתחנו ראיונות אישיים חצי מובנים שנערכו עם עשרה מורים מובילים למתמטיקה המלמדים אנליזה בכיתה י' ברמת 5 יחידות לימוד, ועל בסיס זאת בנינו את מודל 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת'. במחקר הנוכחי השתמשנו במודל ככלי לניתוח שניים מבין הראיונות הללו במטרה לערוך השוואה בין שתי גישות הוראה שונות. הריאיון האחד הוא של המורה יסמין – מורה למתמטיקה עם 30 שנות ותק ותואר שלישי בחינוך מתמטי, ולצד הוראת המתמטיקה בבית ספר היא גם שותפה למחקרים בחינוך מתמטי. הריאיון השני הוא עם המורה עדן – מורה למתמטיקה עם 20 שנות ותק ודוקטורנטית בחוג לחינוך מתמטי. להלן נצביע על שוני ודמיון בין שתי גישות ההוראה, בהתאם לרצף הוראת המושג אצל כל מורה.

ממצאים

ניתוח הראיונות עם יסמין ועדן העלה נקודות דמיון ושוני בין גישות ההוראה שלהן. להלן מתואר חלק מהממצאים על פי שלושת שלבי רצף ההוראה שנמצאו בראיונות.
שלב א: 'לפני ההגדרה הפורמלית'. בשלב זה נמצא כי לשתי המורות יש מטרה משותפת, והיא *'פיתוח הבנה קונספטואלית של המושג והקשר שלה עם הבנה אינסטרומנטלית (פרוצדורלית) של המושג'* [G1], המשתייכת לקטגוריה 'פיתוח היכולות המתמטיות' במודל. כדי להשיג מטרה זו שתי המורות משתמשות בפעולות הקשורות ל'אתגר מתמטי': *'שימוש בייצוג ויזואלי'* [A1] ו*'שימוש במושגים מ'קדם אנליזה' המהווים בסיס להצגת* הנגזרת' [A2]. יסמין משתמשת בפעולה נוספת – *'יצירת דילמות ובניית הצורך בנגזרת ככלי חדש'* [A3], הנכללת גם היא בקטגוריה 'אתגר מתמטי' במודל. להלן ציטוטים משני הראיונות המצביעים על המטרה המשותפת [G1] ועל הדמיון והשוני בפעולות הננקטות להשגת מטרה זו [A1, A2, A3].

> **עדן:** ״קודם כול אני מלמדת מבוא לאנליזה. מציירת גרפים למיניהם ומראה חיוביות ושליליות, זוגיות ואי-זוגיות, עלייה וירידה וכו׳ [A1, A2]. ככה אני מקשרת את התלמידים לידע שרכשו מכיתה ט׳, וגם מפתחת את החשיבה שלהם לאפיקים שונים. וזה עוזר להם מאוד בהמשך בשאלות עם סעיפי חשיבה [G1]״.
>
> **יסמין:** ״אני קודם כול בונה את הצורך [A3]. כי אם אני אגיד לתלמידים שהנגזרת היא א׳, ב׳, ג׳ אז זה כמו סינית בשבילם [G1]. מה שאני מנסה להציג להם זה הקושי בשרטוט גרף. פחות או יותר הם ידעו איך לסרטט את הגרף [A1] לפי הידע שיש להם מחטיבת ביניים [A2], אבל אם אני נותנת להם פונקציה ממעלה שלישית שלא מפורקת לגורמים אין להם מושג איך לשרטט את הגרף״.

בריאיון עם עדן לא זוהו מטרות ופעולות נוספות ביחס לשלב א' ברצף ההוראה. לעומת זאת, אצל יסמין זוהו שתי מטרות נוספות. מטרה אחת היא *'פיתוח עניין, הנאה והגברת המוטיבציה ללמידה בקרב התלמידים'*, המשתייכת לקטגוריה 'התחשבות בגורמים רגשיים'. כדי להשיג מטרה זו היא נעזרה ב*'שימוש במשחקים'*, פעולה המשתייכת לקטגוריה 'רגישות לתלמידים'. מטרה נוספת היא

'מתן הזדמנות לכולם לחשיבה ביקורתית', המשתייכת לקטגוריה של 'מתן הזדמנויות למידה' במודל. ליישום מטרה זו יסמין משתמשת בשתי פעולות המשתייכות לקטגוריה של 'ניהול למידה': *'מתן תפקיד אקטיבי לתלמידים בתהליך בניית הידע'* ו*'שימוש בדיון כיתתי'*.

אפשר להסיק שלשתי המורות חשוב שבשלב א' ברצף ההוראה שהתלמידים יפתחו הבנה קונספטואלית של מושג הנגזרת. עם זאת, מבחינת יסמין שלב זה הוא מרכזי וחשוב לה שהתלמידים יהיו שותפים בתהליך בניית הידע, ולעומת זאת מבחינת עדן שלב ההקדמה הוא שלב לא מרכזי, אלא שלב של חזרה על נושא קדם-אנליזה שהתלמידים למדו בכיתה ט'. לכן יסמין יוצרת עניין ובונה את הצורך בנגזרת, ואילו עדן לא מקדישה לכך זמן רב ועוברת מהר לשלב ב', שלב ההגדרה הפורמלית. להלן ציטוטים מהראיונות עימן הממחישים זאת.

עדן: ״קודם כול אני מלמדת מבוא לאנליזה, **ודי מהר אני עוברת להגדרה הפורמלית של הנגזרת לפי גבול מנת ההפרשים**״.
יסמין: ״אני קודם כול בונה את הצורך ואני משקיעה הרבה מאוד זמן ביצירת צורך. **זאת הקדמה שלוקחת שני שיעורים כפולים.** אז אנחנו יכולים לצאת לדרך של חיפוש הנגזרת״.

שלב ב: 'ההגדרה הפורמלית'. בשלב זה נמצא כי ליסמין יש שתי מטרות מרכזיות: *'פיתוח הבנה קונספטואלית של המושג או הקשר שלה עם הבנה אינסטרומנטלית (פרוצדורלית) של המושג'*, המשתייכת לקטגוריה 'פיתוח יכולות מתמטיות', והמטרה *'בניית תשתית מתמטית חזקה שתאפשר לתלמידים להעמיק ולהתקדם בלמידה בהמשך'*, המשתייכת לקטגוריה 'הזדמנויות למידה'. כדי להשיג מטרות אלו היא משתמשת בשתי פעולות: *'שימוש בדיון כיתתי'*, המשתייכת לקטגוריה 'ניהול למידה', ו*'חשיפת התלמידים למושגים ממתמטיקה מתקדמת הקשורים לנגזרת ושהתלמידים צפויים להיתקל בהם באקדמיה'*, המשתייכת לקטגוריה 'רגישות לתלמידים'.

אצל עדן נמצאו שלוש מטרות: *'הקלה על התסכול והחרדה במפגש עם מושג הנגזרת'* ו*'פיתוח עניין, הנאה והגברת המוטיבציה ללמידה בקרב התלמידים'*, המשתייכות לקטגוריה 'התחשבות בגורמים רגשיים', ו*'מתן מענה לתלמידים המתקשים בהבנת ההגדרה הפורמלית של הנגזרת'*, המשתייכת לקטגוריה 'מתן הזדמנויות למידה'. לשם השגתן היא משתמשת בשלוש פעולות: *'חשיפת התלמידים לסיפורים רלוונטיים מחוץ למתמטיקה'* ו*'התייחסות לקשיים אפשריים ולשגיאות'*, המשתייכות לקטגוריה 'רגישות לתלמידים', ו*'יצירת אווירה בטוחה ונעימה'*, המשתייכת לקטגוריה 'ניהול למידה'. אפשר להסיק שהיא מודעת לכך שהתלמידים מתקשים להבין את המושג לפי ההגדרה הפורמלית שלו, ולכן המניע המוביל בהוראתה בשלב ב' ברצף ההוראה הוא ההתחשבות ברגשות התלמידים. לכן היא גם לא ממהרת בשלב זה ומשתמשת בפעולה 'חלוקת ההוראה של מושג הנגזרת לכמה שיעורים'. לעומת זאת, מבחינת המורה יסמין שלב זה הוא שלב משני בלבד, שבו התלמידים לא נדרשים להבין את מושג הגבול.

שלב ג: 'אחרי ההגדרה הפורמלית'. נמצא כי לשתי המורות יש שתי מטרות עיקריות זהות, אשר שתיהן משתייכות לקטגוריה 'פיתוח יכולות מתמטיות'. המטרה הראשונה היא *'פיתוח יכולת יישום/מיומנות שימוש'*, וכדי להשיגה הן משתמשות בשתי פעולות דומות: *'תרגול של גזירת פונקציות פולינום בעבודה אישית'* ו*'שימוש בנגזרת ככלי לחישוב שיפוע\משוואת המשיק'*. יסמין משתמשת בפעולה נוספת – *'שימוש בנגזרת ככלי לחקירת פונקציה'*. שלוש הפעולות האלה משתייכות לקטגוריה 'אתגר מתמטי'. מטרה שנייה היא *'פיתוח הבנה קונספטואלית של המושג או הקשר שלה עם הבנה אינסטרומנטלית (פרוצדורלית) של המושג'*. כדי להשיגה שתיהן משתמשות בפעולה *'חזרה על הגדרת הנגזרת באופן ספירלי בכל פעם שהתלמידים פוגשים משפחת פונקציות חדשה'*, המשתייכת גם היא לקטגוריה 'אתגר מתמטי'.

ליסמין יש מטרה נוספת – *'פיתוח גישות אלטרנטיביות לעיסוק בנגזרת – גישה נקודתית (מקומית) וגישה גלובלית'*, וכדי להשיגה היא משתמשת בפעולה *'שימוש בנגזרת ככלי לחישוב שיפוע\משוואת המשיק'*. גם מטרה זו ופעולה זו משתייכות לקטגוריות שצוינו לעיל. אפשר להסיק מכך שבשלב האחרון להוראת מושג הנגזרת חשוב לשתי המורות לפתח את היכולות והרגלי העבודה של התלמידים בלמידת מושג הנגזרת. לכן שתיהן משתמשות בפעולות המכוונות לקידום הלמידה, להעמקה, להנמקה ולהמחשה של מושג הנגזרת. לפי המודל, פעולות אלו מזמנות לתלמידים אתגרים ברי-השגה, מעודדות הבנה קונספטואלית ומקשרות את ההבנה לידע פרוצדורלי הקשור במושג הנגזרת.

מטרה שלישית של שתי המורות היא *'פיתוח דימוי למושג הנגזרת'*, המשתייכת לקטגוריה *'פיתוח יכולות מתמטיות'*. הציטוטים להלן מהראיונות עימן מלמדים שעדן מבקשת לפתח בקרב תלמידיה דימוי של **שיפוע לנגזרת** ויסמין מבקשת לפתח בקרב תלמידיה דימוי של **פונקציה לנגזרת**.

יסמין: "אחרי הצגת הרעיון הם צריכים לרכוש ניסיון בשימוש מועיל של פונקציית הנגזרת. זאת אומרת שהפעולה של הגזירה צריכה לשרת אותם כדי לממש את המטרות שהציבו בהתחלה. כמו לדעת לשרטט גרף של פונקציה".

עדן: "ואחרי כשמדברים על משיקים כל הזמן אני מנדנדת להם בראש שערך הנגזרת בנקודה הוא שיפוע המשיק בנקודה ואז עם המשמעות הזו אנו עוברים לנקודות קיצון".

דיון

המודל 'מטרות-פעולות בהוראה של מושג הנגזרת' שנבנה במסגרת המחקר המקדים שימש במאמר זה ככלי לניתוח ראיונות עם שתי מורות. הדגמנו את שימושיות המודל בעזרת ההשוואה בין גישות ההוראה של המורות בשלושת שלבי רצף הוראת מושג הנגזרת. בשלב הראשון (לפני ההגדרה הפורמלית) ובשלב השני (ההגדרה הפורמלית) נמצא הבדל בין שתי המורות בחשיבות שהן מייחסות לכל שלב ברצף ההוראה, ובהתאם לזמן שהן מקדישות לכל שלב. מבחינת המורה יסמין השלב הראשון הוא שלב חשוב ביותר ברצף ההוראה, ולכן היא מקדישה לו זמן רב, ומבחינת המורה עדן זהו שלב משני בחשיבותו. בשפת המודל מצאנו שלשתיהן היה חשוב שהתלמידים יפתחו הבנה קונספטואלית של המושג, אבל הן השתמשו בפעולות שונות לשם כך.

השלב השני ברצף ההוראה נחשב לשלב מרכזי בהוראה של עדן, ולכן היא מקדישה לו זמן רב ומתחשבת ברגשות התלמידים בגלל הקושי הטמון בהגדרה הפורמלית. לעומת זאת, מבחינת יסמין זהו שלב משני בחשיבותו והיא סבורה שהתלמידים לא חייבים להבין את מושג הנגזרת כגבול מנת ההפרשים. בשלב השלישי והאחרון ברצף הוראת מושג הנגזרת (אחרי ההגדרה הפורמלית) כל מורה בחרה לפתח יכולות יישום ומיומנויות שימוש למושג דרך פעולות שונות. עדן רוצה שהתלמידים שלה ישתמשו בנגזרת כדי למצוא את משוואת המשיק בנקודה, והיא מבקשת לפתח בקרב תלמידיה דימוי של שיפוע לנגזרת. יסמין רוצה לחזור לנקודת ההתחלה – היא רוצה שהתלמידים ישתמשו בנגזרת ככלי לשרטוט גרף של פונקציה, אשר בהתחלה לא ידעו איך לשרטט אותו, ולכן היא מבקשת לפתח בקרב תלמידיה דימוי של פונקציה לנגזרת.

ההבדל בין שתי הגישות מעלה השערות ביחס להזדמנויות הלמידה הניתנות לתלמידים בכל גישה. למשל, הדימויים השונים למושג הנגזרת ששתי המורות מבקשות לפתח והפעולות להשגתן מציעות לתלמידיהם דרכי הבנה והתמודדות שונות עם המושג (Witzke & Spies, 2016).

רשימת מקורות

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). Aspects and "Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 99–129.

Jaworski, B.(1992). Mathematics teaching: What Is It? *For the Learning of Mathematics*, *12*(1),8–14.

Leikin, R. (2005). Teachers' learning in teaching: Developing teachers' mathematical knowledge through instructional interactions. Paper presented at the *15th ICMI Study: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 383–409). Sense Publishers.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(4), 351–380.

Westbroek, H., Janssen, F., & Doyle, W. (2017). Perfectly reasonable in a practical world: Understanding chemistry teacher responses to a change proposal. *Research in Science Education*, *47*(6), 1403–1423.

Witzke, I., & Spies, S. (2016). Domain-specific beliefs of school calculus. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 131–161.

טיפות הבנת מושגית בגיאומטריה בקרב מורים המתכשרים להוראת גיאומטריה בכיתות א-ב בשימוש באירועים מתמטים המדגישים המעברים בין דימוי מושג להגדרה: המקרה של האלכסון

הודא שאיב, מכללת אלקאסמי
ג'והיינה עוואדה-שחברי, מכללת אלקאסמי

מבוא ורקע תיאורטי

ממצאי מחקרים מראים שלמורים המלמדים או המתעתדים ללמד חשבון בכיתות א'- ב' קיים קשיים בהבנת מושגים מתמטיים ובמיוחד מושגים גיאומטריים בסיסיים (Shahbari, 2022). מכיוון שידע מורים משפיע על הישגי תלמידיהם בגיל צעיר (Boonen et al., 2014), הקושי גם משתקף בקרב תלמידים בבתי ספר יסודיים (למשל, Koçak et al., 2017). אחד המרכיבים באמצעותו ניתן להבין את ההמשגות המתמטיות היא הבנת הגדרות מתמטיות.

הגדרה מתמטית כוללת תיאור מילולי של המושג, והוא אוסף מילים שמטרתם לאפיין את המושג, תיאור זה יכול להיות פורמאלי או אישי והוא נבנה על ידי התלמיד, הגדרת המושג האישית היא דינמית ויכולה להשתנות. הגדרה מתמטית מאפשרת שיח מתמטי ותקשורת של רעיונות מתמטיים, על ידי תיאור מדויק ויעיל של המושגים, כזה שמאפשר אבחנה בין המושג המוגדר לבין מושגים אחרים הדומים לו (De Villiers et al., 2009). להגדרה מתמטית מספר מאפיינים חלקם הכרחיים ונובעים מהצורך הלוגי של המתמטיקה, כמו: 1) דיוק 2) היררכיה 3) שקילות 4) עקביות 5) מינימליות 6) אלגנטיות שנקבעו על-ידי חוקרים בנושא ההגדרות (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003; Vinner, 1991;). מרכיב נוסף החשוב גם הוא בהבנה מושגית הוא דימוי המושג, שמורכב מסך כל המבנים הקוגניטיביים, התמונות המנטאליות, התכונות והתהליכים הקשורים בתודעתו של הלומד למושג. כך ששליטה במושג נרכשת כאשר למושג נבנה דימוי מושג התואם את הגדרת המושג (Tall & Vinner, 1981). דימוי מושג הוא אינדיבידואלי ויכול להשתנות גם אצל אותו אדם בסיטואציות שונות. בשל אופיו הסובייקטיבי ייתכן שדימוי המושג לא יהיה תואם את הגדרת המושג (Vinner, 1991).

הגדרת מושג שנלמדת בעל פה ואינה מלווה במשמעות עבור הלומד איננה מאפשרת הבנה מושגית. התהליך הרצוי, הוא שדימוי המושג יהיה נשלט על ידי ההגדרה המתמטית של המושג (Vinner, 1991). לכן הבנת המושג מתבססת על התנסות הלומד עם המושג ועם ייצוגיו השונים, או בתמונה המנטאלית שהוא יוצר לגביו יחד עם ידיעת ההגדרה של המושג. כלומר, על-מנת להבין מושג מתמטי מסוים, צריך להתייחס למרכיבים הבאים: (1) דוגמאות ואי-דוגמאות המאפשרות הבנה ראשונית של המושג; (2) ההגדרות של המושג והוכחת השקילות שלהן; (3) מספר ייצוגים של המושג; ו-(4) עיסוק בסיטואציות העוסקות במושג ומאפשרות שימור משמעותו (Buffet-Ouvrier, 2006). פעילויות מתמטיות המעמידות את התלמידים בפני קונפליקט שיכול להיפתר על ידי הגדרה מתמטית מדויקת נחשבת לפעילות ממולצת. בדרך זו נעשים התלמידים מודעים למאפיין הדיוק של ההגדרה ולחשיבותה ככלי לתקשורת מתמטית אפקטיבית. ווינר (Vinner, 1991) מציע פעילויות אשר ישכנעו את הלומדים בנחיצות ההגדרה המתמטית כקריטריון אולטימטיבי בפעילויות מתמטיות שונות. לנוכח הדברים לעיל, יש חשיבות רבה לטפח את הבנת מושגים בסיסיים של המורים העתידיים במיוחד לגבי הגדרה מתמטית. אחד הכלים החשובים שנעשה בהם שימוש בפיתוח ידע במהלך הכשרת מורים הוא השימוש באירועים מתמטיים מבוססי שיח טיעוני (Tirosh et al., 2019).

המחקר הנוכחי יתמקד במושג האלכסון שנחשב למושג מרכזי בגיאומטריה ועל אף זה יש קושי בתפיסתו. שאלות המחקר הן:

1. האם מורים המתכשרים להוראת חשבון בכיתות א'-ב' מצליחם לתאם בין הגדרה פורמאלית של אלכסון לבין דוגמאות לא אב טיפוסיות של אלכסונים?
2. מה מאפיין תהליך המעבר בין דימוי המושג של האלכסון לבין הגדרתו בקרב מורים המתכשרים להוראת חשבון בכיתות א'-ב' במהלך התמודדותם בניתוח אירועים מבוסס שיח טיעוני בנושא אלכסונים.

שיטה

המחקר נערך במסגרת קורס להוראת גאומטריה המיועד לסטודנטים במסלול הגיל הרך המרחיבות את הסמכתן להוראת חשבון בכיתות א'-ב'. הקורס מתבסס על טיפוח הבנת ההגדרות המתמטיות דרך שימוש באירועים מתמטיים מבוססי שיח טיעוני. במחקר הנוכחי אנו נתמקד במפגש שדן באלכסונים במצולעים. במחקר השתתפו 23 סטודנטים אשר מרחיבים את הסמכתם להוראה בכיתות א'-ב'. התחילת המחקר המשתתפים נדרשו לענות על שאלון מקדים, אחר כך הם התמודדו בניתוח אירועים מתמטיים ובתם זו נדרשו לחבר הגדרה לאלכסון. כלומר הנתונים נאספו משלושה מקורות 1) שאלון מקדים, הכולל שני אירועים בנושא האלכסון (ראה טבלה 1) האירועים נבנו ע"י החוקרת הראשונה וגם התבסס על הספרות המחקרית בנושא (כמו, כהן, 2020). לכל אירוע המשתתפים נדרשו לקרוא ולהתייחס לתגובת התלמיד המתואר באירוע. 2) תצפיות: הדיונים שהתנהלו בכיתת המליאה תועדו באמצעות וידאו, וההקלטות תמללו מילה במילה ע"י החוקרת הראשונה. 3) הגדרות המשתתפים לאלכסון.

ניתוח נתונים הנגזרים מהשאלון המקדים נותחו בשתי דרכים: א) חושבו התפלגות התשובות של המשתתפים אם הבחירה בקטע היא אלכסון או לא ב) תשובות המשתתפים לנכונות ההגדרה קודדו לשתי קטיגוריות עיקריות, הגדרה מספיקה והגדרה חסרה שצריכה הרחבה. את הקטגוריה האחרונה מויינות הצעות המשתתפים בהתבסס על ניתוח תוכן. ניתוח הנתונים הנגזרים מהתצפיות: התבסס על צפייה בכל דיוני המליאה שהתרחשו בכיתה. נבנה יומן טיעונים, תוך הדגשת הטיעונים שבהם המשתתפים מסיקים בהם מסקנות. מסקנות אלה סומנו, אוספו, ואורגנו על-פי מרכיבי מודל הטיעון של טולמין (Toulmin, 1969): נתונים, טענה, הצדקה, תימוכין, התנגדות והסתייגות. ההגדרות שחברו המשתתפים בתום ההתמודדות באירועים המתמטיים נותחו בהתבסס על ניתוח תוכן.

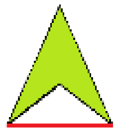
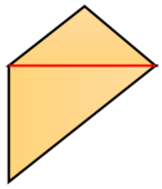
ממצאים מרכזיים

הממצאים הנגזרים מהשאלון המקדים מצביעים שחלק מהמשתתפים איננו יכול לזהות את האלכסון, בנוסף גם מאלה המצליחים לזהות את האלכסון עדיין לא מצליחים לקשר בין ההגדרה הפורמאלית לבין דוגמאות לא טיפוסיות של אלכסון. טבלה 1 מתארת תשובות המשתתפים ונימוקיהם.

טבלה 1

תשובות המשתתפים לזיהוי האלכסונים ונימוקיהם לשינוי בהגדרת האלכסון

אירוע	המשתתפים שהסכימו עם התלמיד	אחוז המשתתפים שהציעו הרחבת\שינוי ההגדרה	דוגמאות מתשובות המשתתפים לשינוי ההגדרה

אירוע א': התלמיד קבל הגדרת האלכסון "קטע מחבר בין שני קודקודים שאינם סמוכים במצולע" והוא נדרש להחליט אם הקוו האדום הינו אלכסון או לא. התלמיד בחר שהקוו האדום אינו אלכסון, והסביר: כי הוא מחוץ למצולע. 	33%	50% רובם דרשו הצורך בהשלמת ההגדרה, ולהתייחס למיקום הקטע. הן טוענות כי צריך לרשום בהגדרה שיש שתי אפשרויות למיקומו של האלכסון: (א) מוכל במצולע (ב) או מחוץ למצולע.	"הייתי משנה את ההגדרה.." "האלכסון הוא קטע ישר בתוך המצולע..." "..האלכסון חייב לעבור בתוך המצולע ולא מחוץ לו..." "התלמיד התבסס על ההגדרה, אך הקוו שבתמונה הוא מחוץ לצורה.."
אירוע ב': התלמיד קיבל הגדרת האלכסון כ-"קטע מחבר בין שני קודקודים שאינם סמוכים במצולע" והוא נדרש להחליט אם הקוו האדום הוא אלכסון. התלמיד בחר שהקוו האדום אינו אלכסון, והסביר: . כי ' הוא "ישר". 	אין	26% מהמשתתפים הציעו להרחיב את ההגדרה ולהוסיף שהקטע צריך להיות ישר. ו-48% מהמשתתפים לא התייחסו בכלל שהתלמיד לא מבין שאין קשר בין ההחלטה שלו שהקטע הוא אכן אלכסון או לא, לבין כיוון הקטע עצמו (אנכי או אפקי או כל כיוון אחר). משתתפים אלה לא מבדילים בין תכונה קריטית לבין תכונה שאינה קריטית לאלכסון.	"ההגדרה חסרה, אני אוסיף עוד להגדרה" "הייתי מנסחת מחדש את ההגדרה.."

שיח טיעוני לבניית הגדרת האלכסון:

דיונוי המלאה והתמודדות בניתוח אירועים המתבססים על דוגמאות לא אב-טיפוסיות לאלכסונים תרם להבנת הגדרת האלכסון. האירועים שנבנו בהתבסס על דוגמאות לא טיפוסיות גרמו בהתחלה לטיעונים שונים המוצגים בטבלה 2 הקשורים להגדרת האלכסון. הטיעונים שעלו מהמשתתפים מראים כי למרות שהגדרת האלכסון הייתה מוצגת בפני המשתתפים לאורך כל המפגש, הם לא תמיד היו מודעות לפער בין התמונה האינטואיטיבית לאלכסון לבין הפן האנליטי העולה מן ההגדרה. אך, במהלך השיח הטיעוני שהתנהל במפגש איתרו המשתתפים אילו תכונות קריטיות יש לאלכסון ואילו אחרות שלא צריך להתייחס אליהן. העדות לממצא זה הינה הטיעון האחרון שעלה במפגש אשר מתייחס לצורך בבדיקת כל התכונות הקריטיות שנמצאות בהגדרת האלכסון.

טבלה 2

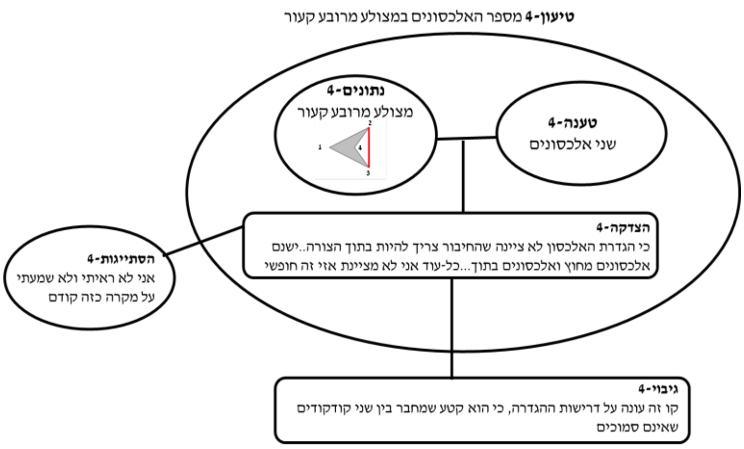
הטיעונים שעלו במהלך ניתוח האירועים המתמטיים

מספר	נושא הטיעון
1	הגדרת האלכסון היא נכונה אך אינה שלמה
2	הגדרת האלכסון שלמה (טיעון נגדי לטיעון-1)
3	הקטע שמחבר בין שני קודקודים במצולע שכולו מחוץ למצולע אינו אלכסון
4	מספר אלכסונים במצולע מרובע קעור: שניים
5	מיקום כל האלכסונים במתומן קעור שמחברים בין אחד הקודקודים לבין שאר הקודקדים במצולע
6	הקטע שמחבר בין קודקוד במצולע לבין צלע אינו אלכסון
7	הקטע שמחבר בין שני קודקודים ומוכל כולו במצולע הוא אלכסון
8	קטע שעובר על צלע אינו אלכסון
9	הקטע שעובר על צלע הוא אלכסון (טיעון נגדי לטיעון 8)
10	הקטע שחלקו עובר בתוך המצולע וחלקו מחוץ לו הוא אלכסון
10	כיוון הקטע שמחבר בין שני קודקודים שאינם סמוכים במצולע אינו תכונה קריטית לאלכסון

הממצאים מראים טיעונים משתי רמות שונות: (א) בסיסית – הטיעון הכיל "נתונים" ו"טענה", או/גם "הצדקה" אחת; (2) מורחבת – הטיעון כולל את הרמה הבסיסית ו"התנגדות" אחת לפחות ו/או "הסתייגות" אחת לפחות ו/או מספר "הצדקות". איור 1 מדגים את התמודדות המשתתפים בטיעון הרביעי בטבלה 2 המתייחס למספר האלכסונים במרובע קעור.

איור 1

תהליך התמודדות בטיעון לגבי אלכסונים במורבע קעור



ממצאי השאלון שהועבר בתום ההתמודדות בניתוח האירועים מראה ש 82% מהמשתתפים חברו הגדרה לאלכסון ללא הרחבות לא רילוונטיות, הם הגדירו את האלכסון כ-"קטע המחבר בין שני קודקודים שאינם סמוכים במצולע. ראוי לציין כי כל המשתתפים בסיום מפגש זה, הגיעו למסקנה כי אם התבקשו לשפוט קוו מסוים במצולע הם יצטרכו לשפוט את הקו שיפוט אנליטי. כלומר, לבדוק אם קו זה עומד בשלוש התכונות הקריטיות הבאות: (1) קטע (2) מחבר בין שני קודקודים של המצולע, (3) והקודקודים הללו אסור שיהיו על אותה צלע, הרי הוא אכן אלכסון של המצולע, גם אם לא חשבו שהוא כזה. כי פשוט אלה הם התכונות הנגזרות מההגדרה שלו.

דיון ומסקנות

ממצאי השאלון המקדים מראים שגם אם המשתתפים הצליחו לזהות אם הקטע אלכסון או לא, עדיין היו צריכים לשנות בהגדרה המינמאלית שלו. הממצאים הנגזרים מניתוח הדיונים מראים שהתמודדות בניתוח אירועים מבוסס שיח טיעוני העמיד את המשתתפים בפני קונפליקט שנותח אך ורק על-ידי הבנת ההגדרה המדויקת של האלכסון. בדרך זו נחשפו המשתתפים למאפיין הדיוק של ההגדרה ולחשיבותה. כלומר, עצם השימוש באירוע מתמטי נחשב כפעילות מצריכה הבנת ההגדרה המדויקת ונחיצותה. בדומה להצעה שהעלה אותה ווינר (Vinner,1991) המתייחסת לפעילויות אשר תוביל את הלומדים בנחיצות ההגדרה המתמטית כקריטריון אולטימטיבי בפעילויות מתמטיות שונות. ובכן הדברים אומתו בהגדרות המינמאליות שבהן הגדירו המשתתפים את האלכסון בתום ההתמודדות באירועים המתמטיים. ממצאי המחקר הנוכחי תומך בלמידת הגדרות מושגים מתמטיים תוך סביבה של אירוע מתמטי מבוסס שיח טיעוני. בהסתמך על ממצאי המחקר הנוכחי, מוצע מחקר הממשיך אשר יבחן למידת מושגים גיאומטריים נוספים.

רשימת מקורות

כהן, נ. (2020). לראות, לנתח ומה שביניהם, *מספר חזק 2000*, *31*, עמ'.28-45

Boonen, T., Van Damme, J., & Onghena, P. (2014). Teacher Effects on Student Achievement in First Grade: Which Aspects Matter Most?. *School Effectiveness and School Improvement, 25*(1), 126-152.

De-Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in Geometry. In T. V. Crain & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World* (pp. 189-203). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Koçak, M., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2017). An Investigation the Pedagogical Content Knowledge of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' about the Concept of Cylinder. Cukurova University *Faculty of Education Journal,46*(2), 711-765.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 259-282.

Shahbari, J. A. (2022). Investigation of mathematical-pedagogical knowledge among prospective teachers in the early childhood program at the college for Arabic speakers. In A. Rasslan, & D. Hasidov (Eds.), Special issues in early childhood mathematics education research (pp 246-265). Leiden, The Netherlands: Brill.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University.

Van-Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 91-106.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

תפיסת מושג הפתרון למערכת Ax=b בקרב סטודנטים

כלילה קופרמן, מרכז אקדמי לב
מיכל כהן , מרכז אקדמי לב

מבוא

פתרון מערכת משוואות הוא נושא מרכזי בלימודי האלגברה הלינארית המופיע בסבבים שונים לאורך הקורס. תחילה לומדים לפתור מערכת משוואות בשיטת הדירוג של גאוס, ולקבוע באלו תנאים יש למערכת פתרון יחיד, אף פתרון או אינסוף פתרונות. הסטודנט מתבקש למצוא את הפתרון היחיד, ולרשום את אינסוף הפתרונות בהצגה פרמטרית. בפרק העוסק בחשבון מטריצות מערכת המשוואות נכתבת בכתיב מטריציוני Ax=b, ומוכיחים את המשפט שאוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית Ax=0 היא תת מרחב. ושוב, בהקשר של מטריצה הפוכה, מוכיחים את המשפט שלמערכת משוואות Ax=b יש פתרון יחיד אם ורק אם A הפיכה. הפתרון במקרה זה הוא $x=A^{-1}b$.

עבור סטודנטים רבים ההבנה ש x הוא הפתרון של המשוואה, ופתרון הוא וקטור ב R^n שהצבתו במשוואה Ax=b במקום x תיתן פסוק אמת, אינה ברורה מאליה. מחקרים קודמים מדווחים על קשיים ייחודיים לפתרון מערכת משוואות: קושי בהבנת צורת הכתיבה הסימבולית Ax=b, קושי בהבנת התפקידים השונים שיש לאותיות במשוואה, כאשר A מייצגת מטריצה, ואילו x, ו b מייצגים וקטורים ב R^n, וגם קושי במעברים בין צורות הייצוג השונות (למשל Wawro, 2015 Britton & Henderson, 2009). פארקר (Parker, 2010) מדווחת על סטודנטים שסבורים שפתרון המשוואה הוא עמודת המקדמים החופשיים b. דה- ורי ואהרון (DeVries & Aharon, 2004) מדווחים כי סטודנטים מתייחסים לפתרון כהוראה לפתור, ולא כוקטור שהצבתו במשוואה תיתן פסוק אמת. כתוצאה מכך הם מעדיפים לפתור מערכת משוואות מההתחלה מאשר להציב בה וקטור נתון.

בין ההבנה הפרוצדורלית של פתרון מערכת משוואות להבנה סימבולית שלו ייתכנו שלבי ביניים. מטרת מחקר זה היא לזהות תתי שלבים בדרך להבנה של מושג הפתרון.

מתודולוגיה

הנתונים למחקר זה נאספו מתוך שאלה שהופיע במבחן סיום קורס לינארית א'. הקורס כולל פתרון מערכת משוואות בשיטת הדירוג של גאוס, ווקטורים במישור ובמרחב, מרחבים וקטוריים, תלות לינארית, חשבון מטריצות ודטרמיננטות. ששים וחמישה סטודנטים להנדסה וטכנולוגיה, שנה א, השתתפו במחקר. שאלה זו היתה סעיף ב של שאלה, כאשר בסעיף א הסטודנטים התבקשו להוכיח משפט שנלמד בהרצאה, שקבוצת הפתרונות של מערכת הומוגנית היא תת מרחב.

השאלה מתוך המבחן: *תהי $Ax=b$ מערכת אי הומוגנית. הוכיחו שאם u ו v הם שני פתרונות של המערכת אף $\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}u$ הוא פתרון.*

הנתון שלמערכת יש **שני** פתרונות עורר אצל הסטודנטים מגוון של כיווני חשיבה אודות מושג הפתרון. התפיסות השונות שנמצאו מתכתבות עם התכנים השונים שבהם פוגשים סטודנטים את נושא מערכת המשוואות. במחקר נעשה ניתוח איכותי של תשובות הסטודנטים לזיהוי התפיסות שיש לסטודנטים עבור המושג "פתרון של מערכת אי הומוגנית" אשר נתונה בכתיב מטריציוני.

שתי חוקרות ניתחו את השאלונים ומיינו את התשובות לקטגוריות שונות. ההחלטה על הקטגוריות נעשתה במשותף. הסיווג של התשובות לפי הקטגוריות נעשה תחילה על ידי כל חוקרת בנפרד, ואחר כך בדיון משותף עד להסכמה מליאה ביניהן. החלוקה לקטגוריות נעשתה בשני שלבים. בשלב הראשון הוחלט אם הסטודנט זיהה או לא זיהה את הפתרון כוקטור שהצבתו במערכת נותנת פסוק אמת. הוחלט שסטודנט זיהה את הפתרון של המערכת רק אם הוא מתרגם ' u פתרון של המערכת' ל 'Au=b'. בשלב הבא נעשה עידון של התפיסות על פי אופן השימוש בהן כפי שמסוכם בטבלה 1. פירוט ודוגמאות לתפיסות השונות יופיעו בפרק הממצאים.

ממצאים

בפרק זה נתאר תפיסות שונות שהתקבלו למושג פתרון. מצאנו שלוש תפיסות מרכזיות למושג הפתרון: 1. וקטור שהצבתו במקום x במערכת Ax=b נותנת פסוק אמת. 2. הפתרון הוא ביטוי הקשור למספר הפתרונות של המערכת. 3. הפתרון הוא b של המערכת Ax=b. בספרות המחקרית כבר יש עדויות לתפיסה זו, ולכן לא נפרט לגביה במאמר זה.

טבלה 1

תפיסות שונות ל "פתרון המערכת Ax=b" ואופני השימוש בהם

סוגי התפיסות	וקטור שמציבים במערכת במקום x	פתרון יחיד, אין פתרון או אינסוף פתרונות	b הוא הפתרון	אחר	N
	23 (35.5%)	24 (36.9%)	9 (13.8%)	9(13.8%)	65
אופן השימוש	תכונות מטריצות	כל דבר הוא פתרון			
	18 (27.7%)	13 (20%)			
	מטריצה הפוכה	תת מרחב			
	5 (7.8%)	11 (16.9%)			

1. פתרון הוא וקטור שכאשר מציבים אותו במקום x הוא פותר את המערכת

עשרים ושלושה סטודנטים זיהו שאם *u,v* פתרונות אז *Au=b, Av=b*.

1.1 שמונה עשר סטודנטים המשיכו והציבו את $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ במקום *x* במשוואה, השתמשו בפילוג מטריצות והוכיחו את הטענה.

1.2 חמישה סטודנטים הבינו שאפשר להציב את *u* ו *v* במקום *x* במשוואה, אבל אז נעזרו במטריצה ההפוכה כדי לבודד את הפתרון, וביצעו מניפולציות אלגבריות להראות שגם $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ פתרון. אולם הם שגו בשימוש במשפט. המשפט טוען שלמערכת פתרון יחיד אם ורק אם *A* הפיכה. היות שנתונים שני פתרונות, אז *A* לא הפיכה, ולא ניתן להשתמש במשפט.

Ax=b מערכת אי הומוגנית. u, v פתרונות של המערכת.

כלומר $Au=b \Leftrightarrow u=A^{-1}b \quad Av=b \Leftrightarrow v=A^{-1}b$,

נוכיח כי גם $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ *פתרון.*

$\frac{1}{2}u=\frac{1}{2}A^{-1}b$, וגם $\frac{1}{2}v=\frac{1}{2}A^{-1}b$

אז $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v=\frac{1}{2}A^{-1}b+\frac{1}{2}A^{-1}b=A^{-1}b$, *מסקנה:* $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ *פתרון*

2. הפתרון הוא ביטוי הקשור למספר הפתרונות של המערכת

הסטודנטים שהחזיקו בתפיסה "יש אינסוף פתרונות למערכת" זיהו את המילה פתרון בהקשר של מערכת משוואות, והתייחסו למספר הפתרונות האפשריים. הם טענו שלמערכת אי הומוגנית יכול להיות פתרון יחיד, אפס פתרונות, או אינסוף פתרונות. היות שנתונים שני פתרונות ניתן להסיק שלמערכת יש אינסוף פתרונות. ולכן:

2.1 אם יש אינסוף פתרונות, אז כל דבר הוא פתרון, ובפרט : $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ פתרון

2.2 אוסף הפתרונות של מערכת אי הומוגנית הוא תת מרחב ולכן כל הצירופים הלינאריים של *u,v* הם פתרונות ובפרט : $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ פתרון

להלן דוגמאות מייצגות למקרים אלו

2.1 אינסוף פתרונות

דוגמא 1: אם הפתרונות שונים- אז זה אינסוף פתרונות.
אם למערכת יש יותר מפתרון אחד, זאת אומרת שלמערכת יש אינסוף פתרונות. ולכן כאן אם יש למערכת פתרונות u,v זאת אומרת יותר מפתרון אחד, אז למערכת יש אינסוף פתרונות.
ולכן אם u,v הם פתרונות של המערכת אז $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ *גם פתרון של המערכת.*
אם למערכת עצמה פתרון יחיד, זאת אומרת ש u=v, ולכן גם $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ *שווים ל u ושווים ל v ולכן הם פתרון של המערכת.*

דוגמא 2: למערכת הומוגנית יש שלוש אפשרויות: 1. פתרון יחיד. 2. סתירה. 3. אינסוף פתרונות. אם במערכת אי הומוגנית נתון שיש שני פתרונות u,v אז זה אומר שקיים ישר מסוים שמקיים את אוסף הפתרונות. ואם הוא מכיל בתוכו את u,v אז בטוח יכיל את המכפלה שלהם בסקלר כי הישר מכיל את כל הצירופים הלינאריים בתוכו. ישר של אוסף הפתרונות: $t\cdot\vec{v}+\vec{u}$ *. אז t=0.5.* $U=\{t\cdot\vec{v}+\vec{u}\}$ *אז* $0.5v+0.5u\in U$

הסטודנטים בקטגוריה זו, כאמור, הסיקו שהיות שנתון יותר מפתרון אחד, אז יש אינסוף. צורות רישום מקובלות של אינסוף פתרונות של מערכת משוואות, בהתאם למספר המשתנים החופשיים, הן *x=u+tv* לכל *t* ב *R* או *x=w+tu+sv* לכל *t,s* ב *R*. הביטוי הנתון דומה במידה מסוימת לביטויים אלו. ייתכן שסטודנטים שכתבו ש"אם יש אינסוף פתרונות אז כל דבר הוא פתרון" התכוונו ל"כל דבר" מהסגנון שהם מכירים בהקשר של מערכת משוואות.

2.2 תת מרחב

נסמן ב K את קבוצת הפתרונות של המערכת $U=Span(K)$*. נתון* u,v *בקבוצת הפתרונות של המערכת* $\Leftarrow$ $u,v\epsilon U$*. U הוא המרחב הנפרש על ידי הפתרונות של המערכת ולכן הוא מרחב וקטורי כי כל Span של קבוצה הוא מרחב וקטורי. ולכן יש בו סגירות לחיבור ולכפל בסקלר.* $\alpha_1u+\alpha_2v\in Span(K)=U$*. כאן נבחר* α_1*,* α_2 *להיות* $\alpha_1=\frac{1}{2}$*,* $\alpha_2=\frac{1}{2}$*,*
ולכן הוכחנו ש $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v\epsilon Span(K)$

אחד עשר סטודנטים ניסו להציג צורה כללית של פתרון כצרוף לינארי של הפתרונות הנתונים. חלקם אמרו בפרוש שאוסף הפתרונות של המערכת מהווה **תת מרחב** ולכן גם הצירוף הלינארי $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ הוא פתרון. מבנה הפתרון מזכיר סגירות לחיבור ולכפל בסקלר, ולכן אם מרחב הפתרונות הוא תת מרחב אז בכך מוכחת הטענה. ייתכן שקישור שגוי לסעיף הקודם, בו הוכיחו שאוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא תת מרחב, הצית את הרעיון שגם אוסף הפתרונות למערכת אי הומוגנית הוא תת מרחב.
חלק מהסטודנטים טענו שכל צרוף לינארי של *u, v* הוא פתרון, ללא התייחסות מפורשת לתת מרחב. ייתכן שמתוך הסתכלות אל המטרה, הם הסיקו ש *tu+sv* הוא מבנה שיכול להתאים

לאינסוף הפתרונות. עבור $t=s=0.5$ מתקבל הפתרון הרצוי. למעשה, כיוון מחשבה זה הוא כיוון הוכחה יעיל, המוכיח טענה כללית יותר. אם מציבים את הביטוי $tu+sv$ במערכת $Ax=b$ מתקבל תנאי על t ו s, כך שהביטוי אכן פתרון. התנאי הוא ש $t+s=1$, ואכן $t=s=0.5$ מקיימים את התנאי. אולם, זיהוי הפתרון כביטוי שניתן להציב במערכת $Ax=b$ הוא בדיוק המרכיב החסר שמנע מהסטודנטים להגיע לתשובה מלאה.

דיון

התפיסה של פתרון כוקטור ב R^n שהצבתו במערכת $Ax=b$ נותנת פסוק אמת, היא תפיסה של הפתרון כישות שלימה, בניגוד לתפיסת הפתרון כתוצר של תהליך פרוצדורלי. תפיסה זו היא סימבולית. היא מאפשרת לזהות את u, v וגם את $0.5u+0.5v$ כישויות בעלות אותו תפקיד- פתרונות של מערכת המשוואות, ומאפשרת לבצע עליהם מניפולציות המוצדקות בעזרת חשבון מטריצות. *DeVries & Aharon (2004)* טוענים שברמת ההבנה מתקדמת של מושג הפתרון, התלמיד מסוגל לחשוב על הפתרון באופן מופשט, כישות בפני עצמה ואינו זקוק לפתור את המערכת בעצמו. התפיסות של מושג הפתרון שנמצאו במחקר מצביעות על שלבי ביניים בהתפתחות מושג הפתרון. הסטודנטים שהתמודדו עם הצבה ופישוט של הביטויים הסימבולים הצליחו לבנות לעצמם את מושג הפתרון ברמה הסימבולית. במחקר מצאנו תתי שלבים בדרך להבנה הסימבולית. 1. סטודנטים קרובים לרמה הסימבולית הציבו את הנתונים u, v במערכת הנתונה, אולם לא הציבו את $0.5u+0.5v$ כפתרון. ייתכן שהם היו מסוגלים להציב וקטור שהוא חד איבר במקום x, אבל התקשו לראות גם ברב איבר $0.5u+0.5v$ פתרון. הזיהוי של $0.5u+0.5v$ כווקטור של R^n, דורש עוד רמה של הפשטה.

2. סטודנטים שתפסו את הפתרון ברמה פרוצדורלית כתוצר של שיטת הדירוג של גאוס, אבל היו מסוגלים לחשוב על המצבים האפשריים של הפתרונות, ללא ביצוע תהליך הפתרון עצמו. הם זיהו את הפתרון כמתאים לתבנית מוכרת, כזו המתאימה לישר או מישור במרחב, או פתרון המוכל בתת מרחב הנפרש על ידי הפתרונות. יש פה רמת הפשטה בחשיבה על הפתרונות. הסטודנטים הצליחו לדמיין מהו המצב האפשרי המתאים לתנאים הללו.

3. קבוצת הסטודנטים שחשבו שהפתרון הוא b, לא תופסים את הפתרון, אפילו ברמה פרוצדורלית. יש להם הבנה של מושג הפתרון כתוצר של חישוב כמו שפתרו בתרגילי חשבון. עבור תלמידים אלו, עוד ארוכה הדרך.

מסקנות להוראה

תפיסת מושג הפתרון נבנית לאורך הקורס. חשוב שמרצים יכירו את התפיסות השונות שמתפתחות במקביל להוראת הנושאים השונים ויעזרו לסטודנטים לעבור מהבנה פרוצדורלית של הפתרון להבנה סימבולית שלו.

ביבליוגרפיה

Britton, S. & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: an attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 40, 7*

DeVries, D. & Arnon, I. (2004). Solution- what does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *28, 55-62*

Parker, C.F. (2010). How intuition and language use relate to understanding of span and linear independence in elementary linear algebra class. *Dissertation Abstracs International* 72 (5).

Wawro, M. (2015). Reasoning about solutions in linear algebra: the case of Abraham and the invertible matrix theorem. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education ,1, pp 315–338*

ניתוח יחידות לימוד STEM שתכננו סטודנטים להוראת מתמטיקה

אחלאם ענאבוסי, מכללת סמינר הקיבוצים, מכללת אלקאסמי.
וגיה דאהר, מכללת אלקאסמי.

מבוא ורקע תיאורטי

STEM (ראשי תיבות של Science, technology, engineering, mathematics) הינה גישת לימוד לנושאי מדע, טכנולוגיה, הנדסה ומתמטיקה המבוססת על ההבנה שאין באמת הפרדה דיסציפלינרית בין המקצועות השונים. חינוך ל-STEM מושך לאחרונה את תשומת לבם של חוקרים (Kartika et al., 2021). התעניינות בחינוך ל-STEM מושפע משינוי הדרישות בחיים ומשינוי הכלכלה האוניברסלית שהביא לצורך בעובדי STEM ובחינוך לו (ElNagdi & Roehrig, 2020). בחינוך ל- STEM השאיפה היא לספק לתלמידים התקדמות מוצלחת מבית הספר, האוניברסיטה, לעולם העבודה (Guyotte et al., 2014). לכן, הצורך בתוכניות אשר מקדמות חינוך ל-STEM הולך וגדל, במיוחד כאשר תכניות כאלה הוכיחו את יעילותן בפיתוח היכולות הקוגניטיביות, הרגשיות והפסיכומוטוריות של התלמידים (Firdaus & Rahayu, 2019). בנוסף לכך, תוכניות אלה השפיעו חיובית על עמדות התלמידים כלפי קריירות בתחום STEM (שם).

מחקרים קודמים הדגישו שהמורים מהווים הגורם המכריע ביישום חינוך ל-STEM. יחד עם זאת, עדיין יש למורים תפיסות מעורבלות ולא ברורות לגבי חינוך זה (Lamberg & Trzynadlowski, 2015). בנוסף, מחקרים קודמים דווחו שמורים ופרחי ההוראה אשר השתתפו בתוכניות להתפתחות מקצועית בנושא חינוך ל-STEM יש להם עמדה חיובית וכישורים גבוהים בהוראת STEM (Chen, Huang & Wu, 2021). לכן, הצורך בתוכניות התפתחות מקצועית בחינוך STEM ברור.

סוגיה חשובה שקשורה לחינוך STEM ושמעט חוקרים דנו בה היא תכנון\עיצוב יחידות לימוד בגישת STEM (Daher & Shabari, 2020). בעת תכנון יחידות לימוד STEM, דגש מיוחד הינו על סוג האינטגרציה בין תחומי הדעת של STEM: רב-תחומית, בין-תחומית או על-תחומית. בגישה הרב תחומית, ההוראה של כל תחום דעת מתבצעת בנפרד תוך התייחסות מצומצמת של הנושאים האחרים. הגישה הבין-תחומית שמה דגש על שילוב אחד מתחומי הדעת בהוראת כל אחד משלושת התחומים האחרים. בגישה העל-תחומית נקודת המוצא היא הבעיה ולא תחומי הדעת, כאשר הידע והמיומנויות מתחומי הדעת הרלוונטיים מיושמים בתהליך פתרון בעיות מהעולם האמיתי. כיום, הקריאה היא ללמד STEM בגישה העל תחומית שתאפשר לתלמידים להתמודד עם העולם האמיתי. מעבר לתחומי הדעת שקשורים לחינוך STEM, ישנו דגש מיוחד על מיומנויות המאה 21 שאפשר לפתח במסגרת פעילות STEM, ביחד עם דרכי החשיבה הרלוונטיים (West, 2012). אי לכך, מומלץ לספק לסטודנטים להוראה התנסויות שתסייענה להם לזהות את ההקשרים בין ארבע הדיסציפלינות, את המיומנויות הרלוונטיות ואת דרכי החשיבה ואופן יישומן בכיתות שלהם. מחקר זה מתמקד בתיאור וניתוח יחידות לימוד אשר תוכננו על ידי סטודנטים להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי אחרי השתתפותם בקורס "מבוא ל-STEM". ביחידות נבדק כיצד שלושת המרכיבים של (יכולות STEM)- הידע, המיומנויות ודרכי החשיבה; באים לידי ביטוי ביחידות הלימוד.

מתודולוגיה

שאלות המחקר

כיצד מאפייני הידע, המיומנויות ודרכי החשיבה של STEM באים לידי ביטוי ביחידות לימוד שתכננו סטודנטים להוראת מתמטיקה?

המשתתפים במחקר

המחקר נערך בהקשר של קורס "מבוא ל- STEM", בסמינר הקיבוצים, שמטרתו היתה לפתח את כישורי סטודנטים להוראת מתמטיקה בפיתוח ויישום פעילויות STEM בכיתה. הקורס נעשה בשנה האקדמית 2020-2021. במהלך הקורס, הסטודנטים עבדו בקבוצות בכדי לבצע שלוש מטלות: (1)

הצגת מאמר שקשור לחינוך STEM, (2) חיפוש יחידת לימוד בגישת STEM, הערכתה והצגתה בפני הכיתה ו- (3) תכנון יחידת לימוד בגישת STEM. אחרי כל מטלה הסטודנטים התבקשו לכתוב רפלקציה מתאימה. בקורס השתתפו 18 סטודנטים להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי. הסטודנטים התחלקו לשש קבוצות, כך שבכל קבוצה היו שלושה סטודנטים אשר השתתפו יחד בביצוע משימת תכנון יחידת הלימוד. למחקר הנוכחי בחרנו בשתי קבוצות לצרוך ניתוח היחידות אשר תכננו.

כלי המחקר

במחקר נעשה שימוש בטקסטים של שתי יחידות לימוד בנושאים הבאים: סדרת פיבונאצ'י וגשרי קניגסברג. כל יחידה כללה לפחות שלוש פעילויות שונות. נפרט יותר אודות היחידות בפרק הממצאים.

אופן ניתוח הנתונים

ניתוח יחידות הלימוד נעשה בהתבסס על המסגרת התיאורטית של האריס (Harris, 2012). האריס (שם) מתייחס לשלושה היבטים של פעילות STEM: ידע, מיומנויות ודרכי חשיבה (ראה טבלה 1).

טבלה 1
שלושת המרכיבים של יכולות STEM (STEM Capabilities) לפי (Harris, 2012)

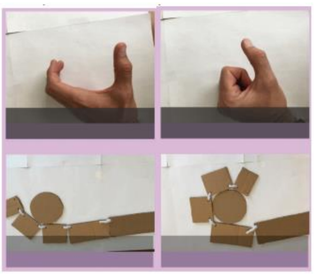
ידע	מיומנויות	דרכי חשיבה
מדע, טכנולוגיה, הנדסה ומתמטיקה (אפשר לכלול גם אומנות)	חקר, למידה וחקירה, פתרון-בעיות, מיומנויות טכניות, ביצוע תצפיות, ניסויים, מיומנויות כמותניות, הצגה ...	חשיבה אנליטית, לוגית, ביקורתית, שיטתית, מובנת, נימוקית, יצירתית, מבוססת ראיות...

ממצאים

להלן, נציג את יחידות הלימוד אשר תכננו הסטודנטים. אחרי כל פעילות נציג את הניתוח שלה לפי יכולות STEM: הידע, המיומנויות ודרכי החשיבה.

יחידת הלימוד "סדרת פיבונאצ'י"

1. חפשו באינטרנט: מהי סדרת פיבונאצ'י, על מה היא מתבססת ובאיזה תחומים היא מתבטאת.
2. התחלקו לארבע קבוצות. כל קבוצה תחקור כיצד יחס הזהב בא לידי ביטוי במבנה היסטורי מסוים. תוכלו לחקור מבנים היסטוריים במדינות הבאות: מצריים, מקסיקו, צרפת ומרוקו. הקבוצה תציג את ממצאיה לכיתה.
3. התחלקו לחמש קבוצות. כל קבוצה תחקור כיצד סדרת פיבונאצ'י ויחס הזהב באים לידי ביטוי בטבע. הקבוצה תציג את עבודתה לכיתה. תוכלו להשתמש בטלפון הנייד לצילום תמונות.
4. תארו מכשירים טכנולוגים בתחום האסתטיקה שבהם נעשה שימוש ביחס הזהב.
5. צפו בסרטון. התבוננו בשיטת שרטוט ספירלת הזהב. הסבירו כיצד סדרת פיבונאצ'י מופיעה בספירלת הזהב. בנוסף, צפו בשרטוט לוגו טוויטר תוך שימוש ביחס הזהב. אחר כך, השתמשו בפאורפוינט על מנת לשרטט תמונה המבוססת על יחס הזהב.
6. התבוננו בסימולציה הבאה ובנו אחת דומה באמצעות חומרים מתאימים. הסבירו את התופעה המדעית שבאה לידי ביטוי בסימולציה זו. הסבירו כיצד יחס הזהב קשור לסימולציה זו.



בטבלה 2 נציג את תיאור מרכיבי יכולות STEM (הידע, המיומנויות ודרכי החשיבה) הקשורות לכל פעילות ביחידת הלימוד ״סדרת פיבונאצ׳י״.

טבלה 2

ניתוח פעילות ״סדרת פיבונאצ׳י״ לפי ידע, מיומנויות ודרכי החשיבה של יכולות STEM

יכולות STEM / פעילות לימודית	ידע	מיומנויות	דרכי החשיבה
חקירת סדרת פיבונאצ'י ויחס הזהב	ידע מתמטי	חקירה אינדיבידואלית, פתרון בעיות, מיומנויות טכניות	מובנת
חקירת השימוש ביחס הזהב במבנים היסטוריים	ידע מתמטי וידע הנדסי	חקירה ולמידה שיתופית, פתרון בעיות, מיומנויות טכניות, מיומנויות הצגה	אנליטית, מבוססת ראיות
חקירת השימוש ביחס הזהב בטבע	ידע מדעי וידע מתמטי	חקירה ולמידה שיתופית, פתרון בעיות, מיומנויות טכניות, מיומנויות הצגה	אנליטית, מבוססת ראיות
חקירת השימוש ביחס הזהב במכשירים טכנולוגיים	ידע טכנולוגי וידע מתמטי	חקירה אינדיבידואלית, פתרון בעיות, מיומנויות טכניות	מובנת, מבוססת ראיות
עיצוב שרטוט המבוסס על יחס הזהב	ידע טכנולוגי, ידע מתמטי וידע באומנות	חקירה אינדיבידואלית, פתרון בעיות, תצפית, ניסוי	שיטתית, יצירתית, מבוססת ראיות
בניית סימולציה שמתארת סגירת כף היד	ידע מתמטי, הנדסי, מדעי, וידע באומנות	חקירה אינדיבידואלית, פתרון בעיות, תצפית, ניסוי	שיטתית, אנליטית, מבוססת ראיות

אפשר לראות מטבלה 2 שסוגי הידע הדרושים ליחידת סדרת פיבונאצ'י כללו ידע באומנות והושם דגש על דרכי החשיבה האנליטית והמבוססת ראיות.

יחידת הלימוד "גשרי קניגסברג"

1. פתחו את האפליקציה "ONE TOUCH CONNECT DOT" ופתרו את השלבים מ-1 עד 6. כשתסיימו את השלבים כתבו אילו שלבים הצלחתם להשלים ואילו לא הצלחתם להשלים. כתובו את האסטרטגיות שבהן השתמשתם. לאילו מסקנות הגעתם?
2. חפשו באינטרנט בעיית "גשרי קניגסברג". מה מתארת הבעיה? לאיזה נושאים מתמטיים היא קשורה? כיצד בעיית "גשרי קניגסברג" קשורה לפעילות הקודמת?
3. בנו מערכת של לפחות חמשה גשרים העומדים מעל משאב מים. סדרו את הגשרים כך שיהיה ניתן לעבור כל גשר פעם אחת ולחזור לנקודה הראשונה. כללי אוילר בסרטון יכולים לעזור לכם בתהליך הבנייה. עליכם להחליט באיזה חומרים תשתמשו. בסוף, הציגו את מערכת הגשרים שבניתם לכיתה והראו את הדרך החד-כיווני שעונה על הדרישה. הסבירו את דרכי החשיבה שלכם בעת בניית מערכת הגשרים.

בטבלה 3 נציג את תיאור מרכיבי יכולות STEM (הידע, המיומנויות ודרכי החשיבה) הקשורות לכל פעילות ביחידת הלימוד "גשרי קניגסברג".

טבלה 3

ניתוח פעילות ״גשרי קניגסברג״ לפי ידע, מיומנויות ודרכי החשיבה של יכולות STEM

יכולות STEM / פעילות לימודית	ידע	מיומנויות	דרכי החשיבה
אסטרטגיות לשרטוט נתיב חד-כיווני שחוצה קווים המחברים נקודות נתונות	ידע מתמטי	חקירה אינדיבידואלית, פתרון בעיות, מיומנויות טכניות	אנליטית, מבוססת ראיות
חקירת נתיבים חד-כיוונים בגרפים	ידע מתמטי וידע הנדסי	חקירה אינדיבידואלית, פתרון בעיות	מובנת, אנליטית
בחינת אסטרטגיות לבניית מערכת גשרים	ידע מתמטי, הנדסי ואומנותי	חקירה ולמידה שיתופית, פתרון בעיות, תצפיות וניסויים, מיומנויות טכניות, מיומנויות הצגה	ביקורתית, חדשנית, מבוססת ראיות, הערכתית

אפשר לראות מטבלה 3 שסוגי הידע הדרושים ליחידת גשרי קניגסברג כלל ידע מתמטי בעיקר, בונסף לידע הנסדי וידע באומנות. כאן, בפעילות האחרונה עלו דרכי החשיבה הביקורתית והחדשנית.

דיון

ממצאי המחקר מראים שסטודנטים להוראה תכננו יחידות לימוד שכללו פעילויות מסוגים שונים מבחינת תחומי הדעת שאליהם הן קשורות. כאשר לרוב, כל פעילות היתה מתייחסת לפחות לשני תחומי דעת דומיננטיים. סוגיה זו מראה את האפשרויות השונות שחינוך STEM יכול לספק עבור עיצוב פעילויות לימודיות הקשורות לגישה האינטגרטיבית של למידה (Daher & Shahbari, 2020).

הממצאים שקשורים למיומנויות STEM מראים שבפעילויות השונות נעשה שימוש רב בלמידה\חקירה אינדובידואלית. מה שמראה מחסור ביחידות שתכננו הסטודנטים במחקר הנוכחי כי לא הושם בהן דגש על למידה שיתופית. חסרון זה בולט מאחר שמחקרים קודמים הדגישו כי למידה שיתופית יכולה לתמוך ביישום פעילויות STEM (Wang & Shen, 2021).

בקשר לדרכי החשיבה שמופיעים ביחידות הלימוד שתכננו הסטודנטים להוראה, נראה כי דרכי החשיבה האנליטית והמבוססת ראיות היו מובילות בפעילויות. שתי הדרכים האלה דווחו על ידי חוקרים קודמים כתומכים בחינוך STEM (Siekmann & Korbel, 2016).

ממצאי המחקר מראים את החשיבות של הכשרת הסטודנטים להוראה להוראת STEM, תוך מתן דגש על "הידע, המיומנויות ודרכי החשיבה" שיש לפתח אצל התלמידים בעת ההתעסקות עם פעילויות STEM. מחקר זה שם לב לניתוח יחידות לימות מבוססות STEM הנבנות על ידי סטודנטים להוראה בבית הספר היסודי. מחקר עתיתי נדרש כדי לנתח יחידות לימוד הנבנות על ידי סטודנטים להוראה או מורים בחט"ב או בתיכון. עוד, מחקר נדרש ללמוד איך הכנה כמו זו המדווחת במחקר הנוכחי משפיעה על הוראת המורים ושילובם לפעילויות מבוססות STEM בהוראתם.

רשימת מקורות

Chen, Y.L., Huang, L.F., & Wu, P.C. (2021). Preservice preschool teachers’ self-efficacy in and need for STEM education professional development: STEM pedagogical belief as a mediator. *Early Childhood Education Journal, 49*(2), 137-147.

Daher, W., & Shahbari, J.A. (2020). Design of STEM activities: Experiences and perceptions of pre-service secondary school teachers. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), 15*(4), 112-128.

ElNagdi, M., & Roehrig, G. (2020). Identity evolution of STEM teachers in Egyptian STEM schools in a time of transition: A case study. *International Journal of STEM Education, 7*, 41.

Firdaus, A.R., & Rahayu, G.D.S. (2019). Effect of STEM-based learning on the cognitive skills improvement. *Elementary School Forum (Mimbar Sekolah Dasar), 6*(2), 198-207.

Guyotte, K., Sochacka, N., Costantino, T., Walther, J., & Kellam, N. (2014). STEAM as social practice: Cultivating creativity in transdisciplinary spaces. *Art Education, 67*(6), 12-19.

Kartika, E.F.R., Susanti, V.E., & Indriyanti, N.Y. (2021). Development and validation of web-based STEAM online platform to improve learning quality in pre-service Chemistry teacher. *Journal of Technology and Science Education, 11*(2), 513-525.

Lamberg, T., & Trzynadlowski, N. (2015). How STEM academy teachers conceptualize and implement STEM education. *Journal of Research in STEM Education, 1*(1), 45-58.

Siekmann, G., & Korbel, P. (2016). *Defining ‘STEM’ skills: Review and synthesis of the literature (support document 1)*. Adelaide: NCVER.

Wang, C., & Shen, J. (2021). *Technology-enhanced collaborative learning in STEM. International Encyclopedia of Education (4th ed.)*. Oxford, UK: Elsevier.

הזדמנויות ומכשולים ביישום התוכנית החדשה לרמת 5 יח"ל

דפנה אליאס, אוניברסיטת תל אביב
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב
ליה נח סלע, אוניברסיטת תל אביב
אנטולי קורופטוב, מכללת לוינסקי לחינוך

תקציר

בתוכנית החדשה שפורסמה מפורטים עקרונות שצריכים לקבל ביטוי בשטח, בכיתות הלימוד. נשאלת השאלה – כיצד התלמידים וצוותי ההוראה יקבלו את עקרונות התוכנית, ומהי רמת המוכנות שלהם להטמעתה? במידה וננסה לענות על שאלה זו מראש, נוכל "להקדים תרופה למכה", ולהיערך להטמעת התכנית עם מוטיבציה ועם פתרונות. המחקר שלנו מראה כי יש להיערך לשינוי הן במובן הפדגוגי והן במובן הרגשי, שכן יש צורך בהטמעת נורמות סוציו-מתמטיות חדשות לצורך הצלחת התוכנית.

רקע

בשנים האחרונות פותחה בישראל תכנית לימודים חדשה להוראת המתמטיקה בחט"ע והושלם מסמך המפרט את התוכנית. על פי חוזר מפמ"ר (אוגוסט 2021) היישום החל באופן ניסיוני בהיקף מוגבל של כ- 20 בתי ספר. בשנת תשפ"ג מצטרפים לתוכנית כ-100 בתי ספר נוספים ובשנת תשפ"ד תיכנס התוכנית לכל בתי הספר בארץ. התוכנית נכתבה לאור הנחיות שניתנו על ידי הועדה המקצועית למתמטיקה של משרד החינוך (2010), שקבעה שתוכנית הלימודים ברמת 5 יח"ל (בה אנו נתרכז בדיווח זה) נועדה להכין תלמידים ללימודי STEM (מדעים, טכנולוגיה, הנדסה ומתמטיקה) בהשכלה הגבוהה. ההנחיות הגדירו שתכנית הלימודים תדגיש את הצורך בהבנה, את הקשרים בין נושאי מתמטיקה שונים ואת הרלוונטיות של המתמטיקה לתחומים אחרים ולחיי יום יום.

אכן, החדשנות שבתוכנית הלימודים החדשה, אינה רק בתוכן אותו יש ללמד, אלא גם בסגנון ההוראה, בקשרים בין רכיבים שונים של התוכן ובגישה הכללית. בתוכנית נכתב: "ברוח התוכנית הכוללת, יש התייחסות ליישומים של המתמטיקה בכל תחומי הלימוד, כפי שהם באים לידי ביטוי במדעים השונים ובחיי יום-יום להדגיש את רלוונטיות היישומים של המתמטיקה הנלמדת לנושאים עכשוויים. השאלות היישומיות נכתבו בצורה אוריינית כך שגוף השאלות מסביר את רלוונטיות המתמטיקה הנלמדת מחד ומרחיב את ההשכלה הכללית של התלמידים בתחום היישומי מאידך." (מתוך המבוא לתוכנית הלימודים לכיתה י' ברמת 5 יח"ל, כפי שמופיעה באתר משרד החינוך: https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika/chativa-elyona/teaching-mathematics/tohnit-limudim/)

בעבודתם על מסמך תכנית הלימודים, קבע הצוות שלושה עקרונות מנחים: (Dreyfus et al., 2021).

חשיבה – קשורה לדרכים בהן תכנית הלימודים מעוררת, מטפחת ותומכת בדרכי חשיבה מתמטיות וברעיונות מתמטיים יסודיים, כולל חשיבה לוגית, ביקורתית ואלגוריתמית; רעיונות של הגדרה, טענה והוכחה; שימוש בייצוגים שונים ועוד.

השפעה – קשורה לדרכים בהן תכנית הלימודים משקפת את התפקיד של המתמטיקה בעולם של היום ומחזקת את הקשר בין המתמטיקה לבין היישומים שלה בחיי היומיום, במדע ובהנדסה. 'השפעה' מטרתה להראות את הרלוונטיות של המתמטיקה ולסייע בהכנת התלמידים ללימודי STEM. בנוסף, חברי הצוות מאמינים שמצבים חוץ-מתמטיים מתאימים לתמיכה בהתפתחות של הבנה מעמיקה של רעיונות מרכזיים של המתמטיקה, עם ציפייה שהבנה כזאת תתמוך בתלמידים כאשר הם מתבקשים ליישם רעיונות אלה בסיטואציות חוץ מתמטיות.

הצמחה – קשורה לדרכים בהן התכנית תיצור קרקע אינטלקטואלית פורייה לצמיחתו של מושג מתמטי באופן טבעי, באמצעות פעילויות אשר עושות שימוש בסיטואציות המוכרות לתלמידים בהן המושג החדש תופס מקום מרכזי, ודרך בניית משימות שבהן נוצר צורך במושג החדש. ניתן לומר שב"הצמחה" מדובר בעיקר בשינוי דרכי ההוראה והלמידה.

בדיווח זה יוצגו נקודת המבט של מורים ושל תלמידים על עקרונות התוכנית החדשה. בכל חלק נציג ממצאים ונדון בהם. לבסוף, נקשור את שני החלקים לדיון כולל בשאלה: מה ניתן לעשות כדי למקסם את סיכויי הצלחת הטמעת התכנית החדשה, כך ששלושת העקרונות שפורטו אכן יבואו לידי ביטוי?

המורים

פנינו למורי תיכון הלומדים לתואר שני בחינוך מתמטי במוסד להשכלה גבוהה בארץ. אחת הסיבות לבחירה באוכלוסייה זו היא ששאיפת מורים אלה להמשך ההשכלה המקצועית מגדילה סיכוי לחשיבה ביקורתית לא רק ברמת התוכן אלא גם ברמת המערכת. חשיבה כזו הכרחית לדיון קוריקולרי (Kettler, 2016). 14 מורים נשאלו בכתב, באמצעות מטלה שניתנה שלהם על ידי המרצה, כיצד המציאות של הוראת אנליזה בבית הספר שלהם דומה למציאות ה"רצויה" שמתוארת במאמר של Dreyfus et al. (2021) המפרט את עקרונות התכנית החדשה. בנוסף, התבקשו המורים לתאר סיבות לכך שהמציאות כיום שונה מהמציאות ה"רצויה". המורים הגישו את תשובותיהם בכתב למרצה אשר העביר את תשובותיהם אלינו. תשובותיהם נותחו לאחר שמצאנו נושאים שחזרו על עצמם ע"י חיפוש מבעים הכוללים מילות מפתח מתאימות. הציטוטים להלן נבחרו מתוך תגובות אותן כתבו המורים באופן אישי (המורים מוצגים בשמות בדויים).

אילוצים של חוסר זמן

מוסא: בשיחה שהייתה לנו הסכימו המורים שהלחץ של הבגרות הוא הרסני. אם יש זמן (ולרוב אין זמן) אז מעדיפים לנצל אותו לפתור עוד תרגילים, עוד שאלות בגרות....

דבורה: אם מבחן הבגרות, שיש לו כל כך הרבה משמעות, תופס נתח עיקרי מלימודי המתמטיקה של התלמיד, אז איפה נשאר זמן ללימוד מעמיק יותר?

המצב הנוכחי של ספרי הלימוד וחומרי ההוראה

מוסא: הספרים צריכים להכיל יותר שאלות מחיי היום יום או כאלה שמשלבות טכנולוגיה על מנת לעזור למורים.

דבורה: מי שלא הולך להשתלמויות, לא יקבל את זה מהספרים! גם אם חלק מהעקרונות כבר מופיע ברמה זו או אחרת במסמכי המפמ"ר, לצערי הספרים נשארו בעקרון ספרי תרגול.

תפיסת מסוגלות עצמית של המורה והיעדר הדרכה מתאימה

קרן: אני כתלמידת מתמטיקה תיאורטית באוניברסיטה מכירה בעיקר את התיאוריה ופחות את השימושים לצערי.

שחף: אני תוהה כמה מהמורים בכלל מודעים לנקודת מבט זו באנליזה.

דלית: אני מאמינה שחלק מהמורים היה שמח ליישם את העקרונות אבל חשיפה מועטת למקורות מידע ותכנים מונעת זאת מהם.

ראמזי: המורים באופן אינטואיטיבי מוצאים תוכן דומה מהחיים כדי להדגים את המשמעותיות של המתמטיקה לחיי התלמידים.

נורמות סוציו-מתמטיות לא מתאימות

יונתן: הייתי שמח אם מגיל צעיר היה ניתן דגש על אקלים כיתתי שמאפשר זאת ולא רק 'המורה אבל מה התשובה?'

דבורה: בד"כ הפעילויות האלה יוצאות לקראת מבחני הפיזה וכד' מבלי לקחת בחשבון שזו דרך, דרך לימוד, משהו שמפנימים עם הזמן- לא בזבנג וגמרנו - לא אצל המורים ובוודאי שלא אצל התלמידים.

מהממצאים עולה שתפיסת המסוגלות העצמית של המורים לא תמיד עולה בקנה אחד עם המצופה מהם. מורה אשר לא מרגיש בנוח עם נושא מתמטי מופשט, יכול היה עד היום ללמד באופן טכני, ועדיין להבטיח הצלחת תלמידיו בבגרות. יש לתת מקום למורים להביע חששות אלה באופן פתוח וללוות אותם בתחילת העבודה על פי התוכנית החדשה. היות ומצופה מהמורים ללמד נושאים מתמטיים בהתבסס על דוגמאות מוחשיות, אל לנו להסתמך על האינטואיציה האישית של כל מורה, ויש צורך בהשקעה מערכתית בבניית ובהפצת מאגר מתאים של דוגמאות, המחשות וסיטואציות רלוונטיות.

הממצא המרכזי שאנו רוצים להדגיש הוא שעולה ששינוי תפיסתי כמו זה המוצג בתוכנית החדשה צריך להיות מוטמע גם בשכבות צעירות יותר, לכל הפחות – בחטיבות הביניים. הנורמות הסוציו-מתמטיות מתקבעות אצל תלמידים במהלך שנות הלימוד כולן, ולא רק בהגיעם לתיכון. גם מבחינת לחץ הזמן המורגש בתיכון, יש היגיון בהטמעת דרכי עבודה מיטיבות בכיתות נמוכות יותר, כך שתלמידים יצוידו בכלים (כגון היכולות לנמק ולהוכיח) עוד לפני שנות התיכון.

התלמידים

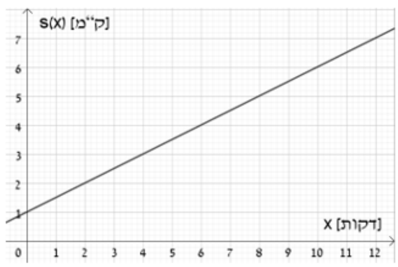
נדווח על ממצאים מראיון עם ינאי, בוגר תיכון טרי אשר למד מתמטיקה ברמת חמש יח"ל ומתעתד ללמוד מתמטיקה כעתודאי. ינאי התראיין לפרויקט בו אנו בוחנים את המשמעויות שנוצרו אצל תלמידים עבור מושגי היסוד של החדו"א. במסגרת המטלה הוצגה בפניו סיטואציה (איור 1) ולאחריה התבקש לדרג באיזו רמה הוא מתחבר להיגדים מסוימים. המראיין ציין בפני ינאי בתחילת הראיון שמה שחשוב לו כמראיין הוא לא נכונות התשובות, אלא דרכי החשיבה של ינאי. הריאיון הוקלט ותומלל.

איור 1

המטלה שניתנה לינאי במסגרת הריאיון

בכיתה עוסקים במרחק s (בקילומטרים) שעבר רוכב אופניים כפונקציה

של הזמן x (בדקות) לפי $s(x) = \frac{1}{2}x + 1$. להלן גרף של הפונקציה.



אלונה אמרה ש**הנגזרת של המרחק לפי הזמן הינה קבועה**. התלמידים דנו

במשמעות אמירתה עבורם.

ינאי הוא תלמיד מוכשר אשר אוהב ללמוד מתמטיקה: "מתמטיקה זה תמיד היה, כאילו בבית ספר, התחום האהוב עליי. [...] המורה שמה דגש להסביר את כל מה שמאחורי המתמטיקה. לא רק לזכור את הנוסחה הזאת והזאת, אלה להבין מאיפה זה מגיע. [..] זה מאוד גרם לי להעריך מתמטיקה, כי אני כזה אה ואוו! יש להכל ארבע מאות הסברים שונים, והכל עובד ביחד."

ניתן היה לצפות כי תלמיד חזק אשר למד עם מורה אשר, לדבריו, נותנת הסברים מגוונים ומלמדת באופן מעמיק יפתח משמעויות פרודוקטיביות ויהיה מסוגל לחבר היבטים שונים של אותו מושג מתמטי. יחד עם זאת, מניתוח הריאיון, עולה כי המשמעות החזקה ביותר שיש לינאי בקשר למילה נגזרת היא הפעולה הטכנית של הגזירה. "קודם כל כשאני שומע שאומרים נגזרת אז כאילו 'אובייסלי' (obviously) אני ישר הולך למשמעות, כאילו, במתמטיקה של לגזור פונקציה. כשאני רואה את החצי איקס ועוד

אחד, ברגע שראיתי נגזרת כבר גזרתי את הפונקציה בראש, אני הבנתי שזה פשוט יהיה כאילו חצי." בהתאם, ההזדהות הגבוהה ביותר שלו היא עם היגד שהוא הטכני ביותר הטוען שהמשמעות היא ש- $s'(x) = \frac{1}{2}$: " זה בדיוק מה שאני חשבתי [...] אם היה גם בעד כמה זה קרוב לדרך חשיבה שלך, אם היה יותר, הייתי שם בעשר. [...] זה בול איך שאני חושב."

נראה כי לא נוצרו אצל ינאי קשרים של נגזרת-שיפוע-מנת הפרשים-קצב שינוי. למרות שהוא מכיר את המושגים שיפוע ומנת הפרשים, החיבור ביניהם והקשר שלהם לנגזרת הוא דל מכדי לעלות בראשו באופן טבעי. "השיפוע הוא קבוע, ולכן כל דקה שעוברת הק"מ, כאילו המרחק, יעלה ב.. לפי השיפוע כאילו. אבל, זה לא קרוב לדרך החשיבה שלי כי עוד פעם, זה יותר ההשפעות האמתיות של המתמטיקה, מאשר המתמטיקה הטהורה שמתעסקת במספרים." בהמשך הוסיף ש"זה [מנת הפרשים] פשוט, הדרך לחישוב השיפוע, אבל זה לא קרוב לדרך חשיבה שלי. [...] אני גם חשבתי על השיפוע, אבל אני לא חשבתי על המשמעות של שיפוע. [...] כי היא מדברת פה על ה.. ספציפית על ההפרשים בין הזמנים והמרחקים, ואני לא חשבתי על זמן ומרחק. הסתכלתי על זה כאל פונקציה כללית שאני פשוט גזרתי."

המשמעויות הקשורות בהקשר החוץ מתמטי של השאלה (תנועה) הן החלשות ביותר עבורו, כפי שציין לאורך הריאיון: "אני לא חושב על המשמעות מאחרי הגרף, אני פשוט חושב על זה כאוקיי, יש לי גרף, גזרתי אותו, יצא לי מספר קבוע."; "אני יותר מזדהה עם מה שיותר קרוב למתמטיקה הטהורה מאשר למה שיותר קרוב למציאות."; "כשאני קראתי את זה לראשונה, אז אני קורא את המילים, 'בכיתה עוסקים במרחק s שעבר רוכב אופניים כפונקציה של הזמן x' ואז כאילו זה נותן לי את התמונה הכללית, אבל ברגע שאני רואה פונקציה ספציפית זה הדבר היחיד שכאילו שהמוח שלי שומר." זוהי דוגמה לכך שההרגל להתמקד בנתונים טכניים הוטמע בו - הסיפור החוץ מתמטי על רוכב האופניים נשכח כאשר מסופקת פונקציה מפורשת. דוגמה נוספת עלתה כאשר ינאי נשאל לגבי המושג קצב שינוי ואומר בכנות ש"תמיד קצב שינוי המרחק בשבילי היה פשוט מילה, משפט שאומר שיפוע". בהלימה, ההסתכלות הטכנית על נגזרת כפעולה חישובית היא המשמעות החזקה ביותר עבור ינאי.

ינאי הינו דוגמה לתלמיד בעל ציונים גבוהים המתעניין במתמטיקה, אבל לא הטמיע חיבורים בין המושגים. כנותו והדיוק שלו בתשובות – מה בדיוק עלה לו במחשבות ומה פחות, מאפשרים לראות שעל אף שסביר להניח כי מורתו הסבירה לו על קיום קשרים כאלה, הם לא הוטמעו בו, כנראה בגלל הנורמות המעודדות יכולות טכניות לצורך הצלחה במבחנים.

סיכום

מהממצאים שהוצגו לעיל עולה שהנורמות הנוכחיות מעודדות פיתוח משמעויות טכניות, ולכך מורגלים גם המורים בדרך הוראתם וגם התלמידים. אין ספק שמבנה ההיבחנות שהיה קיים עד כה עודד פיתוח יכולות טכניות, שכן על כך נשאלו התלמידים בבחינות הבגרות, ותלמיד עם יכולות טכניות-חישוביות גבוהות יכול היה לסיים את לימודיו בהצטיינות, ללא צורך בפיתוח משמעויות פרודוקטיביות יותר ללימודי ההמשך בתחומי ה-STEM באקדמיה – משמעויות שפיתוחן דורש זמן ומאמץ רב.

יש לשער שהכיוון אליו התוכנית החדשה מכוונת יספק יותר הזדמנויות לתלמידים לפתח משמעויות מעמיקות למושגים המתמטיים המרכזיים. יחד עם זאת, מהמחקר עולה כי יש צורך בהכנת השטח, גם בהיבט הלוגיסטי והפדגוגי, אך גם בהיבטים רכים יותר כמו נורמות והרגלים, כדי להקל על המורים אשר אמונים על סיבוב ההגה של האונייה הכבדה של משמעויות מתמטיות ונורמות לימוד.

תודות

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק מספר 1743/19). ברצוננו להודות למורים ולתלמידים אשר לקחו חלק במחקר זה, כמו גם למרצה של המורים בלימודיהם האקדמיים.

רשימת מקורות

Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high school calculus curriculum. *ZDM Mathematics Education* *53*(3), 679-693. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01236-3

Kettler, T. (2016). A differentiated approach to critical thinking in curriculum design. In T. Kettler (Ed.), *Modern curriculum for gifted and advanced academic students* (pp. 91–110). Prufrock Press Inc.

מורים מזהים את אתגרי תלמידיהם בהוראת מידול מתמטי

לירון שוורץ אביעד, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
ד"ר זהבית כהן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

מידול מתמטי מוגדר כתהליך של פתירת בעיות מסיטואציות בעולם האמיתי על ידי תרגומן למודלים מתמטיים. התהליך הינו מעגלי, הכולל מעבר הלוך וחזור בין העולם האמיתי למתמטיקה. תהליך זה מורכב מארבעה שלבים: (1) אידיאליזציה (Idealizing): הבנת והפשטת הסיטואציה מהעולם האמיתי; (2) מתמטיזציה (Mathematising): בחירת ובניית מודלים מתמטיים מתאימים; (3) חקירת המודל (Investigation of the Model): בחירת אסטרטגיות מתאימות ליישום תהליכים מתמטיים; ולבסוף, (4) פירוש (Interpretation): הערכת התוצאות המתמטיות בהקשר של העולם האמיתי ורפלקציה על כל תהליך הפתרון (Blum, 1996; Kaiser, 1995).

תהליך זה מלווה באתגרים רבים, הן עבור התלמידים והן עבור המורים. הסיבה לאתגרים אלו נעוצה באתגרים הקוגניטיביים הכרוכים בתהליכי המידול המתמטי הנדרשים בעת פתירת תרגילי מידול. הוראת מידול מתמטי מוסיפה נדבך נוסף לאתגרים אלו, ומורים נדרשים להיות בעלי מיומנויות ייחודיות עבור הוראת מידול. החוקרים Borromeo Ferri ו-Blum (2010) הציגו מודל של המיומנויות הדרושות למורים להוראת מידול מתמטי. המודל מציג ארבעה מימדים של מיומנויות החיוניות להוראת מידול: תיאורטי, משימה, הוראה ודיאגנוסטי. המחקר הנוכחי מתמקד בבחינת המימד הדיאגנוסטי, שמתייחס למיומנות של מורים לזהות את קשיי התלמידים במהלך פתירת תרגילי מידול מתמטי.

הספרות מצביעה על הצורך לספק למורים תמיכה בהוראת מידול מתמטי, במיוחד באמצעות תוכניות לפיתוח מקצועי (Borromeo Ferri, 2018). בהתחשב בכך שפיתוח מקצועי אפקטיבי מוגדר כתהליך למידה שבאמצעותו מורים מדגימים שינוי או שיפור של שיטות ההוראה שלהם בכיתה (Darling-Hammond, 2017), חיוני לחקור כיצד תוכניות לפיתוח מקצועי הקשורות להוראת מידול משפיעות על מיומנויות ההוראה של המורים בזמן אמת, כלומר, במהלך הוראתם בכיתה. עם זאת, מחקרים בודדים בדקו השפעה כזו בכיתות המורים, בפרט בהתייחס ליכולת המורים לזהות את קשיי התלמידים במהלך הוראת מידול מתמטי. ולכן, מטרת המחקר היא לבחון האם וכיצד מורים מזהים את האתגרים של תלמידיהם במהלך הוראת מידול, כאשר התלמידים פותרים תרגילי מידול מתמטי בכיתה.

מתודולוגיה

מסגרת המחקר

המחקר הינו חלק מתוכנית פיתוח והטמעה של משימות מידול מתמטי הנקראת Integrated Math & Technology (i-MAT). תוכנית זו ממוקדת בפיתוח וחקר הטמעה של משימות מידול בהקשר מדעי-הנדסי מסיטואציות מעולם האמיתי, הרלוונטיות לחיי התלמיד. המשימות מפותחות בהתאמה לתוכנית הלימודים של כיתות ח' ו-ט' במתמטיקה, ולמעגל המידול שפותח על ידי Blum (1996) ו- Kaiser (1995).

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה 97 מורי מתמטיקה לחטיבות הביניים הנמוכות (כיתות ח' ו-ט') בישראל, אשר השתתפו בהשתלמות i-MAT לאורך שנת לימודים אחת. מתוכם 79 נשים (72%) ו-18 גברים (18%), רובם מהמגזר היהודי (96%) ומיעוטם מהמגזר הערבי (4%).

תוכנית ההשתלמות ומהלך המחקר

תוכנית השתלמות i-MAT התקיימה לאורך שנה אחת וכללה 30 שעות אקדמיות. התוכנית כללה 9 מפגשים בסך הכל, מתוכם 6 מפגשים סינכרוניים של 4 שעות אקדמיות כל אחד, ו-3 מפגשים א-

סינכרוניים של 2 שעות אקדמיות כל אחד. במהלך המפגשים הסנכרוניים, הוצגו בפני המורים שש משימות מידול מתמטי אשר פותחו במסגרת התוכנית. מבין 6 המשימות, המורים נדרשו לבחור 3 משימות אשר אותן הם יטמיעו בכיתותיהם.

כלי מחקר

כלי המחקר כללו: (1) שאלוני דיווח-עצמי של המורים שחולקו לאחר הטמעת משימות מידול בכיתה. מטרת השאלונים הייתה לבחון את יכולת המורים לזהות את האתגרים של תלמידיהם במהלך הוראת משימות מידול מתמטי. ההצעה הנוכחית מתמקדת בשאלה פתוחה אחת מתוך שאלון זה שהינה: "אילו אתגרים התעוררו אצל התלמידים במהלך פתירתם את משימת המידול?". (2) תצפית על שיעור בו המורה דנה (שם בדוי), אחת מהמורות המשתתפות בהשתלמות, הטמיעה בכיתתה את משימת כיפת ברזל (ראו פירוט בהמשך), תוך התמקדות ביכולתה לצפות מראש או להגיב לאתגרים שהתלמידים מבטאים. (3) ראיון עם דנה, המורה שהטמיעה את משימת כיפת ברזל, לאחר שהעבירה את השיעור בכיתה. בראיון החוקרת ציינה בפני דנה אילו פעולות ומילים היא עשתה/אמרה בכיתה בכדי לסייע לתלמידים להבין טוב יותר את החומר הנלמד. דנה נתבקשה לאשר האם היא צפתה מראש שנקודות אלו יעוררו אתגר בתלמידים, ומדוע היא חשבה שדווקא נקודות אלו יהוו קושי עבורם. כמו כן, החוקרת ציינה בפני דנה מקרים מהשיעור בהם התלמידים העלו אתגרים שונים, ודנה נתבקשה לפרט לפי דעתה מה היו האתגרים ולאיזה שלב במידול, אם בכלל, האתגרים הללו שייכים.

משימת כיפת ברזל – משימת מידול שהוטמעה בכיתה

כיפת ברזל הינה מערכת הגנה אווירת ליירוט רקטות. המערכת חוזה את המסלול של הרקטה הנשלחת, על מנת לקבל החלטה בנוגע ליירוט אפשרי של טיל מיירט כנגד הרקטה, על מנת להשמיד אותה. המשימה פותחה על ידי צוות מומחים על בסיס 4 שלבי המידול, באופן הבא: בשלב האידאליזציה- מוצג הסבר על כיפת ברזל ומנגנון פעולתה. בשלב המתמטיזציה, מוצג הקשר בין הסיטואציה בעולם האמיתי למתמטיקה, על ידי הסבר כיצד ניתן לחזות את המסלול הפרבולי של הרקטה (בעולם האמיתי), באמצעות מציאת 3 נקודות דרכן עוברת הרקטה (העולם המתמטי). בחקירת המודל, נדרש פתרון מתמטי של מערכת משוואות, ובשלב הפירוש נדרש להסביר איזו תשובה מתמטית נפסלת (תשובה שלילית) מאחר והערך השלילי על ציר ה-X לא רלוונטי לגבי ההחלטה האם ליירט את הרקטה או לא.

ניתוח נתונים

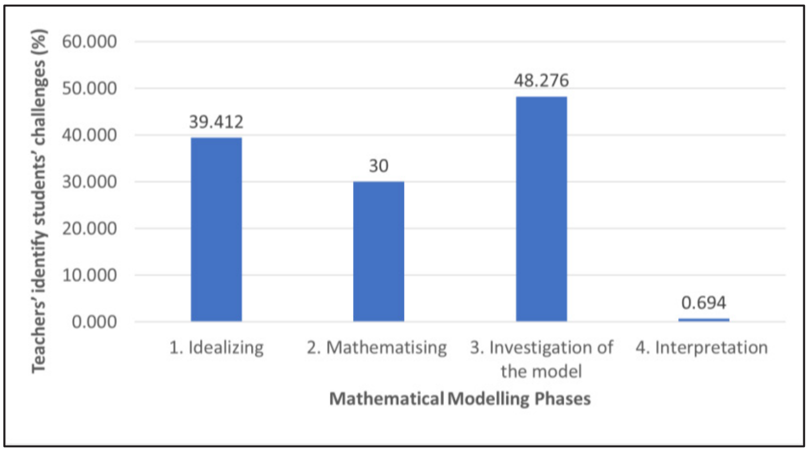
כל הנתונים מתוך כלל כלי המחקר נותחו באמצעות ניתוח תוכן (directed-content analysis; Hsieh & Shannon, 2005). הנתונים חולקו ליחידות ניתוח, כך שבכל יחידה בא לידי ביטוי אתגר מסויים שהמורה זיהה אצל התלמידים (למעט מקרים בהם המורים כתבו שלא זיהו אתגר). לאחר מכן, בשאלונים מופו קטגוריות המתייחסות ל-4 שלבי המידול השונים המתבססים על מעגל המידול של Blum (1996) ו-Kaiser (1995), ולאתגרים נוספים שלא התייחסו לשלבי המידול. לגבי התצפית, מופו רק קטגוריות שמתייחסות ל-4 שלבי המידול השונים. לבסוף, עבור השאלונים והתצפית, חושבו סכום השכיחויות ולכל קטגוריה בצורה נפרדת.

ממצאים עיקריים

ממצאים המבוססים על שאלוני דיווח-עצמי של המורים מצביעים על כך שבכ-95% מהתגובות, מורים דיווחו שתלמידיהם נתקלו באתגרים במהלך העיסוק במשימות מידול מתמטי. רוב האתגרים (כ-67%) עליהם המורים דיווחו התייחסו לשלבי המידול המתמטי השונים, כלומר לאידאליזציה, מתמטיזציה, חקירת המודל ופירוש. איור 1 מציג את השכיחויות (באחוזים) של תגובות המורים לשאלונים בהן המורים זיהו את אתגרי התלמידים אשר התייחסו לשלבי המידול השונים, במהלך פתירת משימות מידול מתמטי. ניתן לראות כי מבין האתגרים הקשורים לתהליך מידול מתמטי, האתגר הנפוץ ביותר (כ-48%) היה בשלב חקירת המודל. כמעט ולא נמצאו תגובות של מורים המתייחסות לשלב הפירוש (כ-0.7%).

איור 1

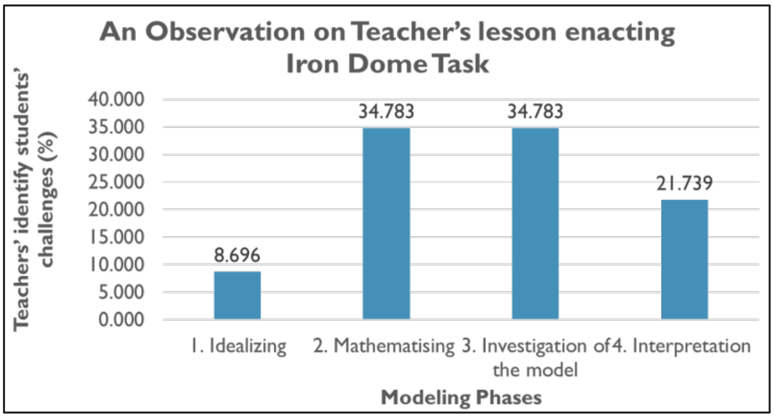
זיהוי אתגרי התלמידים על ידי המורים במהלך פתרון משימות מידול מתמטי



ממצאים המבוססים על ניתוח התצפית מצביעים על כך שהמורה זיהתה אתגרים מולם התלמידים מתמודדים המתייחסים למידול מתמטי. איור 2 מציג את את השכיחויות (באחוזים) של תוצאות ניתוח התצפית על המורה דנה שהעבירה את משימת 'כיפת ברזל' בכיתתה. ניתן לראות כי האתגרים שהמורה זיהתה בקרב תלמידיה במהלך השיעור שהינם בעלי השכיחות הגבוהה ביותר התייחסו לשלבי המתמטיזציה (כ-35%) וחקירת המודל (כ-35%).

איור 2

זיהוי אתגרי התלמידים על ידי המורה במהלך פתרון משימת 'כיפת ברזל'



ממצאי הראיון עם המורה דנה לאחר התצפית נתנו חיזוק לממצאי התצפית, בכך שדנה הדגישה את הקושי של התלמידים במיוחד עם שלב המתמטיזציה של משימת כיפת ברזל, כלומר במעבר מהעולם האמיתי לעולם המתמטיקה. ניתן להסיק זאת ממה שאמרה בראיון: "ציפיתי שלתלמידים יהיו קשיים במעבר בין העולם האמיתי למתמטיקה. אם אתן להם משוואה פרבולית- הם יודעים לפתור אותה בצורה מושלמת. עם זאת, הקושי העיקרי הוא המעבר".

דיון ומסקנות

הממצאים מצביעים על כך שמורים הצליחו לזהות את אתגרי תלמידיהם במהלך פתירת משימות מידול מתמטיות. ניתן להסיק מכך, שהמורים הצליחו לזהות את 4 שלבי המידול המתמטי על בסיס המודל של Blum (1996) ו-Kaiser (1995). כמו כן, הממצאים מצביעים על כך שרוב האתגרים מולם התלמידים התמודדו התייחסו למידול מתמטי, ומתוכם רוב האתגרים היו קשורים ל-3 השלבים הראשונים בתהליך המידול. ניתן להסיק מכך שאלו השלבים המאתגרים ביותר עבור התלמידים, כי

הם דורשים ידע רחב בתחום המדעי-הנדסי (שלב האידאליזציה), ידע מתמטי רחב (שלב חקירת המודל) ויכולת תרגום מהעולם האמיתי לעולם המתמטי (שלב מתמטיזציה). בפרט, שלב חקירת המודל היה השכיח ביותר גם בשאלוני דיווח עצמי וגם בתצפית בכיתה על דנה. סיבה אפשרית לכך היא ששלב חקירת המודל כולל לא רק עיסוק שגרתי במתמטיקה, אלא גם הרחבת הידע המתמטי הקיים (לדוגמא, ידע מחוץ לתוכנית הלימודים) וחיבור בין תחומי מתמטיקה שונים (לדוגמא, אלגברה וגיאומטריה), דבר שאינו נפוץ בתרגילי מתמטיקה שגרתיים הניתנים בכיתות.

אתגרים המתייחסים לשלב הפירוש התקבלו בשכיחות נמוכה מאוד, מאחר וייתכן כי התלמידים נתקעו באחד ו/או יותר משלושת השלבים הראשונים של המידול ולא הצליחו להגיע לשלב הפירוש, או שהם לא ביצעו הערכה של התוצאות המתמטיות. ממצא זה נתמך על ידי Blum (2015) שסובר כי תלמידים אינם רגילים להעריך את התוצאות המתמטיות שלהם המתקבלות. סיבה נוספת אפשרית לחוסר הביטוי של שלב הפירוש הינה שהמורים בעצמם התקשו לזהות את האתגרים הכרוכים בשלב זה, מאחר והם לא רגילים בשגרת עבודתם לבדוק את התאמת התוצאות המתמטיות לעולם האמיתי. זאת מאחר והמורים בדרך כלל לא רגילים לעסוק בהוראת מידול מתמטי (Borromeo Ferri, 2018).

למחקר תרומה תיאורטית, מתודולוגית ופרקטית. מבחינה תיאורטית, המחקר מחבר בין מסגרת המידול המתמטי על-פי Blum (1996) ו-Kaiser (1995), למודל של המיומנויות הדרושות להוראת מידול מתמטי למורים על-פי Borromeo Ferri ו-Blum (2010). מבחינה מתודולוגית, במחקר פותחה שיטת ניתוח לשאלוני דיווח-עצמי הבוחנת את המיומנות הדיאגנוסטית של המורה במהלך תהליך מידול מתמטי. מבחינה פרקטית, המחקר תורם להבנה של אילו סוגי אתגרים המורים מזהים אצל תלמידיהם במהלך העיסוק במידול המתמטי, ועתיד לגבש המלצות לתוכניות השתלמות עתידיות על בסיס ידע זה.

רשימת מקורות

Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In G. Kadunz, H. Kautschitsch, G. Ossimitz, & E. Schneider (Eds.), *Trends und Perspektiven* (pp. 15–38). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education – Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73–96). New York, NY: Springer.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modelling in school and teacher education*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2010). Mathematical modelling in school and teacher education. Experiences from a modelling seminar. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *European Society for Research in Mathematics Education – Proceedings of CERME 6*, pp. (2046–2055).

Darling-Hammond, L. (2017). Teacher education around the world: What can we learn from international practice?. *European journal of teacher education*, *40*(3), 291-309.

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research*, *15*(9), 1277-1288.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann (Ed.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp. 66–84). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

תפיסות מסוגלות עצמית מתמטית, אקדמית וכללית בקרב תלמידי תיכון מחוננים

אורלי דנציגר, יעל נוריק, מכללה ירושלים

רקע תיאורטי וסקירת ספרות

למחוננות הגדרות שונות, אשר מתייחסות לרוב לתלמידים מחוננים כאל בעלי יכולות יוצאת דופן בתחומים שונים וכתוצאה מכך, יכולים להגיע להישגים יוצאי דופן בתחומי האינטליגנציות בהן ניחנו. מרבית המחקרים מתייחסים למאפיינים קוגניטיביים והתנהגותיים של מחוננים, כגון יכולות ניתוח אנליטי, שימוש בחשיבה מסדר גבוה וזיכרון טוב (דורי וזוהר, 2008; רטנר, 2019). מחקרים מעטים מתייחסים למאפיינים הרגשיים של תלמידים מחוננים. מחקרים אלו מצביעים על כך שמחוננים נוטים להיות בעלי עוררות וסקרנות גבוהות ולחוות את העולם בעוצמה רבה. פעמים רבות קיים אצל מחוננים פער בין ההתפתחות הקוגניטיבית וההתפתחות הרגשית שלהם וכן יש להם צרכים רגשיים וחברתיים ששונים משל ילדים שאינם מחוננים. לתלמידים מחוננים יש נטייה לפרפקציוניזם ולפיתוח של ציפיות גבוהות מעצמם, בעקבות מסרים שהם קיבלו מהסביבה ; הם חוששים מביקורת ומחשיפת חולשותיהם, ואף יכולים לאבד את האמונה שלהם ביכולותיהם להצליח במשימות לימודיות. תחושות אלו אינן עולות בקנה אחד עם תפיסת מסוגלות עצמית גבוהה (דים וביתן, 2003).

מסוגלות עצמית (self-efficacy) מוגדרת כדרך בה אדם תופס את יכולתו בתחומים מסוימים. אדם בעל מסוגלות עצמית גבוהה יציב לעצמו יעדים וישאף להשיגם, יהיה נכון להתמודד עם אתגרים ולא יירתע מכישלונות בדרך (Bandura, 1994). מסוגלות עצמית אקדמית מתייחסת לאמונתו של אדם בהצלחתו בביצוע משימות ומטלות לימודיות (Pajares & Graham, 1999). תפיסת מסוגלות עצמית יכולה להתייחס גם לתחום ידע מסוים, כגון מתמטיקה. תפיסה כזו יכולה להשפיע על המוטיבציה של תלמידים ללמידת התחום בעתיד (Morán-Soto & Benson, 2018; Özcan, Kontaş, & Unisen, 2021). במקרה של תפיסת המסוגלות העצמית במתמטיקה, הדבר יכול להשפיע גם על בחירתם של תלמידים ללמוד מדעים (Pajares & Graham, 1999). תפיסת המסוגלות העצמית נמצאה כמשפיעה גם על הישגי התלמידים. בהקשר המגדרי, מחקרים מקשרים שונים מצביעים על פערים בין הישגי בנים ובנות בתחומי המדעים והמתמטיקה, כמו גם הבדלים בשיעורי ההשתתפות של בנים ובנות במגמות וקורסים מדעיים ובעמדות לגבי למידת מדעים ומתמטיקה. לטענת החוקרים, פערים אלו נובעים במידה רבה מהפער בין המינים בתפיסת המסוגלות העצמית ובדימוי העצמי הכללי, האקדמי והחברתי (Wang et al., 2013; Williams & Williams, 2010 ; דורי וזוהר, 2008).

מחקר זה מחבר בין הידע הקיים לגבי תלמידים מחוננים לבין הידע הקיים על תפיסות של מסוגלות עצמית. נראה כי המחקרים הקיימים מכירים בחשיבות ההיבטים הרגשיים בכלל ותפיסת המסוגלות העצמית בפרט אצל תלמידים מחוננים, אך עדיין אין מחקר רב בנושא. מטרת מחקר זה היא לבחון תפיסות מסוגלות עצמית בקרב תלמידים מחוננים. שאלות המחקר בחנו *האם קיימים קשרים בין תפיסות של מסוגלות עצמית, מסוגלות עצמית אקדמית ומסוגלות עצמית מתמטית לבין מגדר התלמידים, גילם (כיתה י' לעומת כיתה י"ב) ורמת הלימוד במתמטיקה.*

מתודולוגיה

במחקר זה השתתפו 57 תלמידי תיכון ייחודי לתלמידים מחוננים, מתוכם 35 בנות ו-22 בנים. שאלוני המחקר הועברו בשתי קבוצות של תלמידי כיתה י', אחת ברמת 4 יח"ל והשנייה ברמת 5 יח"ל, וכן בשתי קבוצות של תלמידי כיתה י"ב, אחת ברמת 4 יח"ל והשנייה ברמת 5 יח"ל.התפלגות התלמידים בין הכיתות היא: 32 תלמידי כיתה י' ו-25 תלמידי כיתה י"ב. התפלגות התלמידים בין רמות הלימוד במתמטיקה היא: 16 תלמידי 4 יח"ל למתמטיקה ו-41 תלמידי 5 יח"ל במתמטיקה.

כלי המחקר: נתוני המחקר נאספו באמצעות שאלון הבוחן את תפיסות המסוגלות העצמית של התלמידים, והוא כלל שלושה חלקים:

חלק א' – חלק זה כלל 15 היגדים על סולם ליקרט (1= אף פעם; 5= תמיד) שמתייחסים לתפיסת מסוגלות עצמית במתמטיקה. ההיגדים נלקחו מתוך שאלון שנבנה ותוקף על ידי מיי (May, 2009).

חלק ב' – חלק זה כלל 9 היגדים על סולם ליקרט (1= מעט מאוד; 5= הרבה מאוד) שמתייחסים למסוגלות העצמית האקדמית של התלמיד. ההיגדים נלקחו מתוך שאלונים שפותחו על ידי אפללו (אפללו, 2012) ועל ידי פרנציס וחבריו (Francis et al., 2000).

חלק ג' – חלק זה כלל 10 היגדים על סולם ליקרט (1= כלל לא מתאר אותי; 5= מתאר אותי במידה רבה מאוד) שמתייחסים לתפיסת המסוגלות העצמית הכללית של התלמידים. ההיגדים נלקחו מתוך שאלונים שפותחו על ידי אפללו (אפללו, 2012) ועל ידי פרנציס וחבריו (Francis et al., 2000).

ניתוח הנתונים: ממוצעים וסטיות תקן חושבו עבור הקבוצות השונות. כדי לענות על שאלות המחקר, נערכו מבחני t למדגמים בלתי-תלויים. המבחנים בחנו את מדדי מסוגלות העצמית בין בנים ובנות, בין תלמידי כיתה י' ותלמידי כיתה י"ב, ובין תלמידי 4 יחידות לימוד לתלמידי 5 יחידות לימוד.

ממצאים

טבלה 1 מציגה את הממוצעים וסטיות התקן של רמות המסוגלות העצמית לפי מגדר. מניתוח הנתונים עולה כי רמת המסוגלות העצמית המתמטית של הבנים גבוהה יותר באופן מובהק מרמת המסוגלות העצמית המתמטית של הבנות ($p=0.031$, $t(55)= 2.211$). לעומת זאת, לא נמצא הבדל מובהק בין הבנים והבנות ברמת המסוגלות העצמית האקדמית ($p=0.591$, $t(53)= 0.540$) וברמת המסוגלות הכללית ($p=0.432$, $t(51)= 0.792$).

טבלה 1

ממוצע וסטיית תקן לרמות המסוגלות העצמית לפי מגדר (בנים – N=22, בנות – N=35)

רמות מסוגלות עצמית		M	SD
מסוגלות עצמית מתמטית	בנים	3.95	1.13
	בנות	3.5	1.15
מסוגלות עצמית אקדמית	בנים	3.39	1.178
	בנות	3.46	1.161
מסוגלות עצמית כללית	בנים	3.65	1.030
	בנות	3.88	0.898

יש לציין כי בפילוח הנתונים של תלמידי כיתה י' מול תלמידי כיתה י"ב, עלה כי ההבדל לפי מגדר ברמת המסוגלות העצמית המתמטית בקרב בני כיתה י' הינו מובהק אף יותר מאשר בקרב כל האוכלוסייה הנבדקת ($p=0.009$, $t(30)= 2.812$). אולם, גם בניתוח הנתונים על תלמידי כיתה י' בלבד לא נמצא הבדל מובהק בין הבנים והבנות ברמת המסוגלות העצמית האקדמית ($p=0.414$, $t(28)= 0.829$) או רמת המסוגלות העצמית הכללית ($p=0.425$, $t(28)= 0.810$).

טבלה 2 מציגה את הממוצעים וסטיות התקן של רמות המסוגלות העצמית לפי כיתה (תלמידי כיתה י' לעומת תלמידי כיתה י"ב). מניתוח הנתונים לא עלה הבדל מובהק ברמות המסוגלות העצמית בין קבוצות התלמידים, הן ברמת המסוגלות העצמית המתמטית ($p=0.699$, $t(55)= -0.388$), הן ברמת המסוגלות האקדמית ($p=0.080$, $t(53)= -1.784$) והן ברמת המסוגלות העצמית הכללית ($p=0.328$, $t(51)= -0.987$).

טבלה 2

ממוצע וסטיית תקן לרמות המסוגלות העצמית לפי כיתות (כיתה י' – N=32, כיתה י"ב – N=25)

רמות מסוגלות עצמית		M	SD
מסוגלות עצמית מתמטית	כיתה י'	3.64	1.18
	כיתה י"ב	3.72	1.138
מסוגלות עצמית אקדמית	כיתה י'	3.45	1.15
	כיתה י"ב	3.35	1.186
מסוגלות עצמית כללית	כיתה י'	3.76	0.998
	כיתה י"ב	3.84	0.903

טבלה 3 מציגה את הממוצעים וסטיות התקן של רמות המסוגלות העצמית לפי רמת הלימוד (תלמידים הלומדים ברמת 4 יח"ל לעומת תלמידים הלומדים ברמת 5 יח"ל). מניתוח הנתונים עולה כי רמת המסוגלות העצמית המתמטית של תלמידי 5 יח"ל גבוהה יותר באופן מובהק מרמת המסוגלות העצמית המתמטית של תלמידי 4 יח"ל ($t(55)= -2.698$, $p=0.009$). אולם, לא נמצא הבדל מובהק בין הקבוצות שנבדקו ברמת המסוגלות העצמית האקדמית ($t(53)= -0.084$, $p=0.933$) וברמת המסוגלות הכללית ($t(51)= -0.730$, $p=0.469$).

טבלה 3

ממוצע וסטיית תקן לרמות המסוגלות העצמית לפי רמת לימוד (4 יח"ל – N=16, 5 יח"ל – N=41)

רמות מסוגלות עצמית		M	SD
מסוגלות עצמית מתמטית	4 יח"ל	3.25	1.19
	5 יח"ל	3.84	1.11
מסוגלות עצמית אקדמית	4 יח"ל	3.39	1.209
	5 יח"ל	3.45	1.152
מסוגלות עצמית כללית	4 יח"ל	3.58	1.078
	5 יח"ל	3.88	0.891

דיון ומסקנות

במחקר זה נבדקו תפיסות מסוגלות עצמית אצל תלמידים מחוננים, תוך התייחסות למשתנים של מגדר, כיתה ורמת לימוד. במחקר נמצא הבדל מובהק בין תפיסות המסוגלות העצמית לבין מגדר התלמידים רק בתפיסת המסוגלות העצמית המתמטית. ממצא זה תואם במידה מסוימת לספרות, המצביעה על פער בטיפוח בנות מחוננות לעומת בנים מחוננים, בעיקר בהקשר של למידת מתמטיקה ומדעים, לצד ירידה בתפיסת המסוגלות העצמית של בנות מחוננת, בעיקר מגיל חטיבת הביניים (דורי וזוהר, 2008). במחקר זה נמצא שתפיסת המסוגלות העצמית המתמטית של הבנות עולה בין כיתה י' לכיתה י"ב. ייתכן שהלמידה בבית ספר ייחודי והתחושה שהן מצליחות להתמודד עם החומר המתמטי המורכב בתיכון העלו את הביטחון ורמת המסוגלות העצמית של הבנות.

המחקר לא מצא הבדל מובהק בין תפיסות המסוגלות העצמית לבין הכיתה (י' לעומת י"ב). כמו כן, הבדל מובהק בין תפיסות המסוגלות העצמית לבין רמת הלימוד של התלמידים במתמטיקה (4 או 5 יח"ל), נמצא רק בתפיסת המסוגלות העצמית המתמטית. ממצאים אלו סותרים את השערות המחקר, בהן הערכנו כי תפיסות המסוגלות העצמית יהיו גבוהות יותר בקרב תלמידי כיתה י"ב ובקרב תלמידי 5 יח"ל. הסבר אפשרי לממצאים אלו נעוץ באופיו של בית הספר, אליו מגיעים תלמידים מרחבי הארץ

ומרקעים מגוונים. בבתי הספר היסודיים וחטיבות הביניים בהם למדו תלמידים אלו, הם היו לרוב תלמידים שבלטו ביכולותיהם הגבוהות. בתיכון, התלמידים נדרשים ללימודים מאומצים והם נפגשים עם קבוצת שווים חזקה. ייתכן שהתלמידים הגיעו לבית הספר עם תפיסת מסוגלות עצמית חזקה יחסית, וחווית הלמידה בבית הספר לא השפיעה על תפיסה זו, אלא שהתלמידים פיתחו תפיסה ריאלית של יכולותיהם, בניגוד לחוויה שלהם בשנים לפני כן. בהקשר של רמת הלימוד, נציין כי התלמידים המגיעים לבית הספר הם תלמידים בעלי יכולות יוצאות דופן בתחומים שונים, לאו דווקא בתחום המדעים והמתמטיקה. הסביבה הבית ספרית מטפחת יכולות אלו עוד יותר, דבר שיכול להשפיע על תפיסות המסוגלות העצמית הכללית שלהם לטובה. מצד שני, רק מיעוט מתוך תלמידי בית הספר לומד ברמה של 4 יחידות לימוד במתמטיקה. ההשוואה לסביבה הלימודית, בה מרבית התלמידים לומדים ברמה של 5 יחידות לימוד, יכולה להשפיע לרעה על תפיסת המסוגלות העצמית המתמטית של תלמידי 4 יחידות לימוד.

לסיכום, מהמחקר עולה כי גם בתוך מסגרת ייחודית יש מקום להתייחס להקשר המגדרי, וכן לתת מענה רגשי לתלמידים מחוננים שאינם מצטיינים במתמטיקה, במיוחד בתוך סביבה בה הם מהווים מיעוט. בנוסף, תוצאות המחקר מעלות שאלות נוספות לגבי השפעת הסביבה על המסוגלות העצמית של התלמידים – אלו גורמים בסביבה הייחודית וההומוגנית יחסית תומכים בפיתוח מסוגלות עצמית של תלמידים מחוננים ואלו לא? מחקר זה אינו נותן תשובות מובהקות אלא מדגיש את הצורך לבחון את תפיסות המסוגלות העצמית, והיבטים רגשיים אחרים, בקרב תלמידים מחוננים.

רשימת מקורות

אפללו, א'. (2012). סתירות בתפיסות של מורים: החסם הסמוי בהטמעת טכנולוגיות המחשב. *דפים 54*, 139–166.

דורי, י', וזוהר, ע'. (2008). *העדפה מתקנת ושוויון הזדמנויות בקרב בנות מחוננות*. ירושלים: משרד החינוך.

דים, א', וביתן, ע'. (2003). *תלמידים מחוננים: התמודדות עם צרכים רגשיים-חברתיים*. ירושלים: משרד החינוך.

רטנר, ג'. (2019). *כיתת מחוננים - המדריך למתקדמים*. ירושלים: משרד החינוך. https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/00028312029003663

Bandura, A. (1994). Self-Efficacy. In Ramachandran, V. S. (2012). *Encyclopedia of human behaviour*. Academic Press.

Francis, L. J., Katz, Y. J., & Jones, S. H. (2000). The reliability and validity of the Hebrew version of the Computer Attitude Scale. *Computers & Education*, *35*(2), 149–159.

May, D. K. (2009). Mathematics self-efficacy and anxiety questionnaire. Doctoral dissertation, University of Georgia.

Morán-Soto, G. & Benson, L. (2018). Relationship of mathematics self-efficacy and competence with behaviours and attitudes of engineering students with poor mathematics preparation. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 6(3)*, 200-220.

Pajares, F., & Graham, L. (1999). Self-efficacy, motivation constructs, and mathematics performance of entering middle school students. *Contemporary educational psychology*, *24*(2), 124–139.

Özcan, B., Kontaş, H., & Unisen, A. (2021). Sources of mathematics self-efficacy of gifted and non-gifted students in high school. *Research in Pedagogy*, *11*(1), 85–97.

Wang, M.-T., Eccles, J. S., & Kenny, S. (2013). Not Lack of Ability but More Choice: Individual and Gender Differences in Choice of Careers in Science, Technology, Engineering, and Mathematics. *Psychological Science*, 24(5), 770–775.

Williams, T., & Williams, K. (2010). Self-efficacy and performance in mathematics: Reciprocal determinism in 33 nations. *Journal of educational Psychology*, *102*(2), 453–466.

המכנה המשותף בשברים פשוטים - ידע, תפיסות ודרכי התמודדות של מורים

נאוה שאול, בית ספר י.ח ברנר- הרצליה
ד"ר רונית בסן-צינצינטוס, מכללת סמינר הקיבוצים

מבוא

נושא השברים הפשוטים הנלמד בבית הספר היסודי נתפס על ידי תלמידים רבים כקשה, בעיקר כאשר הם נדרשים למצוא מכנה משותף לצורך השוואה, חיבור וחיסור שברים. קושי זה מקבל משנה תוקף כאשר המכנים הם בעלי מחלק משותף, אך אינם כפולה אחד של השני. בנוסף על כך, מורים רבים מעידים כי קיים קושי בהוראת הנושא בכיתה.

במתמטיקה, מכנה משותף הוא מספר שלם המתחלק בכל אחד מהמכנים של השברים הנתונים. המכנה המשותף הקטן ביותר הוא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של המכנים - כמק"ב. למכנים בשברים פשוטים יש יותר ממכנה משותף אחד ואותם ניתן למצוא באמצעות כפולה של הכמק"ב בקבוע. לדוגמה: 24 הוא הכמק"ב של 8 ו- 3. אמנם גם 72 הוא כפולה משותפת אך לא המינימלית (בסן-צינצינטוס ופטקין, 2016). ישנן מספר אסטרטגיות למציאת מכנה משותף. מציאת המחלק המשותף הקטן ביותר - ממק"ב (Lowest Common Denominator- LCD) היא מיומנות בסיסית הנדרשת להשוואה, לחיבור ולחיסור שברים פשוטים. בסן ופטקין מציגות אסטרטגיות למציאת הכפולה המשותפת הקטנה ביותר - כמק"ב (Lowest Common Multiple- LCM) אשר מורחבות לרעיון של מציאת הממק"ב (Bassan-Cincinatus & Patkin, 2015). ניתן להשתמש בכל כפולה של שני מספרים או יותר כמכנה משותף, אך כאשר מבקשים למצוא מכנה משותף, בדרך כלל מתייחסים למכנה המשותף הקטן ביותר.

אמנם מציאת המכנה המשותף הקטן ביותר אינה הכרחית לפי תכנית הלימודים, אך על מנת שהתלמידים יצליחו לבצע משימות הדורשות מציאת מכנה משותף הקטן ביותר, עליהם להכיר את המושגים "כפולה משותפת" ו"כפולה משותפת הקטנה ביותר" ואת הדרכים למציאתם. למשל מציאת כפולה משותפת קטנה ביותר באמצעות פרוק מספר לגורמים ראשוניים (בר-און ואחרים, 2011).

מכנה משותף במתמטיקה הוא מספר שלם המתחלק בכל אחד מהמכנים של השברים הפשוטים הנתונים (בסן-צינצינטוס ופטקין, 2016). בשברים פשוטים ניתן למצוא את המכנה המשותף הקטן ביותר שהוא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של המכנים- כמק"ב. למכנים בשברים פשוטים יש יותר ממכנה משותף אחד ואותם ניתן למצוא באמצעות כפולה של הכמק"ב בקבוע. לדוגמה: 24 הוא הכמק"ב של 8 ו- 3. אמנם גם 48 ו- 72 הם כפולה משותפת של 3 ו- 8 שכן הם מתחלקים בשניהם ללא שארית, אך הם אינם הכפולה המינימלית שלהם. ניתן להשתמש בכל כפולה של שני מספרים או יותר כמכנה משותף, אך כאשר מבקשים למצוא מכנה משותף, בדרך כלל מתייחסים למכנה המשותף הקטן ביותר.

על פי פריאל ואחרים (Friel, S., Rachlin, S., Doyle, D., Nygard, C., Pugalee, D., & Ellis, M., 2001), על מנת שתלמידים בכל השכבות יוכלו להשתפר במתמטיקה, הם זקוקים להוראה יעילה בכל הכיתות. טענה זו מתארת את הקשר הישיר בין למידת התלמידים לבין הוראת המתמטיקה. ההבנה כי למורים יש תפקיד משמעותי בשיפור הוראת המתמטיקה מובילה לשאלה אילו סוגים של תמיכה וניסיון דרושים למורים כדי לבצע את תפקידם בצורה יעילה יותר. הוראה טובה תלויה ביכולת של מורים לקבל החלטות המבוססות על הידע

המתמטי שלהם, על דרישות תכנית הלימודים, על סביבת ההוראה בבית הספר ובכיתה ועל הצרכים של התלמידים.

קופור-גנקטארק מציין במאמרו (Copur-Gencturk, 2021) כי ידע המורים העיקרי שמורים למתמטיקה זקוקים לו על מנת להשיג הוראה אפקטיבית בתחום השברים הפשוטים, הוא ידע התוכן המקצועי מאחר ומורים לא יכולים ללמד נושא שהם בעצמם לא מבינים. לטענתו, מרכיב הידע המזוהה ביותר עם ידע התוכן המקצועי בשברים פשוטים הוא ידע של עובדות, חוקים ומושגים. יחד עם זאת, ידע תוכן מקצועי כולל גם הבנה מושגית מפורשת של הליכים בסיסיים וגם מדוע החוקים והעובדות מוצדקים ונחוצים. אמנם ידע תוכן מקצועי בשברים פשוטים של מורים למתמטיקה לבדו אינו מספיק על מנת להבטיח הוראה אפקטיבית של נושא זה, אך היעדר ידע זה מונע את האפשרות ליצור אווירה לימודית שבה התלמידים יכולים לבסס הבנה משמעותית של המושגים אותם הם לומדים.

פציו וסיגלר (Fazio & Siegler, 2011) חקרו גם הם את ידע המורים למתמטיקה בנושא השברים הפשוטים. הם ציינו כי מורים למתמטיקה צריכים לדעת להסביר לא רק כיצד לענות על שאלה, אלא גם מדוע דרך זו היא הנכונה והמתאימה ביותר ומדוע דרך אחרת אינה מתאימה. על מנת שמורים יוכלו לעשות זאת, נדרשת מהם הבנה מעמיקה בשברים פשוטים.

במחקר של וורד ותומס (Ward & Thomas, 2007) נבדק מהו ידע המורים למתמטיקה בחיבור, חיסור וחילוק שברים פשוטים. מתוך תשובות המורים שהשתתפו במחקר, נמצא כי 39% מהם תארו את השימוש במכנה המשותף כדי לחבר שברים פשוטים בדרך שאינה מעידה על הבנה מושגית של החומר אותו הם מלמדים, עובדה אשר סיפקה הוכחה לכך שידע מורים מצומצם עלול להגביל במקרים מסוימים את הישגי התלמידים.

המחקר הנוכחי בחן ידע מורים בנוגע למכנה משותף בשברים פשוטים, את האסטרטגיות האפשריות למציאתו ודרכי התמודדותם בהוראתו. המשימות במחקר כללו כמה סוגים של מכנים:

- מכנים מוכלים, כלומר אחד המכנים הוא כפולה של המכנה / המכנים הנוספים בשאלה.
- מכנים זרים, כלומר מכנים להם אין מחלק משותף (פרט ל-1).
- מכנים שונים, כלומר מכנים שהם אינם כפולה אחד של השני, אך יש להם מחלק משותף.

אוכלוסיית המחקר הייתה מורות למתמטיקה בבתי ספר יסודיים המלמדות בשכבות ה'-ו'.

במחקר נעשה שימוש בראיונות עומק תוך שימוש בריאיון מובנה למחצה, שבו חלק מהשאלות נקבע מראש ולמראיינת הייתה אפשרות לשנות את סדר השאלות ולהוסיף עליהן שאלות בהתאם לדברים העולים במהלך הריאיון (שקדי, 2003).

במסגרת המחקר התקיימו ראיונות עם כל אחד ממשתתפי המחקר בנפרד. כל ריאיון נערך כשעה. בשל התפרצות מחלת ה"קורונה", הראיונות בוצעו באמצעות מערכת ה- "Zoom" והם הוקלטו ושוקלטו על מנת להפיק תיעוד מילולי של הריאיון (Corbin & Strauss, 2015).

שאלות המחקר:

1. מהו ידע מורים למתמטיקה בכיתות ה'-ו' על ידע התוכן אותו התלמידים צריכים לרכוש לפני שלומדים את נושא המכנה המשותף בשברים פשוטים?
2. מהו ידע מורים למתמטיקה בכיתות ה'-ו' לגבי אסטרטגיות למציאת המכנה המשותף?
3. באילו אסטרטגיות מורים מלמדים את נושא המכנה משותף ומדוע בחרו באסטרטגיות אלו?

במחקר נמצא כי המורות שהשתתפו במחקר הפגינו בקיאות קוריקולרית בנושא השברים הפשוטים. בנוסף, המורות ידעו לומר כי ישנה חשיבות גדולה במציאת המכנה המשותף הקטן ביותר, אך מרביתן ציינו כי אינן מקפידות על כך.

במחקר נמצא בנוסף כי המורות משתמשות במגוון מצומצם של אסטרטגיות למציאת מכנה משותף. כאשר הן מתבקשות למצוא בעצמן מכנה משותף וכאשר הן מלמדות את הנושא בכיתה.

כאשר המורות התבקשו למצוא בעצמן מכנה משותף **לשברים מוכלים**, מרביתן עשו זאת באמצעות רישום הכפולות של המכנה הקטן שהוא המכנה המוכל, עד שהגיעו לכפולה הזהה למכנה הגדול שאחד המחלקים שלו הוא המכנה הקטן. אסטרטגיה נפוצה נוספת הייתה צמצום השברים למכנה הקטן בין השברים הנתונים. לעומת זאת, כאשר המורות התבקשו לציין באמצעות איזו אסטרטגיה ינחו את התלמידים למצוא מכנה משותף למכנים מוכלים, מרביתן בחרו להשתמש באסטרטגיה של הרחבת המכנים המוכלים למכנה המכיל ללא בדיקה האם קיים מכנה משותף קטן יותר. אחת המורות אף ציינה כי לא מדגישה לתלמידים את חשיבות צמצום השברים במהלך פתרון התרגיל, אלא רק את צמצום התוצאה הסופית.

כאשר המורות התבקשו למצוא מכנה משותף **למכנים זרים**, מרביתן השתמשו בראש ובראשונה באסטרטגיה של חישוב מכפלת המכנים הנתונים ורק לאחר שהתבקשו להציג אסטרטגיה נוספת לפתרון, השתמשו באסטרטגיה של מציאת כפולה משותפת למכנים הנתונים. בנוסף, מורה אחת בלבד ניסתה לאתר למכנים הנתונים מחלקים משותפים במטרה למצוא את המכנה המשותף הקטן ביותר. לעומת זאת, כאשר המורות התבקשו לציין באמצעות איזו אסטרטגיה ינחו את התלמידים למצוא מכנה משותף למכנים זרים האסטרטגיה הנפוצה ביותר הייתה המחשה באמצעות ציור על הלוח. אסטרטגיה נוספת שהמורות העידו כי ישתמשו בה כדי ללמד את הילדים כיצד למצוא מכנה משותף לשברים בעלי מכנים זרים הייתה מכפלת המכנים, כאשר מתוך ארבע פעמים בהן המורות העידו כי ישתמשו באסטרטגיה זו, שלוש פעמים היו כאשר התבקשו לחשוב על אסטרטגיה נוספת למציאת המכנה המשותף.

כאשר המורות התבקשו למצוא מכנה משותף **למכנים שונים**, האסטרטגיות של מציאת מחלקים משותפים וכפולה משותפת היו הנפוצות ביותר ובאותה מידה. כאשר הן התבקשו להשתמש באסטרטגיה נוספת למציאת מכנה משותף, מרביתן עשו זאת על ידי חישוב מכפלת המכנים, אשר הוביל למכנה משותף שאינו הקטן ביותר. לעומת זאת, כאשר המורות התבקשו לציין באמצעות איזו אסטרטגיה ינחו את התלמידים למצוא מכנה משותף למכנים שונים, האסטרטגיה הראשונה שהשתמשו בה וגם הנפוצה ביותר הייתה מציאת כפולה משותפת ורק כאשר התבקשו לחשוב על אסטרטגיה נוספת ללמד באמצעותה את התלמידים, הן העידו כי יעשו זאת באמצעות מכפלת המכנים הנתונים.

כאמור, המורות שהשתתפו במחקר הפגינו בקיאות קוריקולרית. לעומת זאת, ניתן לראות כי מגוון האסטרטגיות בהן המורות השתמשו גם כדי למצוא בעצמן מכנה משותף וגם כדי להסביר לתלמידים כיצד לבצע זאת, היו מצומצמות מאוד והתמקדו בעיקר במציאת כפולות משותפות. בנוסף, ניתן לראות בבירור כי למרות שהמורות מעידות כי חשוב למצוא את המכנה המשותף הקטן ביותר, בתהליך מציאת המכנה המשותף הן לא שמות על כך דגש גם כאשר מחשבות בעצמן את המכנה המשותף וגם כאשר מלמדות את התלמידים כיצד לעשות זאת.

במחקר זה ניתן לראות כי יש לסייע למורים לבסס הבנה מעמיקה יותר של חשיבות מציאת המכנה המשותף הקטן ביותר ולהרחיב את הידע שלהן בנוגע לאסטרטגיות באמצעותן ניתן למצוא מכנה משותף בשברים פשוטים ושל הקניית הנושא לתלמידים, ובכך להשביח את עבודתם של המורים בכיתה.

רשימת מקורות

בסן-צינצינטוס, ר' ופטקין, ד' (2016). המכנה המשותף- משברים פשוטים ועד שברים אלגבריים. **החינוך וסביבו, ל"ח**, 153-163.

בר-און, כ., שוחמי, מ., שמר, מ., ברדוגו, ר., הר-אל, א., אונגר, מ., קורבליט, א. (2011). שברים פשוטים: מדריך למורה. הוצאת יבנה בונוס.

שקדי, א. (2003). מילים המנסות לגעת: מחקר איכותני- תיאוריה ויישום. הוצאת רמות- אוניברסיטת תל אביב.

Bassan-Cincinatus, R., & Patkin, D. (2015). Determining the lowest common denominator. *Learning and Teaching Mathematics*, *2015*(19), 10-12.

Copur-Gencturk, Y. (2021). *Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. Educational Studies in Mathematics*, 107(3), 525-545.

Corbin, J., & Strauss, A. (2014). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Sage publications.

Fazio, L., & Siegler, R. S. (2011). *Teaching fractions* (Vol. 22). North Coburg: International Academy of Education.

Friel, S., Rachlin, S., Doyle, D., Nygard, C., Pugalee, D., & Ellis, M. (2001). *Principles and Standards for School Mathematics Navigations Series: Navigating through Algebra in Grades 6-8.*

Ward, J., & Thomas, G. (2007). *What do teachers know about fractions.* Findings from the New Zealand numeracy development projects 2006, 128-138.

"אני חושבת שיש הרבה מה ללמוד מהם... הם חושבים אחרת"
תפיסת גננות את הוראת המתמטיקה והיצירתיות המתמטית בגני תקשורת

מירב צהר רוזן, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט
ענת קסירה, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט

מטרת המחקר

(א) לבחון את תפיסותיהן של גננות ביחס לתחום המתמטי בכלל וליצירתיות מתמטית בפרט בגן לילדים עם אוטיזם; (ב) לבחון את מאפייני הפעילויות שהציגו הגננות הנתפסות בעיניהן כיצירתיות, בהתאם לתוכן המתמטי ולהיבטי היצירתיות המקובלים בספרות המקצועית: עקרונות פדגוגיים- סביבה פיזית, סביבה פסיכולוגית, מעורבות הלומד ומרכיבי היצירתיות- שטף, גמישות ומקוריות.

ספרות תיאורטית בתחום

כבר בגיל הרך ילדים מפתחים רעיונות בלתי פורמליים בתחום המתמטי ברמה מורכבת ומתוחכמת. לרוב, תהליך זה מתפתח באופן טבעי ואינטואיטיבי. יחד עם זאת, קיימת חשיבות לשכלול ולטיפוח היכולות המתמטיות בגיל הרך (Shanley et al., 2017). מתוך כך, תפקיד הגננת חשוב ביותר לקידום הילד. זאת ועוד נמצא שתפיסות הגננת ביחס למתמטיקה משפיעות על דרכי הוראתה בגן (Buehl & Beck, 2015). היבט משמעותי בתחום המתמטי הינו היצירתיות המתמטית. יצירתיות מתמטית בגיל הרך משקפת תהליכי חקר והנאה של הילדים מגירויים במרחב הגן, תוך שימוש בהיבטים מתמטיים המסייעים בהבנת העולם הסובב אותם (Alexandre & Pontes, 2020). חשיבה יצירתית מאופיינת בשלושה היבטים פדגוגיים עיקריים (Cremin & Chappell, 2019): *סביבה פיזית* הכוללת מגוון רחב של חפצים וסביבות למידה עשירות, *סביבה פסיכולוגית* הכוללת התאמות ותיווך, ו*מעורבות הלומד* המתבטאת במשימות מסדר חשיבה גבוה. כמו כן, יצירתיות מתמטית כוללת שלושה רכיבים מרכזיים (Torrance, 1974), תוך מיקוד בהיבט המתמטי. *שטף מתמטי*, מתייחס ליכולת להציע תגובות רבות ושונות לפתרון בעיה מתמטית; *גמישות מתמטית* מתייחסת ליכולת לשנות מסלולי חשיבה ואסטרטגיות ו*מקוריות מתמטית*, מתייחסת ליכולת למצוא נתיב פתרון ייחודי, ויוצא דופן. נמצא, שתפיסת אנשי חינוך לגבי יצירתיות, הנה מפתח חשוב להבנת תהליכי היצירתיות בגן. היא משפיעה על דרך הוראתם, על בחירת הבעיות שהם מזמנים ועל השיח המתמטי (Alexandre & Pontes, 2020). התחום המתמטי הכללי והיצירתיות המתמטית בגן נחקרה רבות החינוך הרגיל, מעטים המחקרים אשר עוסקים ביצירתיות מתמטית בקרב ילדים עם אוטיזם (ASD). פרופיל ההישגים במתמטיקה של תלמידים עם ASD, בהשוואה

לילדים עם התפתחות תקינה אינו חד משמעי . בעוד שטיטקה ועמיתיו (Titeca et al.,2017) מצאו שאין הבדל בין היכולות המתמטיות של ילדים צעירים עם ASD לבין ילדים עם התפתחות תקינה, וואנג ועמיתיו (Wang et al., 2022) מצאו שילדים בני 3-6 עם ASD הראו יכולות מתמטיות נמוכות יותר בהשוואה לבני גילם עם התפתחות תקינה. זאת ועוד, נמצאה לקות למידה במתמטיקה אצל 22% מהבוגרים עם אוטיזם (Oswold et al., 2016). גם המחקר אודות יצירתיות מתמטית בקרב אוכלוסיה זו בגיל הרך מועטה ואינה בהירה. נטל (Nettle, 2006) מצאה שאנשים עם ASD עשויים להניב ביצועים יצירתיים בענפי המתמטיקה וההנדסה אך חצרוני ועמיתיה מצאו (Hetzroni et al., 2019) שאין הבדל בין תלמידים עם ASD בתפקוד גבוה לבין עמיתיהם עם התפתחות תקינה ביחס ליכולות החשיבה היצירתיות בפתרון בעיות מתמטיות. המחקר הנוכחי יעסוק לראשונה בתפיסת הגננות את יכולת היצירתיות המתמטית של ילדים עם ASD בגיל הגן.

שיטת המחקר

גישת המחקר: מערבת שיטות. בחלק האיכותני נעשה שימוש בגישה התמטית של ניתוח תוכן נרטיבי בכדי לבחון את תפיסות הגננות ביחס להוראת המתמטיקה בכלל וליצירתיות מתמטית בפרט. בניתוח הכמותי נערך מבחן חי-בריבוע לטיב התאמה (Chi-squire for goodness of fit), בכדי לבחון הבדלים בין מאפייני הפעילויות שהציגו הגננות.

משתתפים: 31 גננות לילדים עם ASD ממרכז הארץ, בעלות תואר ראשון בחינוך מיוחד. טווח הגילים נע בין 25-50 שנים (M = 33.03, SD = 6.04) והוותק נע בין 3-25 שנים (M = 8.63, SD = 7.42).

כלי המחקר: ראיון חצי מובנה. לראיון שני חלקים מרכזיים: (א) שאלות אודות תפיסת הוראת המתמטיקה באופן כללי ותפיסת היצירתיות המתמטית של הגננות ביחס לילדים עם ASD(ניתוח איכותני); (ב) תיאור הגננות של לפחות שלוש פעילויות המוגדרות בעיניהן כפעילויות המפתחות יצירתיות מתמטית. חלק זה נותח באופן כמותי תוך התייחסות לשלושה היבטים: תוכן מתמטי (מושג המספר, תחושה מרבית וגאומטריה, מושגים כמותיים בחיי היום יום), עקרונות פדגוגיים לפיתוח יצירתיות (סביבה פיזית, סביבה פסיכולוגית, מעורבות הלומד) ורכיבי היצירתיות *(שטף, גמישות ומקוריות).*

ממצאים מרכזיים

ממצאי הניתוח האיכותני העלו שתי תמות מרכזיות

1. ***מתמטיקה בגן לילדים עם ASD- למה ואיך?*** (א) מרבית הגננות תארו **חשיבות** עצומה לתחום המתמטי עבור ילדים עם ASD כחלק מהכנה לחיי היום יום וכהיבט המארגן את העולם עבור ילדים אלה. חלק מהגננות **אינן רואות** את המתמטיקה כתחום ראשון בסדר העדיפויות.

הן תופסות את פיתוח המיומנויות החברתיות והתקשורתיות של הילדים עם ASD כבעלות עדיפות עליונה. (ב) תוארו **ההתאמות** הנדרשות עבור הילדים בתחום הקוגניטיבי (חזרתיות, שימוש בתקשורת חלופית), ובתחום המוטיבציוני-התנהגותי (תחומי עניין, גמישות).

2. ***יצירתיות מתמטית ו-ASD*** - (א)הגננות מתארות את תפיסת היצירתיות המתמטית בגן בשתי נקודות מבט: הראשונה, ממוקדת בתפיסות **מכוונות גננת** (בחירת הפעילות, התאמות, דגש על ידע מתמטי וידע פדגוגי). השנייה, ממוקדת בתפיסות **מכוונות ילד** (דגש על תובנות הילד, השאלות שיעלו). (ב)הגננות הביעו **אמביוולנטיות** ביחס לתפיסתן את היכולות היצירתיות של ילדים עם ASD. חלקן תארו קשיים ביצירתיות של הילדים, בשל מאפייני החשיבה הייחודיים של האוכלוסייה כמו קושי בגמישות ובעיבוד מידע, הנדרשים ביצירתיות מתמטית. לעומת זאת, אחרות תפסו את מאפייני החשיבה הייחודיים של הילדים כמשמשים מנוף ליצירתיות המתמטית.

ממצאים מתוך הניתוח הכמותי

הניתוח הכמותי התמקד במשימות המתמטיות שהציגו הגננות אשר נתפסות בעיניהן כיצירתיות ונותחו בהתאם לשלושה היבטים. (א) **תוכן מתמטי**: נמצא שהגננות עושות שימוש מצומצם בתכנים המתמטיים במהלך קידום חשיבה יצירתית. הוצגו פעילויות רבות ביותר באופן מובהק בתחום מושג המספר (n = 128), בנושאים מניה, ספירה ופעולות החיבור והחיסור. מעט פעילויות הוצגו בנושא תחושה מרחבית וגאומטריה (n = 24) שהתמקדו בעקר בצורות. חסר ביטוי מפורש לתחום "מושגים כמותיים בחיי היום יום"; (ב) **עקרונות פדגוגיים לפיתוח יצירתיות**: נמצא שבאופן מובהק, המרכיב השכיח ביותר אליו התייחסו הגננות הוא הסביבה הפיזית (n = 89), אחריו מעורבות התלמיד (n = 32) ולבסוף הסביבה הפסיכולוגית (n = 17); (ג) **מרכיבי היצירתיות**: הגננות הציגו שטף של רעיונות (M = 5.23, SD=1.73), מרבית הרעיונות הביעו גמישות (M=4.29, SD=1.22) קרי, הרעיונות היו שונים זה מזה. הרעיונות המקוריים (5% מכלל הפעילויות) הדגימו יצירתיות מתמטית בהתאמה לפרופיל הייחודי של הילדים, כמו: מניית חפצים מתוך תחומי העניין הייחודיים לילד או אימון בספירה כחלק מפעולות הרגעה.

דיון ומסקנות

נמצא שהגננות הציגו אחריות לפיתוח התחום המתמטי, תוך שימוש באסטרטגיות הוראה מותאמות הלוקחות בחשבון את הפרופיל הייחודי של הילדים. יחד עם זאת, עלתה הסוגייה האם מאפייני הליבה של הלקות קרי, קשיים תקשורתיים וחברתיים הפוגעים בתפקוד הילדים, אינם צריכים לעמוד בראש סדר העדיפויות בתכנון ההוראה בגן הילדים? בדומה לספרות המקצועית, גם במחקר הנוכחי עלו דעות שונות בהתייחס ליכולת היצירתיות המתמטית של ילדים עם ASD. ניתן להבחין שלמרות שהגננות הצליחו לנמק את הקשיים של הילדים

ביצירתיות מתמטית בהתייחס למאפייני הלקות, הן לא הצליחו לספק הסבר מנומק ליכולות היצירתית הייחודית של הילדים. ניתוח המשימות המתמטיות שהציגו הגננות אשר נתפסות בעיניהן כיצירתיות העידו על הבנת חלקית של התחום: (א) הגננות עושות שימוש חלקי בנושאים המתמטיים המופיעים בתוכנית הלימודים במהלך פיתוח יצירתיות ואינן מתייחסות לנושאים כמו מושגי זמן, אומדן, סימטריה; (ב) הגננות עושות שימוש חלקי בעקרונות ובמרכיבי היצירתיות. הן הרבו בגיוון הסביבה הפיזית, אך עשו שימוש מועט במעורבות התלמיד ובעיקר בסביבה הפסיכולוגית (התאמות). ממצא זה אינו בהלימה להתאמות הרבות שהציגו הגננות בעת פעילות מתמטית שגרתית, ממוקדת תוכן. ייתכן שהן רואות בהתאמות כפוגעות במהות היצירתיות ולכן ממעיטות בשימוש בהן. ממצאי המחקר אלו חשובים ביותר להכשרה מקצועית של גננות בתחום. יש לתת דגש על הרחבת הידע באשר לשפע הנושאים המתמטיים בגן הילדים ולקשרם לפיתוח היצירתיות בגן. כמו כן יש להעמיק במרכיב מעורבות הילדים ובמרכיב הסביבה הפסיכולוגית. מרכיבים אלו חשובים ביותר בעת פעילות יצירתית לקידום מיטבי של הילדים.

מקורות

Alexandre, E., Pontes, S. (2020). Mathematics in early childhood education: An educational look from the perspective of creativity-Mathematics in early childhood education: An educational look from the perspective of creativity. *Diversitas Journal, 5* (2), 1166-1176.

Buehl, M. M., & Beck, J. S. (2015). The relationship between teachers' beliefs and teachers' practices. *International handbook of research on teachers' beliefs*, 66-84.

Cremin, T., & Chappell, K. (2021). Creative pedagogies: a systematic review. *Research Papers in Education,36*(3), 299-331.

Hetzroni, O., Agada, H., & Leikin, M. (2019). Creativity in autism: An examination of general and mathematical creative thinking among children with autism spectrum disorder and children with typical development. *Journal of Autism Development Disorder, 49*(9), 3833–3844.

Oswald, T. M., Beck, J. S., Iosif, A. M., McCauley, J. B., Gilhooly, L. J., Matter, J. C., et al. (2016). Clinical and cognitive characteristics associated with mathematics problem solving in adolescents with autism spectrum disorder. *Autism Research, 9*(4), 480–490.

Shanley, L., Clarke, B., Doabler, C. T., Kurtz-Nelson, E., Fien, H. (2017). Early number skills gains and mathematics achievement: Intervening to establish successful early mathematics trajectories. *The Journal of Special Education, 51*(3), 177-188.

Titeca, D., Roeyers, H., & Desoete, A. (2017). Early numerical competencies in 4-and 5-year-old children with autism spectrum disorder. Focus on Autism and Other Developmental Disabilities, 32(4), 279-292.

Torrance, E. P. (1974). *The Torrance tests of creative thinking: Technical norms manual*. Scholastic Testing Services.

Wang, L., Liang, X., Jiang, B., Wu, Q., & Jiang, L. (2022). What Ability Can Predict Mathematics Performance in Typically Developing Preschoolers and Those with Autism Spectrum Disorder?. *Journal of autism and developmental disorders*, 10.1007/s10803-022-05454-w.

תפיסות של מורים למתמטיקה בתיכון לגבי הוראת מתמטיקה בסביבת הכיתה ההפוכה

חלימה שרקייה, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
זהבית כהן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

התפשטות נגיף הקורונה והסגר שבא בעקבותיה הציבו אתגר למערכת החינוך אשר נתבקשה לבצע מעבר מהיר להוראה מקוונת או היברידית. תקופה זו, שכוללה בין היתר ריחוק חברתי ומעבר ללמידה מרחוק, העלתה את הצורך בחלופה ראויה לשיטת ההוראה המסורתית שתספק לתלמידים סביבה תומכת וחווית למידה מעמיקה ומשמעותית. אחת החלופות האפשריות היא 'הכיתה ההפוכה'. הכיתה ההפוכה היא סביבת למידה היברידית המבוססת על "היפוך" הגישה המסורתית ללמידה. בגישה זו, אנשי הוראה משתמשים בטכנולוגיה במטרה לשלב למידה מקוונת יחד עם למידה פרונטלית בכיתה. בעוד שבגישה המסורתית התלמידים לומדים בכיתה ומתרגלים בבית, בכיתה ההפוכה התלמידים לומדים את התכנים באופן מקוון מחוץ לכיתה בעזרת הרצאות וידאו, כך שהשיעורים בכיתה מוקדשים בעיקר לתרגול (Baepler, Walker, & Driessen, 2014). בשונה מהגישה המסורתית שבה המורה נמצא במרכז, בגישת הכיתה ההפוכה האחריות ללמידה היא בעיקר של הלומד עצמו (Song & Kapur, 2017). סביבת הכיתה ההפוכה מציעה לתלמידים את כל התכנים הדרושים להם בכדי ללמוד אותם באופן עצמאי לפני השיעור, והזמן בכיתה מוקדש בעיקר לפעילויות של עבודה שיתופית בקבוצות ולמידה אינטראקטיבית עם המורה שמטרתן להגיע להבנה מעמיקה יותר של החומר (Gaughan 2014). מחקרים מצביעים על יתרונות רבים של שיטת הלימוד בכיתה ההפוכה, ביניהם יכולת עידוד והגברת מעורבות התלמידים (Akçayır & Akçayır, 2018; Dori, Kohen, & Rizowy, 2020), העלאת העניין בלמידה (Tütüncü & Aksu, 2018), כמו גם שיתוף פעולה מוגבר עם המורה ועם עמיתיהם לכיתה, בפרט שתרגול הלמידה נעשה באופן שיתופי ולא יחידני כנהוג בגישה המסורתית (Akçayır & Akçayır, 2018; Lo & Hew, 2017a,b; Tütüncü & Aksu, 2018; Smith, 2016). נוסף על כך, בשל האינטראקציה המוגברת בין מורים לתלמידיהם, מורים מסוגלים לזהות ביתר קלות בעיות למידה אישיות של התלמידים ולהשקיע מאמץ רב יותר בכדי לעזור להם ולקדם אותם בצורה יותר טובה ויעילה (Lundin et al., 2018). השימוש בגישת הכיתה ההפוכה בחינוך המתמטי רווח בשנים האחרונות. בפרט, מחקרים מצביעים על שיפור בהישגי תלמידי תיכון ולתרומתה של הכיתה ההפוכה לביצועים מוצלחים יותר ולהבנה תפיסתית טובה יותר בהשוואה לגישה המסורתית (Bhagat & Chang, 2016; Lo et al., 2017; Sharkia & Kohen, 2021; Sharkia & Kohen, 2022).
עם זאת, מחקרים מצביעים על חשיבות מתן הזדמנות למורים לעבור השתלמויות לפיתוח מקצועי בגישת הכיתה ההפוכה כדי ליישם אותה באופן נכון בהוראה שלהם, שכן מעבר להוראה בשיטת הכיתה ההפוכה דורשת שינוי תפיסתי אצל המורים אשר נדרשים בעיקר לתרגל את החומר הנלמד בזמן השיעורים הפורמליים (Bates et. al, 2017; Bergamen & Sams, 2012). תקופת הקורונה אתגרה אף יותר את המורים אשר נדרשו לעיתים לבצע מעבר ללמידה מקוונת במסגרת השיעורים הפורמליים. במהלך תקופת הקורונה המאתגרת, משרד החינוך הציע פתרון ללמידה מרחוק על בסיס השימוש בסביבת קמפוס IL אשר הינה פלטפורמה ללמידה דיגיטלית המאפשרת חשיפה לקורסים ממיטב המוסדות האקדמיים, משרדי ממשלה וגופים ציבוריים נוספים בישראל. הקורסים מופקים ברמה גבוהה ובדגש על איכות הוראה, משלבים סרטונים, כלים אינטראקטיביים מתקדמים, ומסלולי למידה מותאמים אישית ללומד. בפרט, במטרה לספק תמיכה ללמידה עבור תלמידים בישראל אשר לומדים מתמטיקה ברמה מתקדמת, משרד החינוך החל במהלך נרחב של חשיפה לקורס בסביבת קמפוס IL הנקרא "קיוון חדש" אשר מיועד ללימודי מתמטיקה כהכנה לבגרות ברמת 5 יח"ל בשיטת הכיתה ההפוכה. קורס זה נוסד בטכניון טרם תקופת הקורונה על ידי ד"ר אביב צנזור מהפקולטה למתמטיקה, והמשיך להתהוות במהלך תקופה זו. קורס זה נועד לעזור בריענון החומר שנלמד בתיכון ולהציג את הידע הנדרש כבסיס

ללימודי המתמטיקה והפיסיקה בטכניון. קורס "קיוון חדש" נמצא מתאים כמענה לתלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה מתקדמת משום שתכני הקורס כוללים את רוב חומרי הלימוד לתלמידים מכיתה י' עד י"ב הלומדים ברמה של 5 יח"ל. החומר מוצג דרך סרטוני וידאו אשר מצולמים בסטודיו ייעודי ומועברים על ידי ד"ר אביב צנזור, כאשר לכל סרטון נלווים תרגילים אינטראקטיביים שמטרתם לבדוק את הבנת התלמידים לתכנים המתמטיים המצולמים. בכך, פלטפורמה זו מהווה תשתית המתאימה ליישום שיטת הכיתה ההפוכה המשלבת למידה מקוונת ועצמאית של הלומדים, כאשר השיעורים עם המורה בכיתה מוקדשים בעיקר לתרגול החומר שנלמד לפני השיעור באופן עצמאי בקורס המקוון.

מטרת המחקר

המחקר הנוכחי נועד לחקור את הקשר הייחודי של סביבת הכיתה ההפוכה בהקשר של הוראת מתמטיקה. מטרת המחקר היא להרחיב את הידע אודות הגישה ההיברידית ללמידה דרך שיטת הכיתה ההפוכה המשלבת שימוש בטכנולוגיות מתקדמות יחד עם מפגשים בכיתות הלימוד, תוך כדי בחינת תפיסותיהם של מורים כלפי ההוראה בשיטת הכיתה ההפוכה. בפרט, המחקר מציע לבחון את השפעת הלמידה בכיתה ההפוכה בסביבת קורס זה בקמפוס IL המשלבת שימוש בטכנולוגיות מתקדמות יחד עם מפגשים בכיתות הלימוד (באופן מקוון או פיסי) על תפיסותיהם של מורי תיכון המלמדים ברמה של 5 יח"ל. מכאן, מחקר זה מציע לספק סקירה כללית של תהליך ההוראה ב-FC מתמטיקה במהלך המגיפה מנקודת מבטם של מורים למתמטיקה בתיכונים שונים בישראל.

מתודולוגיה

מסגרת הדגימה הינה כ- 55 מורי מתמטיקה מורים למתמטיקה בבתי ספר תיכוניים מבתי ספר שונים בישראל, אשר השתמשו בפלטפורמת קמפוס IL בהוראתם בתקופת המגיפה (2020-2022).
כלי המחקר העיקר היה שאלון תפיסות כלפי המרכיב המקוון של אתר "קיוון חדש" שהועבר בסוף שנת הלימודים (יוני, 2021 ו- יוני 2022) לכלל המורים אשר פתחו כיתות באתר. השאלון התפיסתי מתייחס באופן רטרוספקטיבי לשימוש שלהם במרכיב המקוון של הכיתה ההפוכה, ליישום גישה זו בסביבת הכיתה הפיסית, ולתרומת השימוש באתר "קיוון חדש" לתהליך ההוראה שלהם באופן כללי. השאלון כלל 14 שאלות שניתנו בסולם ליקרט בן 5 נקודות הנעות בין 1 (לא מסכים במידה רבה מאוד) ל-5 (מסכים במידה רבה מאוד), כגון: האם חוויתם משהו חדש בשילוב הקורס המקוון בהוראה שלכם? מה לדעתכם היתרונות בשימוש בקורס המקוון? מה שיניתם בתכנון וביישום ההוראה שלכם במהלך השימוש בקורס? כמו כן, השאלון כלל 4 שאלות רפלקטיביות פתוחות שמטרתן לזהות כיצד מורים אלו יישמו את הקורס המקוון בהוראתם, המטרה ללמוד על האתגרים, הדילמות והיתרונות של השימוש בקורס המקוון בתקופת המגפה.

ממצאים

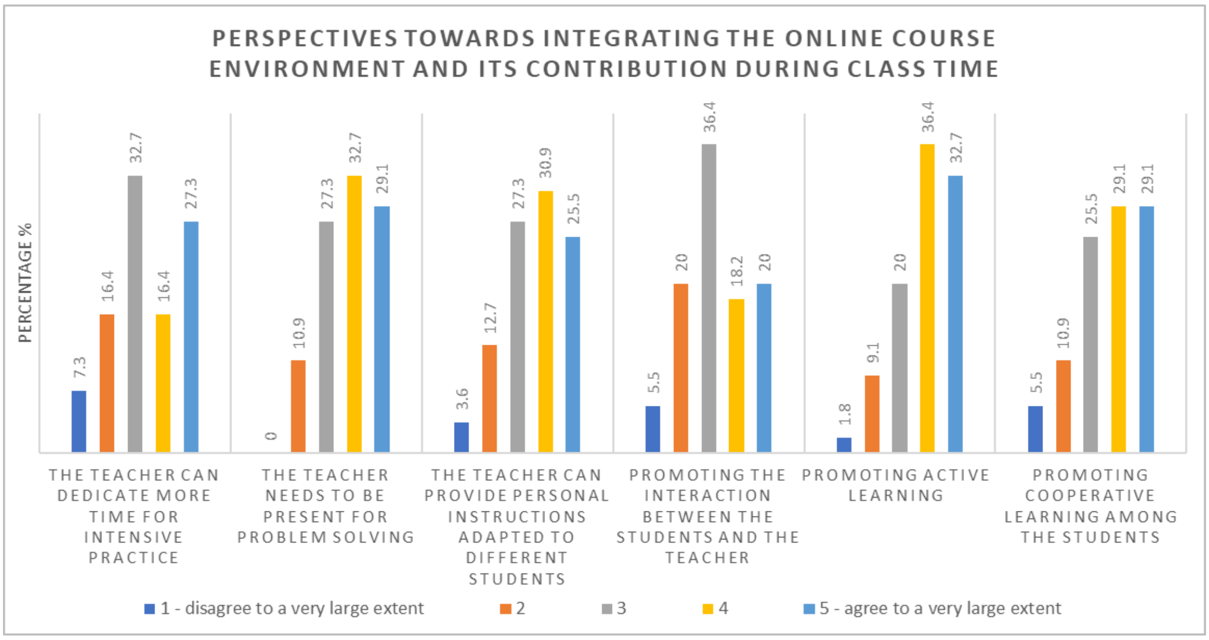
הממצאים המוצגים בגרף 1 להלן מראים שרוב המורים הינם בעלי תפיסות חיוביות בנוגע ליישום גישת הכיתה ההפוכה על בסיס השימוש בקורס קיוון חדש. בפרט, נמצא כי 60%-70% מהמורים הסכימו במידה רבה (ציון 4) או רבה מאוד (ציון 5) שלמורה יש תפקיד חשוב בקידום תהליך הלמידה של התלמידים במיוחד במהלך השיעור, לצורך תמיכה בפתרון בעיות (M=3.80, SD=0.989). בנוסף, אותם מורים גם הסכימו במידה רבה או רבה מאוד שיישום גישת הכיתה ההפוכה על ידי שילוב הקורס המקוון יכול לספק למורה זמן נוסף במהלך השיעור להסתובב בכיתה ולזהות בעיות ותפיסות שגויות שונות שעלו בקרב התלמידים, ובכך לספק להם הנחיות אישיות המותאמות להם אישית בהתאם לצרכים שונים של הלומדים (M=3.62, SD=1.114). כמו כן נמצא שהמורים סבורים שיישום גישת הכיתה ההפוכה בהוראת מתמטיקה תורם במידה רבה או רבה מאוד לקידום למידה פעילה בזמן השיעור (M=3.98, SD=1.031), וכן רובם נמצאו מסכימים במידה רבה או רבה מאוד שליישום גישה זו יש תרומה גדולה בקידום למידה שיתופית בקרב התלמידים בכיתה (M=3.65, SD=1.174). לבסוף, למרות הפוטנציאל להגביר את האינטראקציה בין המורים לתלמידיהם בזמן השיעור, בתשובותיהם רק אחוז קטן מהמורים (כ- 40%) הסכימו לכך במידה רבה או רבה מאוד (M=3.27, SD=1.162). בפרט נמצא שהמורים הסכימו במידה רבה (ציון 4) או רבה מאוד (ציון 5) שיישום גישה זו נותנת למורה

2

הזדמנות מצוינת לפנות יותר מזמן השיעור ללמידה פעילה בכיתה ופחות להרצאות פסיביות (M=3.40, SD=1.256).

גרף 1.

תפיסות המורים לגבי שילוב סביבת הקורס המקוון ותרומתה בזמן השיעור.



דיון ומסקנות

תקופת הקורונה היוותה אתגר רציני למורים אשר נדרשו לבצע מעבר או שילוב של למידה מקוונת במסגרת השיעורים הפורמליים. המחקר הנוכחי נועד לענות על האתגר הנוגע להבנת תפיסות מורים בנוגע לשילוב הכיתה ההפוכה בשיעורי מתמטיקה פורמליים. למרות אתגרים המוצגים בספרות בנוגע לכך שמעבר להוראה בשיטת הכיתה ההפוכה דורשת שינוי תפיסתי אצל המורים, ממצאי המחקר מצביעים על כך שרוב המורים אשר יישמו גישה זו, רואים בגישת הכיתה ההפוכה כבעלת יתרונות רבים שיכולים לתרום לקידום תהליך הלמידה, במיוחד בזמן השיעור בכיתה, בפרט משום שגישה זו נתפסת אצל המורים כתורמת לפינוי יותר מזמן השיעור ללמידה פעילה בכיתה ופחות להרצאות פסיביות (Baepler, Walker, & Driessen, 2014). התועלת שבמחקר זה היא התרומה לגוף הידע המחקרי והפרקטי בתחום הלמידה ההיברידית בהוראת המתמטיקה, בפרט על בסיס שימוש בגישת הכיתה ההפוכה. מבחינה פרקטית, המחקר הנוכחי נותן מענה לתקופות מאתגרות שבהן מערכות חינוכיות בעולם חיפשו דרכים להתאים את צורות ההוראה והלמידה לעידן משתנה, בפרט בעקבות משבר הקורונה.

רשימת מקורות

Akçayır, G., & Akçayır, M. (2018). The flipped classroom: A review of its advantages and challenges. Computers & Education, 126, 334-345.

Baepler, P., Walker, J. D., & Driessen, M. (2014). It’s not about seat time: Blending, flipping, and efficiency in active learning classrooms. Computers and Education, 78, 227–236.

Bates, J. E., Almekdash, H., & Gilchrest-Dunnam, M. J. (2017). The flipped classroom: A brief, brief history. In The flipped college classroom (pp. 3-10). Springer, Cham.

3

Bhagat, K. K., Chang, C. N., & Chang, C. Y. (2016). The impact of the flipped classroom on mathematics concept learning in high school. Journal of Educational Technology & Society, 19(3), 134-142.

Dori, Y. J., Kohen, Z., & Rizowy, B. (2020). Mathematics for Computer Science: A Flipped Classroom with an Optional Project. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16(12), em1915.

Gaughan, J. E. (2014). The flipped classroom in world history. The History Teacher, 47(2), 221-244.

Lo, C. K., & Hew, K. F. (2017a). A critical review of flipped classroom challenges in K-12 education: Possible solutions and recommendations for future research. Research and practice in technology enhanced learning, 12(1), 4.

Lo, C. K., & Hew, K. F. (2017b). Using “first principles of instruction” to design secondary school mathematics flipped classroom: The findings of two exploratory studies. Journal of Educational Technology & Society, 20(1), 222-236.

Lundin, M., Rensfeldt, A. B., Hillman, T., Lantz-Andersson, A., & Peterson, L. (2018). Higher education dominance and siloed knowledge: a systematic review of flipped classroom research. International Journal of Educational Technology in Higher Education, 15(1), 20.

Sharkia, H. & Kohen, Z. (2022) Investigating mathematical habits of mind in a flipped classroom environment Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4). p 291. Alicante, Spain: PME.

Sharkia, H., & Kohen, Z. (2021). Flipped Classroom among Minorities in the Context of Mathematics Learning: The Israeli Case. Mathematics, special issue on Mathematics Education in Science, Technology and Engineering: Exploring Research and Scholarship of the Student and Staff Experience, 9(13), 1500.

Song, Y., & Kapur, M. (2017). How to flip the classroom – “productive failure or traditional flipped classroom” pedagogical design?. Journal of Educational Technology & Society, 20(1), 292-305.

Tütüncü, N., & Aksu, M. (2018). A systematic review of flipped classroom studies in Turkish education. International Journal of Social Sciences and Education Research, 4(2), 207-229.

השפעת הוראת סוגיה הלכתית מתמטית על עמדות תלמידות כלפי מתמטיקה

אסתי בוטמן, מכללת ירושלים
מאיר סנדיק, מכללת ירושלים

מבוא ורקע תיאורטי

תחום מחקר שצובר פופולריות בעשרות השנים האחרונות הוא האתנומתמטיקה, אותו הגה המתמטיקאי הברזילאי ד'אמברוזיו (d'Ambrosio, 1985). המונח "אתנו-מתמטיקה" מייצג גישה מעניינת למתמטיקה, שמתכתבת עם גישת המתמטיקה ההומניסטית. גישה זו מציעה נקודת מבט אחרת על המתמטיקה וההתפתחות ההיסטורית שלה. בניגוד לתדמית הפורמלית והיבשה המקובלת של המתמטיקה, היא מזהה את התפתחות המתמטיקה כנטועה ביסודות התרבותיים של כל חברה, ובמארג החיים החברתיים בתחומים שונים.

התרומה של הגישה הזאת להוראת המתמטיקה ברורה. השימוש במטען התרבותי להסבר המונחים המתמטיים ולהמחשתם, עשוי להפיק תועלת רבה. כך אפשר לגשר על הפער השפתי ועל הקושי בהבנת המספרים והנוסחאות, תוך הדגמה פשוטה מנכסי התרבות או מהנורמות החברתיות שמוכרים היטב לתלמידים. כך התלמידים מזהים את עקרונות המתמטיקה בחיים עצמם, ומפנימים את החומר הלימודי כדבעי (d'Ambrosio, 1985).

לפי קצף (2004) האתנומתמטיקה מייצרת תנועה דו סטרית: מצד אחד היא מרחיבה את מקומה והשפעתה של המתמטיקה על תחומי חיים אחרים, ורואה בה כלי אפקטיבי שנותן מענה לאתגרים רבים ובעל פוטנציאל לפיתוח רעיונות ודרכי פעולה; ומצד שני היא מכירה בעובדת היותה מושפעת מתחומי חיים ודעת אחרים, ומאפשרת להשתמש בהם כאמצעים להנחלת העקרונות המתמטיים.

האתנומתמטיקה מצביעה על יחסי גומלין בין המתמטיקה למקצועות נוספים, שמביאה להפריה הדדית ביניהם. בהקשר של מחקר זה נתמקד בהשפעת תחומי דעת אחרים על לימוד המתמטיקה והוראתה, דרך השינוי שהיא מחוללת בתפיסת התלמיד את המתמטיקה ואת המסוגלות העצמית שלו בלמידתה.

בהקשר זה, "אמונה" היא עמדה קבועה שאדם מגבש ביחס לנושאים או אנשים מסוימים. מטבע הדברים, העמדות שלנו נקבעות לרוב בגילאים צעירים, בתהליכי התניה קלאסית על ידי איסוף מידע והסקת מסקנות (אלוני, 2009; כהן ופרידמן, 2002).

את האמונה כלפי המתמטיקה מגדירים החוקרים (Raymond, 1997; Schoenfeld, 1985; Nickson,1992) כתוצר של ההתנסות והחוויה המתמטיים של הלומד, בעקבותיהם הוא מגבש את עמדתו ביחס ל"טבעה של המתמטיקה" ו"לימוד מתמטיקה". שונפלד (Schoenfeld, 1985) טוען שהאמונה האישית של כל תלמיד ביחס למתמטיקה, משליכה על אופי ההתנהלות שלו בפתרון בעיות מתמטיות ובמצבים שדורשים חשיבה מתמטית.

על בסיס הרעיון שהציג שונפלד, הרחיבו מרטינו וזאן (Di Martino & Zan, 2011) את מאפייניה של אמונת התלמיד כלפי המתמטיקה, לשלוש קטגוריות שונות בהן היא נבחנת:

1. הממד הרגשי ביחס למתמטיקה - המקום המשמעותי שתופס הרגש בלימוד המתמטיקה והוראתה.

2. הממד ההשקפתי כלפי המתמטיקה - תפיסת התלמיד ביחס לאופי ומהות מקצוע המתמטיקה.

3. ממד תפיסת הכישורים והמיומנויות - הצלחות או כישלונות שחווה התלמיד בעבר, אותם גיבש לכדי תפיסה עצמית ביחס להצטיינותו במתמטיקה.

על גבי מודל זה, ובהמשך לגישת האתנומתמטיקה ולהכרה שלה ביחסי הגומלין בין המתמטיקה לתחומי דעת אחרים, אומץ שימוש בגורם נוסף אותו מציע סנדיק (2018) - השפעת לימוד הלכה על אמונת תלמידות ביחס למתמטיקה:

4. השפעתו של לימוד מעולם תוכן אחר על העמדות כלפי המתמטיקה.

המונח "העברה" בתחום הלמידה – ששאול מתחום הפסיכולוגיה - מתאר דינאמיות למידתית בה ידע או מיומנות או שיטת חשיבה מתחום אחד "מוצאים מהקשרם" ותורמים להבנה בתחום לימוד אחר (פרנקל, 2016).

סנדיק (2018) כבר בחן את השפעת עולם ההלכה על תפיסת המתמטיקה אצל בוגרי ישיבות. הוא מצא כי לתכנית הלימודים האתנומתמטית הייתה השפעה מובהקת על השינוי בעמדות כלפי מתמטיקה באופן כללי. מסקנת המחקר שלו היא:

> "הוראת מתמטיקה דרך סוגיות מתמטיות בספרות הרבנית מביאה לשינוי חיובי בעמדות סטודנטים חרדים הלומדים במכינות קדם אקדמיות – הן בעמדתם כלפי מתמטיקה בכלל, הן כלפי טבעה של המתמטיקה, הן כלפי המסוגלות העצמית שלהם במתמטיקה, ולבסוף גם כלפי היחס בין תורה למתמטיקה" (עמ' 70-71) .

כהמשך למחקרו של סנדיק, כמעט מתבקש לבדוק את השפעת הוראת סוגיה הלכתית-מתמטית על לימוד המתמטיקה של נערות חרדיות, שהעולם התרבותי שלהן נשען על אדני התורה וההלכה.

מחקר זה התבסס על סוגיה הלכתית-מתמטית המכונה "ביטול בשישים" העוסקת ביחס המקסימלי בין נפח תיבה לבין שטח המעטפת שלה. "ביטול בשישים" הוא מונח הלכתי מתחום הכשרות, שמציין את היחס בין מרכיבים שונים בתבשיל, בו התבשיל מותר באכילה. הדוגמה הקלאסית לכך: התורה אוסרת בישול ואכילת בשר וחלב יחד, ובמקרה שנשפך חלב לתוך סיר עם בשר, הבשר מותר באכילה (באופן כללי) אם מתקיים יחס של 1:60 בין החלב לבשר.

בעיית העירוב של הבשר והחלב מתרחבת גם למקרה של בישול בשר בסיר חלבי ולהפך. לשם התרת בשר כזה באכילה, הכרחי שבסיר עצמו מתקיים היחס הזה של 1:60. כלומר: חלל הסיר צריך להיות פי 60 מנפח המעטפת שלו, כך שהבשר שמתבשל בו הוא פי 60 מהחלב שאולי נספג בדפנות הסיר. רבי שלמה חלמא, בעל "מרכבת המשנה", נדרש לסוגיה זו ומוכיח את היחס המקסימלי בין נפח כלי לבין שטח המעטפת שלו, הן באמצעות דוגמאות מספריות והן באמצעות הוכחה אלגברית מתמטית (הוכחתו היא למעשה בעיית קיצון וניתנת להוכחה באמצעות כלים מחשבון דיפרנציאלי).

מטרת המחקר

כמו גישת האתנומתמטיקה בכלל, וההכרה המתגבשת והולכת בחשיבותה של הוראת מתמטיקה בדרך זו; כך אפשר לשער את תרומת מחקר זה ביחס לתלמידות חרדיות. סנדיק (2018) בחן את הנושא בהקשר של הציבור החרדי, וספציפית על בוגרי ישיבות, ואילו מחקר זה פונה לאפיק חדש שלא נבחן עד היום ומתמקד בתלמידות תיכון חרדיות, שאינן מתורגלות בלימוד ופיענוח סוגיות הלכתיות כבחורי ישיבות. הערך הרב אותו הן מייחסות לתורה, שמבוסס על חינוך שורשי ונשען על תפיסת עולם מוצקה, עשוי לתרום תרומה משמעותית לתפיסתן את המתמטיקה ככלי מרכזי בלימוד התורה וההלכה, ואף לשפר את הישגיהן הלימודיים במקצוע המתמטיקה.

המחקר המוצג כאן הוא מחקר בהתהוות ומטרתו לבחון את ההנחה הבאה: ההכרה של התלמידות בנחיצות ההבנה המתמטית בלימוד סוגיה הלכתית, לצד זיהוי דפוסי חשיבה מתמטיים בזירה אחרת שקרובה לעולמן התרבותי; בכוחם לשפר את עמדות התלמידות ביחס למתמטיקה, ובסופו של דבר לתרום ללימוד המתמטיקה שלהן תרומה ניכרת.

שאלת המחקר

האם לימוד סוגיה הלכתית-מתמטית ישפיע על תפיסת התלמידות את מקצוע המתמטיקה, שבתורה תשפיע על המוטיבציה ועל הביצועים שלהן בלימוד מתמטיקה?

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר מנתה 32 תלמידות כיתה י' בתיכון חרדי, 17 מתוכן לומדות מתמטיקה ברמה של 4 יח"ל (ברמה נמוכה) ו-15 ברמה של 5 יח"ל.

כלי המחקר: העברת שאלון סגור העוסק באמונתן של התלמידות כלפי מתמטיקה ומכיל 32 היגדים, כאשר בכל היגד על התלמידה לדרג את עמדתה בסולם ליקרט של חמש דרגות מ-1 (=לא מסכימה בכלל) עד 5 (=מסכימה מאוד). השאלון עובד ופותח על ידי סנדיק (2018) לצורך עבודת הדוקטורט שלו בהתבסס על שאלון (Crawford & Howell, 1998) הבודק אמונות אודות טבעה של המתמטיקה על פי ארבעה גורמים כלליים: (1) עמדות אודות המתמטיקה באופן כללי (2) עמדות אודות טבעה של המתמטיקה (3) אמונות התלמידים במסוגלותם העצמית במתמטיקה (4) עמדות אודות הקשר בין תורה ומתמטיקה. התלמידות ענו פעמיים על השאלון, לפני ואחרי הוראת הסוגיה ההלכתית-מתמטית, ונערכה השוואה בין שני השאלונים על מנת לבחון את השפעת לימוד הסוגיה על תפיסתן את המתמטיקה, את נחיצותה ואת תרומתה לחייהן.

ממצאים ומסקנות

ממצאי המחקר הראו כי הוראת מתמטיקה דרך סוגיות הלכתיות-מתמטיות מביאה לשינוי חיובי ומובהק בעמדות תלמידות חרדיות כלפי מתמטיקה לגורמיה השונים.

השיפור בעמדות כלפי מתמטיקה באופן כללי:

ניתן להסביר את השיפור בעמדות התלמידות לאחר ההתערבות באמצעות השיעור ההלכתי-מתמטי שנבנה עבורן. לימוד מתמטיקה המשלב בתוכו תפיסות מהתרבות התורנית ואורח חייהן החרדי של התלמידות לצד עקרונות וכלים מתמטיים, מביא להבנה כיצד רעיונות מתמטיים משתלבים בתוך עולמו התרבותי של הלומד – במקרה זה, מערכת החיים התורנית – וממילא לתפיסה חיובית יותר כלפי מתמטיקה. כאשר התלמידות נחשפו לסוגיה של 'ביטול בשישים', השכיחה בעולם החרדי, וראו כיצד רבי שלמה חלמא מתמודד עם הבעיה, לא רק בדוגמאות מספריות אלא מציג גם הוכחה אלגברית, הן מקבלות הצצה לעולם הרחב של המתמטיקה ולאופן בו עולם המתמטיקה המופשט יכול לשמש ככלי עזר בתוך חיי התרבות התורנית שלהן ואורח חייהן. ויותר מכך, לא מדובר רק באריתמטיקה (שבהלכה יש שימוש רב בה), אלא שימוש באלגברה וחשבון דיפרנציאלי (מציאת נקודת קיצון).

לימוד אתנומתמטי כזה, הביא לשינוי מובהק בתפיסה של התלמידות כלפי המתמטיקה באופן כללי; שהמתמטיקה איננה רק חישובים, אלא תחום רחב ומופשט הרבה יותר. כדי לבדוק זאת נערך מבחן t למדגמים תלויים. $t(31)= 5.253, p<0.05$. כלומר, ממוצע העמדות אחרי ההתערבות ($M=50.03$, $SD=8.314$) גבוה באופן מובהק מממוצע העמדות לפני ההתערבות ($M=41.09$, $SD=9.017$).

השיפור בעמדות כלפי המסוגלות העצמית במתמטיקה:

ההתנסות הביאה לשיפור אמונותיהן של התלמידות במסוגלותן העצמית במתמטיקה והגבירה את המוטיבציה שלהן. לפי אדם (Adam, 2004), תוכנית אתנומתמטית מביאה להגברת המוטיבציה של התלמיד ללמידה, וממילא גם לאמונה במסוגלות עצמית גבוהה יותר, שהיא, לפי שונפלד (Schoenfeld, 1985), אחד המאפיינים של אמונה ועמדה כלפי מקצוע מסוים. בנוסף, כאשר התלמידות רואות כיצד חז"ל מתמודדים בהצלחה עם סוגיות מתמטיות מורכבות, ללא הידע והכלים המתמטיים הקלאסיים, זה מגביר את המוטיבציה שלהן; שהן תצלחנה באתגרים המתמטיים שיעמדו בפניהן כי להן יש את הידע המתמטי הנדרש המעמיד אותן בנקודת פתיחה טובה יותר.

על מנת לבדוק זאת נערך מבחן t למדגמים תלויים. $t(31)= 6.189, p<0.05$. כלומר, ממוצע אמונות התלמידות אחרי ההתערבות ($M=29.69$, $SD=6.367$) גבוה באופן מובהק מממוצע האמונות לפני ההתערבות ($M=21.34$, $SD=6.856$).

השיפור בעמדות כלפי היחס בין תורה ומתמטיקה:

לאור העובדה כי התלמידות לא נחשפו לסוגיות הלכתיות-מתמטיות והיכרותן עם עולם ההלכה קלושה, ההשערה הייתה כי התלמידות לא תיראנה, לפני ההתערבות, קשר חיובי מהותי בין תורה ומתמטיקה, וכי החשיפה לסוגיה כזו תביא לשיפור בעמדותיהן כלפי היחס בין תורה ומתמטיקה. ואכן, מהממצאים עולה כי להתערבות הייתה השפעה מובהקת על השינוי בעמדותיהן. לאחר ההתערבות נמצא שיפור מובהק. על מנת לבדוק זאת נערך מבחן t למדגמים תלויים. $t(31)= 7.712, p<0.05$. כלומר, ממוצע העמדות אחרי ההתערבות ($M=16.94, SD=3.079$) גבוה באופן מובהק מממוצע העמדות לפני ההתערבות ($M=10.59, SD=3.555$).

השינוי בעמדות נובע מהחשיפה של החפיפה הרבה של המתמטיקה וההלכה. כפי שסנדיק (2018) שיער במחקרו כי רק חשיפה של עולם מתמטי ברמה גבוהה ומעמיקה יכול להביא לשינוי בעמדה. ואכן התלמידות נחשפו בשיעור לסוגיה המצריכה שימוש באנליזה ולא מסתפקת באריתמטיקה פשוטה.

הצעות למחקר המשך

בהמשך לנכתב כי המחקר הוא מחקר בהתהוות ונערך בהיקף קטן, ראוי להמשיך את המחקר ולהרחיבו, הן לכל רמות הלימוד בבית הספר והן לכל שכבות הגיל בחטיבת הביניים ובתיכון ואולי אף לזלוג לאקדמיה. כמו כן, ראוי להרחיב את המחקר לתלמידות לא חרדיות ולבדוק את השפעת לימוד הסוגיות ההלכתיות – שזרות להן – על לימוד המתמטיקה שלהן. בנוסף, ראוי לבחון לא רק את השפעת הוראת הסוגיה ההלכתית-מתמטית על **העמדות** של התלמידות, אלא גם על **ההישגים** של התלמידות במתמטיקה, ואולי גם במקצועות נוספים, בטווח הארוך ובטווח הקצר.

רשימת מקורות

אלוני, א'. (2009). מיני מוזיאון למדע וטכנולוגיה בבית הספר העל יסודי: סביבה לימודית אותנטית לפיתוח ידע מדעי, תחושת מסוגלות אישית ועמדות חיוביות כלפי מדע אצל תלמידים נאמני המוזיאון. רמת גן: אוניברסיטת בר אילן.

כהן, א', & פרידמן, ד'. (2002). פסיכולוגיה חברתית: עמדות - שינוי עמדות.

סנדיק, מ'. (2018). השפעת הוראת סוגיות מתמטיות הקשורות לחשבון דיפרנציאלי בספרות הרבנית על עמדות סטודנטים חרדים כלפי מתמטיקה. רמת גן: אוניברסיטת בר אילן.

פרנקל, פ'. (2016). הוראת מתמטיקה אצל מורים בעלי רקע ישיבתי. באר שבע: אוניברסיטת בן גוריון בנגב.

קצף, ע'. (2004). צא ולמד מתמטיקה כחלק מתרבות העם: זיקתו של החינוך המתמטי ההומניסטי לתרבות העם. על"ה (31), 20-25.

Adam, S. (2004). Ethnomathematical ideas in the curriculum. Mathematics Education Research Journal, 16(2), 49-68.

Crawford, J. R., & Howell, D. C. (1998). Comparing an individual's test score against norms derived from small samples. The Clinical Neuropsychologist, 12(4), 482-486.

d'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. For the Learning of Mathematics, 5(1), 44-48.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 43(4), 471–482.

Nickson, M. (1992). The culture of mathematics classroom: An unknown quantity? (D. A. Grouws, Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning, 101-114.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), 550-576.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press.

קבוצות דיון

למידה משולבת דיגיטל - תהליך ההכשרה של פרחי הוראה באמצעות סביבת הלמידה FULLPROOF – FULLPROOF אתגרים ודילמות

ניצן איזנשטרק, פולפרוף
חיים בלין, פולפרוף
אנטולי קורופטוב, המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט

מבוא

אחד מהיעדים המרכזיים של משרד החינוך הינו קידום למידה משולבת דיגיטל. המשרד מציין שלמידה משולבת דיגיטל מאפשרת לתלמידים, למורים ולמנהלים לקיים למידה ותקשורת מיטבית בשגרה ובחירום, מקדמת את בתי-הספר להוראה במאה ה-21, ויוצרת תנאים מיטביים לפיתוח כישורי הלומדים (אתר משרד החינוך 2022). גם חוזר מפמ"ר לשנה"ל תשפ"ג מתייחס ליעד זה בהגדירו למידה משולבת דיגיטל כלמידה מבוססת נתונים, המפתחת את מיומנויות הלומד העצמאי ומאפשרת למידה דיפרנציאלית ומותאמת אישית. (חוזר מפמ"ר מתמטיקה יולי 2022).

סביבת הלמידה המקוונת FullProof פותחה בהלימה ליעדים אלו והיא מכסה באופן מלא את נושאי הלימוד בגאומטריה לכיתות חט"ב ותיכון, בדגש על נושא הגאומטריה הדדוקטיבית.

הסביבה פועלת באישור טכנולוגי ופדגוגי של משרד החינוך והיא מוטמעת בהצלחה במכללות להכשרת מורים בחטיבות ביניים ובתיכונים ברחבי הארץ.

מטרת הסדנה הינה להציג למשתתפים את סביבת הלמידה FullProof, לאפשר למשתתפים התנסות בעבודה עם המערכת ולבחון את האופן הייחודי שבו היא עונה על היעדים ואתגרי השעה, בדגש על האפשרויות לשילובה בתהליך ההכשרה של פרחי הוראה.

רקע

תהליכי פיתוח מקצועי למורים משלבים למידה של תאוריות פדגוגיות ותכנים דיסיפלינריים, לצד התנסות מעשית כתלמידים וכמורים. תהליכים אלו מזמנים אפשרויות להיכרות עם כלים טכנולוגיים חדשים, דיון באופן שבו הם מתמזגים לתוך תהליכי הלמידה וההוראה והעשרה של ארגז הכלים המקצועי העומד לרשות המורים.

המערכת הדיגיטלית FullProof היא סביבת למידה מבוססת מחשב המאפשרת למשתמשים לתרגל בעיות הוכחה בגאומטריה, בכיסוי מלא של כל נושאי הלימוד ורמות הלימוד בגאומטריה לחט״ב ולתיכון

החל מהשלב הקדם דדוקטיבי ועד לרמה של בגרות 5 יח"ל. המשתמשים כותבים את כל שלבי ההוכחה בעצמם (סימונים, טענות, נימוקים, משוואות ובניות עזר), ובמידת הצורך מקבלים מהמערכת עזרה מותאמת אישית. המערכת בודקת את הפתרונות באופן אוטומטי ומיידי ומציגה משוב מפורט על כל שלבי הפתרון. המערכת משקפת למורים את הפעילות של התלמידים ואת הקשיים הנפוצים בכיתה, ועושה זאת באופן שוטף ומיידי וללא צורך בבדיקת הוכחות באופן ידני. FullProof משתלבת באופן טבעי בתהליכי ההוראה והלמידה (הקנייה, תרגול וההערכה) והיא מתאימה לכל סוגי הלמידה (פרונטלית, מקוונת או היברידית, באופן עצמי ובקבוצות) (איזנשטרק ואחרים, 2022). המערכת פותחה בראיה דידקטית המבוססת על טיפוח ויישום שיח דיסיפלינרי-פדגוגי מעמיק. השיח הדיסיפלינרי-פדגוגי הומשג על ידי שולמן במסגרת מודל Pedagogical, Curriculum and Content Knowledge (Shulman, 1986) ושוכלל לאחר מכן למודל TPACK (Technological Pedagogical and Content -Knowledge (Koehler &Mishra,2009). סביבת הלמידה המקוונת FullProof, משלבת את האלמנטים של מודל TPACK תוך שילוב של טכנולוגיה בשירות הפדגוגיה והדיסיפלינה של תחום הגאומטריה.

עיצוב, ממשק, תוכן וארכיטקטורה של הסביבה מאפשרים התנסויות בכל ההיבטים של TPACK אשר עשויים להיות יעילים מאוד בהכשרת מורים (Schmudt et al., 2009; Segal et al., 2021).

הדיון וההתנסות בהיבטים אלו באמצעות FullProof יהווה את ליבת הסדנה המוצעת.

מבנה הסדנה

במהלך הסדנה נתרכז בשילוב המערכת בתהליך ההכשרה של פרחי הוראה, אשר כולל מספר מאפיינים ייחודיים: היקף למידה משמעותי, כיסוי רחב של נושאים מגוונים בפרק זמן קצר, קבוצות לימוד הטרוגניות, התייחסות לצד התלמיד ולצד המורה, התנסות בשיטות לימוד ובכלים חדשניים.

בתחילת הסדנה נדגים עבודה עם מערכת FullProof תוך התייחסות לצד התלמיד ולצד המורה.

לאחר ההדגמה, יתנסו המשתתפים בעבודה עם המערכת באופן עצמי או באופן מודרך, לבחירתם.

בחלק המרכזי של הסדנה, יתחלקו המשתתפים לקבוצות למידה, כאשר כל קבוצה תתמקד בבחינה של אספקט מסוים במערכת.

בסיום הסדנה יחזרו המשתתפים למליאה, ישתפו בממצאים ויערכו דיון פדגוגי רפלקטיבי מסכם.

מהלך הסדנה

פתיחה - אתגרי הלמידה וההוראה של תחום הגאומטריה הדדוקטיבית (10 דקות) <אנטולי קורופטוב>

הדגמה של אופן עבודת המערכת תוך התייחסות לצד התלמיד ולצד המורה (15 דקות) <חיים בלין>

התנסות עצמית / התנסות מונחית בעבודה בסביבת הלמידה וביצוע משימה לדוגמה (20 דקות) <ניצן איזנשטרק +חיים בלין>

2

חלוקה לקבוצות, כאשר כל קבוצה בוחנת את סביבת הלמידה מזווית ספציפית: טכנולוגיה וממשק , פדגוגיה מגוונת, צד התלמיד (פיגומי למידה ומשוב), צד המורה (פדגוגיה ודוחות) (30 דקות) <ניצן איזנשטרק +חיים בלין+ אנטולי קורופטוב >

חזרה למליאה ושיתוף בתוצרי העבודה בקבוצות. דיון לגבי האופן שבו נותנת הסביבה הטכנולוגית מענה ליעדי הלמידה משולבת דיגיטל והאפשרויות לשלבה בשדה המעשי ובשדה המחקרי. (15 דקות) <אנטולי קורופטוב>

סך הכל 90 דקות

שאלות לדיון

שאלות לדוגמה שיעלו במליאה במסגרת הדיון הפדגוגי בסיום הסדנה:

באיזה אופן נותנת לדעתכם הסביבה מענה לאתגרי הלמידה משולבת דיגיטל?

באיזה אופן נותנת לדעתכם הסביבה מענה לאתגרי המורה בהוראת הגאומטריה הדדוקטיבית?

באיזה תחומים, ענפים ומקומות נוספים סביבת הלימוד יכולה להשתלב?

כיצד לדעתכם ניתן לשלב את הסביבה בשדה המחקרי?

רשימת מקורות

אתר משרד החינוך – למידה משולבת דיגיטל – https://edu.gov.il/heb/programs/subjects/Pages/digital-learning.aspx

חוזר מפמ"ר מתמטיקה - משרד החינוך (תשפ"ג יולי 2022) המזכירות הפדגוגית, מפמ״ר מתמטיקה, אגף מדעים, הפיקוח על הוראת המתמטיקה מתוך אתר המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי - חוזר מפמ"ר תשפ"ג(haifa.ac.il)

איזנשטרק נ', בלין ח', אובודנקו, ר', וקורופטוב א' (2022). *סביבה מקוונת ללמידה ולהוראה של גאומטריה דדקטיבית – ממצאים, אתגרים ודילמות*. בתוך ת' אבישר, ר' אובודנקו, מ' וידר, נ' חן חדד, ע' לביא, ג" קופר, א' שרייבר (עורכים), *כנס ירושלים העשירי למחקר בחינוך מתמטי* (180-184). https://www.jct.ac.il/media/6430/ucrme_10_takzirim_22-3.pdf

Koehler, M., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge (TPACK)?. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *9*(1), 60–70.

Schmidt, D. A., Baran, E., Thompson, A. D., Mishra, P., Koehler, M. J., & Shin, T. S. (2009). Technological pedagogical content knowledge (TPACK): The development and validation of an assessment instrument for preservice teachers. *Journal of Research on Technology in Education, 42*(2), 123–149.

Segal, R., Oxman, V., & Stupel, M. (2021). Using dynamic geometry software to enhance specialized content knowledge: Pre-service mathematics teachers' perceptions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 16*(3), em0647. https://doi.org/10.29333/iejme/11065

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15,* 4–1

שילוב הקניית כישורי המאה ה-21 כחלק מהחינוך המתמטי

נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון
אלי איזנברג, מוסד נאמן, הטכניון
ורדה זיגרסון, הטכניון
רותי סגל, מכללת אורנים
מירה פל, האקדמית גורדון
קרני שיר, מכללת שאנן
עטרה שריקי, מכללת סמינר הקיבוצים

רקע

קהילת החינוך הבינלאומית עוסקת בעשור האחרון בצורך להכין את בוגרי מערכת החינוך לעולם הבלתי צפוי והמשתנה ללא הרף של המאה ה-21. ארגון ה- (OECD Organisation for Economic Co-operation and Development) פרסם קריאות לאנשי חינוך למקד מאמצים בהקניה של קבוצת כישורים שזכתה לשם "כישורי המאה ה-21", והמליץ על שילובם בהוראה ובלמידה של דיסציפלינות מסורתיות כגון מתמטיקה, באמצעות שיטות הוראה חדשניות (OECD 2019a, 2019b). בעקבות פרסומים אלה משרד החינוך בישראל פרסם לאחרונה מסמך מקיף הקשור למאפיינים של דמות הבוגר של מערכת החינוך בשנת 2030 ולכישורים שעליו להיות מצויד בהם (משרד החינוך, 2020). כמו כן פרסם משרד החינוך בחודש מאי 2022 קול קורא למחקרים שיביאו למימוש רעיונות אלה.

אחד הכלים להערכה של שילוב והקניית כישורי המאה ה- 21 על ידי המורה מבוסס על תכנון מהלכי הוראה. תכנון ומימוש של מהלכי הוראה הם פעולות מורכבת הכרוכה בשילוב הידע המתמטי והפדגוגי של המורה עם שיקולים רבים נוספים (Boote, 2006; Cai et al., 2020; Lim et al, 2018). תכנון ומימוש של מהלכי הוראה בשיתוף עם עמיתים עשויה לשפר את הידע המתמטי והפדגוגי של מורים (Lim et al., 2018; Sullivan, 2018) ואת תחושת המסוגלות שלהם להתמודד עם אתגרי ההוראה כגון האתגר שמציב החינוך לכישורי המאה ה-21 בד בבד עם הוראת הדיסציפלינה (Bauml, 2014).

שילוב כישורי המאה ה-21 בתוכנית הלימודים במתמטיקה דורש דיון מקיף במגוון רחב של היבטים, ביניהם: מהותם של הכישורים שניתן להקנות כחלק בלתי נפרד מהוראת המתמטיקה ולמידתה; דרכים להקניית הכישורים הללו והתאמתם לשכבות הגיל השונות; מדדים שיש לפתח לצורך הערכה של המידה שבה כישורים אלה אכן נרכשו על ידי הלומדים - הן מדדים כמותניים והן מדדים איכותניים; ועוד. לגבי סוגיית ההערכה, יש לשים לב לכך שהיא נמצאת עדיין בחיתוליה. רוב כלי ההערכה הקיימים כיום מתייחסים בעיקר לכישורים הבאים לידי ביטוי בסוגים השונים של האוריינות ופחות לכישורי הליבה והמאפיינים האישיותיים (פרץ, 2021). כלי ההערכה הנמצאים כיום בשימוש על ידי ה OECD כוללים, בין היתר, את מבחני פיזה באוריינות מתמטית ומדעית, מבחני פירלס (PIRLS) באוריינות לשונית, מבחני סתאת (STAT) בחשיבה ביקורתית, ועוד (מיפוי שלם ניתן למצוא אצל Chu, Reynolds, Tavares, Notari, & Lee, C., 2021).

אחת השאלות המחקריות אשר טרם ניתנה לה תשובה בהקשר זה היא איתור או בנייה של כלי למדידת ההקניה של כישורי המאה ה-21 כתוצאה מפעולת התערבות ייעודית כלשהי המכוונת להקנייתן.

מטרות

מטרת קבוצת הדיון המוצעת היא לפתוח דיון רחב יריעה ומתמשך בדרכים שונות ומגוונות בהן ניתן לשלב את הקניית כישורי המאה ה-21 כחלק בלתי נפרד מהחינוך המתמטי החל מגיל הגן ועד לסיום התואר הראשון באוניברסיטה, ובמדדים המתאימים לצורך הערכה של המידה שבה כישורים אלה אכן נרכשו על ידי הלומדים.

במסגרת קבוצת הדיון נתמקד בעיקר בהיבט של דרכי ההקנייה של כישורי המאה ה-21 ונתייחס לאפשרות ההיפותטית, בשלב זה, של שילוב הבזקי חדשות בהוראת המתמטיקה כמנוף להקניית כישורים אלה.

הפיתוח השיטתי של פעולת התערבות והערכתה המעצבת וגם הפיתוח של כלים להערכת ההקנייה של כישורי המאה ה-21 הם סוגיות ראויות לעיון ולדיון. אנחנו מקוים שקבוצת הדיון הנוכחית תניח את היסודות להמשך העיון והדיון בהן.

תכנית המושב המוצע

<u>חלק ראשון (10 דקות)</u> - מבוא: כישורי המאה ה-21 ודמות הבוגר

המציאות המשתנה באופן תדיר ומואץ מעמידה בפני מערכת החינוך אתגרים מורכבים, שעיקרם הכנת התלמיד בצורה הטובה ביותר להתמודדות עם העתיד אשר לא ניתן לצפותו.

עלינו ללמד את הילדים לפתח מצפן מערכתי אוטונומי שיכין אותם למלא תפקידים שטרם קיימים, להתמודד עם אתגרים חברתיים שאיננו יכולים לדמיין אותם, להשתמש בטכנולוגיות שטרם הומצאו ולקבל החלטות אתיות ומושכלות כבוגרים.

המסמך של משרד החינוך מפרט את הכישורים שרצוי להקנות לבוגרי מערכת החינוך במסגרת הדיסציפלינות המקובלות בבית הספר, ובתוכן מתמטיקה. במסגרת המבוא לקבוצת הדיון נציג את הדברים.

<u>חלק שני (20 דקות)</u> - הקניית כישורי המאה ה - 21: צעדים המתבצעים כיום ע"י אנשי חינוך בישראל.

בחלק זה יציגו שני חוקרים, ד"ר אלי איזנברג ממוסד נאמן בטכניון וד"ר רותי סגל ממכללת אורנים, את פועלם בהקשר של שילוב הקניית כישורי המאה ה-21 בחינוך מתמטי.

(10 דקות) ד"ר איזנברג יציג את הממשק בין בתי-ספר לאקדמיה בהקניית מיומנויות המקדמות מצוינות במקצועות STEM. בעקבות מחקר חלוץ שנערך בשנים תשפ"א-תשפ"ב בהובלתו של ד"ר איזנברג וקבוצת חוקרים במסגרת מוסד נאמן בטכניון הוחל בשנה"ל תשפ"ג פרויקט לאומי בהובלת משרד החינוך ובו לוקחים חלק כ-50 בתי ספר. אחת המסקנות ממחקר החלוץ הייתה שכישורי המאה ה-21 צריכים להיות מוקנים בקונטקסט של הידע התכני הנלמד ולא בקורסים ייחודיים להקניית מיומנות זו או אחרת. כמו כן שילוב המיומנויות והכישורים בתכני הלימוד מעביר חלק מן האחריות על הלמידה אל הלומד, כך שהאחריות איננה מוטלת על המורה או המרצה בלבד. זו גישה ערכית לחיזוק הלמידה לאורך החיים. ד"ר איזנברג יביא בדבריו דוגמאות של מתודולוגיות הוראה ולמידה וכלי הערכה ומדידה בהקניית מיומנויות בשילוב עם נושאים מתוכנית הלימודים במתמטיקה. זאת על רקע בנייה של אקו סיסטם להטמעת כישורים המקדמים מצוינות במקצועות STEM.

(10 דקות) ד"ר סגל תציג את מחקר לבדיקת הפוטנציאל של 27 "הבזקי חדשות" של מתמטיקה בת-זמננו (ראה https://mns.org.il) ככלי להקניית כישורי המאה ה- 21. שלב א נערך בשנה"ל תשפ"ב במכללת "אורנים". שלב זה הפיתוח של הבזקי החדשות התבצע על ידי קבוצת מחקר בראשותה של פרופ' נ. מובשוביץ-הדר. בשנים 2016-2020 ערכה הקבוצה ניסוי התערבות תלת-שנתי בו הוכח כי

הבזקי החדשות הללו מהווים כלי יעיל לגישור על הפער בין המתמטיקה בת זמננו לבין תוכנית הלימודים הנהוגה בישראל, תוכנית שלעיתים רחוקות מגיעה אל מעבר למתמטיקה של המאה ה-18 (מובשוביץ-הדר 2020 ,Movshovitz-Hadar, et al., 2021; Segal, et al., 2019; Segal, et al. (2021). עם השלמת מחקר זה, העלה צוות המחקר את ההשערה כי להבזקי החדשות עשוי להיות גם פוטנציאל ככלי לזיהוי (notice) (Mason, 2021 ,2012) ולפיתוח רמות המודעות (Mason, 1998) לכישורי המאה ה-21 בקרב תלמידי תיכון ולהטמעתם. ממצאי שלב א שביצענו לצורך בחינה ראשונית של השערה זאת תמכו בהשערה שלנו. צוות המחקר הנ"ל ממשיך לחקור את קיומו של הפוטנציאל הנזכר ואת הדרכים למימושו.

<u>חלק שלישי (60 דקות)</u> - דיון

הדיון יתמקד בסוגיות הבאות:

א. התייחסות להצעות שעלו במסגרת המחקרים שהוצגו.
ב. שיתוף במחקרים רלוונטיים שנערכו או פורסמו.
ג. דיון בדרכים להקניית כישורי המאה ה-21 כחלק בלתי נפרד מהוראת המתמטיקה ולמידתה, והיערכות לגיבוש קבוצות מחקר ייעודיות.

רשימת מקורות

מובשוביץ-הדר, נ., (2020). דוח על מחקר אורך תלת-שנתי במסגרת תוכנית MIA2016 הוגש למשרד המדע ב21.2.2020

משרד החינוך, המנהל הפדגוגי, אגף מו"פ, ניסויים ויוזמות (2020). <u>פדגוגיה מוטת עתיד 2030 מגמות, אתגרים, עקרונות והמלצות מהדורה 3.</u>

משרד החינוך (2020). דמות הבוגר 2030.
<u>https://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/MadaTechnologya/yesodi/boger2030.pdf</u>

פרץ, ח. (2021) מיומנויות המאה ה 21 – סקר ספרות. מחלקת הערכה ומדידה – קרן רש"י. מתוך <u>דו"ח של היחידה למדידה והערכה של קרן רש"י.</u>

Bauml, M. (2014). Collaborative lesson planning as professional development for beginning primary teachers. *The New Educator*, 10(3), 182-200.

Boote, D. N. (2006). Teachers' professional discretion and the curricula. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 12(4), 461-478.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., ... & Bakker, A. (2020). Addressing the problem of always starting over: Identifying, valuing, and sharing professional knowledge for teaching. Journal for Research in Mathematics Education, 51(2), 130-139.

Chu, S. K. W., Reynolds, R. B., Tavares, N. J., Notari, M., & Lee, C. W. Y. (2021). *21st century skills development through inquiry-based learning from theory to practice*. Springer International Publishing.

Lim, W., Son, J. W., & Kim, D. J. (2018). Understanding preservice teacher skills to construct lesson plans. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(3), 519-538.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(3), 243–267. https://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/MadaTechnologya/yesodi/boger2030.pdf

Mason, J. (2012). Noticing: roots and branches. In M. Sherin, V. Jacobs, & R. Phillip (Eds.), Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes. pp. 35–50. Mahwah: Erlbaum.

Mason, J. (2021). Learning about noticing, by, and through, noticing. ZDM–Mathematics Education, 53(1), 231-243.

Movshovitz-Hadar, N., Segal, R., Shir, K., Shriki, A., Silverman, B. (2021). A multi-stage attempt at narrowing the gap between contemporary mathematics and High school mathematics. Presented (by N. Movshovitz-Hadar) at and published in the proceedings of *Icme-14: The 14th International Congress on Mathematical Education, Shanghai*, 11th – 18th July 2021. https://www.icme14.org/static/en/news/37.html?v=1631685744427

OECD (2019a). Learning Compass 2030 Concept Note Series: OECD Future of Education and Skills 2030. https://www.oecd.org/education/2030-project/teaching-and-learning/learning/learning-compass-2030/OECD_Learning_Compass_2030_Concept_Note_Series.pdf

OECD (2019b). Education 2030 Position Paper (5/4/2018): The Future of Education and Skills. https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf

Segal, R., Shriki, A., Movshovitz-Hadar, N., and Silverman, B. (2019). Interweaving Mathematics News Snapshots as a facilitator for the development of mathematical knowledge for teaching. Presented at CERME11 TWG18b and published in: U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 3497-3504. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-NUMBER .

Segal, R., Shriki, A., Silverman, B., & Movshovitz-Hadar, N. (2021). Interweaving Mathematics-News-Snapshots in class: Implications for teachers Horizon Content Knowledge. Accepted for Presented at and published in the proceedings of *Icme-14: The 14th The International Congress on Mathematical Education, Shanghai*, 12th – 19th July 2021.

Sullivan, P. (2018) Supporting teachers in improving their knowledge of mathematics, The Journal of Mathematical Behaviour, 51, 161-166. ISSN 0732-3123, https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.006.

גישות תלמידים לפתרון בעיות ותפיסות מורים הקשורות ליישום משימות מפת"ח מתמטי בכיתות חט"ב

פאתנה מרג'יה, סיגל קליין, נוי אביב, פרופ' רוזה לייקין, אוניברסיטת חיפה

מבוא – תכנית מפת¨ח מתמטי

תכנית מפת"ח מתמטי – משימות פתוחות לחשיבה מתמטית, מנוהלת בחוג לחינוך מתמטי של אוניברסיטת חיפה. מטרת תכנית Math-Key היא לפתח את החשיבה המתמטית באמצעות שימוש במשימות פתוחות. רציונל התכנית מבוסס על העמדה לפיה פתיחות אינטלקטואלית קובעת את עתידם של יחידים ושל החברה, קובעת את המוטיבציה והסקרנות ללמידה, ומקדמת את הטכנולוגיה, המדע וכן את השוויון בחברה רב-תרבותית והטרוגנית. אנו מאמינים שמתמטיקה בכלל, ומשימות מתמטיות פתוחות בפרט, הינן כלי לקידום פתיחות אינטלקטואלית, גמישות ויצירתיות וכי הן מקדמות מיומנויות שיתופיות.

אנו מציעים שילוב של אימון שיטתי בפיתוח חשיבה מתמטית בהוראה ובלימודי המתמטיקה. תכנית מפת"ח מתמטי מיועדת לשיעורי מתמטיקה בחטיבות הביניים כמסלול לפתרון בעיות שנועד להשלים את פעילויות ההוראה הרגילות של תכניות הלימודים. ניתן להשתמש בתכנית באמצעות שילוב המשימות בשיעורים הרגילים או כתוכנית העשרה.

אנחנו מבחינים בין סוגים שונים של משימות מפת"ח מתמטי:

משימות מרובות אסטרטגיות פתרון (Multiple solution Strategies Tasks - MSTs) - משימות אשר דורשות בצורה מפורשת לפתור בעיה באמצעות מספר אסטרטגיות שונות.

משימות מרובות תשובות (Multiple solution Outcomes Tasks - MOTs) - משימות אשר דורשות פתרון בעיה בעלת תשובות שונות.

מטרת תכנית Math-Key היא פיתוח של יצירתיות מתמטית וגמישות מחשבתית, יחד עם קידום הידע והמיומנויות המתמטיות. לא פחות חשוב, התוכנית נועדה להפוך את שיעורי המתמטיקה למהנים ובריי-השגה, עבור כל התלמידים. הדבר נעשה על ידי הכוונת התפתחות הסקרנות של התלמידים על ידי חשיפתם למגוון אסטרטגיות לפתרון בעיות, המיושמות על בעיה מתמטית מסוימת, או על מגוון תוצאות פתרון שהושגו. הפתיחות של משימות מפת"ח מתמטי קובעת את האתגר המתמטי שלהן. כדי לאפשר ויסות של אתגרים מתמטיים, בהתייחס לפוטנציאל המתמטי של התלמידים, רוב משימות מפת"ח מתמטי מלוות ביישומונים דינמיים, המאפשרים ויסות של רמת האתגר המתמטי המוטמע במשימות. היישומונים מאפשרים לתלמידים לחקור את המצב הנתון במשימה, תומכים בהבנת התלמידים במבנה המתמטי של המשימות ובמידת הצורך מפשטים את השאלה באמצעות ניסיונות. הוראה עם משימות מפת"ח מתמטי מחייבת שינוי בתרבות הכיתה, ודורשת גמישות ופתיחות מצד המורים, לרעיונות של תלמידים. בהמשך, אנו מאפיינים את האתגר המתמטי המוטבע במשימות מפת"ח מתמטיות וקשור לפתיחותן. לאחר מכן נפנה לאפיון של יישומונים דינמיים, המשולבים במשימות מפת"ח מתמטיות, ככלי מרכזי לאתגרים מתמטיים שונים.

בעת פתרון משימות מפת"ח מתמטי, לאחר מציאת אסטרטגיה או תוצאה מתאימה, על הפותרים לחפש אסטרטגיה או תוצאה אחרת, המתאימה למצב הבעיה המוצג. תהליכים אלה דורשים מאמץ מנטלי מצד הפותרים. לפיכך, תלמידים ברמה גבוהה נוטים להראות יכולות יצירתיות גדולות יותר מאשר תלמידים ברמה נמוכה (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi & Christou, 2013). מורים מצהירים בדרך כלל כי ה-MOTs ו-ITs (Investigation Tasks) קשים יותר לפתרון מאשר MSTs,

מכיוון שהם דורשים כישורים קוגניטיביים גדולים יותר. בבעיות אלו, יש לשקול מספר אסטרטגיות, כמו גם תוצאות שונות (Leikin et al, in press). כמו כן, לפעמים במהלך תהליך פתרון הבעיות, הפותרים חווים רגע של "אהה!", כמו החלק החסר בפאזל שמתחבר יחד, ולפתע הם מקבלים השראה כיצד לפתור את הבעיה (Vale, Pimentel & Barbosa, 2018).

המחקר

תכנית מפת"ח מתמטי מלווה במחקר עקב חדשנות הגישה לפרקטיקות הוראה מסורתיות. המחקר מתמקד במורים ותלמידים וגם ברמות האתגר של משימות מפת"ח מסוגים שונים:

- המחקר מנתח את תפיסות המורים ביחס ליישום משימות מפת"ח מתמטי בכיתה, ואת השינוי בתפיסות המורים אחרי יישום תכנית מפת"ח מתמטי בכיתות.
- המחקר מנתח את ההצלחה והיצירתיות של תלמידים בפתרון בעיות מפת"ח מתמטי וגישותיהם של התלמידים לפתרון משימות מפת"ח מתמטי מסוגים שונים.

במחקר השתתפו תלמידים בכיתות ז' – ח' וחולקו לפי רמות הישגים במתמטיקה וכן השתתפו מורים אשר עברו הכשרה להעברת משימות מפת"ח מתמטי בכיתות חט"ב.

ניתוח נתונים

- בניתוח פתרונות התלמידים נעשה שימוש במודל להערכת יצירתיות, באמצעות ניתוח אסטרטגיות שונות לפתרון בעיות בהן משתמשים הנבדקים (Leikin, 2009). המודל מעריך מרכיבי יצירתיות שהוגדרו על ידי (Torrance, 1974): (א) שטף- כולל את מספר דרכי הפתרון בהן תלמיד פתר בעיה, (ב) גמישות- מתייחסת למספר הדרכים השונות לפתרון הבעיה בהם השתמש התלמיד (ג) מקוריות- קשורה לשכיחות דרכי הפתרון בקבוצת הייחוס ולרמת התובנה הנדרשת לפתרון הבעיה.
- בניתוח תפיסות המורים נעשתה השוואה לפי 8 אסטרטגיות: א- מטרות המשימות, ב-שגרתיות המשימות, ג- מורכבות המשימות, ד- משימות לא שגרתיות, ה- התאמה לכיתה הטרוגנית, ו- הזדמנות ללמידה הכוללת ויסות והערכה עצמית, ז- פיתוח חשיבה אסטרטגית, ח- מכשולים ביישום המשימות.

ממצאים

ממצאים מרכזיים לפתרונות התלמידים:

- כאשר נתנו לתלמידים שאלות מוכרות מספרי הלימוד, נמצאו הבדלים בין הקבוצות (הקבצות א' מול הקבצות ב').
- כאשר נתנו לתלמידים שאלות פתוחות (שאינן שגרתיות), לא נמצאו הבדלים בין הקבוצות. ניכר היה כי ההוראה בבית הספר אינה מכוונת אל פיתוח יצירתיות מתמטית.
- רמת הידע מתמטי השפיעה גם על ציוני המקוריות והיצירתיות של התלמידים: תלמידי הקבצה א' קיבלו ציונים גבוהים יותר מתלמידי הקבצה ב', כמו גם תלמידי שכבת ח' בהשוואה לתלמידי שכבת ז'. כלומר, הישגים גבוהים יותר במתמטיקה הובילו ליצירתיות גבוהה יותר.
- בשאלות שלהן טווח רציף של פתרונות, רוב התלמידים לא ידעו לתת את טווח הפתרונות וסיפקו דוגמאות של פתרונות בדידים בלבד. ממצא זה מעיד על כך שתלמידים אלו לא נחשפו לשאלות מסוג זה בכיתות המתמטיקה.

ממצאים מרכזיים בניתוח תפיסות המורים:

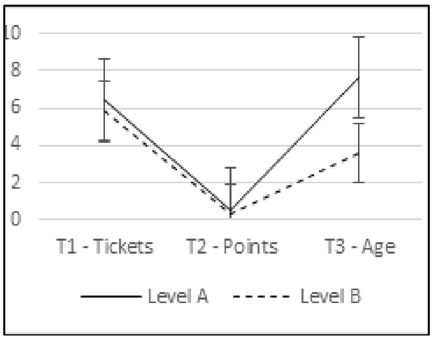
אחרי יישום המשימות בכיתה התגלו שינויים בתפיסות המורים ב 4 קטגוריות. אחרי היישום המורים טענו כי:

- יישום משימות פתוחות מוביל לשינוי גישות ההוראה דבר שלא נזכר בכלל לפני יישום המשימות.

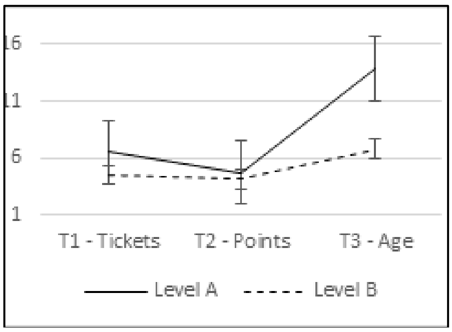
- משימות פתוחות אינן שגרתיות ושונות מהשאלות בספרים ובשונה מבעיות שגרתיות, מתאימות לכיתה הטרוגנית והוראה דיפרנציאלית.
- היישומונים הדינאמיים, שהינם חלק אינטגרלי של המשימות, תומכים בעצמאות התלמידים בפתרון בעיות ולפיתוח חשיבה אסטרטגית בקרב התלמידים.
- מאפייני משימות מפת"ח, שבתחילת היישום נראו כמכשולים, הפכו אחרי היישום להיות תמריצים לשילוב המשימות בשיעורים.

טבלאות ואיורים

איורים 1 ו-2 מציגים השוואה בין שלוש שאלות שניתנו במחקר, לתלמידים בעלי רמות ידע שונות. באיורים ניתן לראות כי בכל השאלות, אצל תלמידי הקבצה א' (קו רציף) הציון לשלמות הפתרון וכן ציון היצירתיות, היו גבוהים יותר מהציון לתלמידי הקבצה ב' (קו מקווקוו). כמו כן, ניתן לראות שבשאלות הפתוחות (כרטיסים ונקודות) ההבדלים בין ההקבצות פחות משמעותיים בהשוואה לשאלה הסגורה (גיל).



השוואה בין שלוש השאלות
שניתנו לתלמידי הקבצה א' והקבצה ב'
מבחינת **שלמות הפתרון**.



השוואה בין שלוש השאלות
שניתנו לתלמידי הקבצה א' והקבצה ב'
מבחינת **יצירתיות מתמטית**.

פירוט הסדנה

נושא הסדנה: תפיסות מורים והתנסות תלמידים במשימות מפת"ח מתמטי

חלק 1: עבודה בקבוצות – 30 דק'

המשתתפים יקבלו 2 משימות מפת"ח מתמטי , יפתרו בקבוצות

חלק 2: הצגת פתרונות – 30 דק'

כל קבוצה מציגה את המשימות שהתנסו בה ואת הפתרונות שלהם.

חלק 3: הצגת המחקר והממצאים – 30 דק'

רשימת מקורות

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *Zdm*, *45*(2), 167-181.

Leikin et al. (in press) Math-Key program: Opening mathematical minds by means of open tasks supported by dynamic applets. In Mathematical Challenges for All,. Springer.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, *9*, 129-145.

Torrance, E. P. (1974). The Torrance Tests of Creative Thinking. *Technical-norms Manual. Benseville*, IL: Scholastic Testing Services

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2018). The power of seeing in problem solving and creativity: an issue under discussion. *In Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 243-272). Springer.

סימפוזיון

סימפוזיון—מורים יוצרים ומעצבים בעיות מתמטיות

אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית בירושלים

תקציר

הסימפוזיון המוצע מציג לדיון סוגיה מחקרית של יצירה, פיתוח ועיצוב בעיות מתמטיות על ידי מורים. הסוגיה משלבת בתוכה מספר נושאים מרכזיים לחינוך מתמטי: עיצוב משימות (Zaslavsky, 2008) פיתוח מקצועי של מורים (Swan, 2007) ושימוש בחיבור ופתרון בעיות כאמצעי לפיתוח של חשיבה מתמטית של מורים (Cai & Hwang, 2020). מחקר על הפרקטיקה של חיבור ועיצוב בעיות ע"י מורים סומן כאחד מהכיוונים המבטיחים בתחום של חיבור בעיות (Problem-Posing ,Cai et al., 2015) וסימפוזיון זה מתייחס לנעשה במחקר בתחום זה בחינוך מתמטי בישראל.

כל אחת משלוש קבוצות החוקרים אשר יציגו את עבודתם במסגרת הסימפוזיון מתמקדת בפרספקטיבה קצת שונה על הסוגיה הנידונה: טרנספורמציה של משימות לבעיות פתוחות על ידי מורים (קליין ולייקין, 2022); קידום ותמיכה במורים אשר מפתחים משימות איכותיות (רחמים, ברמן וקויצ'ו, 2022); מימדים שעל פניהם מורות אשר מפתחות בעיות מתמטיות בהקשר משנות את משימותיהן (מרקו ופלטניק, 2022).

מה שמוסיף לגיוון של הסימפוזיון היא עובדה שכל קבוצת מחקר בחרה להתמקד בסוג שונה של בעיות אשר מורים מנסים לפתח. ההצגה הראשונה תדון בדרכים ניתן להפוך משימות מתמטיות לבעיות פתוחות. ס. ההצגה השנייה תתמקד במשימות גאומטריות מאתגרות ומתוכננות היטב וההצגה הנועלת את הסימפוזיון תתמקד במשימות בהקשר/ מידול.

מממצאי המחקרים שיוצגו בסימפוזיון עולה תמונה של אתגר רב העומד בפני מורים שנמצאים בתחילת דרכם כיוצרי ומעצבי משימות. יחד עם זאת המחקר מראה שניתן לפתח את היכולת הזאת אצל מורים ושהאיזון הנכון בין תמיכה ואתגר בתהליך עיצוב המשימה של המורים חיוני ביותר. מהממצאים גם עולה שלמסגרות תיאורטיות שמתבססות על סוג משימה, אסטרטגיה לפיתוח משימה (כגון בקשה מפורשת לפתרון בדרכים שונות) או לממדים של שינוי הבעיה (כגון ריבוי דרכי ייצוג מידע, זרימת המשימה או מעורבות התלמיד) יש פוטנציאל להפוך לכלים ביצירת משימות איכותיות יותר.

מורים פותחים בעיות מתמטיות סגורות על מנת ליצור משימות מתמטיות פתוחות

<u>סיגל קליין</u>, רוזה לייקין, אוניברסיטת חיפה

מטרת החינוך המתמטי היא מימוש הפוטנציאל המתמטי של התלמידים, ואחריותו של המורה היא לספק הזדמנויות למידה המאפשרות זאת. הזדמנויות למידה אלו צריכות להיות מאתגרות, ותפקיד המורה הוא לעודד תלמידים להתגבר על אתגרים ולתמוך בניסיונות התלמידים (Leikin, 2020). אנו רואים בפעילויות מכוונות יצירתיות (כלומר, פעילויות שמטרתן לקדם את היצירתיות של התלמידים) כמאתגרות מטבען, ולפיכך חיוניות לקידום הפוטנציאל המתמטי של התלמידים (Leikin, 2018). פתרון משימות מתמטיות פתוחות הוא פעילות מכוונת יצירתיות שמקדמת ודורשת גמישות מחשבתית ומספקת הזדמנויות מרובות להפקת רעיונות מקוריים. בנוסף, הפוטנציאל המקצועי של המורים, המשלב את הידע והמיומנויות של המורים, תפיסותיהם האפקטיביות (להלן תפיסותיהם) ואישיותם, קובע את איכות ההוראה המתמטית בכלל, ואת יישום משימות פתוחות בשיעורי המתמטיקה בפרט (Leikin 2018, 2020).

למרות שכוחם של משימות פתוחות מודגש באופן עקבי בספרות חינוכית (Leikin, 2014 ;Pekhonnen, 1995; Schoenfeld, 2015; Silver, 1995, 1997), עדיין, משימות פתוחות נדירות

הן בספרי לימוד במתמטיקה והן בשיעורי מתמטיקה רגילים. יישום משימות פתוחות בשיעורי מתמטיקה הוא תהליך מורכב עקב מחסור במשאבי הוראה ובשל חוסר למידה של המורים.

מחקר זה מבוצע במסגרת תכנית מפת"ח מתמטי – משימות פתוחות לחשיבה מתמטית, שמטרתו פיתוח ויישום משימות פתוחות במתמטיקה של חטיבת הביניים (כיתות ז'-ט'). במסגרת פרויקט מפת"ח מתמטי אנו מעבירים סדנאות למורים למתמטיקה במהלכן אנו מציגים משימות פתוחות למורים והמורים מתבקשים לפתור בעיות מפת"ח וליצור משימות פתוחות חדשות. מחקר זה מתמקד במיומנויות של מורים הקשורות לעיצוב משימות פתוחות.

Nohda (1995) ו- Silver (1995, 1997) טענו שהמטרות העיקריות של שימוש בבעיות פתוחות הן קידום יצירתיות וקידום חשיבה מתמטית. אנו מתייחסים למשימות פתוחות של ארבע קטגוריות עיקריות (Leikin, 2018, 2019):

- משימות מרובות אסטרטגיות פתרון (Multiple solution Strategies Tasks - MSTs) - למשימות "התחלה פתוחה". משימות אלה מציגות דרישה מפורשת להשתמש במספר אסטרטגיות לפתרון. לדוגמה, "פתור את אי השוויון 9 < x^2 בכמה שיותר דרכים".
- משימות תוצאות מרובות (Multiple solution Outcomes Tasks - MOTs) - פתרון משימות אלו מוביל למספר תשובות שונות. חלק ממשימות אלה "פתוחות בסוף"
- משימות חקירה (Investigation tasks - ITs) – משימות אלה גם MSTs וגם MOTs.
- משימות מיון (Sorting tasks - STs) דורשים מהמשתתפים לקבוע קריטריונים למיון אובייקטים מתמטיים נתונים. משימות אילה גם MSTs וגם MOTs.
- ITs ו- STs ולכן פתוחות מהתחלה ומהסוף.

מטרת המחקר ומשתתפים

אנחנו ניתחנו אסטרטגיות שהמורים מיישמים על מנת ליצור בעיות פתוחות. 44 מורים למתמטיקה השתתפו במחקר במסגרת אחת מסדנאות Math-Key שערכנו. המשתתפים התנדבו להשתתף במחקר. ארבעה (9%) משתתפים היו מורים בבית ספר יסודי, 28 (64%) משתתפים היו מורים בחטיבת הביניים, ו-12 (27%) היו מורים בתיכון. YoE היה 1-4 שנים עבור 34 מורים, 5-8 שנים עבור 6 מורים ו-9 שנים ומעלה עבור 4 משתתפים. המורים התבקשו לבחור משימות מספרי לימוד וליצור בעיות פתוחות על בסיסן.

ממצאים

טבלה 1

			סוגי פתיחות			
		סה"כ	MST	MOT	IT	ST
	סה"כ	**109**	**52 (48%)**	**34 (31%)**	**12 (11%)**	**11 (10%)**
מספר המשימות שהציבו המורים עם רקע מסוים – ניסיון עבודה	1-4 (n=34)	**79(72%)**	40 (51%)	32(29%)	6(8%)	10 (13%)
	5-8 (n=6)	**16 (15%)**	7 (44%)	3 (19%)	5 (31%)	1 (6%)
	9+ (n=4)	**14 (13%)**	5 (36%)	8 (57%)	1 (7%)	
רמת המתמטיקה המורים מלמדים	יסודי (n=4)	**8 (7%)**	5 (63%)	2 (25%)		1 (13%)
	חט"ב (n=28)	**68 (62%)**	33(49%)	21 (31%)	6 (9%)	8 (12%)

	חט"ע (n=12)	**33 (30%)**	14 (42%)	11 (33%)	6 (18%)	2 (6%)
סוגי אסטרטגיות ליצירת בעיות	דרישה לפתור בעיה בדרכים שונות	**49 (45%)**	48 (92%)	1 (3%)		
	הורדת נתונים מהבעיה מקורית	**31 (28%)**		16 (47%)	5 (42%)	10 (91%)
	שינוי תוכן או הקשר	**17 (16%)**	3 (6%)	11 (32%)	2 (17%)	1 (9%)
	דרישת הכללה	**12 (11%)**	1 (2%)	6 (18%)	5 (42%)	

המורים השתמשו בארבעה סוגים עיקריים של אסטרטגיות לייצירת בעיות פתוחות (טרנספורמציות של משימות):

- בקשה מפורשת לשימוש באסטרטגיות שונות לפתרון בעיות;
- הורדת נתונים מהבעיה שנבחרה;
- שינוי תוכן או הקשר בבעיה שנבחרה;
- דרישה להכליל.

ראה בטבלה 2 דוגמא לטרנספורמציה של משימה לבעיה פתוחה. בכנס נציג דוגמאות למשימות ולאסטרטגיות נוספות ליצירת משימות פתוחות על ידי מורים במחקר שלנו.

טבלה 2

בעיה מספר לימוד	שני חברים הלכו בו זמנית אחד לקראת השני, משני מקומות שנמצאים במרחק של 18 ק"מ. מהירותו של אחד גדולה ב-1 קמ"ש ממהירותו של השני. הם נפגשו אחרי שעתיים. מה המהירות של כל אחד?	
בעיה פתוחה	שני חברים הולכים באותה הדרך. המרחק ביניהם הוא 18 ק"מ, המהירות של החבר הראשון היא 5 קמ"ש ומהירותו של החבר השני היא 7 קמ"ש. מה יהיה המרחק (לאורך הכביש) בין החברים בעוד שעה? אסטרטגיה – "הורדת נתונים" סוג בעיה - MOT	
פתרונות מוצעים	1) 6 ק"מ	הסבר: הם הולכים אחד לקראת השני.
	2) 16 ק"מ	הסבר: החבר השני מתחיל מאחורי הראשון, הולכים לאותו כיוון.
	3) 20 ק"מ	הסבר: החבר השני מתחיל לפני הראשון, שניהם הולכים לאותו כיוון.
	4) 30 ק"מ	הסבר: הם הולכים בכיוונים מנוגדים.

קידום מורים ככותבי משימות מתמטיות

<u>מירית רחמים</u>, מכון מופ"ת ואורנים - המכללה האקדמית לחינוך והוראה

אבי ברמן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

בוריס קויצ'ו, מכון ויצמן למדע

מטרת המחקר שערכנו הייתה קידום מורים כמעצבי משימות מתמטיות עבור תלמידיהם במסגרת השתלמות מורים משותפת למורים וחוקרת.

הזדמנויות ללמידה מתמטית תלויות במידה רבה במשימות המתמטיות המוצגות לתלמידים בכיתה (Jones & Pepin, 2016; Krainer, 2014; Zaslavsky, 2008). לכן, הבחירה או הניסוח של משימות מתמטיות איכותיות היא אחת ההחלטות הפדגוגיות החשובות ביותר שמורה צריך לקבל (Crespo, 2003). הערכת איכות המשימות המתמטיות קשורה במידה רבה לידע לגבי עקרונות של משימה מעוצבת היטב (Swan, 2007). אחת הדרכים להגביר את המודעות של המורים לעקרונות אלה - ובכך לשפר את איכות לימוד המתמטיקה - היא על ידי עידוד מעורבותם בפתרון ובעיצוב משימות מתמטיות באיכות גבוהה (Taylor , 2017). מחקרים שבחנו השתלמויות של פיתוח מקצועי שהתמקדו בעיצוב

ושימוש במשימות שיכולות לשפר את למידת המתמטיקה למשל, (;Goodchild, et al. , 2013 Koichu, 2018; Moss et al., 2015) מדווחים על יתרונות בעיקר בהעמקת הידע בתוכן ובקידום יכולת החקירה של המורים .(Moss et al., 2015) עם זאת, בספרות ניתן למצוא מחקרים בודדים המתארים כיצד הלכה למעשה ניתן לעזור למורים לעצב משימות איכותיות בעצמם (Knott et al., 2013). מחקר זה בא לענות על פער זה. שאלת המחקר שהובילה את המחקר הייתה: כיצד ניתן לשפר את יכולת המורים לעצב משימות איכותיות עבור תלמידיהם במסגרת השתלמות מקצועית?

מתודולוגיה

ההשתלמות נערכה בבית הספר וכללה חוקרת ו-4 מורים שלימדו מתמטיקה בכתות ד-ו באותו בית ספר. במסגרת ההשתלמות, המורים פתרו ברמת מורה משימה מתוכננת היטב בגיאומטריה המביאה לידי ביטוי מספר רב של עקרונות משימה מתוכננת היטב. לאחר מכן, הם ניתחו את מאפייני המשימה ועיצבו משימות גיאומטריות חדשות עבור תלמידיהם.

כלי המחקר כללו הקלטה ותמלול כל מפגשי הקבוצה בבית הספר, תצפיות מצולמות בהוראת יחידות הלימוד בכתות וראיון חצי מובנה עם כל מורה בסוף התהליך.

ניתוח הנתונים ופרשנותם נערכו במקביל לאיסופם בתהליך רקורסיבי מחזורי של קריאות אינדוקטיביות (Strauss and Corbin, 1990). כל תמלול, לאחר קריאות חוזרות ונשנות, חולק לאירועים על פי נושאים תמטיים. אירועים שבהם היו היבטים של חקירה בודדו ואותרו בהם ביטויים לעקרונות של משימות מעוצבות היטב (Swan, 2007), השפעת העקרונות של משימה מתוכננת היטב על תהליך הלמידה של המורים כלומדים ותפיסת המורים את אופן היישום של משימות איכותיות בכיתות. הראיונות עם המורים נותחו באופן אינדוקטיבי על סמך אותן קטגוריות שעלו מניתוח של המפגשים.

ממצאים ודיון

בדומה למחקרים קודמים שבהם מורים עסקו בעיצוב משימות, מצאנו שמורים בתחילת דרכם כמעצבי משימות מתמטיות לתלמידיהם, מתקשים ליישם את העקרונות של משימה מתוכננת היטב וזקוקים לסיוע רב, הדרכה ופיגומים כדי להצליח לעמוד במשימה.

החידוש במחקר שלנו הוא ההתייחסות לעיצוב משימה כסוג של פתרון בעיה ושימוש בפיגומים כגון מודלינג, שיקוף, ערעור ושימוש בדוגמאות דומות (worked example) הלקוחים מהספרות של פתרון בעיות לצורך תהליך עיצוב המשימות של המורים.

ממצאי המחקר עולה שמעורבות של מורים בעיצוב משימות מהווה פדגוגיה מתמטית יעילה היכולה להוביל מורים למסגור מחודש של תפיסות ההוראה והלמידה שלהם, לשיפור הוראתם ולקידום התפתחותם המקצועית. המעורבות בתהליך עיצוב המשימה מקדם תחושה של בעלות על הידע ומהווה צעד חשוב בדרך לקידום מורים אוטונומיים המסוגלים לעצב באופן עצמאי משימות מתמטיות משמעותיות שמותאמות לתלמידיהם. נוכחנו לדעת שהאיזון הנכון בין תמיכה ואתגר בתהליך עיצוב המשימה של המורים חיוני ביותר. השימוש בכלים ואסטרטגיות הלקוחים מהספרות העוסקת בפתרון בעיות, יכולים לסייע למורי המורים בתיווך התהליך המורכב של עיצוב המשימות המתמטיות.

נקודות לדיון בעקבות המחקר: מה מידת המעורבות הרצויה של החוקר בתהליך עיצוב המשימה של המורים? כיצד ניתן לערוך השתלמות דומה למספר רב של מורים מבתי ספר שונים?

מורי חטיבת הביניים מפתחים משימות בהקשר: מודל תשעת הממדים

<u>נדב מרקו</u>, האוניברסיטה העברית, מכללת דוד ילין

אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית

מורי מתמטיקה במאה ה-21 מצופים לבחור, להתאים, או לעצב את משאבי ההוראה אותם הם מביאים לכיתה. קאי והואנג (Cai and Hwang, 2020) רואים בעיצוב משימות על ידי מורים מרכיב מרכזי בהוראה איכותית. על ידי עיצוב משימות (problem posing) מורה יכולה לקדם את מטרות ההוראה שלה לכיתה, לעודד חשיבה יצירתית בקרב התלמידים, להעמיק את הידע המתמטי שלה ולייצר משאבי

הוראה שימושיים (Koichu, 2020). על אף הפוטנציאל הגלום בעיצוב משימות, פעילות זו איננה קלה כלל עבור מורים. מחקרים הראו כי מורים מתקשים לייצר בעיות מתמטיות ללא תיווך וסיוע כלשהו (e.g., Stickles, 2011). מצד שני, אם המורים מקבלים סיוע בדמות מידע ספציפי שעל בסיסו ניתן לייצר בעיה, הם לא תמיד מוצאים עניין בבעיות שפיתחו (Kontorovich et al., 2012), ותוצריהם "אינם תמיד ברמה גבוהה" (Cai et al., 2015 p.10).

מחקר זה מבוסס על הנחת היסוד שכדי שמורים ימצאו עניין בתוצרי התהליך של עיצוב משימות וייצרו בעיות ברמה גבוהה, דרושה תכנית התערבות שתספק להם זמן "להתסכל על העולם דרך משקפיים מתמטיות" (Arcavi, 2020; p.83) ולבחור סיטואציות מחיי היומיום שמעוררות מוטיבציה לפיתוח משימות בהקשר. וכן על המורים לקבל תמיכה משמעותית מקהילת מורים ואנשי חינוך מתמטי שתהווה מקור למשוב מעמיק ומצמיח (Rachamim et al., 2022). יחד עם זאת, אין בנמצא מסגרת תיאורטית ייעודית בחינוך המתמטי המותאמת לתמיכה במורים בתהליכי עיצוב משימות מתמטיות בהקשר. מטרת המחקר הנוכחי הינה לפתח מסגרת תיאורטית כזו. אנו עושים זאת על ידי ניתוח תהליך פיתוח של 22 משימות מתמטיות בהקשר שנכתבו על ידי 8 מורות חטיבת הביניים במהלך שנה של השתלמות. תהליך עיצוב המשימות האיטרטיבי כלל: עיצוב ראשוני, קבלת פידבק מהקהילה, עיצוב מחדש, העברת המשימה בכיתה ועיצוב מחדש במסגרת מפגשי הקהילה ופגישות אישיות עם המנחים.

מסגרת תיאורטית ושאלת המחקר

על פי תיאוריית הווריאציות (Variation Theory, להלן ת"ו) כל למידה מכוונת כלפי איזשהו אובייקט (תופעה, חפץ, מיומנות וכו') והינה למעשה שינוי באופן שאותו אובייקט נתפש על ידי הלומד (Marton & Booth, 2013). כדי שיחול שינוי תפישתי על הלומד לחוות שונות בין שני ערכים מנוגדים של האובייקט (למשל גדול מול קטן) מכך יכול הלומד להסיק את קיומו של ממד שונות אפשרי (dimension of possible variation) (למשל: גודל). ת"ו שימשה בעבר לניתוח משימות מתמטיות (Watson & Mason, 2006) כאשר האובייקט הנלמד הוא משימה מתמטית. אנו עושים שימוש בת"ו כדי לענות על שאלת המחקר הבאה: על פני אילו ממדים שינו מורות את המשימות בהקשר שכתבו?

מתודולוגיה

כדי לזהות ממדי שינוי אפשריים השוונו בין גרסאות שונות של אותה משימה מתמטית בהקשר. בכל פעם שזיהינו סעיף שעבר עריכה, או סעיף שנוסף בגרסה כלשהי, בחנו במה שונה הסעיף מהסעיפים הקודמים. כאשר ניסחנו ממד שינוי אפשרי – בחנו האם הוא בא לידי ביטוי בשונות בין סעיפים ביתר המשימות.

ממצאים – מודל תשעת הממדים

זיהינו תשעה ממדי שינוי אפשריים שהמורות שינו על פיהם את משימותיהן (Marco & Palatnik, 2022a,b). *נכונות (correctness)* – שינויים שנעשו על מנת שהמשימה תהיינה תקינה מבחינה מתמטית ולשונית. כלומר שהתלמידים המיועדים יכולים להבין את הבעיה ולפתור אותה בזמן סביר. *אותנטיות (authenticity)* – ממד זה מתאר את איכות הקשר בין ההקשר המציאותי והמתמטיקה הגלומה בו. רמה גבוה של אותנטיות משמעה: i) סיטואציה רלוונטית לחיי התלמידים שעשויה לעורר בהם מוטיבציה; ii) ההקשר איננו מאולץ ומלאכותי; iii) הבעיה מקורית ואיננה נמצאת בשימוש חוזר בספרי הלימוד. *גיוון מתמטי (mathematical diversity)* – בוחן את מספר הנושאים המתמטיים השונים (גאומטריה, הסתברות וכו') המשולבים במשימה. *ריבוי דרכי ייצוג מידע (multiple data representation)* – בוחן את אמצעי העברת המידע השונים במשימה. למשל: גרפים, טבלאות, טקסט מילולי ודיאגרמות. *פורמט שאלה-תשובה (question-answer format)* – שינויים בממד זה כללו החלפת השאלה משאלה פתוחה לשאלה אמריקאית. או סעיפים שדרשו שרטוט של דיאגרמה או גרף במקום מלל חופשי או כתיבת תשובה מספרית. *דיוק-אומדן (precision-approximation)* – ממד זה בוחן האם על התלמיד לתת תשובה מדויקת או לתת הערכה או אומדן של כמויות. *הכללה (generalization)* – ממד זה בוחן האם התלמיד נדרש לבצע חישוב למקרה פרטי או איזושהי פעילות שמתארת תהליך באופן כללי (בצורה של נוסחה, גרף, או משפט מילולי). *זרימת המשימה (task flow)* – ממד זה עלה מתוך שינויים שמורות הכניסו בסדר הסעיפים כדי להשיג מטרות שונות. *מעורבות*

התלמיד (student involvement) – ממד זה מתייחס לאופן בו טקסט השאלה פונה אל התלמיד כסוכן ידע עצמאי ומגייס את הידע המתמטי העומד לרשותו לצורך קבלת החלטה אנושית כלשהי.

רשימת מקורות

Arcavi, A. (2020). Learning to Look at the World Through Mathematical Spectacles—A Personal Tribute to Realistic Mathematics Education. In *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 83–95). Springer, Cham.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research, 102*, 101391.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3–34). Springer Science+Business Media.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics 52*, 243–270.

Goodchild, S., Fuglestad, A. B., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 393–412.

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2), 105–121.

Knott, L., Olson, J., Adams, A., & Ely, R. (2013). Task design: Supporting teachers to independently create rich tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 599–608). Oxford, UK.

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research, 102*, 101428.

Koichu, B., & Pinto, A. (2018). Developing education research competencies in mathematics teachers through TRAIL: Teacher-Researcher Alliance for Investigating Learning. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *18*(1), 68-85.

Kontorovich, I. (2020). Problem-posing triggers or where do mathematics competition problems come from?. *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 389–406.

Krainer, K. (2014). Teachers as stakeholders in mathematics education research. *The Mathematics Enthusiast, 11*(1), 49-60.

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In *Transforming Mathematics Instruction* (pp. 59-80). Springer.

Leikin, R. (2018). Openness and constraints associated with creativity-directed activities in mathematics for all students. In *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving* (pp. 387-397). Springer.

Leikin, R. (2020). Characterization of mathematics teacher educators' knowledge in terms of teachers' professional potential and challenging content mathematics teachers. In *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges*. Springer.

Marco, N. & Palatnik, A. (2022a). Dimensions of variation in teachers' applied mathematics problem posing. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.). *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 163-170). PME

Marco, N., & Palatnik, A. (2022b). Teachers pose and design context-based mathematics tasks: What can be learned from product evolution? *Manuscript submitted for publication.*

Marton, F., & Booth, S. (2013). *Learning and awareness*. Routledge

Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S., & Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: A case study. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 47*(3), 377-390.

Nohda, N. (1995): Teaching and Evaluating Using “Open-Ended Problem” in Classroom. *ZDM-International Journal of Mathematics Education* 27 (2), 57–61.

Pehkonen, E. (1995). Introduction: Use of Open-Ended Problems. *ZDM-International Journal of Mathematics Education*, 27 (2), 55–57.

Rachamim, M., Berman, A., & Koichu, B. (2022). Using scaffolds in support of teachers as task designers in geometry: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–21.

Schoenfeld, A. H. (2015). What Counts, When? –Reflections on Beliefs, Affect, Attitude, Orientations, Habits of Mind, Grain Size, Time Scale, Context, Theory, and Method. In *From beliefs to dynamic systems in mathematics education* (pp. 395-404).

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, 14(1), 19-28.

Silver, E. A. (1995). The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *ZDM-International Journal of Mathematics Education,* 27 (2), 67–72

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 29(3), 75-80.

Stickles, P. (2011). An analysis of secondary and middle school teachers’ mathematical problem posing. *Investigations in Mathematics Learning, 3*(2), 1–34.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers’ practices and beliefs: a design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 217-237.

Taylor, L. A. (2017). How teachers become teacher researchers: Narrative as a tool for teacher identity construction. *Teaching and Teacher Education, 61*, 16–25.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 91–111.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. In B. Jaworski, & T. Woods (Eds.), *The Mathematics teacher educator as a developing professional (Vol. 4, pp. 93-114). (The International Handbook of Mathematics Teacher Education)*. Sense Publishers.

שילוב טכנולוגיה בהוראת המתמטיקה והמדעים: היבטים של ידע תוכן פדגוגי טכנולוגי ורגשות מורים

רותי סגל, מכללת אורנים, מכללת שאנן

רציונל

נושא הטכנולוגיה נחקר שנים רבות בהקשר להוראת מתמטיקה ומדעים. התפרצותה של מגפת הקורונה, העמידה את מערכת החינוך בארץ ובעולם ואת המורים בפני אתגרים חדשים, שהמחישו ביתר שאת את חשיבות הידע תוכן טכנולוגי פדגוגי של המורה לצורך שילוב מושכל של טכנולוגיות מגוונות בהוראה. מחקרים שנערכו עם התפרצות הקורונה ובמהלכה מדווחים על ההתמודדות של המורים עם ההוראה מרחוק ועל הרחבת הידע והמיומנויות תוך כדי התנסותם. שתי קבוצות מחקר הכוללות חברי סגל מתחום הוראת מתמטיקה ומדעים ממוסדות אקדמיים שונים (מכללת אורנים, מכללת לוינסקי, מכללת גליל מערבי, מכללת שאנן, מכללת אורט בראודה), גובשו טרם פרוץ מגיפת הקורונה, וערכו מחקרים במהלך הקורונה במטרה לבחון את עמדות מורים למתמטיקה ולמדעים, כמו גם את הרגשות שלהם במהלך שימוש בטכנולוגיות בהוראה.

רקע תיאורטי

ספרות המחקר מצביעה על כך כי על אף המודעות לתועלת של השימוש בטכנולוגיה בהוראה, מורים ממעטים להשתמש בה למטרות פדגוגיות. נראה שעדיין יש חשש לצאת להוראה חדשנית מתווכת מחשב ולשנות פרקטיקות הוראה מסורתיות (Krause et al., 2017; Perienen, 2020; Urezm et al., 2018). מורים נדרשים להתמודד עם שלוש רמות של חסמים המשפיעים על אימוץ הטכנולוגיה בהוראה: חסמים ברמת המורה, ברמת בית הספר וברמת המערכת (BECTA, 2004; Pape & Prosser, 2018). מגיפת הקורונה אילצה מעבר מהיר לשימוש במדיה דיגיטלית ולמצב של הוראה מקוונת בשעת חירום (Green et al., 2020). מורים נאלצו להתאים מיידית את הטכנולוגיה שלהם להוראה מרחוק, ולהתמודד עם חדשנות טכנולוגית שתלווה את מערכת החינוך גם בעתיד Lindblad, et. al., 2021).

המורים נדרשים לשינוי תדיר בכישוריהם, במיוחד מיומנויות ידע עדכניות בנוגע לטכנולוגיות מידע ותקשורת (ICT) ויישומן בהוראה. מורים מדווחים על אתגר רגשי כשהם רוכשים מיומנויות טכנולוגיות חדשות (Huang et al., 2022). רגשות המורים כלפי שילוב טכנולוגיות בהוראה מהווים גורם משמעותי שיש לקחת בחשבון במהלך הטמעת טכנולוגיות בהוראה ובלמידה(Lucas et al., 2021; Scherer et al., 2018). מיומנויות המורים בשילוב טכנולוגיות בהוראה והרגשות שלהם כלפי השימוש בטכנולוגיה, הן אלו שיכריעו את מידת ואופן השימוש בטכנולוגיה בפועל (שמואלוף, 2021; 2000 , Mumtaz). במחקרים המוצגים נתמקד בעמדות של מורים כלפי שילוב טכנולוגיות מגוונות בהיבטים של הצגת מידע והמחשה, הערכה וחקר (Chen et al., 2021; Chi-an & Wu, 2020) וברגשות המעורבים בשילוב טכנולוגיות. הספרות מצביעה על כך שמחקרים קיימים לא בחנו ישירות את רגשות המורים הקשורים ל-TPACK (Huang et al., 2022).

כלי המחקר כללו שאלונים המבוססים על מודלים ושאלונים קיימים בהקשר לידע תוכן טכנולוגי פדגוגי, ועל שאלונים המבוססים על רגשות מורים הנשענים על המקורות הבאים:

TPACK-Technological, Pedagogical, and Content Knowledge, Mishra & Koehler 2006) ,WST-Will, Skill, Tool (Knezek & Christensen, 2016) ,TAM-Technology Acceptance Model (Davis, 1989) ,SEL - Social Emotional Learning (Weissberg et al., 2015) ,PANAS - Positive and Negative Affect Schedule (Watson et al., 1988).

בסימפוזיון נציג את הממצאים המרכזיים של כל אחד משני המחקרים, ובהמשך יוצגו שאלות לדיון הנובעות מתוך הממצאים.

תכנית המושב המוצע

חלק א - הצגת מחקר בנושא "עמדות מורים למתמטיקה ולמדעים כלפי שילוב כלים טכנולוגיים ממוחשבים בשיעוריהם, לפני התפרצות הקורונה ובמהלכה" (25 דקות)

<u>חברי הקבוצה: ד"ר ענת קלמר, ד"ר רותי סגל, ד"ר שירלי מידז'נסקי, ד"ר רונית קלוסקה, ד"ר אנטולי קורופטוב.</u>

שאלות המחקר הינן:

1. האם חל שינוי ואם כן מהו, בידע הטכנולוגי של מורים למתמטיקה ומדעים (TK) לפני התפרצות הקורונה והיום?
2. מהי עמדתם של מורים למתמטיקה ומדעים לגבי מטרות השימוש בכלים טכנולוגיים ממוחשבים לפני התפרצות המגיפה והיום?
3. מהם הקשיים שהביעו המורים למתמטיקה ומדעים בשילוב טכנולוגיה בהוראה לפני התפרצות נגיף הקורונה והיום?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 104 מורים למתמטיקה ומדעים (86 מורים למתמטיקה, 18 מורים למדעים). כמחצית מהם למדו בבתי ספר יסודיים וחטיבות ביניים וכמחצית בחטיבת ביניים ותיכון. 49% מהמורים הם בעלי ותק הוראה של 16 שנים ומעלה, 30.8% הם בעלי ותק של 6-15 שנים ו-20.2% בעלי ותק של 1-5 שנים.

כלי המחקר: שאלון בן 23 שאלות מחולק לשלושה חלקים ומבוסס על Haspekian (2014). השאלון הופץ במייל וברשתות החברתיות של מורים. השאלון כלל 10 שאלות לגבי משתנים סוציו-דמוגרפיים, תשע הצהרות לגבי טכנולוגיות ממוחשבות (כמו למשל, "איך אתה תופס את השימוש בטכנולוגיות ממוחשבות בהוראה שלך? סמן את כל התשובות המתאימות לתפיסתך") וארבע הצהרות בנוגע למידת ההסכמה עם רשימת טיעונים של מורים, שלא משלבים טכנולוגיות ממוחשבות (כמו למשל, "אשמח לשלב טכנולוגיות ממוחשבות בהוראה, אבל זה כרוך ביותר מדי זמן הכנה"). המורים ענו לשאלון כחצי שנה לאחר פרוץ המגיפה.

ניתוח הנתונים: הנתונים נותחו באמצעות SPSS 25. ניתוחים תיאוריים כללו תדרים ואחוזים (עבור משתנים בדידים) וממוצעים וסטיות תקן (עבור משתנים **רציפים**). מתאמים בין נתונים בדידים נותחו באמצעות מבחן $\chi 2$; בין משתנים רציפים באמצעות מקדם המתאם של Pearson r ו-Spearman ρ. ההבדלים בין משתנים מזווגים נותחו באמצעות מבחני t-מדגם זוגיים.

ממצאים חלקיים

נמצאה עלייה במידת השילוב של כלים טכנולוגיים בהשוואה לשימוש בהם לפני המגיפה. מגמה דומה נמצאה עבור כל הכלים, אולם במהלך המגיפה, הכלים שהיו בשימוש הרב ביותר היו יישומונים, אתרים ייעודיים, כלים שיתופיים ומחשבון. ביחס לאקסל, השימוש בו היה נמוך יחסית לפני המגיפה ועלה מעט במהלכה.

רוב המורים ציינו שלפני המגיפה, הם האמינו כי מטרות שילוב התקשוב בהוראה הן לשחרר את התלמידים מהצורך לבצע חישובים בסיסיים כדי שיוכלו להתמקד בחשיבה, לשמש ככלי עזר לתלמידים מתקשים ולשמש ככלי ליצירת סביבת למידה. מאז המגיפה, יותר מורים רואים בטכנולוגיה אמצעי ליצירת סביבת למידה ופחות ככלי חישוב בלבד.

המורים התבקשו לדרג את הסכמתם לגבי ארבעה טיעונים בדבר שילוב טכנולוגיות ממוחשבות בהוראה. רובם הסכימו עם הטיעון: "הייתי שמח לשלב טכנולוגיות ממוחשבות בהוראה, אבל זה דורש יותר מדי זמן הכנה!". למעלה ממחצית מהנשאלים הסכימו עם הטיעון: "השנה החלטתי לשלב טכנולוגיות ממוחשבות בהוראה, אבל היה כל כך קשה למצוא כמות מספקת של מחשבים לתלמידים (בכיתה או בבית, עבור למידה מרחוק), עד שוויתרתי על הרעיון." פחות ממחצית מהנשאלים הסכימו עם הטיעון: "אין לי שום דבר נגד שימוש בטכנולוגיות ממוחשבות בהוראה, אך לא הוכשרתי לכך. אם הייתה לי הכנה מתאימה, הייתי עושה את זה." למעלה ממחצית מהנשאלים לא הסכימו עם הטיעון: "רציתי לשלב טכנולוגיות ממוחשבות בהוראה, אבל היו לי חששות וויתרתי. בעיקר חששתי שחלק מהתלמידים כנראה יצליחו יותר ממני."

חלק ב – עמדות מורים למתמטיקה ומדעים כלפי הידע תוכן טכנולוגי פדגוגי שלהם (TPACK), **והרגשות שלהם ביחס לשילוב טכנולוגיות בהוראה.** (25 דקות)

<u>חברי הקבוצה: ד"ר רותי סגל, ד"ר שירלי מידז'נסקי, ד"ר ענת קלמר, ד"ר אירה רווה, ד"ר עירית לביא, ד"ר איריס וגנר-גרשגורן</u>

מטרת המחקר הייתה לבחון את עמדות מורים למתמטיקה ומדעים ביחס לידע תוכן טכנולוגי פדגוגי (TPACK)שלהם בשלושה היבטים: המחשה והצגת מידע, חקר והערכה וכן את הרגשות המלווים אותם במהלך שילוב טכנולוגיות

שאלות המחקר שנגזרו ממטרה זו הינן:

1. אילו טכנולוגיות ממוחשבות מורים למתמטיקה/מדעים משלבים בהוראה לצורך הצגת מידע והמחשה, הערכה וחקר?
2. מהם הרגשות של מורים המשלבים טכנולוגיות ממוחשבות בהוראה לצורך הצגת מידע והמחשה, הערכה וחקר?
3. האם קיימים קשרים בין עמדות מורים למתמטיקה ולמדעים ביחס לרכיבי ידע TPACK, לבין הרגשות כלפי שילוב טכנולוגיות ממוחשבות בהוראה ומידת השימוש בהן, ואם כן – מהם?

מתודולוגיה

שיטת המחקר הייתה כמותנית. משתתפי המחקר כללו 91 מורים ומורות (16.5% ו83.5% בהתאמה). גילם הממוצע 45.65 שנים. המשיבים הם מורים למתמטיקה (69.2%), מדעים (6.6%) או מתמטיקה ומדעים (16.5%). טווח הוותק שלהם בהוראה בין שנה ראשונה ל-40 שנים (ממוצע 15.55, ס"ת 11.11). כמחציתם מלמדים בביה"ס היסודי (29.7% בכיתות א-ג בלבד, 51.6% בכיתות א-ו) וכמחציתם בחטיבה, תיכון ו/או מכללה.

כלי המחקר. נעשה שימוש בשאלונים הקיימים בספרות המחקרית Mishra and Koehler (2006) ו- Watson et al. (1998) , ונבנה שאלון אחיד המאפשר להתחקות אחר ידע תוכן פדגוגי טכנולוגי של המורים וכן אחר הרגשות של המורים ביחס לשילוב טכנולוגיה.

החלק הראשון בשאלון כלל נתוני רקע של המשתתפים (ותק, גיל, מגדר, מקצוע הוראה, סוג בית הספר, מחוז, מספר השתלמויות בנושא הנחקר בחמש השנים האחרונות).
החלק השני התמקד בידע תוכן פדגוגי -טכנולוגי TPACK.
החלק השלישי התמקד בשימוש בטכנולוגיה ביחס להצגת מידע והמחשה (למשל שימוש במצגת, סרטון ועוד) וברגשות בהקשר לשילוב טכנולוגיות אלו.
החלק הרביעי התמקד בשימוש בטכנולוגיה ביחס לכלי הערכה (למשל, משחק דיגיטלי, מבחן דיגיטלי) וברגשות בהקשר לשילוב טכנולוגיות אלו.
החלק החמישי התמקד בשימוש בכלי חקר טכנולוגיים (למשל, יישומונים , מעבדות וירטואליות) וברגשות בהקשר לשילוב טכנולוגיות אלו.

3

כל הפריטים בשאלון נמדדו בסולם ליקרט. מהימנות של כל חלקי השאלון מהשני ועד החמישי היתה גבוהה (טווח המהימנות: 783. עד 920.). המורים ענו על השאלון לאחר שנה וחצי מאז פרוץ מגית הקורונה.

ניתוח הנתונים. הנתונים נותחו באמצעות SPSS 25. תיאור המשתנים בוצע תוך שימוש בממוצעים וסטיות תקן עבור המשתנים הרציפים. מהימנות הסולמות חושבה באמצעות מקדם אלפא של Cronbach (α). מתאמים בין משתני דירוג חושבו באמצעות מקדמי מתאם של ספירמן (rs) ובין משתנים רציפים באמצעות מקדמי מתאם של פירסון (r). הבדלים בין משתני המחקר על פי משתנים בלתי תלויים בעלי שני ערכים בוצעו באמצעות ניתוחים בין קבוצות (בין קבוצות t-test).

ממצאים ראשוניים

הממצאים מעידים כי מורים למתמטיקה ולמדעים משתמשים במידה בינונית בכיתה בכלי הצגת מידע והמחשה ובכלי הערכה טכנולוגיים ובמידה מועטה בכלי חקר דיגיטליים לפי החלוקה הבאה (בסדר מהשימוש השכיח ביותר לשימוש הנמוך בכל כלי):

כלי הצגת המידע וההמחשה שבהם נעשה השימוש הרב ביותר, הם: מצגת/מצגת אינטראקטיבית, סרטון/תמונה/אנימציה, סביבה מתוקשבת (מטח, סנונית, יישומטיקה וכו') וספר דיגיטלי. השימוש המועט ביותר נעשה בגאוגברה ובאקסל.

כלי ההערכה הטכנולוגיים שבהם נעשה השימוש הרב ביותר, הם: תרגול דיגיטלי ומשחק דיגיטלי. השימוש המועט ביותר נעשה במפת חשיבה.

כלי החקר הדיגיטליים שבהם נעשה השימוש הרב ביותר, הם: יישומונים וכלים שיתופיים. השימוש המועט ביותר נעשה בגאוגברה, מעבדות וירטואליות/ממוחשבות ואקסל.

בנוגע לרגשות המורים בהקשר לשילוב כלים טכנולוגיים בהוראת מתמטיקה/מדעים, לצורך הצגת מידע והמחשה, הערכה וחקר: הרגש החיובי שדורג גבוה ביותר בשלושת ההיבטים הוא עניין. שלושה רגשות נוספים דורגו גבוה בשלושת התחומים (אך בסדר שונה) והם: הרגשה שהמורה פעיל/ה, התלהבות ומוטיבציה. הרגשות שדורגו נמוך הם שליליים ודומים בשלושת ההיבטים: אכזבה, מתיחות, עצבנות, אשמה, עוינות, פחד, זעף ובושה (בושה דורג הנמוך ביותר בשלושת התחומים).

קיימים מתאמים חיוביים מתונים ומובהקים בין תפישות המורים את רכיבי ידע תוכן פדגוגי טכנולוגי שלהם (TPACK) לבין מידת השילוב של הכלים הטכנולוגיים בהוראת מתמטיקה/מדעים כלומר, ככל שהמורים מדווחים על תפישת ידע רב יותר בהקשר לשימוש בטכנולוגיות בשלושת תחומי שילובם בהוראת המתמטיקה/מדעים, כך הם מדווחים על שימוש רב יותר בכלים טכנולוגיים בהוראה לצורך הצגת מידע והמחשה, הערכה וככלי חקר.

נמצא מתאם חיובי, מתון ומובהק בין שימוש המורים בכלים טכנולוגיים בהוראת מתמטיקה ומדעים לצורך הערכה לבין רגשותיהם. כלומר, מורים המדווחים על שימוש רב יותר בכלים טכנולוגיים בהוראת מתמטיקה ומדעים לצורך הערכה נוטים לדווח על רגשות חיוביים יותר, בעת השימוש בכלים אלו. לא נמצאו מתאמים מובהקים בין שימוש המורים בכלים טכנולוגיים בהוראת מתמטיקה/מדעים לבין רגשותיהם, לצורך הצגת מידע והמחשה וככלי חקר.

ממצאי המחקר עשויים לשפוך אור מקבלי החלטות במשרד החינוך ובמוסדות להכשרת מורים בתכנון ופיתוח של תוכניות ייעודיות המתמקדות בשילוב טכנולוגיה בהוראת המתמטיקה והמדעים ולוקחות בחשבון היבטים רגשיים הכרוכים בשילוב זה.

סיכום כללי (10 דקות)

על פי ממצאי המחקר הראשון ניכר כי הצורך המיידי בשימוש אינטנסיבי בטכנולוגיה דיגיטלית כתוצאה מהמגיפה הוביל את רוב המורים לחוות קשיים בשילוב מיטבי של כלים טכנולוגיים בהוראתם. המורים ציינו חוסר בזמן הכנה, בעיות לוגיסטיות, חוסר ידע טכנולוגי ותנאים טכניים לא מספקים בבית הספר, כסיבות לכך. בנוסף, הצורך בכלים טכנולוגיים להוראה בשעת חירום מחייב שינוי פרדיגמה בהקשר של שיטות הוראה ולמידה. שינוי זה עדיין לא אומץ באופן נרחב בחינוך הפורמלי כפי שהוא מאומץ בחיי

היומיום שלנו (OECD,2015) עקב חסמים המשולבים ב-ICT. גם מורים בעלי ידע טכנולוגי מבוסס, מצאו קושי בהוראה מרחוק, כלומר: ה-TPACK של הוראה פנים אל פנים דורשת הרחבה והתאמה להוראה מרחוק בכלל ובמצב חרום בפרט. מורים עשו שימוש בכלים טכנולוגיים שהם היו רגילים אליהם בחיי היומיום, באופן שאפשר להם להמשיך ברצף ההוראה הקבוע. מורים נוטים לדבוק בדרך ההוראה שלהם ומתאימים את הכלים הטכנולוגיים לפדגוגיה הקיימת שלהם (Tabach & Slutzky, 2017). נדרש זמן על מנת להכיר את הסביבות הטכנולוגיות להוראה ולמידה ולבסס את תהליך ההוראה באמצעותם. בנוסף, הממצאים מעידים כי מורים בשלב הראשון של ההוראה, עסוקים בהבנת מבנה תכנית הלימודים הרלוונטית לכיתתם, במקום לעצב, ליצור וליישם גישות פדגוגיות חדשניות בשיעורים שלהם (Lim et al., 2018).

בעוד שמודל TAM התייחס לתועלת הנתפסת ולקלות השימוש בכלי הטכנולוגי, במחקר הנוכחי עלה היבט נוסף, הקשור לתנאים המתאימים לשילוב טכנולוגיה כגורם שעשוי לעודד או לדכא שימוש בו. מתוך כך, מערכות החינוך צריכות לקחת בחשבון את התנאים בסביבה הבית ספרית לשילוב כלים טכנולוגיים. הממצאים מראים שמורים ניסו לשרוד בהוראה בשעת חרום ולהשתמש בכלים שיאפשרו להם לעבור במהירות להוראה בכיתה הווירטואלית. לתפיסתם, לכל דבר מעבר לזה, לא היה זמן ומקום. נראה שכלים טכנולוגיים הדורשים יותר ידע נוטים פחות לשמש בשעת חירום.

ממצאי המחקר השני שופכים אור על חשיבות בחינת רגשות מורים למתמטיקה ומדעים ביחס לשילוב טכנולוגיות בהוראה, מאחר והם מהווים נדבך משמעותי ואינטגרלי שקובעי המדיניות צריכים לקחת בחשבון בתכנון ובפיתוח תכניות ייעודיות (Lucas et al., 2021; Scherer et al., 2018).

בנוסף, ניכר כי עמדותיהם של המורים ביחס לידע תוכן פדגוגי וטכנולוגי נגזרות מתוך התנסות בשילוב הטכנולוגיה בפועל ומתוך רגשותיהם כלפי השימוש בטכנולוגיה לצורך הצגה מידע והמחשה, הערכה וחקר. הרחבה ביחס לסיכום ממצאי המחקר העוסק בשימוש שעושים מורים למתמטיקה ולמדעים בטכנולוגיות ממוחשבות בהיבטים של ידע תוכן פדגוגי טכנולוגי (TPACK), רגשות וקשרים בין היבטים אלו תוצג בסימפוזיון עצמו.

חלק שלישי דיון (30 דקות)

על בסיס ממצאי שני המחקרים יעלו לדיון השאלות הבאות:

1. מהו ידע התוכן הפדגוגי טכנולוגי שמורים נדרשים לו להוראה מרחוק וכיצד ניתן לפתח ידע זה במסגרת הכשרת מורים?
2. מהן הדרכים האפשריות לשילוב טכנולוגיה בהוראה ובהכשרה הלוקחות בחשבון את מגוון רגשותיהם של מורים למתמטיקה ומדעים?
3. שני המחקרים מעידים על כך שהמורים תופסים את הידע תוכן פדגוגי טכנולוגי כמספק והמחקר השני מציג את הרגשות החיוביים של המורים כלפי השימוש בטכנולוגיות. עם זאת, מידת השימוש עדיין מועטה. כיצד ניתן לגשר על הפער

רשימת מקורות

שמואלוף, ש' (2021). *סקירת ספרות ומסמכי מדיניות העוסקים בהכשרת מורים להוראה ולמידה מרחוק*. לשכת המדען הראשי.

British Educational Communications and Technology Agency (BECTA) (2004). A review of the research literature on barriers to the uptake of ICT by teachers. Available at http://dera.ioe.ac.uk/1603/1/becta_2004_barrierstouptake_litrev.pdf

Chen, C. M., Li, M. C., & Chen, Y. T. (2021). The effects of web-based inquiry learning mode with the support of collaborative digital reading annotation system on information literacy instruction. *Computers & Education, 179*. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2021.104428.

Chi-an, S. P., & Wu, S. K. (2020). Examining influences of science teachers' practices and beliefs about technology-based assessment on students' performances: A hierarchical linear modeling approach. *Computers & Education, 157*. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103986

Davis, F. D. (1989). Perceived usefulness, perceived ease of use, and user acceptance of information technology. *MIS Quarterly, 13*(3), 319–340. https://doi.org/10.2307/249008

Green, J. K., Burrow, M. S., & Carvalho, L. (2020). Designing for transition: Supporting teachers and students cope with emergency remote education. *Postdigital Science and Education, 2*, 906–922.

Haspekian, M. (2014). Teachers' instrumental geneses when integrating spreadsheet software. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics teacher in the digital era. Mathematics education in the digital era*, Vol 2, 241–275. Springer.

Krause, M., Pietzner, V., Dori, Y., & Eilks, I. (2017). Differences and developments in attitudes and self-efficacy of prospective chemistry teachers concerning the use of ICT in education. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(8), 4405–4417.

Lim, W., Son, J. W., & Kim, D. J. (2018). Understanding preservice teacher skills to construct lesson plans. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(3), 519–538.

Lindblad, S., Wärvik, G. B., Berndtsson, I., Jodal, E. B., Lindqvist, A., Messina Dahlberg, G., ... & Wyszynska Johansson, M. (2021). School lockdown? Comparative analyses of responses to the COVID-19 pandemic in European countries. *European Educational Research Journal, 20*(5), 564-583.

Lucas, M., Bem-Haja, P., Siddiq, F., Moreira, A., & Redecker, C. (2021). The relation between in-service teachers' digital competence and personal and contextual factors: What matters most? *Computers & Education, 160*,104052. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.104052.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, *108*(6), 1017-1054.Knezek, G., & Christensen, R. (2016). Extending the will, skill, tool model of technology integration: Adding pedagogy as a new model construct. *Journal of Computing in Higher Education, 28*(3), 307–325.

Mumtaz, S. (2000). Factors affecting teachers' use of information and communications technology: a review of the literature. *Journal of Information Technology for Teacher Education, 9*(3), 319- 342.

OECD (2015). Students, computers and learning. In *OECD Publishing*. https://doi.org/10.1787/9789264239555-en

Pape, S. J., & Prosser, S. K. (2018). Barriers to technology implementation in community college mathematics classrooms. *Journal of Computing in Higher Education 30*, 620–636 (2018). https://doi-org.mgs.oranim.ac.il/10.1007/s12528-018-9195-z

Perienen, A. (2020). Frameworks for ICT integration in mathematics education - A teacher's perspective. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 16*(6). https://doi.org/10.29333/ejmste/7803

Scherer, R., Tondeur, J., Siddiq, F., & Baran, E. (2018). The importance of attitudes toward technology for pre-service teachers' technological, pedagogical, and content knowledge: Comparing structural equation modeling approaches. *Computers in Human Behavior, 80,* 67–80.

Tabach, M., & Slutzky, G. (2017). Studying the practice of high school mathematics teachers in a single computer setting. In *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education* (pp. 215–233). Springer.

Urezm, D., Volman, M., & Kral, M. (2018). Teacher educators' competences in fostering students teachers' proficiency in teaching and learning with technology: An overview of relevant research literature. *Teacher and Teacher Education, 70,* 12–23.

Watson, D., Clark, L. A., & Tellegen, A. (1988). Development and validation of brief measures of positive and negative affect: the PANAS scales. *Journal of Personality and Social Psychology, 54(*6), 1063

Weissberg, R. P., Durlak, J. A., Domitrovich, C. E., & Gullotta, T. P. (2015). Social and emotional learning: Past, present, and future. In J. A. Durlak, C. E. Domitrovich, R. P. Weissberg, & T. P. Gullotta (Eds.), *Handbook of Social and Emotional Learning: Research and Practice* (pp. 3–19). The Guilford Press.

מיצגים

בעקבות נולטינג - אסטרטגיות חשיבה פרופורציונית של מתכשרים להוראה, בקורס מקוון בנושא יחס ופרופורציה

דורית כהן, מכללת לוינסקי-וינגייט
ענת קלמה, המכללה האקדמית גליל מערבי
בת-שבע אילני, האקדמית חמדת

מבוא: חשיבה פרופורציונית מתפתחת לאיטה ולעיתים אינה נרכשת גם בשלבים מאוחרים על ידי חלק מהאוכלוסייה הבוגרת. מחקרים מראים שגם מבוגרים חווים קשיים בפתרון שאלות העוסקות בהסקה פרופורציונית (Courtney-Clarke & Wessels, 2014; בן-חיים ועמיתיו, 2006). למון סבורה כי יותר מ-90% מהמבוגרים אינם מצליחים להפיק נימוקים מבוססי פרופורציה (Lamon, 2007). על כן, יש חשיבות לבחינת הקשיים בתפיסת מושגי היחס והפרופורציה, הן בקרב תלמידים והן בקרב מבוגרים (Dubovi, Levy, & Dagan, 2018; Klemer & Peled, 1998).

מחקרים (בן-חיים ועמיתיו, 2006; קרת, 2000) מציעים שלוש קטגוריות למקורות לקשיים בפתרון בעיות יחס ופרופורציה אצל ילדים, בוגרים ומבוגרים: היבטים קוגניטיביים, תהליכי ביצוע פתרון ותהליכי הוראה-למידה ומערכת חינוך אחידה. בשלבים הראשונים בהבנת פרופורציה, הנטייה לתאר קשרים באופן איכותני וכאשר מתייחסים לכמויות, עושים זאת דרך חיפוש קשרים אדיטיביים בין המספרים. גם כאשר מזהים קשרים כפליים, עושים זאת קודם במספרים נוחים, היינו, כפולות של 2 ו- 3, ומתקשים בכפולות פחות נוחות.

נולטינג (Noelting, 1980a; 1980b) בנה 25 פריטים היוצרים סולם היררכי לינארי, לבחינת הבנה פרופורציונית. כל פריט בשאלון דורש הבנת נדבך נוסף במושג הפרופורציה. ההקשר של הבעיות בהן עסק נולטינג דן בהשוואת ריכוז של תערובות מיץ ומים. ניתן לראות במיפוי השלבים של נולטינג (טבלה 1), לְמה הנבדק מצליח להתייחס בכל שלב ומה הוא עדיין לא בשל להתייחס אליו.

טבלה 1: שלבי ההתפתחות בתפיסת מושגי הפרופורציה לפי נולטינג

שלב		שם		מאפייני השלב	שאלה במחקר הנוכחי
0		סימבולי		הבחנה בין קבוצות.	-
1	A	אינטואיטיבי	נמוך	התייחסות לממד אחד בשתי קבוצות.	-
	B		בינוני	כאשר ממד שווה בשתי קבוצות, התייחסות לממד שני.	1
	C		גבוה	התמקדות בין ממדים בכל קבוצה.	3
2	A	אופרציונלי	נמוך	הבחנה בשוויון יחסים של 1:1.	2
	B	קונקרטי	גבוה	הבחנה בכל שוויון יחסים.	4
3	A1	אופרציונלי פורמלי	נמוך	אבחנה ביחסים בהם ממד אחד הוא כפולה של אותו ממד בקבוצה השנייה.	5, 6
	A2		בינוני	אותו יחס לאחר הוצאת זוג אחד (1:1).	7
	B		גבוה	אבחנה בכל יחס.	8

דובובי ועמיתיה (Dubovi, Levy & Dagan, 2018) חקרו את רמת החשיבה הפרופורציונית של אחיות בבית חולים, העוסקות בחישובי יחס ופרופורציה. הם השתמשו בפריטים מרמות החשיבה הגבוהות לפי נולטינג, המתאימים יותר למבוגרים. בדומה, המחקר הנוכחי מתבסס על שלבי ההתפתחות של נולטינג וממפה בתוכם אסטרטגיות פתרון של מתכשרים להוראה.

הקורס המתואר במסגרת מחקר זה, עסק בחשיבה פרופורציונית ויועד לפרחי הוראה לבית ספר יסודי. באמצעות התנסות בפעילויות אינטראקטיביות ודיונים אודות מאמרים, הסטודנטים קשרו באופן פעיל

את הידע האינטואיטיבי שלהם ליצירת ידע חדש. דגש מיוחד הושם בקורס על ההבנה הקונספטואלית שעל בסיסה התפתח הידע הפרוצדורלי, בעזרת פעילויות חקר אותנטיות שניתנו באמצעים דיגיטליים. במהלך הפעילויות הללו נחשפו הסטודנטים למושגים, במטרה לפתח יכולת המשגה וחשיבה פרופורציונלית.

מטרת המחקר לבדוק כיצד תהליכי למידה עצמאית בקורס מקוון בנושא יחס ופרופורציה, משפיעים על החשיבה הפרופורציונית ואסטרטגיות פתרון בעיות, בקרב פרחי הוראה למתמטיקה בבית ספר יסודי.

מידע מתודולוגי: המחקר המתואר מהווה חלק מעבודה רחבה יותר. הליך המחקר כלל שאלון שהועבר בקרב מתכשרים להוראת מתמטיקה, לפני ואחרי למידה בקורס מתוקשב שנתי. תהליך הלמידה כלל שיעורים סינכרוניים ואסינכרוניים תוך שימוש בכלי המודל, פעילויות אינטראקטיביות מסביבת הלימוד מאסטר it של מטח, פעילויות הקשורות למאמרים ובעיות חקר אותנטיות (בן חיים ועמיתיו, 2006).

שאלת המחקר: האם חל שינוי בחשיבה פרופורציונית של פרחי הוראה בעקבות קורס מתוקשב בנושא יחס ופרופורציה, אם כן, כיצד השינוי בא לידי ביטוי?

משתתפים: 13 סטודנטיות להוראת מתמטיקה בבית ספר יסודי, המהוות קבוצה מעורבת הלומדת בשנים ב-ד, אשר השתתפו בקורס מתוקשב בנושא "יחס ופרופורציה" במהלך לימודי התואר הראשון.

כלי המחקר: שאלון ידע בנושא יחס ופרופורציה שכלל 10 שאלות. 8 שאלות נבחרו מתוך 25 שאלות נולטינג, החל מתת שלב 1B ואילך (טבלה 1). לא נבדקו שלבים 0 ו 1A מאחר והם בסיסיים ולא רלוונטיים לסטודנטיות. בנוסף, נכללו שתי שאלות תערובת הנראות במבנה דומה, אחת אדיטיבית ואחת כפלית (קלמר, 2000). הסטודנטיות התבקשו לבחור תשובה נכונה ולהוסיף הסבר.

אופן ניתוח הנתונים: שאלות 1- 4 הן שאלות ברמה אינטואיטיבית וברמה אופרציונלית קונקרטית וכל הנבדקות השיבו עליהן נכון לפני ואחרי הקורס ועל כן הושמטו מהניתוח. התמקדנו בניתוח שאלות 5-8 המתאימות לרמה אופרציונלית פורמלית. אלה הן שאלות המתאימות לבדיקת רמות הבנה פרופורציונית בקרב מבוגרים (Dubovi et al. 2018). ציון מבחן נולטינג חושב כאחוז התשובות הנכונות מתוך 4 שאלות.

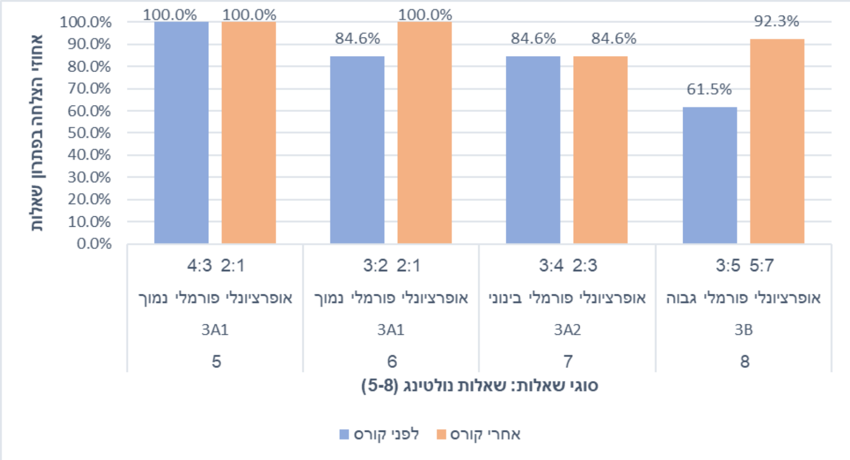
שאלות 9-10 בדקו התמודדות עם שאלה אדיטיבית בערבוב צבעים (שאלה 9: בכלי הראשון ערבבו 2 טיפות צהובות עם 7 טיפות כחולות. בכלי השני ערבבו 12 טיפות צהובות עם 17 טיפות כחולות. האם התקבל אותו גוון של ירוק?) ושאלה כפלית, בהקשר של הכנת מיץ פטל (שאלה 10: בכלי הראשון ערבבו 9 כוסות מים עם 3 כפות של פטל. בכלי השני ערבבו 15 כוסות מים עם 5 כפות של פטל. האם התקבל אותו טעם של מיץ בשני הכלים?). על מנת להבין את משמעות ההבדלים בציונים, בוצע ניתוח תוכן להסברים שהוסיפו הנבדקות בתשובותיהן.

בסך הכל נותחו 6 שאלות: 4 שאלות נולטינג ועוד שתי שאלות, אחת אדיטיבית והאחרת כפלית. ניתוח תוכן בוצע על ידי איתור אסטרטגיות חשיבה המתאימות לבעיות פרופורציה וכאלה המראות על תפיסות שגויות. כמו כן, הניתוח עשה אבחנה בין פתרון איכותני לפתרון כמותי.

ממצאים - כולל משמעותם: ממוצע הציונים של כלל המשיבות לפני הקורס על שאלות נולטינג 5-8 היה 82.69% ולאחר הקורס הממוצע עלה ל 94.23% (איור 1).

שאלה 8 היא ברמה הגבוהה ביותר, הבודקת אבחנה בכל יחס. לפני הקורס ממוצע הציונים בשאלה זו היה 61.5% ואילו לאחר הקורס הסטודנטים הגיעו לממוצע 92.3%. בבדיקת ציוני הסטודנטיות בשאלה 9, נמצא, שכרבע מהסטודנטיות טעו לפני הקורס ותפסו את היחס כנשמר לאחר הוספת אותה כמות של טיפות צהובות וכחולות לתערובת, ביניהן, ירדן, עליה נרחיב בהמשך. לאחר הקורס רק סטודנטית אחת, רונה, עדיין סברה שהגוון ישמר במצב אדיטיבי. בשאלה 10 רק סטודנטית אחת שגתה לפני ואחרי הקורס, ממצא המעיד שהסטודנטיות ידעו לפתור סיטואציה כפלית.

איור 1: ציוני הסטודנטים ב 4 שאלות נולטינג 5-8, ברמה אופרציונלית פורמלית לפני ואחרי למידה



על מנת להבין את משמעות ההבדלים בציוני הנבדקות, בוצע ניתוח תוכן להסברים שהוסיפו. נציג ניתוח תוכן לתשובותיה של ירדן, שהראתה שיפור באסטרטגיות החשיבה הפרופורציונית שלה לאור השתתפות בקורס, לפני הקורס שגתה ב-5 שאלות מתוך ה-6 שנותחו ובסיום הקורס השיבה נכון על כל השאלות.

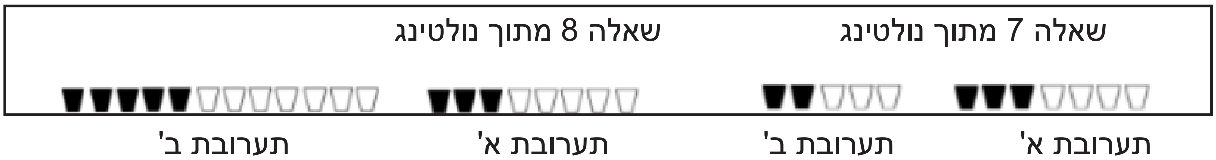
הסיפור של ירדן: ירדן החלה את הקורס מרמה ברמה אופרציונלית פורמלית נמוכה, שמשמעותה, אבחנה ביחסים בהם ממד אחד הוא כפולה של אותו ממד בקבוצה השנייה, ללא יכולת להסביר את תשובותיה. לאחר הקורס עלתה לרמה אופרציונלית פורמלית גבוהה, המראה על אבחנה בכל יחס, עם אסטרטגיות ברמה גבוהה והסברים מתאימים. בסיום הקורס האסטרטגיות בהן השתמשה כללו אומדן לגבי היחס בין שני ממדים (מיץ ומים) בכל תערובת וצמצום יחסים על מנת להשוות יחס ליחידה אחת בשתי התערובות. לדוגמה, לפני הקורס ירדן השיבה באופן שגוי על שאלה 6 (איור 2) והסבירה כך: "אני לא יודעת להסביר, אך לדעתי טעם שווה בשתיהן". ייתכן והתייחסה להפרש 1 בין כמות המיץ למים בכל תערובת, כלומר, היתה כאן אסטרטגיה אדיטיבית שגויה. אחרי הקורס השיבה על אותה שאלה נכון והשתמשה בהסבר שלה בשברים להשוואת יחסים, כך: "בתערובת ב' 2/3 ובתערובת א' 3/5 "

בשאלות 7 ו- 8 (איור 3), ירדן טעתה לפני הקורס ולא ידעה להסביר. אחרי הקורס השיבה נכון והסבירה בשאלה 7: "בתערובת א' יש 3 כוסות תרכיז ו 4 מים ולכן על כל כוס תרכיז אחת יהיה פחות מכוס וחצי מים בערך". בשאלה 8 הסבירה: "בתערובת א' על כל כוס תרכיז יש קצת יותר מכוס וחצי מים. בתערובת ב' על כל כוס תרכיז יש קצת פחות מכוס וחצי מים. לכן בתערובת ב' יש יותר טעם של תפוז".

איור 2: שאלה 6 מתוך נולטינג

השאלה: לאיזו תערובת טעם תפוזי יותר? או שלשני הקנקנים יש אותו הטעם?
(הכוסות השחורות מסמנות מיץ והכוסות הלבנות מסמנות מים.)

איור 3: שאלות 7, 8 מתוך נולטינג



ניכר שירדן משתמשת באסטרטגיה בה היא משווה יחסים בין ממדים, בין מיץ למים בכל תערובת, להבדיל מהשוואה בתוך כל ממד.

דיון ביחס לספרות: כפי שנוכחנו מתוך הספרות המחקרית, גם מבוגרים בכלל ומתכשרים להוראה בפרט, חווים קשיים בחשיבה פרופורציונית (Dubovi, Levy, & Dagan, 2018). הממצאים מראים, כמענה לשאלת המחקר, כי ניכר שיפור אצל הסטודנטיות שלמדו בקורס וניהלו למידה עצמאית, שבא לידי ביטוי ביכולת לפתור בעיות פרופורציוניות ברמה אופרציונלית פורמלית גבוהה ולהפיק הסברים בהתאם, לעומת שימוש באומדנים והסקת מסקנות אינטואיטיביות תוך שילוב חלקי של אסטרטגיות אדיטיביות, שאפיינו את הפתרונות שלהן לפני הקורס.

ירדן שנמצאת בשנת סטאז', סיפרה בסיום הקורס על החוויה שלה כלומדת עצמאית וציינה:

> לאחר הקורס אני חשה שאני יודעת טוב יותר את הנושא...... במסגרת הקורס עבדנו מול אפליקציות. כאחת שלא נוהגת לשלב בכיתה אמצעים טכנולוגיים, ראיתי איך התרגולים המרובים באמצעות מחשב, שמאפשר לי לדעת אם טעיתי והיכן וגם לתקן, תורמים לי במסגרת הקורס. בעקבות זאת, התחלתי לשלב אמצעים טכנולוגיים בכתה שלי. הקורס אמנם היה עמוס ודרש מאיתנו המון זמן עבודה בבית, אבל בסופו הבנתי את התרומה הגדולה של אמצעים טכנולוגיים לכיתת הלימוד שלי ....

דבריה מאפיינים את רוח הדברים כפי שבאו לידי ביטוי בקרב מרבית הסטודנטים.

מקורות נבחרים

בן חיים, ', קרת, י', אילני, ב' (2006). יחס ופרופורציה – מחקר והוראה בהכשרת מורים למתמטיקה. תל אביב: מכון מופ"ת.

קלמר, ע. (2000). ייצוגים שונים, כתומכים בהבנת מושגי היחס והפרופורציה - צבעים, דיסקיות וטבלאות התאמה. חיבור לשם קבלת תואר "דוקטור לפילוסופיה", אוניברסיטת חיפה.

קרת, י', (2000). שכילה פרופורציונלית של מבוגרים - פרחי הוראה ומורים למתמטיקה בביה"ס היסודי ותהליכי השינוי בעקבות הוראת יחידת לימוד בנושא "יחס ופרופורציה". דפים, 30, 81- 105.

Courtney-Clarke, M. & Wessels, H. (2014). Number sense of final year pre-service primary school teachers. Pythagoras, 35(1), Article 244, 1–9.

Dubovi, I., Levy, S. T., & Dagan, E. (2018). Situated simulation-based learning environment to improve proportional reasoning in nursing students. International Journal of Science and Mathematics Education, 16(8), 1521-1539.

Klemer, A., & Peled, I. (1998). Inflexibility in teachers' ratio conceptions. In Proceedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 3., pp. 128–134). Stellenbosch, South Africa.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 629–666). Charlotte, NC: Information Age.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept part I-differentiation of stages. *Educational studies in Mathematics*, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II—problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics*, *11*(3), 331-363.

הקשר בין הישגים בלימודי ההוראה של מורים למתמטיקה לבין הערכת רכזי מקצוע

אלון דיין, המכללה האקדמית הרצוג
רותם עבדו, מכללת דויד ילין

מבוא

ההתאמה בין תהליכי ההכשרה של מורים למתמטיקה לבין תפקודם כמורים בפועל היא משתנה משמעותי במערכת השואפת להכשיר מורים המותאמים לעבודתם (המועצה להשכלה גבוהה, 2020). עם זאת, דו"ח הוועדה הבינלאומית להערכת איכות לימודים בתחום החינוך ותכניות הוראת המדעים הביע ביקורת על מבנה הכשרת המורים בישראל (המועצה להשכלה גבוהה, 2015). בנוסף, חטיבה (2015), הראתה כי לא קיים קשר בין ציונים במבחן הקבלה ללימודי תארים גבוהים לבין הערכת המורה על ידי תלמידיו.

במחקר זה אנו בוחנים את הקשר בין הישגי סטודנטים להוראת מתמטיקה לבין הערכתם כמורים על ידי רכזי המקצוע שלהם. משתנה העל הראשון—הישגי סטודנטים להוראת מתמטיקה—מכיל שלושה משתנים: לימודים דיסציפלינריים, הכשרה מעשית ולימודי יסוד והעשרה (המועצה להשכלה גבוהה, 2011). רכיב הלימודים הדיסציפלינריים נדרש על מנת שהמורה יהיה מקצועי ומיומן בתחום אותו הוא אמור ללמד (ארטשטיין, 2010), רכיב ההכשרה המעשית מפגיש את המורה לעתיד עם העולם המעשי של ההוראה (יונאי, 2003), ולימודי היסוד וההעשרה מאפשרים למידה של ידע תוכן פדגוגי (PCK) **(**Anderson & Clark, 2012**)**. הבחירה ברכיבים אלו נועדה לתת מענה למספר מטרות המונחות בבסיס הרעיון של תהליך ההכשרה של פרחי ההוראה למתמטיקה. בהקשר של חינוך מתמטי בישראל מטרת ההכשרה היא (בין השאר) העמקת ההבנה של פרחי ההוראה לגבי מבנה המתמטיקה כתחום-דעת וכפעילות אנושית, הבהרת מושגים מתמטיים העומדים בבסיס המבנה המתמטי, העשרת הידע של פרחי הוראה לגבי היבטים היסטוריים של התפתחות המתמטיקה ושל מושגי יסוד בפסיכולוגיה של הוראת המתמטיקה, הרחבת הידע הפסיכו-דידקטי של פרחי ההוראה לגבי נושאים מתמטיים הנלמדים בבתי הספר ועוד (פישביין ואחרים, 1998).

משתנה העל השני הוא 'איכות ומקצועיות המורה בעבודתו'. קשה להגיע להסכמה כוללת בספרות המחקרית לגבי מה בדיוק מצביע על איכות המורה, אך Hinchey (2010) טוענת שאפשר לזהות שלוש קטגוריות עיקריות: איכות המורה, ביצועי המורה ויעילות המורה. תחת קטגוריית *איכות המורה* נכנסים מאפייני השכלה, ניסיון, ערכים ואמונות ועוד. *ביצועי המורה* תלויים בשאלה מה המורה עושה בכיתה ומחוץ לכיתה – מה טיב האינטראקציה של המורה עם תלמידיו, עם הוריהם ועם עמיתיו לצוות. *יעילות המורה* נוגעת להשפעה שיש למורה על הלמידה בקרב תלמידיו – כלומר, עד כמה התלמידים אכן יודעים את החומר אותו מלמד המורה, עד כמה הם מושפעים ממנו, עד כמה הם חדורי מוטיבציה ביחס ללמידה ועוד. חשוב לשים לב שמבחנים שנעשו בארה"ב ובחנו מורים מתחילים בקטגוריות כמו 'שליטה בתחום הדעת' או 'שליטה במיומנויות בסיסיות' לא ניבאו בצורה טובה את מידת האפקטיביות של המורה בעבודתו בכיתה (Mitchell et al, 2001), לא בדקו מה המורה עשה בכיתה ולא העידו על איכות העבודה שלו בפועל (Crowe, 2010).

בארץ, לאור בקשת משרד החינוך, התבקשה הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך (ראמ"ה) לפתח כלים להערכת מורים, מנהלים וסגני מנהלים. בבניית הכלי להערכת מורים התמקדה ראמ"ה בארבעה מדדים מרכזיים, שיכונו להלן "מדדי על", המהווים לשיטתם מדדים אובייקטיביים לאיכות המורה בעבודתו (הרטף ואחרים, 2011). לטענתם, המדדים משקפים את מורכבות עבודתו של המורה, ומתייחסים לרבדים שונים שאליהם הוא נדרש במהלך עבודתו, ולביצועים שונים המצופים ממנו. ואלו הם ארבעת המדדים: תפיסת התפקיד והאתיקה המקצועית של המורה (למשל, הזדהות עם תפקיד ההוראה בחינוך), יכולותיו של המורה בתחום הדעת (למשל, מודעות לקשיים אופייניים של תלמידים), תהליכים לימודיים וחינוכיים (למשל, תכנון שיעור) ושותפות בקהילה המקצועית (למשל השתתפות

במסגרות לפיתוח מקצועי). אם תוכניות ההכשרה מכשירות מורים למתמטיקה באופן מיטבי, נצפה לראות קשרים בין שני משתני העל האלו. מכאן נובעת שאלת המחקר הנוכחי – אילו קשרים ניתן למצוא בין הישגים בלימודי ההוראה של מורים למתמטיקה לבין התפקוד שלהם עבודה כמורה כמשתקף מהערכות רכזי המקצוע?

שיטה

במחקר השתתפו 12 מורים ו 23 מורות למתמטיקה מבתי ספר בישראל. 32 מהם מלמדים בחינוך העל יסודי. איסוף הנתונים התרחש באביב 2022.

אספנו ציונים של המשתתפים מהתואר הראשון, בהתאמה למשתנים שלעיל. לאחר מכן, רכזי המתמטיקה בבתי הספר שבהם עובדים המורים מילאו שאלון הערכה למורים (קישור לשאלון) שהכיל עשרים ושלושה היגדים למדידת איכות מורה בעבודתו (הרטף ואחרים, 2011). רכזי מקצוע המתמטיקה בבתי הספר נבחרו כיוון שזיהינו אותם כדמויות האמורות להכיר את המורה בצורה קרובה מתוקף תפקידן (לוק, 2017). במהלך חישוב המהימנות לארבעת מדדי העל המרכיבים את איכות עבודת המורה התקבלה מהימנות נמוכה מהמקובל (0.7) עבור מדדים 2 (תחום הדעת) ו-4 (שותפות בקהילה המקצועית). חלוקות מחודשות לא שיפרו את מהימנותו של מדד על 2, אך זו של מדד על 4 השתפרה. על כן חולק מדד זה לשני מדדים – מדד על 4א (המכיל היגד אחד בלבד: "המורה מקיים למידה משותפת ורפלקציה עם עמיתיו למקצוע בבית הספר") ומדד על 4ב (המכיל שני היגדים: "המורה משתתף במסגרות לפיתוח מקצועי ויישום הלמידה", "המורה מעורב ופעיל בקהילה הכללית של תחום הדעת"). לאחר מכן חישבנו או הפקנו מתוך גיליונות הציונים והערכות הרכזים את הציון הממוצע עבור כל אחד מהמשתנים עבור כל מורה.

ממצאים ומסקנות

ביצענו 12 מבחנים על מנת למדוד את הקורלציות הליניאריות בין 3 משתני מדד העל הראשון ו 4 משתני מדד העל השני. בטבלה 1 ניתן לראות כי הקשר בין ממוצע ההכשרה המעשית לבין רמת השותפות בקהילה המקצועית (מדד על 4) יצא מובהק רק עבור מדד על 4א ($r=0.345$, $p=0.042$), אך לא מובהק עבור מדד על 4ב ($r=0.146$, $p=0.402$). הקשר בין ממוצע הקורסים בחינוך לבין רמת השותפות בקהילה המקצועית (מדד על 4) יצא מובהק עבור מדד על 4א ($r=0.343$, $p=0.044$), אך לא מובהק עבור מדד על 4ב ($r=0.176$, $p=0.311$). כמעט ולא נמצאו קשרים משמעותיים בין משתני המחקר. יוצא מן הכלל הוא קשר מובהק בין הישגים גבוהים בתחום ההכשרה המעשית ובתחום קורסי החינוך לבין רמת השותפות בקהילה המקצועית (אך גם זה – רק ביחס להיגד ספציפי בתוך מדד העל).

טבלה 1

קורלציות בין משתני המחקר הממוצעים

מדד על	1.תפיסת תפקיד ואתיקה מקצועית	2. תחום הדעת	3.תהליכים לימודיים וחינוכיים	4א'. שותפות בקהילה המקצועית	4ב'. שותפות בקהילה המקצועית
קורסים מתמטיים	0.094	-0.017	-0.023	-0.011	0.217
הכשרה מעשית	0.145	0.109	0.107	0.345*	0.146
קורסי חינוך	-0.040	0.008	0.035	0.343*	0.176

המסקנה הישירה מממצאי המחקר היא שלא ניתן, באופן כללי, להסיק מהצטיינות בוגר מוסד להכשרת מורים על מידת הצטיינותו והתאמתו למקצוע ההוראה בעתיד. זאת כיוון שקשרים טריוויאליים מאוד שציפינו למצוא (כפי שיפורט מיד) – לא נמצאו. בשל זאת יש לתהות לגבי מידת התועלת הקיימת במבנה הכשרת המורים הקיים. אם המבנה הקיים היה מוצלח, היינו מצפים למצוא קשרים מובהקים מאוד מתבקשים, למשל, קשר מובהק בין הצטיינות בקורסים המתמטיים לבין הצטיינות במדד העל השני – 'תחום הדעת', שם קיימת התייחסות לאספקטים תוכניים כמו בקיאות במתמטיקה והכרת תכנית הלימודים. או גם, קשר מובהק בין הצלחה בקורסי ההכשרה המעשית לבין הצטיינות במדד

העל השלישי – 'תהליכים לימודיים וחינוכיים', שמכיל היגדים המתייחסים לממדים מעשיים חשובים כמו תכנון וניהול שיעור בצורה חכמה, או הפעלת התלמידים ושילובים במהלך השיעור.

היעדרותם של קשרים אלו מחזקת את המבקרים את מבנה הכשרת המורים בישראל (המועצה להשכלה גבוהה, 2015). מחקר זה מהווה נדבך נוסף לבחינה אמפירית את יעילותן של תכניות ההכשרה להוראה. זהו מחקר ראשוני שמטרתו זיהוי מגמות ואישוש השערות, ואכן מצאנו קשר כמעט לא קיים בין המשתנים. עם זאת, אנו מזהים שתי נקודות תורפה למחקר זה. ראשית, המספר המועט של הנבדקים שנבע, בין השאר, מקושי בסיפוק גיליונות ציונים מהתואר הראשון והעובדה כי נדרשו הסכמה ושיתוף פעולה של שני גורמים עבור נבדק יחיד. שנית, אפקט תקרה אפשרי לגבי ממוצעי הציונים של בוגרי מוסדרות ההכשרה להוראה (רוב הציונים מתרכזים בטווח 80-100), דבר שמערים קושי נוסף ביכולת להגדיר, לסווג ולחלק את הנבדקים לפי רמות שונות של הישגים בלימודים. כמו כן, לא ניתנה העדפה למורים בעלי ותק זה או אחר, אך תוך כדי איסוף הנתונים התברר שמורים צעירים יחסית (מבחינת ותק) נוטים להיענות יותר למחקר מאשר מורים ותיקים. סיבה אפשרית לתופעה – איסוף נתונים ממורים שסיימו את לימודיהם לאחרונה הינו קל יותר, מאחר ובדרך כלל קיים גם עותק דיגיטלי של הציונים, זאת בניגוד לבוגרי תכניות ההכשרה הוותיקים, שנזקקו לחפש עותקים פיזיים של גיליונות הציונים שלהם בכדי להיענות לקריאה למחקר. בנקודה זו יש להעיר שכנראה שאין פגם בכך שדווקא מורים צעירים נענו למחקר, שהרי ככל שמתרחקים מסיום תכנית ההכשרה, מבחינה כרונולוגית, כך היא גם נעשית פחות ופחות רלוונטית לאיכות עבודתו של בוגר ההכשרה. דבר זה נכון מן הסתם עבור כל תכנית הכשרה וכל מקצוע.

בנוסף יש לשקלל מעריכים נוספים של עבודת המורה מעבר לרכזי המקצוע, כמו מנהל בית הספר, מורים נוספים בתחום הדעת ותלמידים. יש לתת את הדעת גם לכך שקיימים משתנים מתערבים נוספים אליהם לא הייתה התייחסות במחקר, כמו ההבדלים בין מוסדות ההכשרה השונים, אי אחידות ההערכה של הרכזים, ועוד. בהתאם, יש לקיים מחקרי המשך שיתגברו על מגבלות אלו, כולל ניסיונות אקטיביים לעודד מורים ותיקים להשתתף במחקר.

ביבליוגרפיה

ארטשטיין, צ' (5 בדצמבר, 2010). *מה צריכים לדעת העוסקים בהוראת המתמטיקה?* [הרצאה ביום עיון]. מה צריכים לדעת העוסקים בהוראת המתמטיקה? שפיים.

המועצה להשכלה גבוהה. (2011). *הנחיות המועצה להשכלה גבוהה להגשת בקשה לפתיחת תכנית לימודים אקדמית חדשה*. המועצה להשכלה גבוהה. קישור.

המועצה להשכלה גבוהה (2015). *הוועדה הבינלאומית להערכת איכות הלימודים בתחום החינוך ותכניות הוראת המדעים*. המועצה להשכלה גבוהה. קישור.

המועצה להשכלה גבוהה. (2020). *דוח ועדת המומחים לבחינת מבנה ומתווה ההכשרה להוראה במוסדות להשכלה גבוהה בישראל*. המועצה להשכלה גבוהה. קישור.

הרטף, ח', רטנר-אברהמי, ע' ובלר, מ' (2011). *תהליך הערכת מורים בישראל: צעדים ראשונים ומחשבות לעתיד*. הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך. קישור.

חטיבה, נ' (2015). מה אומר המחקר על הוראה טובה והמורה המצטיין?. *הוראה באקדמיה*, 5, 42-61.

יונאי, י' (2003). *הכשרה להוראה: רכיב העבודה המעשית בהכשרת עובדי הוראה*. ירושלים: משרד החינוך.

לוק, ר' (2017). *הקשר בין עבודת צוות לבין מסוגלותו העצמית של רכז המקצוע בחינוך העל יסודי* [עבודת גמר המוגשת כחלק מהדרישות לקבלת תואר שני בחינוך]. המכללה האקדמית הרצוג.

פישביין, א', תירוש, ד', וקליין, ר' (1998). *המתמטיקה והמציאות*. רמות.

Anderson, D., & Clark, M. (2012). Development of syntactic subject matter knowledge and pedagogical content knowledge for science by a generalist elementary teacher. *Teachers and Teaching: Theory into Practice*, 18(3), 315-330.

Crowe, E. (2010). *Measuring What Matters: A Stronger Accountability Model for Teacher Education*, Washington: Center for American Progress.

Hinchey, P.H. (2010). *Getting Teacher Assessment Right: What Policymakers Can Learn from Research*. National Education Policy Center, Penn State University.

Mitchell, K.J., Robinson, D.Z., Plake, B.S., Knowles, K.T. (2001). *Testing Teacher Candidates: The Role of Licensure Tests in Improving Teacher Quality*. Washington, DC: National Academy Press.

על משפט הפרפר ומקומות גיאומטריים
מנאל ג'בור, המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל, חיפה
מכללת בית ברל, כפר-סבא

מבוא

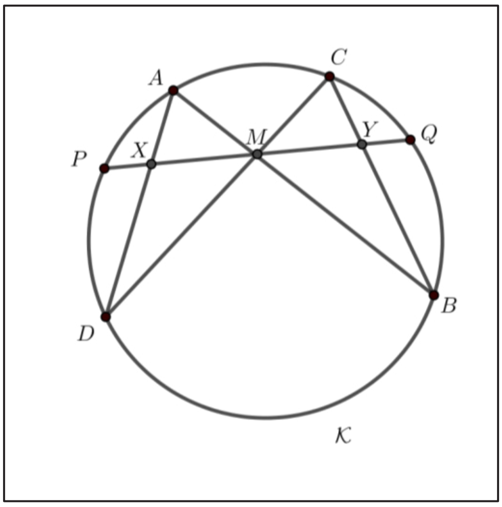
הצעה זו מתארת פעילות למידה מבוססת חקר המשלבת בין משפט הפרפר מגיאומטריה אוקלידית לבין בעיות של מקומות גיאומטריים תוך שימוש בתוכנה ג'יאוג'ברה. פעילות זו הועברה במהלך קורס מתקדם בגיאומטריה אוקלידית שהועבר לסטודנטים באחת המכללות להכשרת מורים למתמטיקה. הקורס הועבר במלואו במתכונת סינכרונית עקב מגפת הקורונה. העובדה שכל השיעורים הוקלטו אפשרה ללמוד כיצד התוכן וההקשר שימשו להנעת חקירה סביב ייצוג מושגים גיאומטריים בדרכים שונות תוך שימוש בטכנולוגיה, כיצד הושגו תובנות לגבי מה עובד הכי טוב עבור לומדים וסביבות למידה, כמו גם התמקדות במטרות הקשורות לשיתוף ידע מתמטי עם אחרים. שאלות והשערות רבות עלו במהלך אותה פעילות, נבדקו ניסיונות שונים לאישוש או הפרכת השערות, כגון השימוש בדוגמאות נגדיות, מסקנות ממשוואות אלגבריות או ייצוגים גרפיים דינמיים. לחלק מההשערות היה ניסיון לתת הצדקה פורמלית.

מטרת פעילות החקר הייתה להכיר ללומדים משפט שאינו נכלל בתוכנית הלימודים בבית הספר. הוספת אלמנט טכנולוגי כמו ג'יאוג'ברה והצעת ייצוגים אינטראקטיביים של עצמים גיאומטריים, אפשרו לסטודנטים לחקור את משפט הפרפר במעין סביבת מעבדה מדעית, ללמוד ולחוות את הרעיונות העיקריים שמאחוריו. יותר מזה, הפעילות לעיל הובילה אותם לגלות רעיונות חדשים וספקה רמזים להנמקה פורמלית על ידי הבחנה בין מקרים שונים. מה שמעניין הוא שפעילות החקר הובילה למסקנות והכללות בלתי צפויות וחשפה קשר נסתר בין משפט הפרפר (Fritsch, 2006) והעתקות מביוס (Saff & Snider, 2003).

משפט הפרפר

דרך נקודת האמצע M של מיתר PQ במעגל כלשהו, מעבירים מיתרים AB ו- CD, כאשר הנקודות A ו- C נמצאות על אחת הקשתות המתאימות למיתר PQ. אם שתי הנקודות X ו- Y הן נקודות החיתוך של המיתרים AD ו- BC עם PQ בהתאמה, אז $XM = YM$. (איור 1)

איור 1
משפט הפרפר

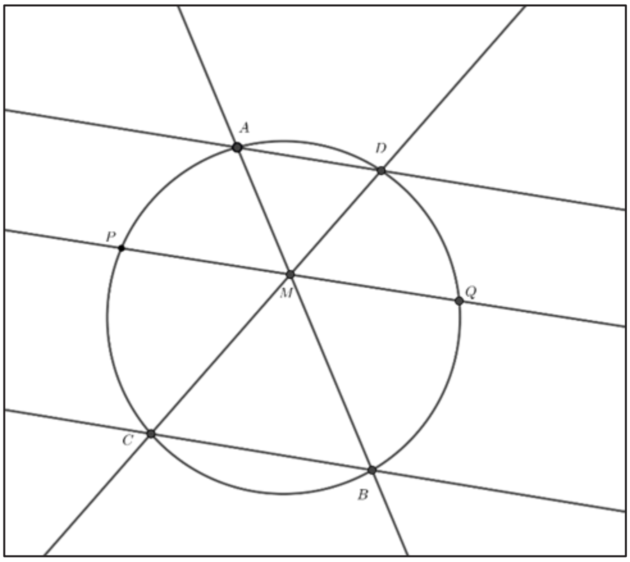


פעילות החקר נבנתה לפי מודל של למידה מבוססת חקר שהוצע על ידי (Pedaste et al. (2015. תהליך החקירה נתמך ע"י התוכנה הדינמית ג'יאוג'ברה. השלב הראשון, כלומר שלב האוריינטציה, נועד ליצירת עניין ומוטיבציה לחקור את הבעיה. השלב הבא היה ניסוח הבעיה באמצעות המשגה של מרכיביה הרלוונטיים. לאחר מכן בוצע תהליך ניסיוני לבחינת מקרים מיוחדים על מנת להסיק מסקנות ולגבש טענה מתאימה. ולבסוף שלב הדיון בתוצאות על מנת לתת נימוק פורמלי וקפדני עבורן.

הפעילות לעיל עזרה לסטודנטים ב-

1. **הבנת משפט הפרפר:** ובמיוחד בהבנת הסיבה מאחורי האילוץ ששתי הנקודות A,C נמצאות על המעגל באותו צד ביחס למיתר PQ. כאשר הסטודנטים בנו את האובייקט הגיאומטרי המופיע באיור 1, והשתמשו באופציית הגרירה של הנקודה C, ראו מול העיניים מה קורה כאשר שתי הנקודות A,C נמצאות על המעגל אבל בצדדים שונים ביחס למיתר PQ. העובדה שעבור ערך ספציפי של הנקודה C יש מצב של מקביליות בין המיתרים AD ו- BC לבין PQ (איור 2), אפשרה הכללה של משפט הפרפר לכל ערך אחר של C.

איור 2
מצב של מקביליות בין המיתרים AD ו- BC לבין PQ



2. **גילוי מקום גיאומטרי 1:** המקום הגיאומטרי הנוצר ע"י הנקודה X כתלות בנקודה C הוא הישר PQ. (איור 3)

בפעילות הזאת הסטודנטים גררו את הנקודה C על המעגל עם כיוון השעון. במהלך הגרירה, הנקודה X נעה על הישר PQ עד למצב שבו היא נעלמה (בעצם זהו המצב של מקביליות בין הישר AD לבין הישר PQ). ואז הנקודה X הופיעה מחדש על הישר PQ מצדו השני (מימין לנקודה M). בעקבות הפעילות הזו נוסחה הטענה הבאה:

טענה:

המקום הגיאומטרי שנקבע ע"י הנקודה X כתלות בנקודה C, כאשר שאר הנקודות A,P,Q קבועות על המעגל, הוא הישר PQ.

הוכחה:

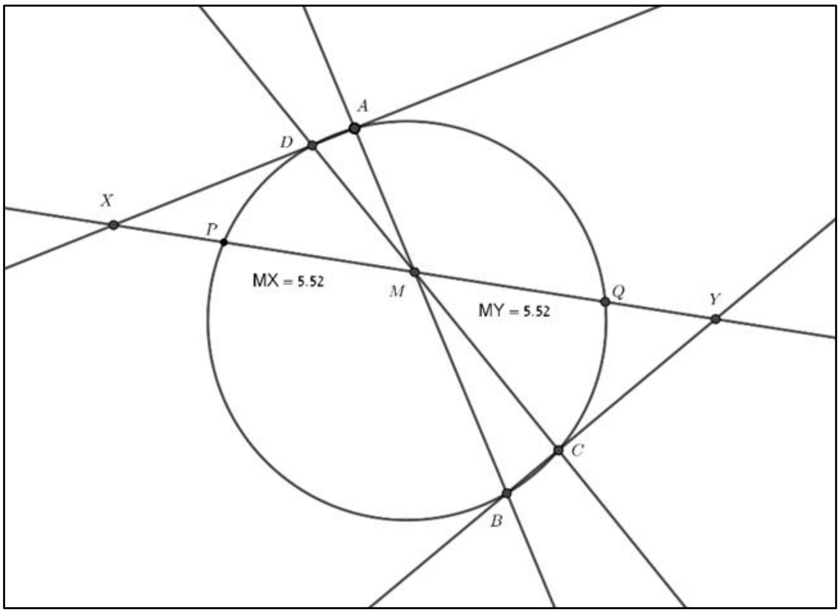
ניתן למצוא את משוואת שני הישרים AD ו- PQ, ואז את הנקודה X כנקודת החיתוך ביניהם. מתקבל השוויון הבא:

$$x = \frac{c(2pq - ap - aq) + ap^2 + aq^2 - pq^2 - qp^2}{c(q + p - 2a) + ap + aq - 2pq} \tag{1}$$

המצב שבו המכנה במשוואה לעיל מתאפס זהו המצב שבו הישר AD מקביל לישר PQ. במצב הזה הנקודה X אינה קיימת בכלל. הסטודנטים השוו בפועל את המכנה לאפס, מצאו את הערך של C שמאפס את המכנה ואף בדקו שאכן ערך זה נמצא על המעגל (ללא הגבלת הכלליות הנחנו שמדובר במעגל היחידה). המשוואה מתארת העתקה שמעתיקה את המעגל לישר PQ.

איור 3

המקום הגיאומטרי הנוצר ע"י הנקודה X כתלות בנקודה C הוא הישר PQ



3. **גילוי מקום גיאומטרי 2:** המקום הגיאומטרי הנוצר ע"י הנקודה X כתלות בנקודה Q הוא קרוב למעגל בתנאי שהנקודה A קרובה מספיק לנקודה P. (איור 4)

בפעילות הזאת הסטודנטים גררו את הנקודה Q על מעגל היחידה, כאשר שאר הנקודות A,P,C היו קבועות. העקבות של הנקודה X הראו עקום שמתחיל ומסתיים בנקודה P.
בוצעו כמה חזרות על אותה פעילות כשבכל פעם המיקום של הנקודות A ו- C היה שונה.
המסקנה הייתה שהמקום הגיאומטרי שנקבע ע"י הנקודה X הוא קרוב למעגל ככל שהנקודה A קרובה מספיק לנקודה P. לפני מתן הסבר לתופעה הזו היה ניסיון להשתכנע במתרחש בעזרת התוכנה ג'יוג'ברה. להלן תיאור מתומצת של הניסיונות הנ"ל:

1. נבחר 3 נקודות שרירותיות X_1,X_2,X_3 על המקום הגיאומטרי החדש, נשרטט בתוכנה ג'יוג'ברה את המעגל שעובר דרכן. נמצא את המרכז של מעגל זה כנקודת החיתוך של האנכים האמצעיים לקטעים X_1X_2 ו- X_2X_3. אחר כך נבחר נקודה רביעית ניידת על המקום הגיאומטרי ונבדוק האם העקבות שלה מונחות על המעגל ששרטטנו.
2. נבחר 3 נקודות שרירותיות X_1,X_2,X_3 על המקום הגיאומטרי כך שהנקודה X_3 תהיה נקודה ניידת. נמצא את נקודת החיתוך של האנכים האמצעיים לקטעים X_1X_2 ו- X_2X_3 ונבדוק אם הנקודה הזו נשארת קבועה תחת הניוד של הנקודה X_3 על המקום הגיאומטרי.

הניסיונות לעיל הראו שהמקום הגיאומטרי קרוב מאוד למעגל כאשר הנקודה קרובה מספיק לנקודה .

השלב הבא היה לנסות להוכיח את התוצאה שקבלנו. תחילה היה צריך למצוא ביטוי אלגברי לנקודה X כתלות בנקודה Q. התוצאה שהתקבלה היא:

$$x=\frac{q^2(a-p)+q(2cp-ac-p^2)+ap^2-acp}{q(a+c-2p)+ap+cp-2ac} \qquad (2)$$

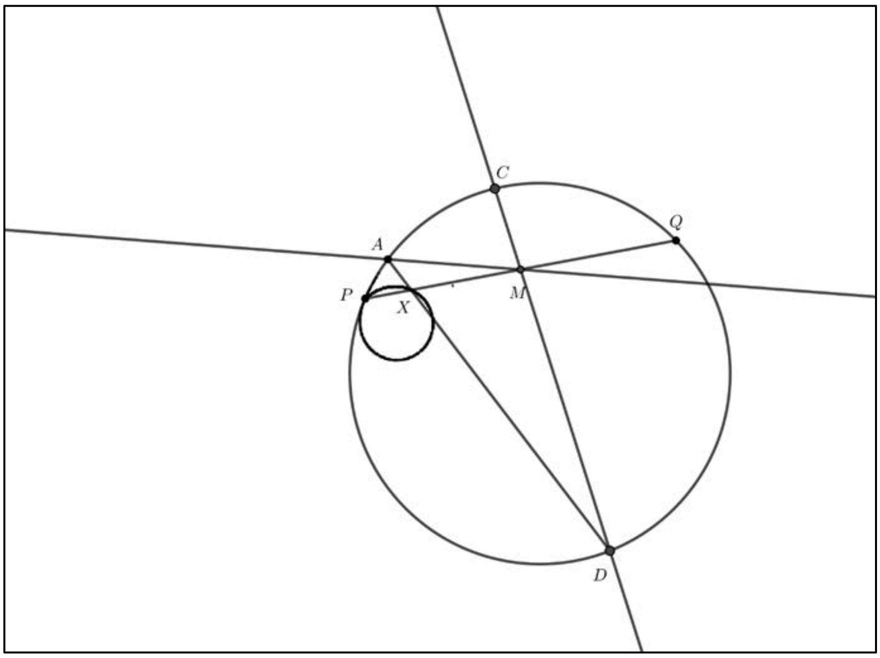
רואים ממשוואה (2) שככל שהנקודה A קרובה מספיק לנקודה P, אז המקדם של q^2 במונה שואף לאפס. וכתוצאה מכך ההעתקה במשוואה (2) שואפת להעתקה מהצורה:

$$f(q)=\frac{aq+b}{cq+d} \qquad (3)$$

העתקה זו נקראת העתקת מביוס וידוע שהיא מעתיקה מעגל מוכלל למעגל מוכלל. אפשר להראות שהמכנה במשוואה (2) לא מתאפס מעל מעגל היחידה ולכן במקרה הזה מעגל היחידה עובר למעגל.

איור 4

המקום הגיאומטרי הנוצר ע"י הנקודה X כתלות בנקודה Q



סיכום

טכנולוגיה היא כלי רב עוצמה שיכול לתמוך בתהליכי הוראה ולמידה. שימוש מושכל בטכנולוגיה יכול להתאים דרכי ההוראה לשונות בין התלמידים. הטכנולוגיה מציעה כלים להצגת והנגשת תכנים מתמטיים לתלמידים במסגרת מעניינת התומכת בתהליכי דמיון וחשיבה ומחזקת את המוטיבציה והעניין של הלומד במחקר ובאחריות האישית להבניית ידע חדש. לפיכך, יש צורך בפיתוח סגל מורים המכירים את הכלים הטכנולוגיים ובפרט מיומנים בבנייה והטמעה של פעילויות הוראה ולמידה הנתמכים על ידי כלים אלה.

רשימת מקורות

Fritsch, R. (2006). Aspects of the Butterfly Theorem. (Available at: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/fritsch/butterfly.pdf)

Pedaste, M., Mäeots, M., Siiman, L. A., de Jong, T., van Riesen, S. A. N., Kamp, E. T., Manoli, C. C., Zacharia, Z. C., & Tsourlidaki, E. (2015). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational Research Review*, 14, 47–61.

Saff, E. B., & Snider, A. D. (2003). *Fundamentals of complex analysis with applications to engineering and science.* Prentice hall, Englewood Cliffs.

נהורה אזולאי, יעל נוריק, מכללה ירושלים

סקירת ספרות, רציונל ושאלת המחקר

בעבר לא היה מקום לשגיאות בשיעורי מתמטיקה. ההוכחה לכך שמושג מסוים נרכש אצל התלמידים בצורה טובה הייתה כאשר הם לא ביצעו טעויות, ומורים התעלמו משגיאות ואף הענישו תלמידים שטעו. בעשורים האחרונים, חל שינוי בגישה לטעויות, כאשר בתחום החינוך המתמטי החלו לחקור טעויות אופייניות של תלמידים ואת המקורות לטעויות אלו (Borasi, 1994; Rushton, 2018; Schreiber & Tsamir, 2012). בנוסף, המחקר בתחום מציע דרכים שונות ללמידה מטעויות, המרכזיות ביניהן הן: (1) למידה מטעויות – ניתוח של טעויות כשהן עולות בכיתה וחקירה של הצעדים שהובילו לפתרון השגוי, תוך קיום שיח על העקרונות המתמטיים העומדים מאחורי הטעות (Borasi, 1994; Rushton, 2018). (2) למידה מבוססת טעויות – דיון יזום בטעויות אופייניות, למשל על ידי מתן מטלות עם סבירות גבוהה לטעויות או הצגה של מטלות פתורות עם שגיאה (אביטל, 1981; רהט וצמיר, 2011).

המחקר מצביע על יתרונות שונים ללמידה מטעויות ולמידה מבוססת טעויות: בכיתות בהן יש מקום ללמידה מטעויות תלמידים מקפידים יותר על נימוק תשובותיהם והם יודעים לזהות טעויות של עצמם ולתקנן (Rushton, 2018); למידה מסוג זה מפתחת את המוטיבציה של התלמידים, מפתחת תלמיד חוקר עצמאי וביקורתי ונותנת הזדמנות לתלמידים להשתתף בדיונים; למידה כזו אף משפרת ומעמיקה את ההבנה המתמטית עצמה ומקטינה את החזרה על טעויות דומות בעתיד (Richey et al., 2019; Rushton, 2018; Schreiber & Tsamir, 2012). לעומת זאת, יש הטוענים כי למילים "טעות" ו"שגיאה" יש קונוטציה שלילית, ולכן העיסוק בטעויות עלול לפתח אצל תלמידים תסכול ואכזבה. יתרה מזאת, ההתמקדות בטעויות עלולה לגרום לתלמידים לזכור בסופו של דבר את השגיאה דווקא ולהשתמש בה בהמשך (Heinze, 2005; Schreiber & Tsamir, 2012; אביטל, 1981).

נראה כי מורים למתמטיקה רבים עדיין אינם משלבים עיסוק בטעויות בהוראה שלהם (רהט וצמיר, 2011). מתוך אמונה בפוטנציאל שיש ללמידה מטעויות ולמידה מבוססת טעויות, ניתן למצוא השתלמויות וחומרי למידה שמעודדים מורים לשלב למידה מסוג זה. אולם, חסר מחקר על האופן בו התלמידים עצמם תופסים את העיסוק בטעויות בשיעורי מתמטיקה: מה הם עצמם חשים כלפי טעויות שהם עושים בכיתה והאם הם תופסים את יתרונות הלמידה הזו. מטרת מחקר זה היא לבחון את נקודת המבט של התלמידים לגבי למידה מטעויות בשיעורי מתמטיקה: *כיצד תופסים תלמידים טעויות בשיעורי מתמטיקה ומה הם חושבים שניתן ללמוד מהן?*

מתודולוגיה

מחקר זה נערך בשיטת מחקר איכותנית. במחקר השתתפו שלוש תלמידות כיתה ז' מחטיבת ביניים של המגזר הדתי בצפון הארץ – טליה, ענת ותמר (שמות בדויים) – שלומדות מתמטיקה בכיתה הטרוגנית. הכותבת הראשונה, שהיא המורה למתמטיקה של התלמידות, בחרה את תלמידות אלו משום שהן מייצגות רמות שונות של הישגים והשקעה בשיעורי המתמטיקה וכן מהיכרותה אותן ככאלה שאינן מהססות להביע את דעותיהן.

כלי המחקר: נתוני המחקר נאספו באמצעות ראיונות חצי מובנים שנערכו עם כל אחת מהתלמידות על ידי הכותבת הראשונה. הראיון כלל כמה חלקים: (1) התלמידות פתרו שתי שאלות מתמטיות שמזמנות טעויות. לאחר מכן הן נשאלו איך הן הרגישו כשהן טעו ומה הן למדו מטעויות אלו. (2) התלמידות נשאלו לגבי מבחן שהיה להן שבוע לפני קיום הראיון: האם הן הסתכלו על טעויות שהיו להן במבחן, ואם כן – האם הן ניסו להבין מדוע הן טעו. (3) התלמידות נשאלו שאלות שונות הקשורות לעשיית טעויות בשיעורי המתמטיקה: כיצד הן מרגישות כשהן טועות בכיתה והאם הן חוששות מכך; מה לדעתן

המורה למתמטיקה חושבת על טעויות שתלמידות עושות, כיצד המורה מגיבה בדרך כלל לטעויות, ואיך תגובות אלו משפיעות עליהן; מה לדעתן ניתן ללמוד מטעויות שהן עושות בשיעורי מתמטיקה.

ניתוח הנתונים: תמלולי הראיונות נותחו בגישה אינדוקטיבית. זוהו מספר מוקדי עניין מרכזיים: מה ניתן ללמוד מטעויות; תחושות התלמידות כלפי טעויות שהן עושות בשיעורי המתמטיקה; תגובות של מורות למתמטיקה לטעויות; עמדות התלמידות בנוגע לטעויות במבחנים. לכל מוקד עניין הובאו דוגמאות מתוך הנתונים.

ממצאים

מה ניתן ללמוד מטעויות?

מתשובות התלמידות לאורך הראיון ניכר שהן מאמינות שאפשר ללמוד מטעויות. בדבריהן הן התייחסו להיבטים שונים. בתחילת הראיון, בתגובה לתהליך שעברו כשפתרו שאלות שמזמנות טעויות, המרואיינות הדגישו שמחוויה כזו הן לומדות כיצד להצליח יותר בשאלות דומות בעתיד. ענת אמרה:

> מהטעויות שלי אני לומדת את הטכניקה, אני לומדת את העניין כאילו. אם עכשיו יתנו לי משהו דומה, נראה לי שאדע לענות כי למדתי את הטכניקה של זה. לא נשאר לי בראש רק את התשובה הסופית, גם את מה שהסברת לי.

התלמידות ציינו בהקשר זה כי הן לומדות מהטעויות גם כיצד לנהוג אחרת בזמן פתרון משימות ("צריך *לפתוח יותר את הראש, להבין, ולא העיקר לענות ולתקתק את זה*" – ענת), וכן שהן מבינות מתוך התהליך של תיקון הטעות מה הן צריכות לתרגל יותר. נראה גם כי התלמידות מאמינות שמאחורי טעויות רבות יש מחשבה של התלמידות וגם "משהו נכון". לדוגמה, בדברי ענת ש:"*בכל טעות יש את הדרך, את החשיבה. את כן חושבת, את כן מנסה לחשוב ולהגיע לתשובה. וגם אם בסופו של דבר לא יצאה בדיוק נכונה. באמצע אולי התבלבל להן, אבל בטוח היתה חשיבה*".

התלמידות התייחסו גם להיבטים רגשיים של למידה מטעויות. טליה וענת אמרו כי הן מבינות ש"*תמיד אפשר לנסות שוב, עד שאעשה את זה נכון*". טליה סייגה ואמרה ש"*לא תמיד מרגישים את זה שאם טועים אז אחר כך נצליח. לפעמים הטעויות, לא מצליחים מהם*". ענת התייחסה להיבט של הנעה כשאמרה ש"*גם משהו שלא הצלחת בו אז זה כאילו נשמר אצלך, להבא את תרצי לשפר את הטעות הזו, להפוך את הטעות לתשובה טובה*". היא הסבירה גם ש"*אם [התלמידה] לא הצליחה להבין משהו בכיתה, היא כן תצליח להבין את זה מהטעות שלה. אולי היא לא הסתכלה על זה כמו שצריך אלא בדרך אחרת וכשהיא טעתה אולי זה גרם לה להסתכל על זה יותר ברור*". תמר וטליה התייחסו לכך שהלמידה מטעויות במתמטיקה קשורה גם לנושא המתמטי הנלמד, למשל בדברי טליה:

> זה תלוי בחומר. המספרים המכוונים זה חומר שממש קשה לי ואם אני טועה בשאלה בחומר הזה, אז אני מרגישה שאני לא אבין את זה, כי זה טעות גדולה של הבנה של החומר הזה. אבל משוואות זה חומר שאני אוהבת ומבינה, אז אם אני טועה אני מרגישה שאני יכולה ללמוד מהטעות לפעם הבאה.

תחושות התלמידות כלפי טעויות שהן עושות בשיעורי המתמטיקה

שלוש התלמידות אמרו שהן טועות לעתים בשיעורי המתמטיקה. הן ציינו אמנם שהן לא אוהבות לטעות והתחושה עבורן אינה נעימה, אך מדבריהן עלה במפורש או בעקיפין כי הן מכירות בכך שמטעויות ניתן ללמוד ולהשתפר. טליה אמרה ש"*לפעמים זה מבאס [לטעות] ולפעמים אני מסתכלת איך לעשות את זה ואז אני מבינה מהטעות. ואז בתרגיל הבא אני יותר מצליחה [...] אני מרגישה שאני יכולה להשתפר מזה*". תמר הדגישה ש"*החשש לטעות לא גורם לי לא לנסות. כי מה זה יעזור לי לא לנסות? זה לא ללמוד בעצם. מי שלא טועה לא לומד, ככה הולך המשפט הזה, לא?*".

כאשר התלמידות נשאלו מפורשות האם יש להן חשש לטעות בכיתה, טליה ותמר אמרו שהחשש המרכזי שלהן הוא מתגובת חברותיהן לכיתה, למשל בדברים של תמר:

> אני מרגישה מושפלת, מהבנות בעיקר. לא שהן אומרות משהו, לא אמרו לי אף פעם משהו לא נעים, אבל אני מרגישה את הבושה הזו... כי יש בנות שעל כל דבר יש להן להגיד משהו, אז גם אם הן לא אומרות אז אני יודעת שהן חושבות.

לעומתן, ענת לא ציינה חשש כלשהו מהסביבה, אלא התמקדה בעצמה ובידע שלה: "*אם נגיד אני לא סגורה על התשובה אז אני פשוט לא עונה. ואם מישהי עונה על התשובה ואני רואה שזה מה שחשבתי, אז זה סיפוק בשבילי שידעתי את התשובה הנכונה*". נציין ש גם כשנשאלו על כך מפורשות, התלמידות הדגישו שאין להן חשש מתגובת המורה, כפי שיורחב להלן.

תגובות של המורות למתמטיקה לטעויות

שלוש התלמידות הציגו דעה דומה, לפיה יש לגיטימציה מצד המורות לטעויות בכיתה. טליה סבורה שהמורות מאמינות שהתלמידות תלמדנה מהטעות, וכן כי המורות לומדות מהתשובות כיצד לעזור לתלמידות:

> נראה לי שמורה למתמטיקה לא נבהלת מטעויות של תלמידות ולא כועסת על זה בכלל [...] היא יודעת מזה כמה לעזור לתלמידים. למשל מישהו שהוא ממש לא מבין וטעה אז היא בטח יותר תעזור לו להבין, ומישהו שיותר יודע היא תעזור לו פחות, כמה שהוא צריך.

ענת מאמינה שהמורה מקבלת את הטעות מפני שהיא רואה את השתדלותה של התלמידה וכן את הלך המחשבה שעומד מאחורי הטעות: "*לדעתי הן חושבות: 'יפה, לפחות היא השתדלה. אולי יש טיפה מהתשובה, מהדרך'. אני לא חושבת שהן חושבות על זה בצורה לא טובה, הן פשוט יודעות עד כמה אנחנו מנסות להשתדל*". תמר סבורה שעבור מורות טעויות "*זה לא נורא. גם הן היו פעם תלמידות, כאילו כולן טועות, כולן בנות אדם. בקיצור, [המורות] לא מתרגשות מטעויות*".

התלמידות התייחסו לתגובות שונות של המורות לטעויות. בסך הכל, התלמידות ציינו תגובות חיוביות שמעודדות אותן ללמידה. הן פירטו על אסטרטגיות שעוזרות להן כגון הסבר של הטעות וחזרה על החומר, בקשה מהתלמידה הטועה לנסות שוב או העברה של השאלה לתלמידה אחרת. התלמידות הדגישו שהן אוהבות שהמורות מבקשות מהתלמידה עצמה למצוא את הטעות ולתקן אותה. הן ציינו שתגובה נעימה של מורות משפיעה על הרצון של תלמידות ללמוד מהטעות להבא. תמר אמרה ש"*אם המורה הגיבה בצורה נעימה, בסבלנות, אז קל יותר ללמוד מהטעות לדעתי*", ואף ציינה בפני המראיינת, המלמדת אותה מתמטיקה, ש:

> את אוהבת שתלמידה טועה כי אז אפשר ללמוד מזה, יותר מאשר שאת מלמדת את החומר כרגיל, כי פתאום את רואה מה התלמידה חשבה. אם את רק מלמדת, את מלמדת דרך הראש שלך, את לא יודעת מה יש בראש לתלמידה על זה עד שהיא לא טועה, נראה לי.

לעומת זאת, התלמידות ציינו כי יש מורות שמגיבות לטעויות באופן שגורר תחושות לא נעימות ויתר על כן, חוסר רצון ללמידה ומעורבות בשיעור, כפי שעולה למשל בדבריה של טליה: "*אם מורה אומרת 'עברנו על זה, לימדנו את זה כבר' אז אני לא רוצה לענות יותר על השאלות בשיעור, כי אני רואה שנגיד תלמידה אחרת טעתה וככה היא אמרה לה, אז אני יותר אפחד שאטעה*".

עמדות התלמידות בנוגע לטעויות במבחנים

כשהתלמידות נשאלו האם הן מסתכלות על הטעויות שהן עשו במבחנים, טליה ותמר ענו שהן מסתכלות על הציון בלבד. טליה ציינה כי "*לפעמים אני מדפדפת לראות את הV או הX אבל לא מסתכלת על השאלה עצמה*". בהקשר של המבחן אליו התייחס הראיון, היא ציינה שהטעויות שלה במבחן זה לא היו גדולות, במובן שהן קרובות לתשובה הנכונה ומעידות על הבנה: "*לא סתם הקפתי את זה, זה דומה. מה שהיה לי במחשבה זה היה קרוב. זה טעויות שיש מחשבה נכונה גם אם בסוף יש טעות, לפחות עבר לי משהו במחשבה, אפילו אם הכול טעות*".

גם תמר אמרה ש"*אני לא מסתכלת בפנים על הטעויות. ראיתי שזה היה ציון שהוא יותר טוב ממה שהיה לי לפני וגם הוא מהגבוהים בכיתה, אז זהו, שמחתי ולא התחלתי לעבור בתוך המבחן*". תמר הבהירה כי "*הציון הוא לא החשוב לי, באמת. הדרך היא החשובה. [...] אני לא כל כך לוקחת טעויות ממבחן אחד למבחן אחר. בשבילי העיקר זה אם עשיתי את מה שאני יכולה להשקיע או לא*". עם זאת, תמר ציינה שבמקרה של ציונים נמוכים אמא שלה מתעקשת שהיא תעבור על המבחן ו"*אלמד מתוך המבחן את הטעויות כדי שאבין את החומר טוב. לי זה רק יהיה קצת חשוב להבין את הטעויות*".

לעומתן, ענת מקפידה לעבור על המבחנים שלה ולהסתכל גם על הטעויות שעשתה וגם על התשובות הנכונות. היא הסבירה ש"*מהטעויות שלי אני אדע איך לשפר ולהפוך את הציון שלי להרבה יותר טוב*".

דיון ומסקנות

במחקר זה נבדקו תפיסות של תלמידות בכיתה ז' לגבי למידה מטעויות בשיעורי מתמטיקה. מניתוח הנתונים נראה כי התלמידות תופסות טעויות כחלק מתהליך הלמידה, ואף מאמינות כי טעויות משקפות את תהליך החשיבה, שחלקו לפחות הוא נכון. התלמידות התייחסו ללמידה מטעויות כלמידה של דרך הפתרון הנכונה של תרגיל בו הן טעו ומה הן צריכות לעשות אחרת בפעם הבאה, למשל לחשוב יותר זמן לפני שהן עונות או הבנה שהן צריכות לתרגל יותר נושא מסוים. כלומר, התלמידות לא התייחסו להיבטים שמודגשים בספרות המחקרית כגון העקרונות המתמטיים העומדים מאחורי הטעויות שלהן והבנה מתמטית, אלא יותר לרמה הפרוצדורלית ולתיקון טעויות ומניעה של טעויות דומות בעתיד. ממצאים אלו מתיישבים עם הטענות מהספרות על כך שלמידה מטעויות מובילה לשינוי עתידי (רהט וצמיר, 2011), אך גם עם טענות בספרות שמורים מתמקדים בהיבטים המעשיים של למידה טעויות ואינם מדגישים מספיק את התרומה המעמיקה יותר של למידה כזו (Borasi, 1994; אביטל, 1981), אולי משום שהם עצמם לא מכירים בערך של למידה כזו (Schreiber & Tsamir, 2012). ייתכן גם שממצא זה נובע מגילן הצעיר היחסית של התלמידות ומהנושאים המתמטיים שהן למדו עד כה.

מממצאי המחקר עולה שהתלמידות אינן חוששות לרוב מתגובות המורה לטעויות בשיעורי המתמטיקה. ממצאים אלו מעידים על כך שמורים למתמטיקה מצליחים להטמיע בכיתות נורמות של למידה מטעויות. והם מדגישים את החשיבות שיש בתגובות נעימות ומכבדות של המורים לטעויות שעולות בכיתה. אולם, הממצא לפיו התלמידות חוששות מתגובות חברותיהן לכיתה לטעות, מעלה שעדיין יש צורך בחיזוק של נורמות הדיון והשיח המתמטי בכיתה. ייתכן שהחשש מהתגובה החברתית קשור גם לגיל התלמידות וכן לשיח הלמידה הכללי בבית הספר, בו טעויות עדיין נתפסות בצורה שלילית, בדומה לטענות בספרות (Heinze, 2005; Schreiber & Tsamir, 2012; אביטל, 1981). כלומר, על אף שיש שינוי וטעויות נתפסות כתורמות לתהליך למידה נכון ומשמעותי במתמטיקה, עדיין יש צורך בעבודה רבה כדי לשנות את הנורמה הכללית אצל התלמידים בהתייחס לטעויות.

על אף שמורים רבים מדגישים שמבחנים נועדו ללמידה והחשיבות אינה רק בציון, מממצאי המחקר נראה שהתלמידות עדיין מתמקדות בציון בלבד ולא בוחנות את הטעויות שלהן. ממצא זה מדגיש שיש עדיין דרך לעבור בנוגע למסרים המועברים לתלמידים בנוגע לדרכי ההערכה, וכי יש מקום להשתמש יותר במבחנים כבסיס להערכה מעצבת או להמשך למידה, ולא רק לשם הערכה.

לסיכום, ממצאי מחקר זה מעלים כי תלמידים תופסים טעויות בשיעורי מתמטיקה כחלק מתהליך הלמידה. אולם, עדיין קיים צורך לפתח פרקטיקות הוראה ודרכי הערכה שידגישו יותר מה ניתן ללמוד מטעויות, לצד חיזוק נורמות השיח והדיון בנוגע לטעויות, בשיעורי המתמטיקה ובמקצועות לימוד אחרים, והן מול המורים והמורות, אשר נראה שעדיין אינם מכירים בתרומה המלאה של למידה כזו.

רשימת מקורות

אביטל, ש'. (1981). מה אפשר לעשות עם שגיאותיו של תלמיד? שבבים- עלון מורי מתמטיקה, תיק מס' 15.

רהט, מ' וצמיר, פ'. (2011). "בעקבות טעות של תלמיד"- לאן היית מוביל את השיעור? *על"ה- עלון למורי המתמטיקה 44*, 17–23.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as “springboards for inquiry”: A teaching experiment. *Journal for research in mathematics education, 25(2)*, 166–208.

Heinze, A. (2005). Mistake-Handling Activities in the Mathematics Classroom. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 105–112.

Richey, J. E., Andres-Bray, J. M. L., Mogessie, M., Scruggs, R., Andres, J. M., Star, J. R., Baker, R.S., & McLaren, B. M. (2019). More confusion and frustration, better learning: The impact of erroneous examples. *Computers & Education, 139*, 173–190.

Rushton, S. J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal, 3(1)*, 1–12.

Schreiber, I., & Tsamir, P. (2012). Different approaches to errors in classroom discussions: The case of algebraic inequalities. *Investigations in Mathematics Learning, 5(1)*, 1–20.

מפגש חוקרים צעירים

מפגש חוקרים צעירים: התמודדות עם ביקורת עמיתים

בועז זילברמן, המרכז לטכנולוגיה חינוכית
גיל שורץ, אוניברסיטת מישיגן, ארה"ב
לירון שוורץ אביעד, הטכניון
מרב וינגרדן, אוניברסיטת ניו המפשייר, ארה"ב

פורום החוקרים הצעירים בחינוך מתמטי נוסד בכנס ירושלים בשנת 2020. הפורום מגבש קהילה של חוקרים וחוקרות הנמצאים בשלבים הראשונים בקריירה המחקרית שלהם, מלימודיהם לתואר שני, דרך כתיבת עבודת דוקטורט ועד להשתלמויות בתר־דוקטורט, בארץ ובחו"ל. מטרת הפורום היא לתת הזדמנות לחוקרים צעירים לשתף בהתמודדויות, דילמות ואתגרים הקשורים בעולם המחקרי שלהם, לרכוש ביחד מיומנויות מחקריות ולשמוע מנסיונם של חוקרים בכירים מקהילת החינוך המתמטי על הדרכים להתמודדות עם האתגרים בעולם המחקר.

מטרת פגישת הפורום בכנס ירושלים הנוכחי היא לאפשר מרחב לדיון ולמידה משותפת בסוגיה הרלוונטית לכל העוסקים במחקר – ביקורת עמיתים. במפגש נעסוק בהתמודדות עם ביקורת לגבי תוצרים מחקריים (לדוגמא, ביקורת מהמנחה) ונתמקד בהתמודדות עם ביקורת משופטים חיצוניים בתהליך שיפוט של מאמרים בכתבי-עת. ביקורת היא חלק בלתי נפרד מהעבודה המחקרית והיא חשובה והכרחית להתקדמות ופיתוח המחקר, אך ההתמודדות עימה לעיתים מערבת היבטים רגשיים ויוצרת קשיים לא צפויים, שלרוב אינם נידונים באופן מפורש. מטרת המפגש היא לאפשר מרחב בטוח לשיחה על תהליכים אלו ועל דרכי התמודדות אפשריות.

משך המפגש יהיה שעה וחצי. בחלק הראשון יתקיים דיון מונחה בהובלת צוות הפורום על התמודדות עם ביקורת במחקר. בחלק השני תתקיים סדנה עם פרופ"ח עינת הד-מצוינים (הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל) אשר תתמקד בהתמודדות עם קבלת תוצאות של שיפוט מאמרים. הסדנה תכלול זמן לדיון ושאלות ותשובות.

אינדקס

אינדקס

א

אבי ברמן 209
אביגיל צברי.............................. 109
אביטל אלבום-כהן 114
אברהם הרכבי 33
אודליה ציאדה 57
אוסאמה סוידאן 89
אורית ברוזה 77
אורית זסלבסקי 101
אורלי בוכבינדר 105
אורלי דנציגר 173
אחלאם ענאבוסי 160
אייה מחאמיד 53
איגור קונטורוביץ'.................. 127
אירה רווה 215
איריס וגנר-גרשגורן 216
איריס שרייבר 17, 73
אלי נצר................................ 25
אלי אייזנברג 198
אליק פלטניק 37, 207, 210
אמירה עאבד 147
אנטולי קורופטוב 85, 147, 164, 195, 215
אסתי בוטמן 190
אסתר לוינסון 21, 53, 81
אסתר עדי יפה 77
אלון דיין................................ 226

ב

בועז זילברמן 240
בוריס קויץ'ו 49, 209
בת שבע חדד 93, 222

ג

ג'והיינה עוואודה-שחברי .. 139, 143, 151
ג'ייסון קופר 9
גיל שוורץ 240
גילת פלאח............................ 85
גלית נגרי-חדיף..................... 33

ד

דינה תירוש 81, 97
דני בן צבי 11
דפנה אליאס 164
דורית כהן............................. 222

ה

הדס הנדלמן 61
הודא שאיב 151

ו

וגיה דאהר 160
ורדה זיגרסון 198

ז

זהבית כהן 61, 169, 186

ח

חיים בלין 195
חיריה מסארווה 135
חלימה שרקייה 186

ט

טומי דרייפוס 85, 164
טלי נחליאלי 41

י

יוליה מוצ'ניק רוזנוב 131
יוסף זוהר 13
יעל נוריק 173, 235

כ

כלילה קופרמן 156

ל

לארה שאהלה דמירדג'יאן 114
לובה ויסוצ'אנסקי 73
לורי רובל 139, 143
ליבי עזריהו 77
ליה נח סלע 164
לירון שוורץ אביעד 169, 240

מ

מאיה רון עזרא 21

מאיר סנדיק 190

מיכל איילון 29, 45, 139, 147

מיכל טבח 25, 57, 114, 118, 123

מיכל כהן 156

מירב וינגרדן 105, 240

מירב צוהר רוזן 181

מירה פל 198

מירית רחמים 209

ג׳בור מנאל 230

מירלה וידר 69

מרים סלאמה 139, 209

נ

נאוה שאול 177

נדב מרקו 210

נהורה אזולאי 235

נוי אביב 202

ניצן אייזנשטוק 195

נצה מובשוביץ- הדר 198

ס

סוהא רואשדה 29

סורינה סבאח 65

סיגל קליין 202, 208

סיגל-חוה רותם 45

ע

עדי עראקי 93, 131

עטרה שריקי 198

עינת הד מצוינים 65, 114, 118

עירית לביא 215

ענת אבן זהב 69

ענת קלמר 215, 222

ענת קסירר 181

ענת רוזן 89

פ

פאתנה מרג׳יה 202

פסיה צמיר 81, 97

ק

קרני שיר 101, 198

ר

ראיסה גוברמן 131

רוזה לייקין 93, 202, 207

רוני קרסנטי 33

רונית בסן צינצינטוס 177

רונית קלוסקה 215

רותי ברקאי 81

רותי סגל 198, 214, 215

רותם עבדו 226

רחל זקס 49

ש

שאדיה ג׳דבאן 135

שי אולשר 15

שי כהן 77

שירלי מידז׳ינסקי 215

שרה הרשקוביץ 77

ת

תובל אבישי 37

תמי שובל 123

תמר אבירם 118

תקוה עובדיה 127