אולימפיסיקה-5

פתרונות

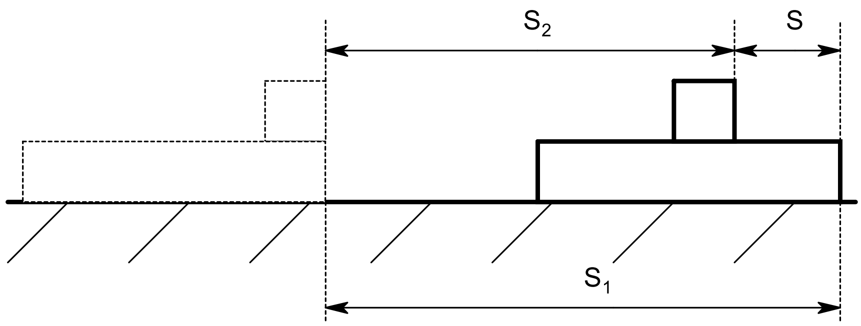
<u>בעיה 1.</u>

<u>דרך 1.</u>

בדחיפה קצרה התיבה אינה מקבלת את המהירות ההתחלתית בהשפעה של כוח חיכוך $\mu_k mg$. אחרי הדחיפה במערכת הייחוס הקשורה למשטח התיבה נעה בתנועה שוות תאוצה והקרש בתנועה שוות תאוטה. בסופו של דבר החלקה של התיבה יחסית לקרש נפסקת ושני הגופים מתחילים לנוע במהירות שווה ל- v.
נסמן באות S את המרחק שעוברת התיבה יחסית לקרש. לפי חוק שימור התנע מקבלים:

$$Mv_0 = (m+M)v \qquad (1)$$

כדי להשתמש בחוק שימור האנרגיה (אנרגיה מכנית אינה נשמרת) צריך קודם כל לחשב את העבודה של כוחות חיכוך שפועלת בין התיבה לבין הקרש. עבודה של כוח חיכוך שפועל על התיבה היא חיובית ואילו עבודה של כוח חיכוך שפועל על הקרש היא שלילית. נקודת אחיזה של כוח חיכוך שפועל על הקרש מבצעת את התזוזה היחסית למשטח במרחק S_1 וכוח השני במרחק S_2 (ראו ציור).



לכן עבודה כוללת של כוחות חיכוך היא שלילית ושווה ל- $-\mu_k mg$. חוק שימור האנרגיה אפשר להציג בצורה:

$$\frac{1}{2}Mv_0^{\,2} = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + \mu_k mgS \qquad (2)$$

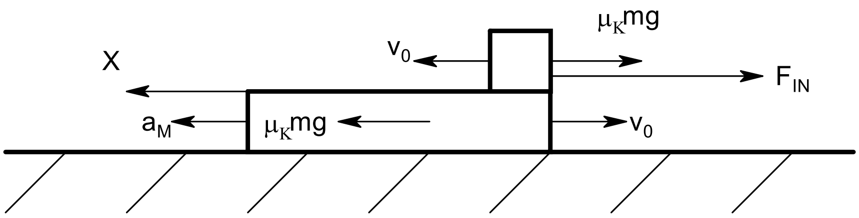
ממשוואות (1) ו-(2) נקבל:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{m+M}\cdot\frac{v_0^{\,2}}{\mu_k g}$$

המהירות ההתחלתית המינימלית אפשר למצוא מאי-שיוויון $S > L$, ז.א.

$$v_0,\min = \sqrt{2Lg\mu_k(1+\frac{m}{M})} \qquad (3)$$

דרך 2. (במערכת הייחוס לא אינרציאלית, הקשורה לקרש).



$$F_{IN} = ma_M = \frac{\mu_k m^2 g}{M}$$

$$a_M = \frac{\mu_k mg}{M}$$

$$a_{m,x} = -\frac{\mu_k mg + \frac{\mu_k m^2 g}{M}}{m} = -\mu_k g(1+\frac{m}{M})$$

$$v_x{}^2 = v_{0x}{}^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow v_{mx}{}^2 = v_0{}^2 - 2\mu_k g(1+\frac{m}{M})S = 0$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{m+M}\cdot\frac{v_0{}^2}{\mu_k g} > L$$

חוזרים לנוסחא (3)

דרך 3. (במערכת הייחוס האינרציאלית)

$$a_m = \mu_k g, \qquad v_m = \mu_k gt$$

$$a_M = \frac{\mu_k mg}{M}, \qquad v_M = v_0 - \frac{\mu_k mg}{M}\cdot t$$

$$v_M = v_m \Rightarrow t = \frac{v_0}{\mu_k g(1+\frac{m}{M})}$$

$$S_2 = \frac{a_m t^2}{2} = \frac{{v_0}^2}{2\mu_k g(1+\frac{m}{M})^2}$$

$$S_1 = v_0 t - \frac{a_M t^2}{2} = \frac{{v_0}^2}{\mu_k g(1+\frac{m}{M})^2}\cdot(1+\frac{m}{2M})$$

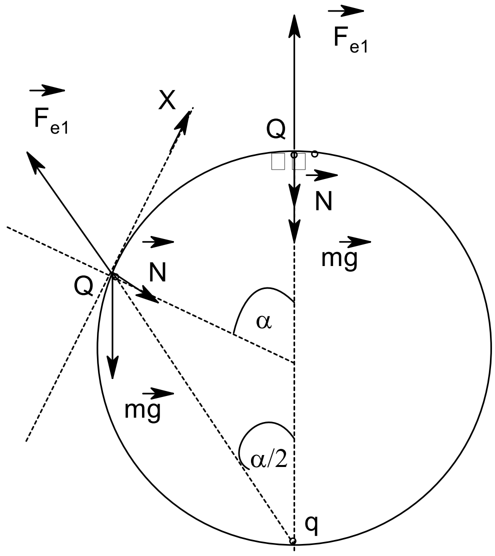
$$S = S_1 - S_2 = \frac{{v_0}^2}{2\mu_k g(1+\frac{m}{M})} > L \quad \Rightarrow v_{0,\min}$$

בעיה-2

דרך 1

במצב שיווי משקל כוח נורמלי אמור להיות לא שלילי, $N \geq 0$, ומשוואת הכוחות:

$$mg + N = \frac{kqQ}{4R^2}$$



מכאן:

$$N = \frac{kqQ}{4R^2} - mg \geq 0 \quad \Rightarrow \quad q \geq \frac{4mgR^2}{kQ}$$

חוץ מזה במצב שיווי משקל יציב נדרש:

$$F_{e1,x} + mg_x > 0, \qquad F_{e1}\cdot Sin\frac{\alpha}{2} > mg\cdot Sin\alpha$$

$$\frac{kqQ\cdot Sin\frac{\alpha}{2}}{(2R\cdot Cos\frac{\alpha}{2})^2} > mgSin\alpha = 2mg\cdot Sin\frac{\alpha}{2}\cdot Cos\frac{\alpha}{2}$$

$$q > \frac{8mgR^2\cdot Cos^3\frac{\alpha}{2}}{kQ}$$

לזוויות קטנות $Cos\frac{\alpha}{2}\approx 1$, ז.א. $q \geq \frac{8mgR^2}{kQ}$ ו- $q_{\min} = \frac{8mgR^2}{kQ}$

<u>דרך 2</u>

אנרגיה פוטנציאלית כוללת $U_g + U_{e1}$ כפונקציה של α בזוויות קטנות צריכה להיות בצורה של פרבולה עם "חיוך"

$$U_g = -2mgRSin^2\frac{\alpha}{2},\qquad U_{e1} = \frac{kqQ}{2RCos\frac{\alpha}{2}}$$

לזוויות קטנות $Sin\alpha \approx \alpha$ ו- $Sin^2\frac{\alpha}{2}\approx\frac{\alpha^2}{4}$

$$\frac{1}{Cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{Cos^2\frac{\alpha}{4} - Sin^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{1-2Sin^2\frac{\alpha}{4}} \approx \frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{8}} \cong 1+\frac{\alpha^2}{8}$$

(בהתמרה האחרונה השתמשנו בנוסחה לסכום של סידרה הנדסית אינסופית)

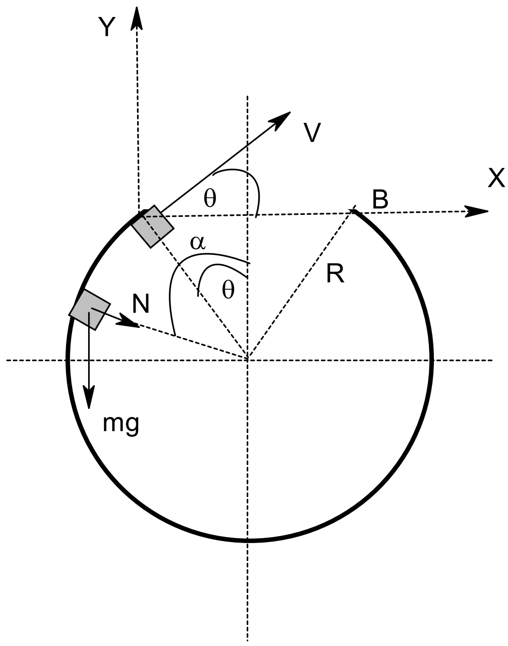
$$U = \frac{kqQ}{2R}(1+\frac{\alpha^2}{8}) - mgR\frac{\alpha^2}{2} = \frac{kqQ}{2R} + (\frac{kqQ}{8R} - mgR)\frac{\alpha^2}{2}$$

$$\frac{kqQ}{2R}(1+\frac{\alpha^2}{8}) - mgR\frac{\alpha^2}{2} = \frac{kqQ}{2R} + (\frac{kqQ}{8R} - mgR)\frac{\alpha^2}{2}$$

$$\frac{kqQ}{8R} > mgR \;\Rightarrow\; q_{\min} = \frac{8mgR^2}{kQ}$$

בעיה-3

1. **א)** לתנועה חלקה (תנועה בליסטית) צריכים להיות משיקים משותפים למעגל ופרבולה בנקודות A ו- B.



$$x = vt \cdot Cos\theta$$

$$y = vt \cdot Sin\theta - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v \cdot Sin\theta}{g}$$

$$AB = 2RSin\theta = \frac{v \cdot Cos\theta \cdot 2v \cdot Sin\theta}{g}$$

$$v^2 = \frac{gR}{Cos\theta} \qquad (1)$$

הנוסחה (1) התקבלה רק משיקולי קינמטיקה. כדי לבדוק האם התיבה תשיג את הנקודה A , צריך להראות, שבמהירות (1) התיבה לוחץ על המסילה בנקודה הזו (ז.א. , שכוח נורמלי N בנקודה A הוא לא שלילי). על-ידי חוק השני של ניוטון בנקודה כלשהי מקבלים:

$$mg \cdot Cos\alpha + N = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N = mg(\frac{v^2}{gR} - Cos\alpha) \qquad (2)$$

אחרי הצבה (1) ל-(2) והחלפה $\alpha = \theta$ מקבלים:

$$N = mg(\frac{1}{Cos\theta} - Cos\theta) \qquad (3)$$

קל לראות , שהביטוי (3) הוא לא שלילי לכל $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

בעזרת חוק שימור האנרגיה נקבל:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1+Cos\theta) \qquad (4)$$

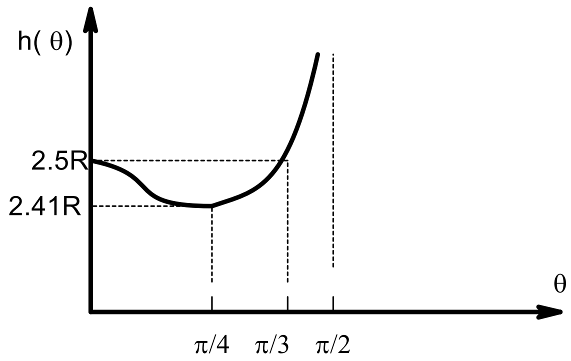
מציבים (1) לתוך (4) ומקבלים:

$$h(\theta) = R(1+Cos\theta+\frac{1}{2Cos\theta}) \qquad (5)$$

<u>ב)</u> כדי לשרטט את הגרף $h(\theta)$, נגזור את הפונקציה (5):

$$h'(\theta) = -R\cdot Sin\theta\cdot(1-\frac{1}{2Cos^2\theta}) \qquad (6)$$

מ-(6) רואים, ש- $h'(\theta)=0$, אם $\theta_1=0$ ו- $\theta_2=\frac{\pi}{4}$. בתחום $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ הפונקציה $h(\theta)$ יורדת ובתחום $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ $h(\theta)$ גדלה ושואפת ל- ∞ , כאשר $\theta\to\frac{\pi}{2}$. ז.א. , שהגובה h הוא מינימלי, אם $\theta=\frac{\pi}{4}$.
צורתו של הגרף אפשר לראות בשרטוט הבא:



<u>בעית-בונוס</u>

קודם כל נבדוק: האם הגוף יעבור את שי ה"הר". אם לא יעבור, אז באיזשהו רגע מהירויות של הגוף ושל ה"הר" תהיו שוות.

לפי חוק שימור התנע והאנרגיה נמצא גובה H_1 , שאליו יגיע על ה"הר" הגוף בעל מסה m:

$$mv_0^2/2 = (m+M)\cdot\frac{v^2}{2} + mgH_1$$

$$mv_0 = (m+M)\cdot v$$

מכאן: $H_1 = v_0^2 M/2g(m+M) = 1.04m$

מכיוון ש- $H_1 < H$ הגף לא יעבור את שי הגובה של ה"הר". לאחר שהגוף יעלה לגובה H_1 , הוא יחליק אחורה.

נסמן את המהירות הסופית של הגוף v_1 ושל ה"הר" v_2 שוב נשתמש בחוקי שימור התנע והאנרגיה:

$$mv_0^{\ 2} / 2 = mv_1^{\ 2} / 2 + Mv_2^{\ 2} / 2$$

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2$$

ממערכת הזו נמצא שני הפתרונות:

$$v_1 = v_0, \qquad v_2 = 0$$

ו:

$$v_1 = -v_0 \frac{M - m}{M + m}, \qquad v_2 = v_0 \frac{2m}{m + M}$$

הפתרון הראשון מתאים למקרה, כאשר הגוף עובר שי הגובה של ה"הר".

במקרה שלנו מתבצע הפתרון השני.

לאחר הצבת הנתונים נקבל:

$$v_1 = -3.33m/s, \qquad v_2 = 1.67m/s$$