Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

10 JCRME

כנס ירושלים העשירי
למחקר בחינוך מתמטי

ספר מאמרי הכנס

עורכים: אבישר תמרה, אובודנקו רגינה, וידר מירלה, חן חדד נעמי,
לביא עירית, קופר ג'ייסון, שרייבר איריס

תוכן עניינים

דבר יושב ראש הכנס

שלום רב לקהילת החינוך המתמטי בישראל. ברוכות הבאות וברוכים הבאים לכנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי, המתקיים זו הפעם העשירית ברציפות.

כולנו מאוכזבים ששוב נמנע מאיתנו להיפגש פנים אל פנים, אך עם זאת שמחים שהטכנולוגיה מאפשרת לנו להמשיך לשמור על קשר. ויתרה מזו, יש גם חצי כוס מלאה: עלויות ודמי רישום מופחתים, תרומה צנועה להפחתת פליטות הפחמן כשלא נוסעים לירושלים, ואפשרות להצטרף מארצות ניכר - הן משתתפים מן המניין (למשל פוסט-דוקטורנטיות בארה"ב), והן מרצים אורחים דוברי עברית. השנה נמשיך במסורת שהתחלנו בה בשנה שעברה, ונארח את פרופ' דור אברהמסון מאוניברסיטת קליפורניה בברקלי.

אם נחפש עוד תרומות של מגפת הקורונה, אפשר למצוא אחת בעליית קרנה של המתמטיקה בכלל ושל המתמטיקה השימושית בפרט. בחדשות אנחנו רואים גרפים אקספוננציאליים (ואולי נעז לקוות שבקרוב גם לוגיסטיים), ושומעים על מקדמי הדבקה, על רגישות ועל סגוליות של בדיקות מעבדה שמתבטאות בהסתברויות של תוצאות בדיקה כוזבות, ועוד ועוד. בשנה זו, שבה ישראל משתתפת במבחן הפיזה הבינלאומי באוריינות מתמטית, העיסוק במתמטיקה של המגפה נותן רוח גבית לכל המעוניינים לקדם פתרון בעיות מציאותיות ואוריינות בחינוך המתמטי בארץ.

אך עם זאת, אנחנו מודעים לכך שרבים בקהילה עייפו מכנסים מקוונים. אנחנו נשתדל השנה ללמוד מכנסים מוצלחים יותר ופחות שהשתתפנו בהם בשנתיים האחרונות, ולתת למשתתפים תחושת פנים אל פנים עד כמה שאפשר. למשל, החלטנו הפעם לוותר על מתכונת הוובינר להרצאות מליאה, שבה הקהל מושתק ובלתי נראה, ובמקום זאת לקיים אותן במתכנות של פגישת זום רגילה, בה הקהל יכול להיראות ולהישמע.

השנה הוגשו מעט פחות הצעות מאשר בשנים קודמות. עובדה זו משקפת, אולי, את העומסים הכבדים שכולנו נתונים בהם, ואת הקושי להמשיך ולקיים מחקר סדיר כאשר כל מערכת החינוך מאותגרת.

התקבלו 47 הצעות, מהן 37 הצעות להצגת דיווחי מחקר, 3 הצעות להצגות קצרות, ו-7 הצעות לסדנאות וסמינרים. אחרי שיפוט התקבלו להצגה בכנס 11 הצגות קצרות בארבעה מושבים מקבילים, 22 דיווחי מחקר, 7 סדנאות וסמינרים (כולל סמינר ייעודי לחוקרים צעירים), 2 מיצגים שיוצגו במליאה, ו- 4 הרצאות מליאה. חשוב לנו להדגיש שההצעות הקצרות, שרובן יוצגו במתכונת של שיח מחקרי (3 הצגות בנות 10 דקות, ואח"כ 30 דקות דיון משותף בשלוש ההצגות) אינן נחותות מדיווחי המחקר. בדיווחי מחקר יש מקום מצומצם יותר לדיון, ובדיווחים הקצרים, בהם מתוארים מחקרים מעט פחות מגובשים, הדיון ומשוב הקהילה מקבלים נפח גדול יחסית.

הכנס לא היה יכול להתקיים ללא עזרה ותמיכה של גורמים רבים. תודתנו נתונה

- למרכז האקדמי לב בירושלים, שממשיך לתת את חסותו ולהעמיד לרשותנו שרותים ומשאבים, גם אם הפעם הם לא כוללים קירות ומזון
- למוסדות האקדמיים שממשיכים לתמוך כספית בכנס שנה אחר שנה
- לכל הוועדה המארגנת, ובאופן מיוחד לנעמי חן-חדד וליעקב קולטקר ששום דבר לא היה קורה בלעדיהם
- לחברות ועדת הכנס, שעמלו רבות במהלך השנה האחרונה על התוכנית ועל כל היוצא בזה
- לצוות הטכני של מכללת אורנים שבנו את הסביבה הפיזיטאלית ומספקים לנו תמיכה טכנית רצופה
- ולקהילה כולה, שהשתתפה בשיפוט ההצעות (60 שופטים סה"כ) ושמשתפת אותנו במחקריה.

אנחנו מאחלים לכולכם כנס מעניין, מעשיר ומהנה.

בברכה,
ג'ייסון קופר, יו"ר הכנס

חברי ועדת התכנית (לפי סדר ה- א"ב)

ד"ר תמרה אבישר, מכון דוידסון ומכללת אורות ישראל

ד"ר רגינה אובודנקו, מכללת סמינר הקיבוצים, מכללת שנקר

ד"ר מירלה וידר, מכללת שאנן לחינוך, מכון ויצמן למדע

ד"ר עירית לביא, מכללת אורנים

ד"ר איריס שרייבר, אוניברסיטת בר אילן, מכללת סמינר הקיבוצים

חברי הוועדה המארגת (לפי סדר ה- א"ב)

פרופ' נח דנא-פיקארד, המרכז האקדמי לב

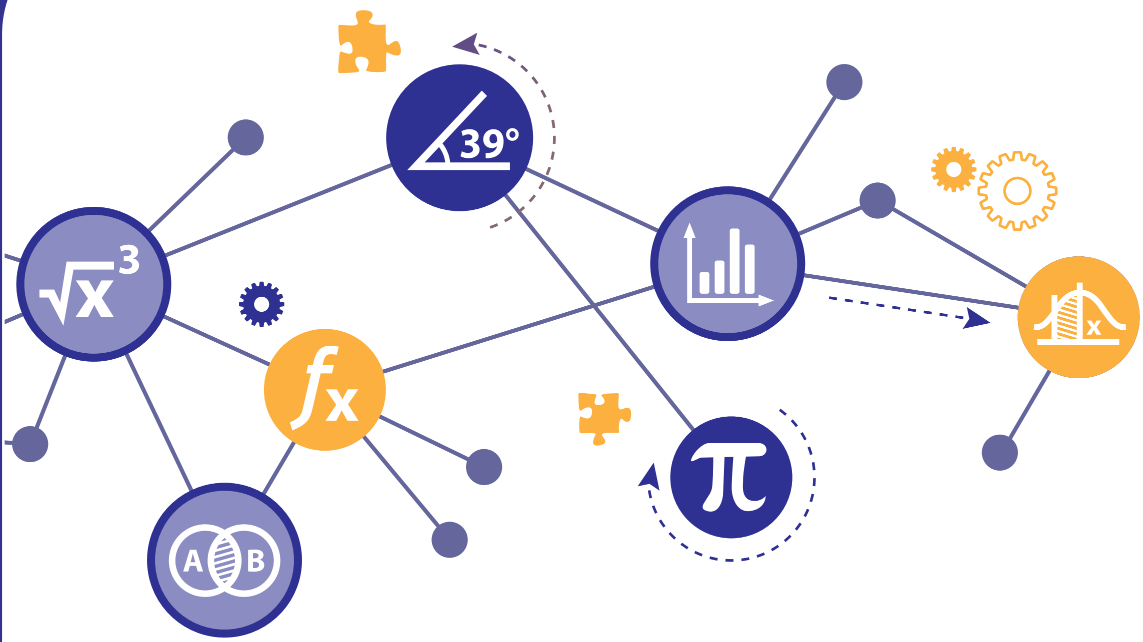
נעמי חן-חדד, מכללת סמינר הקיבוצים

פרופ' מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

יעקב קולטקר, המרכז האקדמי לב

רשימת שופטי הכנס (לפי סדר הא"ב)

אביטל אלבוים-כהן
אוסאמה סוידאן
אורטל ניצן
אורלי גוטליב
אחלאם ענאבוסי
איחסאן חאג יחיא
איליה סיניצקי
אילנה ווייסמן
אלון פינטו
אליק פלטניק
אנה הופמן
אנטולי קורופטוב
אסתר לוינסון
בועז זילברמן
בוריס קויצ'ו
ג'והיינה עואודה שחברי
גילה רון
גלית נגרי חדיף
דורית כהן
דורית פטקין
דפנה אליאס
זהבית כהן
טומי דרייפוס
טלי נחליאלי
ילנה נפתלייב
יניב ביטון
יעל נוריק
כאותר ח'לאילה
מארק אפלבאום
מיכל איילון
מיכל טבח
מנוחה פרבר
מרב וינגרדן
מריטה ברבש
מרים גור
מרים ולך
נדב מרקו
נעה כהן אליהו
נעמה בן-דור
סבינה סגרה
סיגל רותם
סמאהר נעמה
עטרה שריקי
עינב אייזיקוביץ-עודי
עינת הד-מצויינים
עפרה עפרי
קרני שיר
רוחמה אבן
רוני קרסנטי
רונית בסן צינצינטוס
רותי ברקאי
רותי סגל
רותם עבדו
רז הראל
רחל זקס
רעות פרשה
שולה וייסמן
שושנה גלעד
שי אולשר
תקוה עובדיה



Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

10JCRME

כנס ירושלים העשירי למחקר בחינוך מתמטי

לתכנית הכנס לחץ כאן>>

הרצאות מליאה

תהליכי רפלקציה של תלמידים, מתרגלים, פרחי הוראה, מורים, ומורי מורים למתמטיקה כמקדמי ידע מתמטי של פתרון בעיות – הדומה והשונה

תקוה עובדיה - מכללת אורנים

רפלקציה היא פעילות בה האדם מהרהר מחדש על פעולה באמצעות הזיכרון וכך לומד ממנה תוך כדי הפעולה או לאחריה. רפלקציה מכוונת לפיתוח חשיבה ביקורתית תוך התבוננות פנימית של האדם והפעלת תהליכי שיפוט ובקרה עצמיים על פעולתו. הסתכלות ביקורתית זו הופכת את הפעולה לשקולה ומתוכננת מההווה להווה ומהעבר לעתיד (Schön, 1983; Mason, 2002 - reflection in action, on action and through action).

וכמו שדיואי ניסח חשיבה רפלקטיבית:

Dewey (1910) “an active, persistent and careful consideration” (p. 6).

"שיקול אקטיבי מתמשך וזהיר".

לסטר (Lester, 2013), שהרהר בעבודה שלו ושל חוקרי פתרון בעיות אחרים, הציג מגוון תובנות ביחס לשאלות בתחום כמו: איזה מקום תופסים ידע מתמטי ומיומנויות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות? כיצד על המורים להיות מודעים לרעיונות התלמידים ולהגיב אליהם? (Lester & Cai, 2016). לסטר טען כי פתרון בעיות מוצלח כרוך בין השאר ביישום ידע קודם מתאים, שימוש בייצוגים ודפוסי הסקה לוגית מוכרים ואינטואיציה במאמץ ליצור ייצוגים חדשים ורעיונות לפתרון בעיות (Lester & Kehle, 2003). מרכיבים אלו משקפים את הפעילות הקוגניטיבית והרפלקטיבית ברמה הגבוהה הנדרשת לפתרון בעיות.

מייסון (Mason, 2016) מציע שיש לקחת בחשבון מגוון גורמים כדי לפתור בעיות: ההיבטים של הנפש האנושית, ההכרה, ההשפעה, ההתנהגות, הקשב, הרצון והמטה-קוגניציה כך שגם המלצתו מתייחסת להיבטים רפלקטיביים.

(“All aspects of the human psyche, cognition, affect, behaviour, attention, will and metacognition or witnessing must be involved.")

בהרצאה הנוכחית אנסה לתאר מערכת שמאפיינת תהליכי רפלקציה דומים ושונים של לומדי מתמטיקה הנמצאים בשלבי למידה והתנסות שונים של פתרון בעיות מתמטיות: תלמידים, מתרגלים, פרחי הוראה, מורים ומורי מורים.

המחקר הראשון מתייחס לאפיון תהליכים רפלקטיביים של תלמידי תיכון בתהליך של פתרון בעיות (Ovadiya, 2021a; Ovadiya, 2022).

המחקר השני מתייחס להיבטי רפלקציה של מתרגלים המדווחים על חוויות של הוראת מתמטיקה באוניברסיטה (Kontorovich & Ovadiya, 2022).

המחקר השלישי מתייחס להיבטים רפלקטיביים של פרחי הוראה שחוו פתרון בעיות שגרתיות ולא שגרתיות (עובדיה והלפרין, 2019; Ovadiya, 2019a).

המחקר הרביעי מתייחס למורים הפותרים בעיות לצורך חיבור בעיות לצורכי מחקר והוראה (Ovadiya 2019b, Ovadiya, 2021b).

המחקר החמישי מתייחס להיבטים רפלקטיביים של מורי מורים המנחים מורים בתהליך פתרון בעיות וחיבור בעיות (טרם פורסם).

מכל המחקרים אוחדה מערכת שמתארת את התהליך הרפלקטיבי באמצעות המאפיינים הדומים והשונים כגון: זרזים, שיקולים, פעולות, ותוצרים המתייחסים לתהליכי פתרון בעיות מתמטיות בקרב פותרים שונים במרחבי למידה והוראה מגוונים.

רשימת מקורות

עובדיה, ת' והלפרין, מ' (2019). קידום מורים לקראת פיתוח גישה לפתרון בעיות מתמטיות "לראות את הקל" – Seeing the easy when solving problems. *על"ה – העלון למורי המתמטיקה, 57*, 29-40.

Dewey, J. (1910). *How we think*. Heath & Co.

Lester Jr., F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical P-S instruction. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 245–278.

Lester Jr., F. K., & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In P. Felmer, E., Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems. Advances and new perspectives* (Research in mathematics education series). (pp. 117–136). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Lester, F. K., & Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 501–517). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge Farmer.

Mason, J. (2016). Part 1. Reaction: Problem posing and solving today. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems. Advances and new perspectives* (pp. 109–116). Switzerland: Springer.

Kontorovich, I. & Ovadiya, T. (2022). How narratives on the secondary-tertiary transition shape university tutors' sense-making of their teaching. Manuscript submitted for publication.

Ovadiya, T. (2019a). Using teachers' research to elicit professional development among pre- and in-service mathematics teachers: A qualitative meta-analysis of mathematics education in graduate programs. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11).* Utrecht, Netherland. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02422588.

Ovadiya, T. (2019b). Posing problems and designing tasks to promote transfer of learning in geometry by teacher-researchers: The case of tessellations. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of the International Symposium in Elementary Mathematics Teaching* (pp. 280-287). Prague. Retrieved from semt.cz/proceedings-19.pdf

Ovadiya, T. (2021a). Implementing theoretical intervention principles in teaching mathematics to struggling students to promote problem-solving skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* Advance online publication. doi:10.1080/0020739X.2021.1944682

Ovadiya, T. (2021b). A novice teacher researcher's action research project: Posing problems to promote concepts of graphs in calculus. *Action Research and Innovation in Science Education. 4*(1), 13-23.

Ovadiya, T. (2022). From Clueless to Competent: How building "similarity connections" Between Mathematical problems is a means of improving the problem-solving skills of struggling high-school students. Manuscript submitted for publication.

Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books.

תלמידים מחוננים ומורות מנוסות

אבי ברמן - הטכניון

אחת הפעולות החשובות ביותר במתמטיקה היא פתרון בעיות. מתמטיקאים שואלים שאלות, מחפשים בעיות, ממציאים בעיות ופותרים בעיות. פתרון בעיות הוא גם תחום מרכזי בחינוך מתמטי והוא דרך מצוינת לפתח חשיבה מתמטית ולעורר עניין במקצוע.

מתמטיקאים גם מלמדים, ובהרצאה אני רוצה לספר על שני קורסים שלימדתי בשנים האחרונות:

הקורס הראשון - "מתורת המספרים האלמנטרית למבוא לתורת המטריצות" - ניתן בטכניון לתלמידי כתה ט' בתכנית אודיסיאה של מדעני העתיד. קורס זה מהווה אשנב, דרך פתרון בעיות מאתגרות, לנושאים בתורת המספרים, חבורות, תורת הקבוצות, קומבינטוריקה, תורת המטריצות, הצפנה ודירוג אתרים. ספר המבוסס על קורס זה יצא לאור בימים האחרונים בהוצאת World Scientific,

הקורס השני - "פתרון בעיות, חיבור בעיות ובחירת בעיות" - ניתן באורנים בתכנית לתואר שני למורות (היו גם מורים בודדים) בבית ספר יסודי. בקורס פתרנו בעיות מעניינות. המורות הציגו מאמרים שעוסקים בפתרון בעיות ותיארו בעיות שהן נותנות לתלמידים שלהן.

בשני הקורסים, המטרה הייתה לפתח את החשיבה המתמטית ולהעשיר את הידע המתמטי. לקורס באורנים הייתה מטרה נוספת – להעשיר את הידע הפדגוגי ולעודד את המורות לשלב בעיות מעניינות בהוראתן. למרות ההבדל, בגיל הסטודנטים וברמת השאלות, בין שני הקורסים, יש גם דמיון מסוים ביניהם ובהרצאה אנסה לעמוד עליו.

בהרצאה אתן דוגמאות של בעיות, אבל במקום לתאר את הפתרונות של הבעיות אספר סיפורים הקשורים בהן כך שאני מקווה שלא רק פותרי בעיות יוכלו ליהנות.

רשימת מקורות

Berman, A. (2021). *A problem based journey from elementary number theory to an introduction to matrix theory*. World Scientific.

Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (Eds.). (2009). *Creativity and the Education of Gifted Students*. Sense.

Mhagna, A., & Berman, A, (in preparation). Problem solving in teaching mathematics in primary school.

מנגנוני יצירה במוח האנושי

רפי מלאך - המחלקה למדעי המוח מכון וייצמן למדע

התהליך היצירתי שבו האדם היוצר מפיק תוצר מקורי ומשמעותי- הוא ללא ספק אחד הממדים החשובים ביותר בהתנהגות האנושית. לא ניתן לדמיין את הקדמה הטכנולוגית, המדעית, האמנותית והתרבותית ללא פריצות הדרך והרעיונות היצירתיים. שאלה עמוקה ומרתקת נוגעת למנגנונים המוחיים שעומדים בבסיס היצירתיות האנושית. רמזים למנגנון כזה ניתן לקבל באמצעות בחינה של מספר מאפיינים המשותפים לכל תהליכי היצירה האנושית. מאפיינים אלה כוללים קודם כל את האלמנט הספונטני- התהליך היצירתי אינו יכול להיות מוכתב כולו מבחוץ- ומכיל, תמיד, אלמנט מקורי וחדש שנוצר ונתרם על ידי האינדיבידואל עצמו. מאפיין נוסף הוא הגיוון- אין תחום בהתנהגות האנושית – ממוזיקה דרך מחול ועד הנדסה- שאינו מאפשר יצירתיות. במקרים רבים התהליך היצירתי מופיע באופן פתאומי ובלתי צפוי- ברגע של הארה דווקא בזמן מנוחה או עיסוק בעניין שלא קשור ישירות לתהליך היצירתי. לבסוף-תהליך יצירתי משמעותי תמיד מתחולל על רקע ידע מקצועי עמוק ואינטואיציות מבוססות ניסיון והתמחות.

בחיפוש אחר מנגנוני מוח שמבטאים מאפיינים אלו ונוספים- מופיע מנגנון מוחי חשוב- שמהווה נושא למחקר זה מספר שנים. מנגנון זה הוא בעל תכונות הנראות מתאימות במיוחד לתפקד כמחולל עצבי של התהליך היצירתי. המנגנון מכונה גלי מוח ספונטאניים או גלי מנוחה. אלו גלי פעילות עצבית איטיים שנמשכים מספר שניות ומופיעים במצב מנוחה. – גלים אלו ומפעילים בצורה חופשית, עשירה, ובזמנים שונים כל מערכת ומערכת עצבית בקליפת המוח האנושי. חותמת של התהליכים האלו מופיעה בצורת גל איטי המקדים את הפצעת כל רעיון יצירתי. יש לאינדיבידואל יכולת להשפיע על גלים אלו הן על ידי רכישת ידע ומקצועיות והן על ידי תשוקה להגיע לפתרון או התגלית היצירתית. הכוח היצירתי של גלי המנוחה נובע מהשילוב המיוחד שהם מבטאים בין חופש לבין ארגון תלוי ידע ולמידה.

רשימת מקורות

Broday-Dvir, R., & Malach, R. (2021). Resting-state fluctuations underlie free and creative verbal behaviors in the human brain. *Cerebral Cortex 31*(1), 213-232.

Harmelech, T., & Malach, R. (2013). Neurocognitive biases and the patterns of spontaneous correlations in the human cortex. *Trends in cognitive sciences 17*(12), 606-615.

Moutard, C., Dehaene, S. & Malach, R. (2015). Spontaneous fluctuations and non-linear ignitions: Two dynamic faces of cortical recurrent loops. *Neuron 81*(1):194-206.

נעים ללמוד: עיצוב עיגונים קשביים למושגים מתמטיים

דור אברהמסון - אוניברסיטת קליפורניה – ברקלי

https://edrl.berkeley.edu/projects/kinemathics

מהו המוח כי ישכיל ללמוד מושגים מתמטיים? מהם מושגים מתמטיים כי נדעם? וברגע שענינו על שאלות צנועות אלו..., כיצד עלינו, לפיכך, ללמד מושגים מתמטיים?

המעבדה שלנו, בשיתוף עמיתים ברחבי העולם, יוצרת וחוקרת פלטפורמות ממוחשבות אינטראקטיביות בהן תלמידים[1] לומדים לנוע פיזית בתצורות תנועה שאנו מעצבים מראש כמגלמות מושגים מתמטיים ממוקדים, למשל הזזת שתי הידיים בו-זמנית במהירויות שונות כגילום דינמי של קבוע פרופורציה. התלמידים מוזמנים לפתור בעיות-שליטה מוטורית עם משוב אלגוריתמי ניסתר כדי לגרום למערכת-מכשירים להתנהג באופן מסוים, למשל להניע את שתי הידיים כך שמסך יהיה ירוק. מחד, ביצוע התנועה המורכבת הזו הינו מאתגר, כי הוא דורש תיאום-גפיים קואורדינטיבי שהתלמידים מעולם לא חוו – מעין ננו-כוריאוגרפיה מושגית. מאידך, תיאוריות מהמדעים הקוגניטיביים – פסיכולוגיה התפתחותית (Piaget, 1971), פסיכולוגיה אקולוגית (Gibson, 1977), פילוסופיה אֶנְאָקטיביסטית (Varela), ופסיכולוגיה קוגניטיבית (Mechsner, 2004) -- גורסות שתיאום-גפיים קואורדינטיבי לביצוע תנועה פיזית מורכבת תלוי בפיתוח תפיסה קשבית (attentive) מתאימה של המרחב. כלומר, סביבת-הלמידה שלנו מהווה שדה-אימון ממוכשר המתעדף ביצוע תצורות מוטוריות ייעודיות בעלות ערך תרבותי (Reed & Bril, 1996), ובייחוד, ערך פדגוגי מתמטי (Abrahamson & Trninic, 2015).

אנו שואלים האם וכיצד התלמידים ישכילו לפתח אופן תפיסה קשבית ייעודית של המרחב שתאפשר להם לבצע את ה׳ננו-כוריאוגרפיה׳ הקואורדינטיבית הנחוצה לפתרון הבעיה המוטורית. יתרה מכך, האם וכיצד הוספה של כלים סימבוליים לתוך שדה התנועה, למשל מיסוך שריג (grid) על המרחב החזותי של הפעילות המוטורית, יאפשרו לתלמידים להמליל את התפיסה הקשבית המשתמעת (implicit) שלהם כאונטולוגיה חדשה מעוגנת-חשיבה מושגית מתמטית? כיצד משפיעים מבני-שיח מגוונים –עם מנחים אנושיים או באמצעות בינה מלאכותית -- כגון הערות מרומזות ורפלקציה מונחית, על פתרון הבעיות וניסוח הפתרונות?

בהסתמך על ראיות אמפיריות המשלבות תיעוד של פעולות ידניות, הגדים מולטי-מודליים (דיבור, מחוות ידיים) וניטור חזותי (מיקודי-עיניים ומסלולי-מבט) של משתתפי-הניסויים, אנו טוענים שבסביבות הלמידה שלנו תלמידים מפתחים באופן ספונטני אוריינטציות תפיסתיות חדשות כלפי מרחב האינטראקציה כתמיכה באיכות ביצוע המשימה המוטורית, ובפרט כמאפשרות את יישום הקואורדינציות המאתגרות (Abrahamson & Sánchez–García, 2016). האוריינטציות התפיסתיות הללו, שאנו מכנים עוגני קשב (attentional anchors, Hutto & Sánchez–García, 2015), מתגלמות ״יש מאין״ כמיזוג תפיסות ממשיות ודמיוניות לכדי מעין אחיזה פיזית במצע המידע החושי (Abrahamson, 2021). תוך שהם מניעים את ידיהם, התלמידים משמרים את מבני הגשטאלט החדשים הללו כבלתי-משתנים באמצעות התאמה חושית-מוטורית דינאמית, מהירה, איטרטיבית, אימפליציתית, ומותאמת לסביבה (בדומה לתופעת שחקני-כדור-בסיס אשר רצים לתפוס את הכדור

[1] שימוש בלשון זכר לפישוט-הקריאה, אך הכוונה לכל מערך התלמידות והתלמידים.

כשהם משמרים אותו במיקום סובייקטיבי קבוע במרחב החושי-חזותי). בתורן, אינטראקציות-שיח ותיסוף-הכלים הסימבוליים-מתמטיים מעלים לתודעתם הלשונית של התלמידים את האוריינטציות התפיסתיות הכמוסות הללו, ומאפשרים להם לסמן ולמדל כמותית את אסטרטגיות התנועה שלהם, ובכך לבטא מושגים חדשים. הם אף משווים אסטרטגיות שונות ובכך מבטאים הקשרים מתמטיים בעלי-חשיבות דידקטית (Abrahamson et al., 2014).

ממצאים אלו תומכים בתיאוריות היסטוריות מהפסיכולוגיה ההתפתחותית הקוגניטיבית ומדעי-הלמידה. בפרסום אחד (Abrahamson et al., 2016) טענו שאוששנו אמפירית קונסטרוקטים היפותטיים מרכזיים מתורתו של ז׳אן פיאז׳ה (assimilation, accommodation, reflecting abstraction), ובפרסום אחר (Shvarts & Abrahamson, 2019) טענו שהדגמנו רעיון מהותי של לב ויגוצקי (zone of proximal development). יתרה מכך, ניתוח כמותני משולב של הפעולות הסנסו-מוטוריות שביצעו התלמידים (cross Recurrent Quantification Analysis) מגלה שתהליך פיתוח עוגני-הקשב מהווה מעברי-פאזה בין מוקדי-משיכה דינמיים (attractors) כבמערכות מורכבות (complex dynamic systems). כלומר, בידינו כעת הכלים הנחוצים לחזות מרחוק בתובנה מתמטית על ידי מעקב אחר פרמטרים של טלמטריה ידנית וויזואלית.

במהלך ההרצאה אציג את בעיית-העיצוב, היבטים תיאורטיים מרכזיים, תהליך הפיתוח הטכנולוגי, סרטי-וידאו מהניסויים עם מצגת משולבת של תנועות-העיניים, וממצאים מהניתוחים הכמותניים של ההתנהגויות הסנסו-מוטוריות כמערכות דינמיות מורכבות. הדיון עשוי לגעת בהשלכות של הממצאים לתיאוריות למידה מגוונות, בממשקים מיטביים לבנייה ואיסוף נתונים, וכן באפשרויות והקשיים של יישום הארכיטקטורה העיצובית הזו (embodied design, Abrahamson, 2014) בסביבות הלמידה קיימות ועתידניות.

רשימת מקורות

Abrahamson, D. (2014). Building educational activities for understanding: An elaboration on the embodied-design framework and its epistemic grounds. *International Journal of Child-Computer Interaction, 2*(1), 1-16. https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2014.07.002

Abrahamson, D. (2021). Grasp actually: An evolutionist argument for enactivist mathematics education. *Human Development*, 1–17. https://doi.org/10.1159/000515680

Abrahamson, D., Lee, R. G., Negrete, A. G., & Gutiérrez, J. F. (2014). Coordinating visualizations of polysemous action: Values added for grounding proportion. In F. Rivera, H. Steinbring, & A. Arcavi (Eds.), Visualization as an epistemological learning tool [Special issue]. *ZDM Mathematics Education, 46*(1), 79-93. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0521-7

Abrahamson, D., & Sánchez-García, R. (2016). Learning is moving in new ways: The ecological dynamics of mathematics education. *Journal of the Learning Sciences, 25*(2), 203-239. https://doi.org/10.1080/10508406.2016.1143370

Abrahamson, D., Shayan, S., Bakker, A., & van der Schaaf, M. F. (2016). Eye-tracking Piaget: Capturing the emergence of attentional anchors in the coordination of proportional motor action. *Human Development, 58*(4-5), 218-244. https://doi.org/10.1159/000443153

Abrahamson, D., & Trninic, D. (2015). Bringing forth mathematical concepts: Signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action. *ZDM Mathematics Education, 47*(2), 295–306. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0620-0

Gibson, J. J. (1977). The theory of affordances. In R. Shaw & J. Bransford (Eds.), *Perceiving, acting and knowing: Toward an ecological psychology* (pp. 67-82). Lawrence Erlbaum Associates.

Hutto, D. D., & Sánchez-García, R. (2015). Choking RECtified: Embodied expertise beyond Dreyfus. *Phenomenology and the Cognitive Sciences, 14*(2), 309-331. https://doi.org/10.1007/s11097-014-9380-0

Mechsner, F. (2004). A psychological approach to human voluntary movements. *Journal of Motor Behavior, 36*(4), 355–370.

Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge: An essay on the relations between organic regulations and cognitive processes* (B. Walsh, Trans.). The University of Chicago Press.

Reed, E. S., & Bril, B. (1996). The primacy of action in development. In M. L. Latash & M. T. Turvey (Eds.), *Dexterity and its development* (pp. 431-451). Lawrence Erlbaum Associates.

Shvarts, A., & Abrahamson, D. (2019, 2019/09/01/). Dual-eye-tracking Vygotsky: A microgenetic account of a teaching/learning collaboration in an embodied-interaction technological tutorial for mathematics. *Learning, Culture and Social Interaction, 22*, 100316. https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2019.05.003

Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press.

דיווחי מחקר

שיטה לבחינת היישום של פרקטיקות הוראה המעודדות חקירה המבוססת על ניתוח שיעור מצולם (נש"מ)

רינת באור - מכללת סמינר הקיבוצים

מבוא

השאלות החשובות שעולות בעקבות למידת מורים בהשתלמות הן האם, וכיצד, יושמו הפרקטיקות הנלמדות ובייחוד – כיצד ניתן לבחון זאת. יש שיטות לבחינת היישום המציעות תצפיות על שיעורי המורים (Stein et al., 2017), ויש אחרות המציעות שאלונים או משובי מורים למילוי לצד ההשתלמויות. עבודה זו מציעה שיטה נוחה ויעילה לבחינת מידת היישום של פרקטיקות המעודדות חקירה על סמך רפלקציות כתובות של מורים, בעקבות ניתוח שיעור מצולם (נש"מ). השיטה מבוססת על ניתוחים כמותיים ואיכותניים הבוחנים את התייחסות המורים לפרקטיקות שנלמדו בהשתלמות מחשב"ה (מהלכים מעודדי חשיבה בהוראת המתמטיקה). הניתוח הכמותי מציג תמונה השוואתית בין המורים וגם בין הפרקטיקות לגבי מידת היישום של אותן הפרקטיקות. שיטת הניתוח האיכותנית מתייחסת לשיח של המורים, ומאפשרת להבין את הסיבות למידת היישום של פרקטיקות מסוימות.

רקע תיאורטי

להוראה המעודדת חקירה במתמטיקה יש יתרונות רבים כיוון שהיא מבוססת על עיסוק במשימות מסדר חשיבה גבוה, העמקה במושגים מתמטיים וקיום דיונים בכיתה (Heyd-Metzuyanim, Smith, Bill & Resnick, 2019). כדי לסייע למורים לאמץ סגנון הוראה זה, נבנתה בישראל תוכנית לפיתוח מקצועי (מחשב"ה) שחשפה את המורים לפרקטיקות שונות, כמו 'חמש הפרקטיקות' (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008) ולכלים לפיתוח הדיונים בכיתה. 'חמש הפרקטיקות' מהוות כלים פדגוגיים להכנה לקראת השיעור (כמו "פרקטיקת הציפיות") ובמהלכו (פרקטיקות: ניטור, בחירה, סידור וקישוריות).

לבחינת מידת היישום של פרקטיקות הנלמדות בהשתלמויות, יש צורך בכלי הערכה. חוקרים אחדים הציעו לבחון את הידע המתמטי של המורים (MKT - Mathematical Knowledge for Teaching) בעקבות ההשתלמות. אחרים (Hoover, Mosvold, Ball Loewenberg, & Lai, 2016) הציעו לבחון את ידע המורים במשימות מתמטיות (MTF - Mathematical Tasks Framework). ידע זה מתמקד בעיקר ביכולת המורים לזהות את הרמה הקוגניטיבית הנדרשת לשם ביצוע המשימה, ולדעת כיצד לשנותה (Hoover et al., 2016). מחקר אחר הציע לבחון רכיבי ידע נוספים של מורים, בהם: הנגשת המשימה לתלמידים שונים, חשיבות הדרישה לנמק ולהציג פתרונות נוספים והיכולת לקשור בין מגוון רעיונות ופתרונות שהציעו התלמידים (Hill & Charalambous, 2012). מסקנת מחקר זה מחזקת את הטענה שבתחום הוראת המתמטיקה, ידע המורים הנדרש להוראה מעודדת חקירה בשיעורים הוא ספציפי, מסועף ומעמיק מאוד, ויש חשיבות רבה להתאמת המשימה ולקישור בין רעיונות מתמטיים ובין פתרונות התלמידים.

בהמשך לדיון בידע הדרוש למורים, צ'פמן (Chapman, 2013) הציעה להרחיב את המושג "ידע המורים" ולכלול בו גם ידע בנוגע למשימות מתמטיות (MTF). צ'פמן טוענה כי ידע זה דרוש כדי לקדם את למידת המושגים המתמטיים אצל התלמידים, לתמוך בהתפתחות החשיבה המתמטית שלהם ולמקסם את הפוטנציאל הטמון במשימות. מתוך תוכני הידע העוסקים במשימות מתמטיות, נבחרו תוכני הידע המתאימים כיוון שהם גם פרקטיקות שנלמדו בהשתלמות מחשב"ה. ידע זה עוסק בהכוונת המורה את תלמידיו, לרעיונות מתמטיים הקשורים במשימה ובעידוד לפתרון המשימה בדרכים מגוונות. כמו כן, ידע זה עוסק בדרישת המורה מהתלמיד לנמק ולהצדיק את חשיבתו. תכני ידע אלו והפרקטיקות ישמשו כתבחינים להערכת מידת היישום במהלך השתלמות מורים מחשב"ה.

שאלת מחקר

כיצד ניתוח שיעור מצולם (נש"מ) מלמד על מידת היישום של פרקטיקות להוראה מעודדת חקירה? ומדוע פרקטיקות מסוימות יושמו, ואחרות לא?

המשתתפים

19 מורים המלמדים מתמטיקה בבית ספר יסודי השתתפו בהשתלמות מחשב"ה (מאמר זה דן במשתתפי השנה הראשונה מתוך השנתיים). המשתתפים למדו את הפרקטיקות המעודדות שיח בכיתה וחקירה של מושגים מתמטיים, בהתאם לתוכנית "חמש הפרקטיקות" (Stein et al., 2008), כמפורט בטבלה 1. כחלק מעבודת הסיום הם התבקשו לנתח שיעור מצולם שהם לימדו, בהתייחס לפרקטיקות שלמדו בהשתלמות, ולכתוב רפלקציה על למידתם. כלל המשתתפים בהשתלמות לימדו בבתי ספר יסודיים, כאשר הרכב המשתתפים היה מגוון, הן מבחינת הוותק (2-30 שנים), הן מבחינת סוגי המגזרים (ממלכתי, חינוך מיוחד, ממלכתי-דתי וערבי).

טבלה 1

תבחינים לניתוח שיח המורים

שם התבחין	הסבר לתבחין – הנושאים שהמורה התייחס אליהם	ממוצעי הקידוד
רעיון מתמטי	התוכן המתמטי הקשור לאותה משימה ולרעיונות המתמטיים החשובים הקשורים בה.	1.2
הנמקה	הדרישה מהתלמידים להצדיק, לנמק, לפרש ולשער והדרכים לעודד זאת	0.9
פתרונות	פתרון המשימה בכמה דרכים ושימוש בייצוגים שונים בפתרונות	1.4
ציפיות	תהליך ניבוי לקשיים הצפויים בעת עיסוק במשימה, כולל דרכים להתגבר על קשיים אלו (כמו: הכנת שאלות לקידום החשיבה).	1.7
ניטור	אסטרטגיות הפתרון השונות של התלמידים והשיח עם התלמידים	1.6
בחירה	הסיבות לבחירת תלמיד או קבוצה למטרת שיתוף פתרונם בדיון בכיתה. התייחסות זו אמורה להיות מבוססת על מטרה או על רעיון מתמטי.	1.2
סידור	סידור תשובות התלמידים להובלת רעיון מתמטי או אסטרטגיה ברורה	1.2
קישוריות	הדרכים לקשר בין הפתרונות הנדונים ובין סוג הקשרים שרצוי ליצור, כולל הכנה ליצירת קשרים בין הפתרונות ובין רעיונות מתמטיים.	0.9

כלי המחקר וניתוח הנתונים

השיטה לבחינת היישום של פרקטיקות הוראה המעודדות חקירה התבססה על ניתוח שיעור מצולם (נש"מ) שבצעו המורים שהשתתפו בהשתלמות מחשב"ה. בשיטה שמונה תבחינים: שלושה מהם התבססו על עבודתה של צ'פמן (Chapman, 2013), והנותרים הם "חמש הפרקטיקות" (Stein et al., 2008). בטבלה 1 מפורטים התבחינים מימין ולצידם (ההסבר) התייחסות המורה לאותו תבחין. בעמודה השלישית מופיעות תוצאות הממוצעים של קידוד התבחינים (הערכים בטווח של 0-2).

בתהליך הניתוח הכמותי, כל תבחין קיבל ניקוד: 0 – לא נמצאה התייחסות הקשורה לתבחין הנדון; ניקוד 1 – נמצא אזכור כללי בשיח הנוגע לתבחין, בלא נימוק או בהתייחסות לפעולות אנושיות (של מורה או תלמיד) ולא לתכנים מתמטיים; בניקוד 2 – הוצגה התייחסות מנומקת לתבחין בליווי הסבר ובו דוגמאות של נושאים מתמטיים.

דוגמה לניקוד מלא בתבחין קישוריות: המורה איילת (כל השמות בעבודה זו הם בדויים) עודדה את התלמידים לחשוב על האסטרטגיות, לקשר בין הפתרונות השונים ולמצוא את המשותף ביניהם,

והסבירה את הרעיון המתמטי בעיסוק בקישוריות: "[התלמידים] יחפשו את הדברים שחוזרים על עצמם... יוכלו לזהות את השינוי והקבוע בכל גורם בסדרה שתוצג להם". דוגמה לניקוד חלקי: המורה דלית הציעה דרך ליישום הפרקטיקה: "בשלב הצגת הפתרונות על המורה לעזור לתלמידים ליצור קשרים בין הפתרונות השונים שהוצגו בשיעור ולקשר גם אותם לרעיונות המתמטיים שהמורה מעוניינת להציג", אולם היא לא פירטה לגבי אופן היישום של הפרקטיקה.

לאחר הקידוד נערך מבחן מהימנות עם קולגה מקבוצת המחקר, המכירה את הפרקטיקות שנלמדו בהשתלמות. בדיקת המהימנות התבצעה לגבי כ-20% מהטקסט הכתוב והייתה הסכמה לגבי 87% מהטקסטים. לאחר דיון עם הקולגה, הושגה הסכמה בשיעור של 93% מהטקסטים.

הממצאים

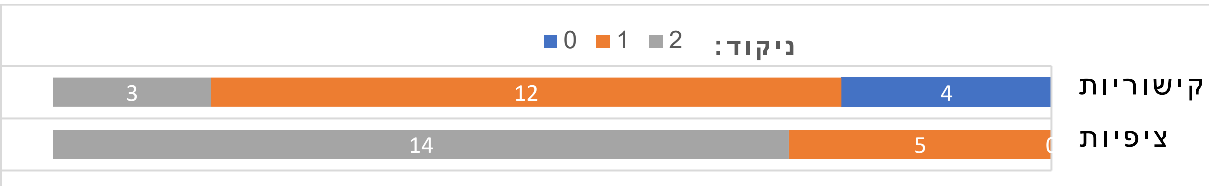
מתוך הניתוח של שיח המורים ניתן ללמוד על יישום הפרקטיקות ועל המידה בה הן יושמו. ממוצעי קידוד הציונים של התבחינים (טבלה 1) משקפים את ההבדלים בין המורים ובין רמות ההתייחסות לפרקטיקות ההשתלמות. הפרקטיקות שיושמו ואשר קבלו התייחסות מעמיקה ורבה הן: 'ציפיות' (ניבוי דרכי פתרון), 'ניטור' (עידוד למציאת אסטרטגיות שונות) ו'פתרונות' (שימוש בפתרונות שונים). לעומת זאת יתר הפרקטיקות הנוגעות לרעיונות מתמטיים ולקישור ביניהם – קיבלו התייחסות במידה מועטה. כדי לחדד את ההבחנה בהתייחסות המורים לפרקטיקות, איור 2 מציג השוואה בין הפרקטיקות 'ציפיות' לבין 'קישוריות'. ב'ציפיות' הממוצע היה הגבוה ביותר (M=1.7): כל המורים דיווחו על הפרקטיקה, כאשר 14 מורים דיווחו באופן מלא (צבע אפור), וחמישה מורים דיווחו באופן חלקי (כתום). לעומת זאת ב'קישוריות' נמצא ממוצע נמוך (M=0.9): שלושה מורים דיווחו בפירוט מלא, רוב המורים (n=12) רק הזכירו את הפרקטיקה, ומיעוטם (n=4) לא התייחסו אליה (כחול). השוואה זו ממחישה את מידת היישום הנמוכה של 'פרקטיקת הקישוריות'.

בהמשך נבחנו דיווחי מורים אחרים לגבי 'הקישוריות', בניסיון למצוא הסברים לקשיי היישום. הסברים אחדים עסקו בקשיים שעלו בניהול השיעור, כמו קשיי זמן והתארגנות: "בשלב הזה של השיעור נראה כי לא כל הילדים היו כבר קשובים וגם המאבק מול רעש מבחוץ וקושי של תסכול של ילדה הכריע לסיום השיעור". גם מורה אחרת דיווחה: "לצערי, שוב לא סיכמתי את הנושא ולא הגענו להכללות".

הסברים אחרים התייחסו לכך שמדובר בפרקטיקה חדשה ולא מוכרת. עדות לכך נמצאה בהסבר של הדס, מורה ותיקה: "מודל 5 הפרקטיקות, ובכלל זה מאפייני הדיון היעיל, דומה לשיעור היפני (שיעור שמעודד חקירתיות ויושם בארץ בעבר), למעט הקישוריות. פרק הקישוריות הוא הנושא שהתחדד אצלי". מדבריה עולה כי הנושא 'התחדד', כלומר המורים עדיין לא מכירים אותו היטב. גם הדוגמה שהציגה בניתוח פרקטיקה זו (דרך פתרון של תלמידה) לא מלמדת על יישומה של פרקטיקת ה'קישוריות'. גם המורה לבנה שלא פירטה על אופן יישום הפרקטיקה וכתבה: "עם כל שיעור למדתי לבנות דפי ניטור ותהליך דיון, חשבתי לעומק על קישוריות". היא ציינה את פעולת חשיבתה על הנושא, אך לא פירטה מה היו מחשבותיה, כלומר ייתכן שהנושא כלל אינו מובן לה.

איור 2

השוואת 'פרקטיקת קישוריות' לעומת 'פרקטיקת ציפיות'



דוגמאות אלו מלמדות על כך שהמורים התקשו ביישום פרקטיקת ה'קישוריות': בשיח שלהם עלו קשיים, אך לא הסיבות לקשיים אלו. עם זאת, את הסיבות לקשיים ניתן להבין מניתוח התבחינים האחרים שגם בהם הציונים היו נמוכים (כמו רעיונות מתמטיים, הנמקה וסידור פתרונות לפי רעיון מתמטי – המופיעים בתוצאות הקידוד). גם פרקטיקות ה'סידור' וה'בחירה' של הפתרונות מלמדות על תוצאות נמוכות יותר, והן גם קשורות לעיסוק ברעיונות המתמטיים. על כן, בחינה של פרקטיקות אחרות יכולה להסביר את הקושי ביישום פרקטיקת ה'קישוריות'.

דיון

השיטה המוצעת בעבודה זו מסבירה כיצד מטלת נש"מ מלמדת על מידת היישום של הפרקטיקות בהשתלמות מחשב"ה, ואף מלמדת על הסיבות לקשיי היישום. בחינה של יישום הפרקטיקות מראה כי פרקטיקות הקשורות לניבוי דרכי הפתרון של תלמידים לניטור ולעידוד למציאת פתרונות שונים – קיבלו התייחסות מעמיקה ורחבה. לעומת זאת, הציון הממוצע בפרקטיקת ה'קישוריות' היה נמוך.

קשיי היישום הוסברו בעזרת בחינה והשוואה לפרקטיקות האחרות, העוסקות ברעיונות מתמטיים. אפשר להניח שההתייחסות המופחתת לפרקטיקות שעניינן רעיונות מתמטיים נובעת מכך שפרקטיקות אלו אינן מוכרות למורים ואף קשות להבנה עבורם. יש להניח שהתנאים ליישום מוצלח של פרקטיקות אלו הם ידע מתמטי גבוה וניהול נכון של שיח בנוגע להן.

סימוכין לכך נמצאים בספרות ומתארים את פרקטיקת ה'קישוריות' כפרקטיקה מורכבת שמיישמים אותה רק מורים בעלי ידע מתמטי גבוה (Hill & Charalambous, 2012). החוקרים במחקר זה הדגישו שהמורים נבדלו זה מזה ביכולת ליצור קישורים בין פתרונות התלמידים ובין רעיונות מתמטיים: בשיעור של המורה בעל הידע הרחב נמצאו קישורים, לעומת מורה אחרת ללא הידע המתמטי הרחב.

גם מחקרים שנעשו בישראל מצאו שמורים בבתי ספר יסודיים הם חסרי הכשרה מתמטית מספקת. ממצא מעניין הראה שכאשר המורים האלו נשאלו על צורכיהם העיקריים, הם הביעו עניין בחיזוק הידע הדידקטי שלהם, במטרה להתמודד טוב יותר עם היבטים רגשיים הקשורים ללמידת התלמידים, ולא ביקשו לחזק את הידע המתמטי שלהם (Shriki & Patkin, 2016). ממצאים דומים נמצאו במחקר אחר שנערך בישראל, ובו נבחנה קבוצה גדולה של מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים (449 מורים). המורים ביקשו להעשיר את הידע הנוגע לעבודה עם תלמידים ברמות שונות, למשל עם תלמידים מחוננים ועם לקויי למידה (Mishal & Patkin, 2016). גם מחקר זה מצא כי אף על פי שידע המורים בתחום המתמטיקה היה מוגבל, הם לא שאפו להרחיבו. מחקרים אלו מתקשרים לתוצאות העבודה הנוכחית ומראים שמעבר לידע המתמטי החסר (שלא נבדק ישירות בעבודה זו), מורים בבתי ספר יסודיים אינם מייחסים חשיבות מספקת לנושאים הקשורים לרעיונות המתמטיים.

רשימת מקורות

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 1–6.

Heyd-Metzuyanim, E., Smith, M., Bill, V., & Resnick, L. B. (2019). From ritual to explorative participation in discourse-rich instructional practices: a case study of teacher learning through professional development. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 273–289.

Hill, H. C., & Charalambous, C. Y. (2012). Teaching (un)Connected mathematics: Two teachers' enactment of the Pizza problem. *Journal of Curriculum Studies*, *44*(4), 467–487.

Hoover, M., Mosvold, R., Ball Loewenberg, D., & Lai, Y. (2016). Making progress on mathematical knowledge for teaching. *Mathematics Enthusiast*, *13*(1–2), 3–34.

Mishal, A., & Patkin, D. (2016). Contribution of mathematics in-service training course to the professional development of elementary school teachers in Israel. *Teacher Development*, *20*(2), 253–274. https://doi.org/10.1080/13664530.2016.1138997

Shriki, A., & Patkin, D. (2016). Elementary school mathematics teachers' perception of their professional needs. *Teacher Development*, *20*(3), 329–347.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Stein, M. K., Correnti, R., Moore, D., Russell, J. L., & Kelly, K. (2017). Using theory and measurement to sharpen conceptualizations of mathematics teaching in the common core era. *AERA Open*, *3*(1), 233285841668056.

מאפייני השיח הפדגוגי של מנחי קהילות מתלמדים ערבים סביב פרקטיקות הוראה מעודדות חקירה

סורינה סבאח, טכניון - מכון טכנולוגי לישראל
עינת הד-מצויינים, טכניון - מכון טכנולוגי לישראל

הקדמה ורקע תיאורטי

במהלך העשור האחרון נעשו מאמצים לקדם הוראה מעודדת חשיבה בקרב תלמידים ערבים בישראל. למרות ניסיונות אלו המאמצים לשילוב מיומנויות חשיבה מסדר גבוה יותר במערכת החינוך הערבי הניבו תוצאות לא מספקות (Seif, 2019). במתמטיקה בפרט, נעשים מאמצים - הן במגזר הערבי והן במגזר היהודי בישראל - לפתח פרקטיקות הוראה מעודדות חקירה (Nachlieli & Heyd-Metzuyanim, 2021). השיח הפדגוגי העוסק בפרקטיקות שבאמצעותן ניתן לעודד חשיבה הוגדר על ידי הד-מצויינים ושבתאי (Heyd-Metzuyanim & Shabtay, 2019) כ"שיח פדגוגי חקירתי" והוא עוסק במכלול של פרקטיקות, כגון בחירת משימות ברמה קוגניטיבית גבוהה, הובלת עבודה בקבוצות, עידוד שיח מחויב לידע, להנמקה ולקהילה, וקישור בין פתרונות שונים בעת דיון כתתי. מטרתן המאחדת של פרקטיקות אלו היא לקדם המשגה מתמטית מעמיקה ולחזק את העצמאות המתמטית של התלמידים (Nachlieli & Heyd-Metzuyanim, 2021).

קהילות מקצועיות לומדות הוכחו כמסגרות מועילות עבור מורים לאימוץ פרקטיקות הוראה מתקדמות (Horn & Kane, 2015). יחד עם זאת, לא ידוע רבות על האופן שבו מורים מאמצים את השיח הפדגוגי החקירתי במסגרת קהילות, ועוד פחות ידוע על כך בחברה הערבית, שבה נורמות השיח וההוראה שונות לעתים מהנורמות של החברה היהודית/מערבית (Eilam, 2003). במחקר הנוכחי אנו משתמשות בעדשה דיסקורסיבית סוציו-תרבותית לפיה אנו ממשיגות את תהליך הלמידה של מורים את פרקטיקות ההוראה מעודדות החקירה ככניסה לקהילת שיח מסוימת (Heyd-Metzuyanim & Shabtay, 2019). הד-מצויינים ושבתאי (2019) הגדירו שיח פדגוגי כשיח המתייחס ל- מה ללמד את התלמידים? כיצד ללמד אותם? מדוע פעולות הוראה ספציפיות יעילות יותר מאחרות? ומי יכול (או לא יכול) ללמוד? הגדרה זו מאפשרת להסתכל על למידת מורים כעל שינוי בכל אחד ממאפייני השיח האלה.

המחקר נערך במסגרת פרויקט קהילות מחשב"ה (מהלכים מעודדי חשיבה בהוראת המתמטיקה). הפרויקט עובד במודל "מניפה" המורכבת מקהילת מנחים (מורים מנוסים) אשר מודרכת על ידי אנשי אקדמיה (להלן: המובילים), ומספר קהילות מורים ("קהילות בת") אשר מודרכות ע"י המנחים המתלמדים. דוח מחקרי זה עוסק בשנה הראשונה של המחקר, שבה המנחים המתלמדים עצמם ערכו היכרות ראשונית עם תכני הקהילות באמצעות השתלמות קיץ של 30 שעות, ולאחר מכן החלו להוביל קהילות בת, תוך שהם ממשיכים להשתלם בקהילת המנחים. משום שהמנחים המתלמדים לומדים אף הם את פרקטיקות ההוראה והם טירונים בשיח הפדגוגי החקירתי, יש במערך זה הזדמנות לחשוף את התהליך שבו מנחים טירונים לשיח הפדגוגי החקירתי מאמצים את עקרונותיו. לפיכך, שאלת המחקר שלנו הייתה: באיזו מידה המנחים המתלמדים הערבים מאמצים את השיח הפדגוגי החקירתי כאשר הם מובילים את קהילותיהם?

שיטה

המחקר הנוכחי התמקד בשבע מורות ערביות אשר מנחות שתי קהילות דוברות ערבית. הקהילות נפגשו ל- 10 מפגשי השתלמות של שעתיים כל אחד. מפגשי ההשתלמות נערכו בזום והוקלטו. בנוסף, המנחות השתתפו בהשתלמות מנחים של 60 שעות. מבנה המפגשים בקהילת המנחים ובקהילות הבת דומה. בכל מפגש מחשב"ה המורים מתנסים במשימה מתמטית בעלת דרישה קוגניטיבית גבוהה, לומדים על היבט מסוים של פרקטיקות ההוראה מעודדות החקירה, ומתקיים דיון פדגוגי ומתמטי על המשימות ודרכי ההוראה שלהן. עבור הנחיית מפגשי קהילות הבת, המנחים המתלמדים לרוב השתמשו בחומרים ובמצגות שהוצגו להם בהשתלמות מספר שבועות קודם לכן. בכדי לאפשר השוואה מיטבית בשיח, בחרנו קטעים שבהם המנחות בקהילת הבת הציגו בדיוק את אותו השקף שהוצג בקהילת-המנחים. קטעים אלו תומללו במלואם בשפה שבה הם הוצגו (לרוב – ערבית משולבת עם עברית) והחלקים בערבית תורגמו לעברית.

ניתוח הנתונים התחיל מזיהוי מושגים (מלות מפתח בשיח). מושגים אלו אותרו מתוך השקפים (לדוגמה: "המשגה", "התמודדות"). בשלב הבא, מופו הנרטיבים המדוברים בשיח של המובילים והמנחים סביב מושגים אלו. בכדי לבדוק את ההתאמה של שיח המתלמדות לשיח המומחים, קודדנו את ההסברים של המתלמדים סביב המושגים בשיטת הקידוד הפתוח (Saldana, 2013) כאשר חלק מהקטגוריות נלקחו מהספרות (סביב שיח פדגוגי חקירתי) וחלק יוצרו "מלמטה למעלה" על פי העולה מתוך הנתונים. שיטה זו הניבה את הקטגוריות הבאות. ראשית, ההסברים סביב המושג אופיינו על פי ארבע רמות: א. מושג נאמר אך לא מוסבר, ב. מושג מוסבר אך ההסבר לא תואם את ההסבר שניתן בהשתלמות המנחים באופן חלקי, ג. מושג מוסבר ותואם אך לא באופן מלא, ו-ד. מושג מוסבר מלווה בהסבר ברור ותואם את ההסבר שניתן בהשתלמות המנחים. חלוקה זו העלתה הבדל נוסף בהסברים סביב המושג – והוא הבדל בין הדוגמאות שנתנו המנחות לעומת דוגמאות שנתנה המנחה המומחית (המחברת השנייה) סביב המושג. הדוגמאות אופיינו לפיכך אף הן בארבע רמות: אין דוגמא, דוגמא חלקית ולא תואמת את המסרים שהועברו על ידי המומחים, דוגמא תואמת אך לא מפורטת, ודוגמא תואמת ומפורטת. לבסוף, הניתוח של הדוגמאות הראה כי קיימים הבדלים במקור הדוגמאות. לפיכך, סדרת קודים נוספת התייחסה למקור הדוגמאות שניתנו בהסבר: מחקרים, חוויה בהשתלמות, ודוגמאות מהכיתה.

ממצאים

טבלה 1 מסכמת את קידוד ההסברים שנתנו המנחות המתלמדות בהצגותיהן בקהילות, סביב מושגי מפתח בשיח הפדגוגי החקירתי:

מושג מוזכר אך לא מוסבר	מושג מוסבר אך ההסבר לא תואם את ההסבר שניתן על ידי המומחים או שההסבר מאוד חלקי	מושג מוסבר מלווה בהסבר ברור ותואם את השיח של המובילות	סכ"ה
2	15	21	38

טבלה 1 – חלוקת ההסברים שניתנו על ידי המנחות המתלמדות על פי מידת ההתאמה של ההסבר לשיח המובילות

מטבלה זו אנו רואים שאמנם מושגים רבים הוסברו באופן חלקי, אך מושגים רבים הוסברו גם באופן מלא. חלוקה זו העלתה אם כן שההבדל בין שיח המנחות המתלמדות לשיח המובילה היה טמון בהיבטים עדינים יותר, למשל, בדוגמאות שנתנו המתלמדות סביב המושג. טבלה 2 מציגה את קידוד הדוגמאות הללו. כאן מצאנו שרק מיעוט ההסברים (11) לוו בדוגמא מפורטת שתאמה את רוח ההסברים והדוגמאות שניתנו בקהילת האם. מרבית הדוגמאות (15) היו חלקיות. חלקיות זו חולקה לשתי רמות: 6 דוגמאות היו לא רק חלקיות, אלא גם לא ממש מתאימות למסרים שהועברו בקהילת האם. 9 מהדוגמאות היו תואמות, אך לא מפורטות במידה דומה לדוגמאות שניתנו בקהילת האם.

טבלה 2 – חלוקת ההסברים שניתנו על ידי המנחות המתלמדות על פי התאמת הדוגמה למסרים בקהילת האם

אין דוגמא	דוגמא חלקית תואמת		דוגמא תואמת ומפורטת	ס"כה
12	דוגמא חלקית ולא תואמת את המסרים שהועברו על ידי המומחים	6	11	38
	דוגמא תואמת אך לא מפורטת	9		

בחינה מדוקדקת יותר של הדוגמאות שנתנו המנחות המתלמדות הראתה כי הדוגמאות שנתנו המתלמדות למושגים היו במקרים רבים שונות באופיין מהדוגמאות שנתנו על ידי המנחה המובילה. השוני העיקרי נמצא במקורות השונים לדוגמאות. כך, המתלמדות הביאו את רוב הדוגמאות שלהן מחוויותיהן בכתה, ומאחר שחוויות אלו לא היו בהכרח חוויות של הוראה ולמידה חקירתית, דוגמאות אלו לעתים לא תאמו את השיח הפדגוגי החקירתי. לעומת זאת, המנחה המובילה הביאה הן דוגמאות מחיי הכיתה והן דוגמאות מחוויה שהמורים עברו זה מכבר בקהילה. כך, הדוגמאות שניתנו על ידי המנחות המובילות היו פחות מקושרות לחוויות בקהילה מאשר הדוגמאות בקהילת האם. טבלה 3 מציגה את נתוני הקודים בנוגע למקור הדוגמאות:

טבלה 3 –השוואת בין המתלמדות למובילות על פי מקור הדוגמה למושג המוסבר

	דוגמא מהכיתה	דוגמא מחוויה בקמ"ל	דוגמא מחיי היום-יום	סכ"ה
מתלמדות	20	5	1	26
מובילה	14	12	1	27

בחלק הבא נדגים על קטע השוואתי אחד, את הניתוח ואת האופן שבו הפערים בין שיח המתלמדות לשיח המומחית באו לידי ביטוי.

פער בשיח סביב מושגי הורדת הדרישה הקוגניטיבית של המשימה

פער זה נצפה סביב מצגת שעסקה, בין השאר, במושג "הדרישה הקוגניטיבית של משימה" והסיבות שבשלהן היא יורדת לעתים קרובות בשיעור מתמטיקה. ספציפית, הפער שיוצג כאן מתייחס להסבר סביב אחת הסיבות שבגינן הרמה הקוגניטיבית יורדת והוא "היעדר מיקוד ברעיון או במושג מתמטי שהמורה רוצה להבהיר". המובילה, בהרצאה שניתנה בקהילת המנחים, הדגימה את הסיבה הזו להורדת הדרישה הקוגניטיבית תוך שהיא מתארת דפוס שיעורים שבו "יש עבודה נהדרת, כך זה נראה. הרבה דיבור והרבה שיח...אז הילדים עובדים... אבל אז, כשמגיעים לדיון, אז המורה מתקשה לאסוף את כל הרעיונות שעלו מהתלמידים לכדי איזשהו רעיון מתמטי קוהרנטי". דוגמה זו התייחסה לכתה גנרית, ובכדי לחזק אותה, המובילה הוסיפה לה דוגמה לחוויה מההשתלמות: "אם אנחנו חוזרים חזרה רגע למשימה (שעשינו לפני כמה רגעים)... אתם ראיתם שהיו לה (למנחה השנייה, שהנחתה את הדיון המתמטי) רעיונות, שהיה לה ברור מה הדבר הראשון שהיא רוצה להראות, אחרי זה מה הדברים שפחות.. חשוב הסדר (של הצגת הרעיונות)" באמצעות דוגמה זו, המובילה ניסתה להדגים את המושג "איסוף רעיונות מהתלמידים לכדי רעיון מתמטי קוהרנטי". לאחר מכן המובילה חזרה וקישרה את הדוגמאות למושג ההורדה של הרמה הקוגניטיבית: "צריך לקחת את הכיתה דרך איזשהו רעיון מתמטי שרוצים להוביל את הדיון אליו, כשאין כזה (רעיון מתמטי) הדרישה הקוגניטיבית בדרך כלל יורדת".

לעומת שיח המנחה המובילה, אצלה נצפו מספר דוגמאות המקשרות סיטואציות הוראה ולמידה למושג הנלמד, אצל המנחה המתלמדת אין ממש דוגמא אלא רק הרחבה מסוימת של המושג לכדי "סיפור". היא מסבירה את המושג של "היעדר מיקוד ברעיונות המתמטיים" בצורה הבאה:

> (קוראת מהשקף) "היעדר מיקוד ברעיון או במושג מתמטי שהמורה רוצה להבהיר".
> (עוברת להסביר) <u>יכול להיות שלמורה יש בראש</u> שבמשימה הזו הוא יבהיר נושא מסוים או יתמקד בנושא מסוים, <u>ופתאום יראה שלא</u>, שהדבר לא קשור או שהדבר לא הולך ומתפתח או מגיע לרעיון שהוא רוצה.

הסבר זה שונה מההסבר של המובילה בכך שהוא ממקד את הבעיה של היעדר המיקוד ברעיונות המתמטיים במשהו ש"קורה" למורה, לא במה שיש לו השפעה עליו. כלומר, "היה למורה בראש" רעיון מתמטי מסוים שהוא רצה להבהיר באמצעות המשימה אבל באופן כלשהו "הוא לא התפתח". אין בשיח של המתלמדת כל הסבר מדוע הנושא המתמטי לא התפתח או תיאור פעולות כלשהן שהמורה עשה או לא עשה כדי לקדם זאת.

הדפוס הזה, בו המנחה המובילה מתייחסת במפורט לפעולות המורה המזמנות למידה חקירתית, בעוד המנחות המתלמדות אינן מתייחסות לפעולות ומתארות את המתרחש כ"קורה מאליו" או כתלוי בתלמידים, חזר על עצמו במספר דוגמאות והסברים של המנחות המתלמדות.

סיכום ודיון

במחקר זה ניסינו לאפיין את הפערים בין שיח המנחות המתלמדות לשיח המנחות המובילות סביב פרקטיקות הוראה מעודדות חקירה. במבט ראשוני, ניכרו פערים מסוימים, אך מצאנו כי פערים אלו קשים למיקוד ואופרציונליזציה. חשוב בהקשר זה לציין שהמנחות המתלמדות, בסך הכל, עשו כמיטב יכולתן לחקות את המודל שאותו למדו בהשתלמות האם ובהיבטים רבים, הקהילות שהן הובילו היו הצלחה גדולה. לאור זאת, מיקוד הפערים בין שיח המובילות לשיח המתלמדות לא הייתה משימה פשוטה. הגישה הראשונה בה נקטנו, לפיה אפיינו את ההסברים והדוגמאות לפי רמת הפירוט וההתאמה שלהם, הניבה הבדלים במבנה ובתוכן של הסברים סביב מושגים. העמקה נוספת בהשוואת קטעי השיח הראתה כי בעוד בשיח של המובילה הודגש התפקיד של המורה בהוראה חקירתית, בשיח של המתלמדות אחריות המורה והפעולות שהוא יכול לבצע נפקדו כמעט לחלוטין. ממצא זה מתקשר למחקרים קודמים שהראו שבתהליך הכניסה לשיח החקירתי מורים טירונים לשיח לרוב משייכים את האחריות להצלחת הדיון וההשתתפות החקירתית על מאפייני התלמידים (למשל, "חזקים" יותר או פחות) ולא על פעולות המורה (Nachlieli & Heyd-Metzuyanim, 2021). הממצאים מעלים שאלות בנוגע למודל המניפה וליכולת של מנחים מתלמדים להוביל קמ"ל להוראה מעודדת חקירה. יחד עם זאת, למודל המניפה גם יתרונות רבים. רצוי לבחון סוגיות אלו במחקרי המשך.

מקורות

Daher, W., & Baya, N. (2015). Integrating HOTS Activities with GeoGebra in Pre-Service Teachers' Preparation. *International Journal of Social, Behavioral, Educational, Economic, Business and Industrial Engineering*, *9*(7), 2404–2407.

Eilam, B. (2003). Jewish and Arab Teacher Trainees' Orientations Toward Teaching-Learning Processes. *Teaching Education*, *14*(2), 169–186.

Heyd-Metzuyanim, E., & Shabtay, G. (2019). Narratives of 'good' instruction: teachers' identities as drawing on exploration vs. acquisition pedagogical discourses. ZDM Mthematics Education, 51, 541–554.

Horn, I. S., & Kane, B. D. (2015). Opportunities for Professional Learning in Mathematics Teacher Workgroup Conversations: Relationships to Instructional Expertise. *Journal of the Learning Sciences*, *24*(3), 373–418.

Saldana, J. (2013). Coding and Analysis Strategies. In *The Coding Manual for Qualitative Researches* (pp. 581–605).

Seif, A. (2019). Integration of Higher Order Thinking Skills into the Arab Education System in Israel: a General Perspective. *Italian Journal of Sociology of Education*, *11*(3), 304–326.

Nachlieli, T., & Heyd-Metzuyanim, E. (2021). Commognitive conflicts as a learning mechanism towards explorative pedagogical discourse. Journal of Mathematics Teacher Education. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09495-3

התפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה בשילוב טכנולוגיה בפרקטיקה שלהם בכיתה: המקרה של מורים טירונים

אחלאם ענאבוסי, אוניברסיטת תל אביב, מכללת סמינר הקיבוצים, מכללת אלקאסמי.

מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב.

מבוא

הבנת פרקטיקות ההוראה של מורים למתמטיקה בבואם לשלב טכנולוגיה בהוראה, וקידום פרקטיקות אלו עדיין מאתגרים את קהילת החוקרים. הגישה של "קהילות חוקרות" (Jaworski, 2008) הוצעה כמסגרת אפקטיבית לתוכניות התפתחות מקצועית, שמטרתן לפתח ידע של מורים בשילוב טכנולוגיה (Thomas & Palmer, 2014). מטרתנו לתאר ולנתח התפתחות ידע מקצועי בשילוב טכנולוגיה בהוראה של מורים טירונים, אשר השתתפו בתוכנית כזו יחד עם מורים מומחים בשילוב טכנולוגיה.

רקע תיאורטי

ידע מקצועי של מורי מתמטיקה ופרקטיקות הוראה שלהם בשילוב טכנולוגיה

התעניינותם של חוקרים בידע מקצועי של מורים ובפרקטיקות שלהם הביאה לפיתוח מסגרות תיאורטיות שונות. במחקר זה נעשה שימוש במסגרת התיאורטית של רותבן (2014), The Structuring Features of Classroom Practices (SFCP framework). מסגרת זו מתייחסת לפרקטיקות ההוראה בשילוב טכנולוגיה כאל הידע המקצועי של המורים. הכוונה בידע מקצועי היא לידע שמורים מבנים באמצעות ההתנסות המעשית שלהם בכיתה. לפי מסגרת תיאורטית זו, הידע המקצועי מתבטא בחמישה היבטים הקשורים לפרקטיקות בכיתה: סביבת העבודה (Working environment), מערכת המשאבים (Resource system), פורמט הפעילות (Activity format), מערך השיעור (Curriculum script) וניצול הזמן (Time economy). נפרט להלן על כל היבט.

סביבת העבודה. השימוש בטכנולוגיות חדשות מצריך לרוב שינוי בסביבת העבודה. שינוי זה יכול להתבטא בשינוי בסביבת העבודה בכיתה המסורתית או במעבר למעבדת מחשבים. בנוסף, מרכיב זה כולל את התשתית הטכנולוגית הזמינה בכיתה.

מערכת המשאבים. כלים מתמטיים ומשאבים קוריקולריים אשר כוללים כלים טכנולוגיים וכלים לא טכנולוגיים (כמו משאבים מודפסים- ספרים, דפי עבודה,...).

פורמט הפעילות. סגנונות האינטראקציה בין מורה, תלמידים ומשאבים. פורמטים שונים של פעילות זוהו בעבר על ידי חוקרים שונים, כמו Work-and-walk-by, Discuss-the-screen.

מערך השיעור. היבט זה כולל את הרעיונות אשר יתפתחו, הפעילויות אשר יבוצעו, הייצוגים אשר יעשה בהם שימוש וקשיים צפויים במהלך השיעור. היבט זה כולל ציפיות שונות של תרחישים אשר עלולים להתרחש בשיעור ודרכי פעולה אלטרנטיביות.

ניצול הזמן. ניהול יעיל של זמן השיעור אשר נותן למורה הזדמנות להפוך את זמן השיעור לזמן דידקטי המנוצל להתפתחות הידע של התלמידים.

מחקרים מעטים התמקדו בהבנת האופן שבו פרקטיקות מורי מתמטיקה משתנות כתוצאה משילוב טכנולוגיה (Bozkurt & Ruthven, 2017). לכן, ההבנה שלנו לנושא זה עדיין מוגבלת. מחקר זה מנסה להרחיב על נושא זה בהקשר של מורים טירונים בשילוב טכנולוגיה.

עיצוב תוכניות התפתחות מקצועית בשילוב טכנולוגיה

בעוד שמחקרים קודמים תארו כישלון של מורים בשינוי הפרקטיקות שלהם בהוראה בבואם לשלב טכנולוגיה (Balanskat, Blamire & Kefala, 2006), חוקרים כמו תומאס ופאלמר (Thomas & Palmer, 2014) הציעו עיצוב מיוחד – המבוסס על גישת קהילות חוקרות, לתוכנית התפתחות מקצועית אשר תביא להתפתחות הידע והפרקטיקות של מורי המתמטיקה בשילוב טכנולוגיה דיגיטלית. בתוכנית כזו, המורים יעבדו בקבוצות הטרוגניות קטנות. בכל קבוצה, המורים יציגו תכנון של שיעור

מתוקשב, שיהווה נושא לדיון ולרפלקציה של חברי הקבוצה. המחקר הנוכחי אימץ הצעה זו ובנוסף את מעגל החקירה של גוורסקי (Jaworski, 2008). מעגל החקירה כולל בתוכו בעיקר ארבעה תהליכים: תכנון, ביצוע והתבוננות, ניתוח ורפלקציה, ומתן משוב. כלומר, המורים עבדו בקהילות חוקרות בכדי לתכנן שיעורים מתוקשבים משותפים לקבוצה. עבודה זו הייתה כרוכה בבחינת הפרקטיקות שלהם על ידי שאילת שאלות ורפלקציה. מחקרים מעטים השתמשו בגישת הקהילה החוקרת כמסגרת לתוכניות התפתחות מקצועית בשילוב טכנולוגיה. מחקר זה עונה על צורך זה.

מתודולוגיה

שאלת המחקר

כיצד התפתח הידע המקצועי של מורים טירונים, בשילוב טכנולוגיה בפרקטיקה שלהם בכיתה, במהלך השתתפותם בקורס להתפתחות מקצועית המבוסס על גישת קהילות חוקרות?

המשתתפים

המחקר נערך בהקשר של תוכנית להתפתחות מקצועית במטרה לפתח ולייעל את השימוש בטכנולוגיה בכיתת המתמטיקה. תוכנית ההתפתחות המקצועית התבססה על גישת "קהילה חוקרת" והשתמשה במעגל החקירה אשר כלל את התהליכים: תכנון, ביצוע, התבוננות, רפלקציה וניתוח (Jaworski, 2008). בתוכנית השתתפו ארבעים ותשעה מורים. המורים נפגשו עשר פעמים, אחת לשבועיים למשך שעתיים אקדמיות. המורים עבדו בקבוצות ועברו שלושה מעגלי חקירה. כל המורים מאותה קבוצה לימדו אותו שיעור לאותה שכבה, כל אחד\אחת בבית ספרו\ה. למחקר זה נבחרו שלוש מורות טירוניות בשילוב טכנולוגיה (נרגס, מנאל ונסמה)[1]. הבחירה במורות אלה התבססה על רמת הידע הפדגוגי הטכנולוגי (Thomas & Palmer, 2014) שלהן שנמדד לפני תחילת התוכנית, ושנמצא נע בין 2.6- 3.04. לשלושת המורות יש תואר ראשון בהוראת מתמטיקה. לפני השתתפותן בתוכנית ההתפתחות המקצועית, מנאל (יותר מ-15 שנות ותק) לא השתמשה בכלים טכנולוגיים בהוראה שלה, והשימוש של נרגס ונסמה (לשתיהן פחות מחמש שנות ותק) היה מוגבל לתוכנות לייצוגים ויזואלים כמו פאוור-פוינט.

כלי המחקר

במחקר נעשה שימוש בארבעה כלים לאיסוף נתונים: שאלון למדידת ידע טכנולוגי פדגוגי של מורים (מולא לפני תחילת התוכנית), מערכי שיעורים מתוקשבים כתובים (כל מורה הגישה שלושה מערכי שיעורים מתוקשבים), רפלקציות כתובות (כל מורה הגישה שלוש רפלקציות כתובות, אחת אחרי ביצוע כל שיעור), וכן שיעורים מוקלטים (כל מורה הגישה שלוש הקלטות לשלושה שיעורים אשר יישמה בהתאם למערכי השיעורים שתוכננו).

אופן ניתוח הנתונים

זיהוי המורות כטירוניות התבסס על הרמה ההתחלתית לידע פדגוגי טכנולוגי שלהן. רמה זו נמדדה בצורה כמותית לפני ההשתתפות בתוכנית להתפתחות מקצועית, על פי שאלון מתאים אשר פתחו תומאס ופאלמר (Thomas & Palmer, 2014). ניתוח הידע המקצועי בשילוב טכנולוגיה בהוראה של מורים טירונים התבסס על מסגרת SFCP (Ruthven, 2014). נערכה השוואה מתמדת (constant comparison method) בין הנתונים שנאספו על מנת לזהות קטגוריות מתאימות ולשייך אותן למרכיבי הידע המקצועי שהוגדרו במסגרת התיאורטית (הגדרות אופרטיביות למרכיבי הידע יוצגו בכנס).

ממצאים

נציג להלן ממצאים הקשורים לכל אחד מחמשת מרכיבי הידע המקצועי של המורות הטירוניות בשילוב טכנולוגיה.

סביבת העבודה

[1] שמות בדויים

שלושת השיעורים המתוקשבים שיישמו שלושת המורות הטירוניות התבצעו בכיתה המסורתית שלהן, למרות שבבתי הספר של שתיים מהן קיימת מעבדת מחשבים. התשתית הטכנולוגית המקורית של הכיתות המסורתיות כללה עמדת מורה מקוון: מחשב אחד (הממוקם מול התלמידים) עם גישה לאינטרנט ומקרן. החל מהשיעור המתוקשב השני, שתי מורות (נרגס ונסמה) שינו את סביבת העבודה בכיתה המסורתית כך שהיא תתאים לעבודה בקבוצות, כאשר לכל קבוצה סיפקו מחשב נייד עם גישה לאינטרנט. בנוסף, במהלך החלקים השונים של השיעורים (פתיחה, גוף, הערכה וסיכום), המורות השתמשו בשיטות שונות לארגון עבודתן עם הכיתה. בפרט, במהלך פתיחת וסיכום כל שיעור, שלושת המורות השתמשו בטכנולוגיה דרך המחשב שלהן ועבדו עם מליאת הכיתה. לעומת זאת, במהלך גוף השיעור ובמהלך חלק ההערכה, שתי מורות התפתחו (נסמה החל מהשיעור השני ונרגס מהשלישי) בכך שנתנו לתלמידים לעבוד כקבוצות קטנות, כאשר כל קבוצה משתמשת בטכנולוגיה דרך המחשב שלה. המורה השלישית (מנאל) עבדה במהלך כל החלקים של השיעור, ולאורך שלושת השיעורים המתוקשבים, במסגרת מליאת הכיתה תוך שימוש בטכנולוגיה דרך המחשב שלה.

מערכת המשאבים

שלושת המורות השתמשו לרוב במצגות פאוור-פוינט בפתיחת ובסיכום כל השיעורים המתוקשבים שיישמו. החל מהשיעור השני שלושת המורות התקדמו לקראת שימוש בפעילויות חקר עם יישומונים\סימולציות מתאימות בגוף השיעורים. לגבי החלק של ההערכה, המורות הטירוניות היו שונות. נסמה השתמשה במשחקים אינטרנטיים להערכה. מנאל, לא השתמשה בכלל בכלים דיגיטליים להערכה (למרות שהתכנונים שלה הכילו כלים כאלה) ונרגס השתמשה בדפי עבודה מתוקשבים.

פורמט הפעילות

פורמטי פעילות שונים יושמו על ידי המורות במהלך החלקים השונים של השיעורים (פתיחה, גוף, הערכה וסיכום). בפרט, בפתיחת ובסיכום השיעורים, בדרך כלל שלושת המורות יישמו פורמט Discuss-the-screen בכדי לדון עם התלמידים במרכיבי ידע קודמים שרלוונטים לתהליכי ההבנייה החדשים. לגבי גוף השיעור, שתי מורות (נסמה ונרגס) התפתחו לקראת יישום Work-and-walk-by, פורמט פעילות שמאפשר למידת חקר עצמית\בקבוצות. נסמה, התפתחה החל מהשיעור השני לקראת יישום פורמט זה, ונרגס עשתה זאת בשיעור השלישי שלה. בשונה מהן, מנאל, יישמה Sherpa-at-work או Discuss-the-screen, פורמט של פעילות שמאפשרות למידת חקר אבל במסגרת מליאת הכיתה. לפני התחלת השימוש ביישומון, שלושת המורות ישמו פורמט Technical-demo בכדי להבהיר לתלמידים היבטים טכניים לגבי הכלי הדיגיטלי בו ישתמשו בהמשך. בחלק ההערכה של השיעור, שתי מורות (נסמה ונרגס) התפתחו לקראת יישום Predict-and-test, פורמט פעילות במסגרת קבוצות קטנות. המורה השלישית, מנאל, לא השתמשה בכלים טכנולוגיים להערכה ולכן הפורמט Not-use-tech היה דומיננטי במהלך הערכתה לידע של תלמידיה לאורך השיעורים.

מערכי השיעורים

בפתיחה ובסיכום של השיעורים שלושת המורות, לרוב, ניצלו את השימוש במצגות פוור-פוינט לשתי מטרות. הראשונה הייתה להזכיר\לסכם לתלמידים מבני ידע קודמים לצורך ההבנייה החדשה שתוכננה. המטרה האחרת הייתה לקשר בין נושא השיעור לבין תופעות יומיומיות. בגוף השיעורים, שלושת המורות ניצלו את השימוש ביישומונים\סימולציות בכדי לבצע משימות חקר אשר תכננו במסגרת קהילות החקירה. שלושת מורות לא ניצלו את ספרי הלימוד, אלא בנו את פעילויות החקר שהחליפו את הספרים והתאימו ליישומונים\סימולציות אשר השתמשו בהן. לפעמים, המורות נתקלו בקשיים טכניים שגרמו לאי שימוש בכלים טכנולוגיים, ספציפית בחלקי ההערכה והסיכום של השיעורים. בנוסף, לפעמים, המורות לא זיהו מגבלות\איפשורים של היישומון וכיצד מגבלות\איפשורים אלה ישפיעו על הבנת תלמידיהן לנושא המתמטי.

ניצול הזמן

המורות הראו יישום אסטרטגיות אשר מביאות לניצול זמן יעיל. למשל, השימוש של שלושת המורות בפורמט- Technical-demo, שקידם את השימוש שלהן בפורמט Work-and-walk-by, ואפשר לתלמידים להתמקד בפעילות ולא בסוגיות טכניות הקשורות לכלי הדיגיטלי. בנוסף, שתי מורות (נסמה ונרגס) ניהלו את אופן הגישה של התלמידים לכלים הדיגטליים על ידי הוספת קישורים לכלים אלה באתר הבית ספרי, דבר שהביא לניצול יעיל של זמן השיעור.

בניגוד לזה, לפעמים המורות ניצלו בצורה פחות אפקטיבית את זמן השיעור. למשל, השימוש של נסמה במשחקים אינטרנטיים להערכה- למרות שהתשתית הבית ספרית הייתה חלשה, הביא להשקעת זמן במצב אובדן החיבור לאינטרנט. למרות התנסות זו, נסמה לא שינתה את הכלים שבהם השתמשה לכלים שמתאימים יותר לתנאי התשתית בבית ספר שלה.

דיון

באופן כללי, הממצאים מראים התפתחות פרקטיקות ההוראה של המורות הטירוניות, כאשר נמצאו קווי דמיון בין פרקטיקות אלה לבין הפרקטיקות הידועות של המורים המומחים. לדוגמא, דמיון זה בא לידי ביטוי בשימוש שלהן במשאבים, בשיטות הוראה המאפשרות למידת חקר אינדיבידואלית\קבוצתית וביישומן לאסטרטגיות יעילות לניצול זמן (Bozkurt & Ruthven, 2017). דבר זה, היה מתוכנן על ידי הקהילה החוקרת שבה היו שותפות, שכללו מורים מומחים וטירונים. נראה כי התכנון המשותף שנעשה עם מורים מומחים במסגרת הקהילה החוקרת והרפלקציה שכתבו המורים אחרי כל שיעור גרם לשיתוף הידע של המורים המומחים ולקידום הפרקטיקות של המורים הטירונים (Jaworski, 2008). בשונה מזה, אחת המורות הטירוניות (מנאל) שהייתה הכי ותיקה יישמה שיטות הוראה בהן המורה נמצא במרכז ושמתאימות ליישום במסגרת מליאת הכיתה. כנראה, הותק שלה, הניסיון הקודם המועט שלה בשילוב טכנולוגיה והידע ההתחלתי הנמוך שלה יחסית השפיע על מידת התקדמותה. בנוסף, יתכן שיש לה תפיסה שונה על מהו תפקיד המורה ותפקיד הטכנולוגיה בכיתת המתמטיקה.

לעומת זאת, הממצאים מראים ששלושת המורות הטירוניות יישמו את השיעורים המתוקשבים בכיתה המסורתית שלהן, למרות שלשתיים מהן יש מעבדת מחשבים בבית הספר. יתכן וזה קרה בגלל שלא היו רגילות להוראה במעבדת מחשבים, דבר שגרם להן לצפות לקשיים נוספים במעבר לשם (Dettori & Cheong, 2002). לעומת זאת, שתי מורות שינו את סביבת העבודה של הכיתה המסורתית על מנת ליישם פורמטים של פעילות המאפשרים למידת חקר שיתופית (בקבוצות). נראה שהמורות רצו להתאים ,ככל האפשר, בין היישום לבין מערך השיעור שתכננו באופן משותף בקהילות החקירה שלהם. יתכן שזה היה בזכות המוטיבציה שלהם להתקדם בשילוב טכנולוגיה והתמיכה אשר קבלו מהמומחים בקבוצתם (Thomas & Palmer, 2014).

רשימת מקורות

Balanskat, A., Blamire, R. & Kefala, S. (2006). *The ICT impact report. A review of studies of ICT impact on school*. Brussels: European Schoolnet.

Bozkurt, G., & Ruthven, K. (2017). Classroom-based professional expertise: A mathematics teacher's practice with technology. *Educational Studies in Mathematics, 94*(3), 309-328.

Dettori, G., & Cheong, C. Y. (2002). Introducing IT in mathematics education: Prospects for curriculum revision and teacher training. *Subject teaching and teacher education in the new century: Research and innovation*, 141-165.

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: teachers and didacticians in collaboration. IN: Krainer, K. and Wood, T. (eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education volume 3: Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks* (pp. 309-330). Rotterdam: Sense Publishers.

Ruthven, K. (2014). Frameworks for analysing the expertise that underpins successful integration of digital technologies into everyday teaching practice. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 373–393). Dordrecht: Springer.

Thomas, M.O.J. & Palmer, J.M. (2014). Teaching with digital technology: obstacles and opportunities. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. An International Perspective on Technology Focused Professional Development* (pp. 71-89). Dordrecht: Springer.

דיאלוג חוצה קהילות בחינוך המתמטי: אפיון והשוואה של נקודות מבט על מתמטיקה והוראתה במפגש בין מתמטיקאים ומורים מנוסים

מרים גור, מכון ויצמן למדע

אלון פינטו, מכון ויצמן למדע

רוני קרסנטי, מכון ויצמן למדע

מבוא

הספרות המחקרית מציעה שדיאלוגים בין מתמטיקאים למורי מתמטיקה מנוסים עשויים להוביל לתובנות מקוריות ובעלות ערך להוראה, אך דיאלוגים אלו יחסית נדירים, ומעט ידוע על התהליכים המאפיינים אותם ועל ההזדמנויות ללמידה שהם מזמנים. בפרויקט מ' בשלישית (**מ**תמטיקה, **מ**ורים, **מ**תמטיקאים), מורים ומתמטיקאים בוחנים בצוותא סיטואציות כיתתיות אותנטיות מתוך שיעורי מתמטיקה שתועדו בווידאו, ודנים בסוגיות פדגוגיות ומתמטיות המעוגנות במהלכי הוראה קונקרטיים. מפגשים אלה מהווים כר פורה לבחינת האופנים שבהם עשוי להתפתח דיאלוג בין מורים למתמטיקאים. המחקר המדווח כאן מבקש להאיר נקודות דמיון ושוני באופן שבו מתבטאים מתמטיקאים ומורים מנוסים לגבי מתמטיקה, הוראתה ולמידתה בהקשר של סיטואציות כיתתיות אותנטיות.

רקע וספרות

מפגשים בין מתמטיקאים ומורים למתמטיקה מתרחשים בהקשרים מגוונים: (1) קורסים במתמטיקה אקדמית הניתנים במסגרת תכניות התואר הראשון וההכשרה של מורי מתמטיקה לעתיד. קורסים אלו הם מרכיב מרכזי בתכניות הכשרה מקצועית של מורי מתמטיקה במדינות רבות (Tatto et al., 2009). בהקשר זה חלוקת התפקידים היא שהמתמטיקאים הם המרצים והמורים לעתיד הם הסטודנטים; (2) תכניות פיתוח מקצועי של מורי מתמטיקה מכהנים וקורסים במסגרת תארים מתקדמים. בהקשר זה המתמטיקאים הם המומחים והמורים נמצאים על פי רוב בתפקיד הלומדים, אך בנוסף המורים עשויים אף הם להיות בעלי מומחיות רלוונטית, קרי, הוראת מתמטיקה; (3) מפגשים במסגרת פרויקטים שונים ביוזמת מוסדות אקדמיים, גופי חינוך או קובעי מדיניות. בעוד שבהקשרים הראשון והשני המתמטיקאים נתפסים כבעלי ידע בעל ערך למורים אך לא להיפך, בהקשר השלישי ייתכנו תפקידים מגוונים למורים ולמתמטיקאים המִתרגמים ליחסי כוחות סימטריים יותר, למשל בוועדות מקצוע שבהן מומחיות המורה נדרשת לענייני הוראה של תכנים מתמטיים ומומחיות המתמטיקאי נדרשת לענייני תחום הדעת. שאלה העולה לגבי כל אחד מסוגי המפגשים הללו היא מה עשויה להיות תרומתם. שאלה זו נחקרה מזוויות שונות ומתוך פרשנויות שונות של המילה "תרומה".

פרשנות אחת של "תרומה" היא במובן של הישגים טובים יותר של התלמידים. בהתאם, ישנם מחקרים שהתמקדו בקשר בין מספר הקורסים האקדמיים במתמטיקה שלמדו המורים במסגרת התארים וההכשרות שלהם, ובין הישגי תלמידיהם (למשל, Darling-Hammond, 2000). פרשנות שנייה של "תרומה" היא פיתוח הידע של המורים. בהקשר זה, ישנם אפיונים שונים של ידע, לדוגמה ההבחנה בין סוגים שונים של ידע מתמטי להוראה (למשל: Ball et al., 2008). פרשנות שלישית של "תרומה" היא היכולת של המורים לראות רלוונטיות וערך בקורסים שלמדו במסגרת הכשרתם, ולציין יישומים של תכנים וחוויות מקורסים אלו בהוראה שלהם (למשל, Wasserman et al., 2018; Zazkis & Leikin, 2010). פרשנות רביעית של "תרומה" היא יישום של תובנות שונות, שניתן לייחס אותן למה שנלמד במסגרת קורסים אקדמיים, בתוך כיתת המתמטיקה (למשל, White et al., 2013). פרשנות חמישית וסימטרית יותר של "תרומה", אותה אנו מאמצים במחקר זה, נטועה בתיאוריות של למידה הדדית: המפגש בין מורים למתמטיקאים במסגרת תכניות לפיתוח מקצועי עשוי לזמן לשני הצדדים הזדמנות לבחון הנחות ותפיסות מוקדמות מנקודות מבט חדשות, וכך כל אחד מהצדדים עשוי לפתח תובנות משמעותיות, אולי שונות, לגבי מתמטיקה, למידתה והוראתה. פרשנות זו מתייחסת בעיקר למפגשים בין מתמטיקאים למורים בפועל, תחת ההנחה שבמפגש כזה קיים פוטנציאל להתייחסות למומחיות של שני הצדדים (למשל, Pinto & Cooper, 2017, 2018). כצעד לקראת הבנה טובה יותר

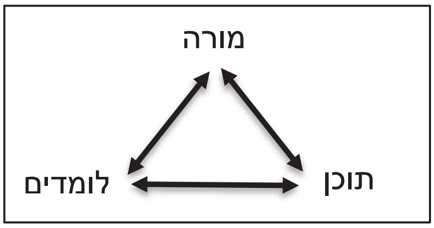
של תהליכי למידה הדדית שעשויים להתרחש במפגשים בין מתמטיקאים ומורים, מחקר זה שואף לאפיין ולהשוות את נקודות המבט השונות של מורים מנוסים ומתמטיקאים על מתמטיקה והוראתה, כפי שהן עולות בסביבה שעוצבה במיוחד ותתואר להלן.

פרויקט מ' בשלישית

פרויקט מ' בשלישית פועל במכון ויצמן למדע החל משנת הלימודים תש"ף (2019-2020), במטרה לחקור ולאפיין את הלמידה שעשויה להתרחש במפגש בין מתמטיקאים ומורים. במסגרת מ' בשלישית, מורים ומתמטיקאים צופים יחד בשיעורי מתמטיקה מצולמים ודנים בסוגיות פדגוגיות ומתמטיות העולות מן הצפייה. השיעורים המצולמים נבחרו מהמאגר של פרויקט עדש"ה (Karsenty & Arcavi, 2017). עיצוב המפגש בין מורים ומתמטיקאים בפרויקט מבוסס על הספרות של חציית שפה (Boundary crossing), אשר מאפיינת תהליכי למידה במפגשים בין קהילות שונות באופיין, במטרותיהן ובעיסוקן (Akkerman & Bakker, 2011). השיעורים המוקלטים מהווים אובייקט שפה (Boundary object) התומך בניסוח ובבחינה של נקודות מבט ושל פרקטיקות שונות, ומזמן למידה של הצדדים השונים זה מזה וזה עם זה. עיגון הדיונים סביב אובייקט שפה מסייע למצב הן את המורים והן את המתמטיקאים כמומחים, גם אם במובנים שונים, ובכך מעודד את הצדדים השונים לבחון את עמדותיהם, את אמונותיהם ואת הנחותיהם מנקודת המבט של הצד השני. אפיון נקודות המבט של הצדדים השונים על מתמטיקה והוראתה מסתמך על משולש ההוראה (The instructional triangle; Ball, 2012), אשר מייצג את סביבת ההוראה והלמידה באמצעות שלושה מוקדים - מורה, לומדים ותוכן (קודקודי המשולש) - והאינטראקציות ביניהם (צלעות המשולש) (איור 1).

איור 1

משולש ההוראה והלמידה



שאלת המחקר היא: כיצד באים לידי ביטוי היבטים שונים של משולש ההוראה בדיאלוג בין מתמטיקאים ומורים מנוסים במפגשי מ' בשלישית?

מתודולוגיה

<u>תיאור המשתתפים</u>: במחקר השתתפו חמישה מורי מתמטיקה משני בתי ספר על-יסודיים וחמישה מתמטיקאים ממוסד אקדמי מחקרי.

<u>איסוף הנתונים</u>: נתוני המחקר נאספו משלושה מפגשים מצולמים של פרויקט מ' בשלישית. המפגש הראשון נערך פנים אל פנים בהשתתפות מלאה ואילו שני המפגשים האחרים נערכו בזום בשל מגבלות שהוטלו בעקבות מגפת הקורונה. למחקר זה נבחרו קטעי מליאה שקדמו לצפייה בווידיאו ודיוני מליאה שהתרחשו לאחר הצפייה, היות שדיונים אלו היו עשירים בדו-שיח בין המורים והמתמטיקאים.

<u>ניתוח הנתונים</u>: כל קטעי הדיונים שנבחרו תומללו במלואם בסמיכות למועד המפגש, וחולקו לתורות דיבור. תחילה קודדו תורות דיבור על פי הדוברים ועל פי הקודים "מורה" או "מתמטיקאי/ת". לאחר מכן, זוהו ביחידות הניתוח טענות: טענה הוגדרה כאמירה שמזמינה את המשתתפים האחרים להסכים אתה, לדחות אותה, או לבקש מהדובר/ת לבסס. בשלב הבא, זוהו התייחסויות בטענות לקודקודי המשולש (לומד / מורה / תוכן), וכן לצלעות המשולש המתארות קשר ואינטראקציה בין הקודקודים (קשר לומד-מורה /לומד-תוכן/ מורה-תוכן). נבחנו נקודות דמיון ושוני בין הופעות של מרכיבי משולש ההוראה בתורות דיבור של מתמטיקאים ומורים.

ממצאים

להלן נציג ממצאים ראשונים המתייחסים ספציפית לאחד מקודקודי המשולש: הלומד.

נוכחות הלומד בטענות מורים ומתמטיקאים

מהנתונים עלו שלושה סוגי נוכחות לומדים בטענות מתמטיקאים ומורים:

1. התייחסות מפורשת ללומד: בטענה מופיעה מילה המתייחסת בבירור ללומד (למשל: "לשרטט בדיוק את הפונקציה, לתלמיד יהיה קשה, כלומר צריך נייר מילימטרי והרבה נקודות כדי להגיע לדיוק טוב").

2. לומד נוכח-נעדר: אין מילה המציינת לומד, אבל מופיעה מילת פועל או תואר ללא מושא, הרומזת לנוכחות מובלעת של הלומד (למשל: "בתיכון זה קשה לבקש את זה", "התחושה שלי היא שלצייר את הפונקציה זו מוטיבציה לא מספיק טובה כדי לחקור, להגדיר נגזרות, להגדיר שיפועים").

3. אין בטענה התייחסות ללומד (למשל: "התפקיד של לימוד פיסיקה בתיכון הוא לתת הקשר, אולי ראשון ושלם לא משהו אנקדוטלי קטן למה אפשר... לכוח של המתמטיקה באמת לעשות אתה משהו").

בטבלה 1 מוצגת ספירה של מופעי הקטגוריות השונות בטענות המתמטיקאים והמורים. מהטבלה עולה כי ברוב טענות המורים ישנה התייחסות מפורשת ללומד, בעוד שבטענות המתמטיקאים הלומד מופיע במפורש בפחות ממחצית הטענות.

טבלה 1

ספירת מופעי הקטגוריות השונות המתייחסות ללומד

טענות	התייחסות-מפורשת ללומד	לומד-נוכח נעדר	אין התייחסות ללומד	סה"כ
מתמטיקאים	67	20	63	150
מורים	105	8	32	145

הלומדים אליהם מתייחסים המורים והמתמטיקאים

בנוסף לאופן הנוכחות של הלומד בטענה, עלתה גם הבחנה בין סוגי הלומדים אליהם התייחסו הדוברים בטענותיהם. מהנתונים עלו חמישה סוגים של לומדים: לומד מתוך השיעור המצולם, לומד מתוך סיטואציה היפותטית, לומד אנקדוטלי הלקוח מתוך התנסות חד-פעמית של הדובר, הדובר עצמו כלומד, לומד המייצג פרופיל או דפוס התנהגות של תלמידים של הדובר. בטבלה 2 מוצגת חלוקת הטענות על פי הסוגים הללו. מהטבלה עולה כי רוב התלמידים שאליהם מתייחסים הן המתמטיקאים והן המורים הם תלמידים שנצפו בשיעור המוסרט, ממצא המדגיש את תפקידו החשוב של אובייקט השפה – שיעור הווידאו המוקלט – בדיאלוג בין הצדדים. עם זאת, ניתן לראות הבדלים בולטים במקורות המידע שמורים ומתמטיקאים פונים אליהם בטענותיהם בהתייחס ללומדים שאינם מתוך הסרט: המתמטיקאים מרבים להתייחס לאנקדוטות, למשל ביחס לילדיהם שלהם, להתייחס לעצמם כלומדים, בעבר או בהווה, או להתייחס ללומדים היפותטיים. סוגי לומדים אלו כמעט אינם מופיעים אצל המורים, אשר מרבים להתייחס בטענותיהם לתלמידים על בסיס ניסיונם בהוראה, קטגוריה שכמעט לא הופיעה אצל המתמטיקאים.

טבלה 2

חלוקה על פי סוגי הלומדים

טענות	לומד מהשיעור המצולם	לומד היפותטי	לומד אנקדוטלי	הדובר כלומד	לומד מניסיון ההוראה
מתמטיקאים	40	17	4	5	1
מורים	59	7	0	0	39
סה"כ	99	24	4	5	40

סיכום ודיון

הצגנו בתקציר זה ממצאים המתייחסים להיבטים כמותניים של הופעת הלומד בטענות של מתמטיקאים ומורים מנוסים, שעלו בדיאלוגים חוצי קהילות סביב שיעורים מוסרטים, במסגרת פרויקט מ' בשלישית. ניתוח דומה נעשה ביחס לקדקודים הנוספים של משולש ההוראה – המורה והתוכן המתמטי. הניתוח הכמותני מאיר הבדלים בין הטענות של המתמטיקאים והמורים שעד כה לא תועדו בספרות המחקרית, ואשר יחד עם ניתוח איכותני משלים, שמתוכנן בשלב הבא של המחקר, יכולים להוות צעד ראשון לאפיון תהליכים של התפתחות דיאלוגים בין שתי קהילות אלו. בכנס נציג ממצאים נוספים מהניתוח הכמותי והאיכותני ביחס לשלושת קדקודי משולש ההוראה, ונדון באופן בו קווי דמיון ושוני בין נקודות המבט של מתמטיקאים ומורים על מתמטיקה והוראתה יכולים להוות מחסומים לתקשורת בין הקהילות, אך גם הזדמנות ללמידה הדדית.

ביבליוגרפיה

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research, 81(2),* 132-169.

Ball, D. L. (2012). Afterword: Using and designing resources for practice. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources, Mathematics Teacher Education 7*, (pp. 349-359). Springer.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement. *Education Policy Analysis Archives, 8*, 1.

Karsenty, R., & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(5)*,* 433-455.

Pinto, A., & Cooper, J. (2017). In the pursuit of relevance–Mathematicians designing tasks for elementary school teachers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3*(2), 311-337.

Pinto, A., & Cooper J. (2018). Diversity in curriculum committees: Challenges and opportunities for cross-community collaboration. *In Proceedings of the International Commission on Mathematics Instruction (ICMI) Study 24th Conference* (pp. 547-554). ICMI.

Tatto, M. T., Lerman, S., & Novotna, J. (2009). Overview of teacher education systems around the world. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study* (pp. 15–24). Springer.

Wasserman, N., Weber, K., Villanueva, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2018). Mathematics teachers' views about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior, 50*, 74-89.

White, D., Donaldson, B., Hodge, A., & Ruff, A. (2013). Examining the effects of math teachers' circles on aspects of teachers' mathematical knowledge for teaching. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Retrieved October 10, 2021 from https://www.cimt.org.uk/journal/white.pdf.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12(4)*, 263-281.

הדרך שלא נבחרה - מתמטיקאים ומורים בוחנים מהלכי הוראה חלופיים

אלון פינטו, מכון ויצמן למדע

ג'ייסון קופר, מכון ויצמן למדע

מבוא

קורסי מתמטיקה אקדמיים, ובפרט קורסי מתמטיקה מבוססי הוכחות, הם מרכיב מרכזי בהכשרה המקצועית של מורי מתמטיקה במדינות רבות (Tatto et al., 2009). מציאות זו תואמת תפיסה מקובלת בקרב חוקרי חינוך, מתמטיקאים ומקבלי החלטות שהרחבת הידע המתמטי של מורי מתמטיקה מעל ומעבר לידע המתמטי שמורים מצופים להנחיל, תורמת, גם עם בעקיפין, לאיכות ההוראה (Ball & Bass, 2009; Gutfreund & Rosenberg, 2012). לאורך השנים, תפיסה זו כמעט לא גובתה במחקרים אמפיריים, וממצאים שהצטברו בשנים האחרונות מעלים ספק לגבי התרומה בפועל של לימודי מתמטיקה אקדמית למורים (Wasserman et al., 2018; Zazkis & Leikin, 2010). אחת המסקנות שעלו ממחקרים אלו היא שלא די שמורים ידעו אילו קשרים קיימים בין תכנים בקורסי מתמטיקה אקדמיים ובין תכנית הלימודים, לדוגמה כיצד מושג הגבול קשור לנגזרת ולאינטגרל, אלא שנדרשת גם הבנה לגבי האופנים בהם קשרים כאלו יכולים לבוא לידי ביטוי בהוראה בבית הספר.

מקום טבעי לתור בו אחר יישומים בהוראה של ידע מתמטי הוא הספרות הנרחבת על ידע מתמטי להוראה (Mathematical Knowledge for Teaching). בול ושותפיה (Ball et al., 2008) הרחיבו ופירטו את עבודתו של שולמן (Shulman, 1986) על ידע תוכן-פדגוגי בהקשר של הוראת מתמטיקה. מבין ששת הסוגים של ידע מתמטי להוראה שהציעו בול ושותפיה, מקובל לקשור ידע תוכן באופק (Horizon Content Knowledge) למתמטיקה אקדמית. ידע תוכן באופק הוגדר בתחילה כמודעות לאופנים בהם נושאים מתמטיים מתקשרים לאורך תכנית הלימודים, והורחב בהמשך על ידי בול ובאס (Ball & Bass, 2009) לכלול גם רעיונות מתמטיים מעבר לתכנית הלימודים שיכולים לעזור למורים לזהות תובנות מתמטיות מקוריות של תלמידים ולכוון את ההוראה ביחס לערכים ולפרקטיקות המקובלות בדיסציפלינה. בעוד עבודות על ידע תוכן באופק הציעו כיוונים לחקירה של השימושים של מתמטיקה אקדמית בהוראה הבית ספרית, כיוונים אלו כמעט לא פותחו (Wasserman, 2018).

הסבר אפשרי להתפתחות האיטית של מחקר על ידע אקדמי להוראה הוא העדר אוסף עשיר מספיק של דוגמאות לשימושים שעושים מורים בהוראה שלהם בתכנים ובחוויות מקורסים מתמטיים אקדמיים שלמדו. הקושי לתעד ולאסוף דוגמאות כאלו עשוי להיות נעוץ בעובדה ששימושים של מתמטיקה אקדמית בהוראה נוטים להיות אישיים וסמויים (Zazkis, 2020). בנוסף, התכנים והחוויות שהמורים נסמכים עליהם עשויים להימצא מחוץ ל"סביבה הקרובה" (Wasserman, 2018) של השיח המתמטי הכיתתי ולכן לא לבוא לידי ביטוי באופן מפורש, דבר המקשה עוד יותר על זיהויים ותיעודם.

פרויקט מ' בשלישית (**מ**ורים, **מ**תמטיקאים, **מ**תמטיקה), הפועל במכון ויצמן למדע החל משנת 2019, מבקש לתת מענה לחוסר בדוגמאות אותנטיות של שימושים של מתמטיקה אקדמית בהוראה, ולחקור ולאפיין ידע מתמטי אקדמי להוראה. במסגרת מ' בשלישית, מורים ומתמטיקאים בוחנים בצוותא סיטואציות כיתתיות אותנטיות מתוך שיעורי מתמטיקה שתועדו בווידאו, ודנים בדרכים – מהלכי הוראה – שלא נבחרו על ידי המורה, ובסוגיות פדגוגיות ומתמטיות העולות מתוך הדרכים השונות. לא פעם, הדרכים שעולות לדיון מוצעות על ידי המתמטיקאים אשר מזהים הזדמנויות ללמידה שלא נוצלו, ובכך הן משקפות ידע וניסיון הנטועים במתמטיקה האקדמית. הצעות המתמטיקאים נעמדות למבחן המציאות על ידי המורים, הערים לדקויות פדגוגיות ושיקולים פרקטיים. את הדיאלוג המתמטי והפדגוגי בין הצדדים ניתן לראות כמעבדה ליצירת דוגמאות ולמחקר של ביטויים של מתמטיקה אקדמית

בהוראה. בהקשר זה, מטרת המחקר היא לבחון באילו אופנים יכולה מתמטיקה אקדמית לבוא לידי ביטוי בקבלת החלטות של מורים בשיעורי המתמטיקה בתיכון.

רקע תיאורטי ומסגרת מושגית

הבט מרכזי במחקר זה הוא עיצוב מפגש בין מתמטיקאים ומורים אשר מעודד שיח על הוראה, שבו מוחצנת התרומה של מתמטיקה אקדמית בהקשר של הוראה בית ספרית. מפגש זה מתאפיין בפרויקט מ' בשלישית ב: (א) תיעודים מפורטים ואותנטיים של הוראת מתמטיקה בית ספרית (ב) דיאלוג רפלקטיבי המכבד את המומחיות של כל אחד מהצדדים ואשר חותר לביטוי ושיתוף של נקודות מבט שונות על מתמטיקה והוראתה. תכנון והובלת מפגשים אלו שואב מהספרות של חציית שפה (Boundary crossing), אשר מאפיינת תהליכי למידה במפגשים בין קהילות שונות באופיין, במטרותיהן ובעיסוקן (Akkerman & Bakker, 2011). שיעור מוקלט מהווה אובייקט שפה (Boundary object), התומך בדיון על נקודות מבט ופרקטיקות שונות, ומזמן למידה של הצדדים השונים, זה מזה וזה עם זה (Star, 2010). עיגון הדיונים סביב החלטות פדגוגיות במצבים קונקרטיים מסייע למצב הן את המורים והן את המתמטיקאים כמומחים, גם אם במובנים שונים, ובכך מעודד את הצדדים השונים לבחון את עמדותיהם, את אמונותיהם ואת הנחותיהם מנקודת המבט של הצד השני (Cooper & Pinto, 2017, 2018).

ההמשגה של "מתמטיקה אקדמית" ושל ה-"ביטוי" שלה בהוראת מתמטיקה בתיכון מעוגנת בתאוריה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008), ונשענת על המסגרת התיאורטית של *שיח מתמטי להוראה* שפותחה על ידי קופר (Cooper, 2014). מסגרת זו מפרשת ומפרטת רעיונות מתוך הספרות על ידע מתמטי להוראה במושגים של שני שיחים (discourses): (א) שיח תוכן מתמטי הכורך בתוכו מרכיבים של שיח מתמטי (מילות מפתח, אמצעי המחשה, רוטינות ונרטיבים) אשר *שכיחים* בקרב עושי מתמטיקה, *ייחודים* להוראת מתמטיקה, או מצויים *באופק המתמטי* של ההוראה; (ב) שיח תוכן פדגוגי הכורך בתוכו מרכיבים של שיח פדגוגי שנוגעים ל*תלמידים להוראת מתמטיקה* או ל*תכנית הלימודים*. במושגים אלו, אנו שואלים: באילו אופנים יכול שיח מתמטי אקדמי לבוא לידי ביטוי בשיח המתמטי להוראה בתיכון?

שיטה

נתונים למחקר כוללים 7.5 שעות צילומי וידאו של דיונים בהשתתפות 5 מתמטיקאים ו- 5 מורים. דיונים אלו התקיימו בשלושה מפגשים של שעתיים וחצי כל אחד בפרויקט מ' בשלישית בשנת 2020. לכל המשתתפים לפחות 10 שנות ניסיון בהוראה. לכל המורים היה ניסיון כסטודנטים בקורסי מתמטיקה אקדמיים בישראל, לכל מהמתמטיקאים ניסיון הוראה מחוץ לאוניברסיטה, ולשלושה מהם ניסיון בהוראת מתמטיקה למורים. המפגשים בדיונים התמקדו בשיעורים מוקלטים מתוך מאגר השיעורים המצולמים של פרויקט עדש"ה (Karsenty & Arcavi, 2017). למחקר זה נבחרו שני דיונים מתוך המפגש הראשון, אחד סביב דיאלוג קצר בין מורה לתלמידה בכיתה ח', ואחד סביב שיעור גיאומטריה אנליטית בכיתה יב', 5-יח"ל. הניתוח של כל דיון כלל: (א) זיהוי מהלכי הוראה חלופיים שהוצעו ונידונו על ידי המתמטיקאים והמורים; (ב) זיהוי של מרכיבים משיח מתמטיקה אקדמית שבאו לידי ביטוי מפורש או מרומז בדיון על מהלכי הוראה אלו; (ג) אפיון הדרכים בהם מרכיבים משיח מתמטיקה אקדמית קושרו בדיונים להוראת מתמטיקה בתיכון.

ממצאים ודיון

הדיון הראשון בין המורים והמתמטיקאים עסק סביב השאלה: כיצד להגיב לתלמיד כיתה ח' הטוען ששורש 18 קרוב יותר ל-4 מאשר ל-5 *בגלל* ש-18 קרוב יותר ל-16 מאשר ל-25? שאלה זו עלתה בהקשר של דיאלוג אותנטי בין מורה ותלמידיה בכיתה ח' בו המורה לא הגיבה לטענה דומה של התלמיד (Cooper & Pinto, 2017). המורים והמתמטיקאים דנו בשאלה זו, קודם בקבוצות (8 דקות) ואחר בדיון במליאה (34 דקות), והציעו מהלכי הוראה מגוונים, לדוגמה:

א. להציג דוגמה נגדית לטענה, לדוגמה למצוא x בין 16 ל-25 שקרוב יותר ל-16 מאשר ל-25, כך ש-$\sqrt{x}$ לא קרוב יותר ל-4 מאשר ל-5. לחילופין, להכליל את הטענה על ידי החלפת 4 ו-5 במספרים $N, N+1$ כלשהם, או ביתר כלליות, על ידי שני מספרים טבעיים $N < M$.

ב. לעבור לפרבולה, המוכרת יותר לתלמידים, ולחקור האם נכון שאם x קרוב יותר ל-4 מאשר ל-5 אז x^2 קרוב יותר ל-16 מאשר ל-25. להסיק ש-4.5 מהווה סוג של דוגמה נגדית.

ג. לתקן את הטענה של התלמיד על ידי החלפה של "קרוב יותר ל-16" ב-"קרוב מספיק ל-16".

ד. להטות את הדיון לפונקציות לינאריות, המוכרות לתלמידים ואשר עבורן הטענה נכונה.

ה. להציע פרשנויות חליפיות למילה קרוב, לדוגמה פרשנות כפלית שבה הטענה נכונה.

בדיונים סביב הצעות אלו מצאנו עושר רב של ביטויים של שיח מתמטי אקדמי. במיוחד בלטו רוטינות של הכללה והפרכה. לדוגמה, המשתתפים שיערו שהתלמיד בשיעור הניח בטעות שכל מספר x אשר קרוב יותר ל-16 מאשר ל-25 מקיים ש- $\sqrt{x}$ קרוב יותר ל-4 מאשר ל-5, ובחנו דרכים שונות להפריך את הטענה. מאחר שהטענה של התלמיד כוללת שתי אמירות נכונות, הפרכה של הטענה דורשת הכללה שלה (Cooper & Pinto, 2017), והמשתתפים חיפשו הכללה שיש לה דוגמה נגדית, כמפורט באפשרויות א' וב' למעלה. בעוד רוטינות אלו של הכללה ובניית דוגמה נגדית הם מרכזיות במתמטיקה אקדמית, במקרה זה המורים הדגישו אילוצים פדגוגיים, למשל שהדוגמה הנגדית צריכה להיות "עם מספרים שלמים" כדי שהיא אכן "תראה" לתלמידים למה הטענה שגויה. בכך, הרוטינות שהמשתתפים עסקו בהן שילבו בין השיח המתמטי האקדמי של המתמטיקאים, והשיח המתמטי להוראה של המורים.

הדיון השני עסק בשיעור גיאומטריה אנליטית בו התלמידים התבקשו למצוא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן מ- (0,1) הוא חצי מרחקן מ- (0,4). בתחילה התלמידים התבקשו לנחש מה התשובה, וניחשו מעוין, קו ישר, הישר x=2, ואליפסה. המורה כתבה את הניחושים על הלוח והמשיכה מיד להציג פתרון אנליטי, שהוא מעגל סביב ראשית הצירים. אז שאל אחד התלמידים "אני יכול להגדיר גם ככה מעגל?". המורים והמתמטיקאים דנו באפשרויות שונות להגיב לניחושים של התלמידים באופן שימצב אותן כהשערות שניתן לחקור ולעדן, וכן בדרכים שונות להגיב לשאלה של התלמיד. כתגובה לניחושים, הציעו המתמטיקאים לבחון מנקודת מבט אנליטית אילו תכונות גיאומטריות יהיו למקום הגיאומטרי, וכך לפסול חלק מהניחושים. לדוגמה, אפשר להסיק שהצורה שתתקבל צריכה להיות חסומה, סימטרית סביב ציר ה-x, וכן שהיא חייבת לחתוך בדיוק בשתי נקודות כל ישר החוצה את ציר ה-x בקטע $(-2,2)$. המורים ראו ערך בהצעות אלו, אך נדרשו לשאלה האם וכיצד הם היו לוקחים אותן לכיתה, תוך שהם משתפים בנרטיבים מהשיח המתמטי להוראה שלהם על סטודנטים ועל תכנית הלימודים. לגבי שאלת התלמיד, התלבטו המשתתפים האם מתאים לפתוח אותה לדיון בכיתה. המתמטיקאים תיארו כיצד היו מתייחסים לשאלה דומה בשיעור מתמטיקה באוניברסיטה, לדוגמה מבקשים מהתלמיד לתרגם את השאלה לטיעון מתמטי מדויק, כדי להבהיר למה התלמיד מתכוון ("למה הכוונה ככה, מה הוא מכמת ומה הוא משחרר?"). המשתתפים בחנו טענות מתמטיות שונות שמהוות פרשנויות שונות לשאלת התלמיד, ודנו באופן בו ניתן לחקור אותן מתמטית בשיעור. דיון זה הביא לידי ביטוי נרטיבים שונים מהשיח המתמטי להוראה של המורים והשיח המתמטי של המתמטיקאים, לדוגמה על מה זה אומר "להגדיר" מעגל.

שני המקרים שתיארנו עסקו באמירות לא צפויות של תלמידים. תגובה לאמירות אלו מתבססת על רוטינות שונות משיח מתמטי להוראה: הבנה של האמירה, זיהוי הזדמנויות ללמידה, זיהוי מהלכי הוראה אפשריים, והערכה של השלכות פדגוגיות אפשריות שלהן. בשני המקרים, תיארנו בקצרה דרכים שונות בהן שיח מתמטי אקדמי תרם לרוטינות אלו. בפרט מצאנו שרוטינות מתמטיות שעלו בשיח של המתמטיקאים עברו טרנספוזיציה במפגש עם השיח של מורים, לדוגמה "הפרכה פדגוגית", שלא מפריכה את הטענה המתמטית אלא את החשיבה והאינטואיציה שמאחורי הטענה. במקרים רבים הביטויים של השיח האקדמי בשיח המתמטי להוראה שזיהינו היו עדינים ביותר, דבר המחזק בעינינו את הטענה שלא נכון להשאיר למורים לתרגם לבדם ידע מתמטי אקדמי לתובנות פדגוגיות.

רשימת מקורות

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research, 81(2),* 132-169.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *Paper presented at the 43rd Jahrestagung der Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik*.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Cooper, J. (2014). Mathematical discourse for teaching: A discursive framework for analyzing professional development. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Ed.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36.2* (pp. 337-344). Vancouver, Canada: PME.

Cooper, J., & Pinto, A. (2017). Mathematical and pedagogical perspectives on warranting: approximating the root of 18. *For the Learning of Mathematics, 37*(2), 8-13.

Cooper, J., & Pinto, A. (2018). Jourdain and Dienes effects revisited – playing tic tac toe or learning non-Euclidean geometry? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.) *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 307-314). Umeå, Sweden.

Gutfreund, H., & Rosenberg, Y. (2012) Knowledge and training of secondary school mathematics teachers — a report of the committee on the knowledge-base for teaching mathematics. *Jerusalem: The Israel Academy of Sciences and Humanities*. Retrieved from: http://yozma.mpage.co.il/SystemFiles/23170.pdf

Karsenty, R., & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20(5),* 433-455.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Star, S. L. (2010). This is not a boundary object: Reflections on the origin of a concept. *Science, Technology, & Human Values, 35*, 601–617

Tatto, M. T., Lerman, S., & Novotna, J. (2009). Overview of teacher education systems around the world. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study* (pp. 15–24). New York: *Springer.*

Wasserman, N. H. (2018). Knowledge of nonlocal mathematics for teaching. *The Journal of Mathematical Behavior, 49*, 116-128.

Wasserman, N., Weber, K., Villanueva, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2018). Mathematics teachers' views about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior, 50,* 74-89.

Zazkis, R., & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12(4)*, 263-281.

Zazkis, R. (2020). Personal, nonlocal, tacit: On mathematical knowledge in teaching. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 20*(4), 647-656.

הוכחות בקורסים אוניברסיטאיים – הפרכה כמשוב מעודד הבנה

ג'ייסון קופר, מכון ויצמן למדע
אלון פינטו, מכון ויצמן למדע

מבוא

המושג של "הוכחה מתמטית" הוא מרכזי בלימודי מתמטיקה מתקדמים, החל בתואר הראשון. על פי רוב, סטודנטים מקשיבים למרצים כאשר הם מציגים הוכחות בהרצאה, ומצופה מהם להמשיך ללמוד את ההוכחות אחרי השיעור, כאשר הם נעזרים בסיכומים ובספרי לימוד (Weber, 2012). בקורסים רבים, מצופה מתלמידים לשחזר במבחנים הוכחות שנלמדו במהלך הקורס. יתרה מזו, מרצים מצפים שסטודנטים "יבינו" (comprehend) את ההוכחות שנלמדות (Mejia-Ramos et al., 2012). קריאה והבנה של הוכחות דורשת לא רק ידע אסטרטגי בתחומי דעת ספציפיים, אלא גם היכרות עם נורמות מתמטיות הנוגעות להסקה ולארגומנטציה בהוכחות (Knapp, 2005). אך יש עדויות לכך שהבנת הוכחות היא קשה ומורכבת עבור סטודנטים. אלקוק וובר (Alcock & Weber, 2005) מצאו שסטודנטים נוטים להתמקד במאפיינים שטחיים של הוכחות, מתקשים לפתח הסתכלות הוליסטית על ההוכחה, ואינם מודעים להצדקות המתמטיות של טיעונים, אשר נותרות לעיתים מרומזים בהוכחה. למרות קשיים אלה, מרצים בדרך כלל לא מנחים את הסטודנטים כיצד לקרוא ולהבין הוכחות, ואף חסרים להם כלים ושיטות להעריך הבנה של הוכחות (Weber, 2012). מחיה-רמוס ושו"ת (Mejia-Ramos et al., 2012) סקרו ספרות וראינו מרצים למתמטיקה כדי לבנות מסגרת מושגית של הבנת הוכחות, ואף הציעו סוגים של שאלות אודות הוכחה אשר יוכלו להעריך אספקטים שונים של הבנה.

מור (Moore, 2016) טוען שלמשוב של מרצים על הוכחות של סטודנטים יש תפקיד חשוב בהעברת ציפיות ובעיצוב נורמות לגבי הוכחות מתמטיות, ובקידום הבנה של הוכחות. מור (Moore, 2016) ומילר ושו"ת (Miller et al., 2018) מצאו שבבואם לתת ציון על הוכחות של סטודנטים, מרצים מתייחסים לא רק לנכונות ולעמידה בנורמות כתיבה, אלא בעיקר להבנת ההוכחה. עם זאת, קיים מחקר אמפירי מועט לגבי פרקטיקות הערכה מעצבת של הוכחות – על סוגי המשוב שמרצים מספקים להוכחות סטודנטים, ועל השפעת המשוב על הבנת הסטודנטים. מהעדויות הקיימות ידוע שכאשר מרצים (או מתרגלים) מעירים על הוכחות פגומות, הם נמנעים לעיתים קרובות מלציין במפורש מה בדיוק פגום בהוכחה או כיצד לתקן את הפגם, ובמקום זאת מסמנים אזורים "בעייתיים" בהוכחה, שואלים שאלות הבהרה או מבקשים הרחבה (Byrne et al., 2018; Moore, 2016; Pinto & Cooper, 2019; Pinto & Karsenty, 2020). ניתן לראות במשוב פתוח כזה הזמנה לא רק לתקן את הפגם וללמוד נורמות של הוכחה מתמטית, אלא גם להעמיק בהוכחה ולפתח כלפיה הבנה (proof comprehension). עם זאת, פינטו וקופר (Pinto & Cooper, 2019) הראו שסטודנטים עשויים להתקשות לזהות ולנצל את ההזדמנויות לפיתוח הבנה הטמונות במשוב פתוח. סוג נפוץ של משוב פתוח על הוכחות פגומות, אשר קשור לפיתוח של הבנת הוכחה (Pinto & Karsenty, 2018), הינו "הפרכה". נותן המשוב עשוי להראות שטענה בתוך הוכחה איננה נכונה, לעיתים באמצעות דוגמה נגדית (de Villiers, 2010; Lakatos, 1976). הפרכה ככלי לקידום הבנה של הוכחות נחקרה בעבר בהקשר של פעילות כיתתית (Larsen & Zandieh, 2008).

לסיכום, חוקרים מכירים בפוטנציאל של משוב על הוכחות לקידום הבנה של הוכחות, ולעיתים משתמשים "משוב מפריך" (refutation feedback) כדי לעודד סטודנטים להעמיק בהוכחה. במחקרנו (Pinto & Cooper, submitted) אנחנו מבקשים לברר לעומק את הקשר בין משוב מפריך לקידום הבנה של הוכחה, ושואלים:

כיצד ניתן לנסח משוב מפריך על הוכחה פגומה כך שיקדם אצל סטודנטים הבנה של ההוכחה?

מסגרת מושגית

משוב מפריך (refutation feedback)

אנחנו מתייחסים למשוב מפריך כסוג של ארגומנט מתמטי. מחקר רב בחינוך מתמטי נשען על עבודתו של טולמין (Toulmin, 1958), אשר מתאר מבנה כללי של ארגומנט, שבאופן הבסיסי ביותר מורכב מטענה (claim), נתונים (data), והצדקה (warrant) אשר מאפשר את הסקת הטענה מתוך הנתונים. בפעילות טיעונית לא תמיד מובא ארגומנט מלא באופן מפורש. קופר ופינטו, למשל, (Pinto & Cooper, 2017) השתמשו במסגרת זו כדי לחקור הצדקות סמויות בטיעונים מתמטיים, שלא ניתנות במפורש אך נחוצות לוגית כדי להסיק את הטענה מתוך הנתונים. לענייננו, משוב מפריך הינו ארגומנט מתמטי, לעיתים חלקי, שטענתו מפריכה את הוכחת הסטודנט.

הבנת הוכחה (proof comprehension)

אנחנו נשענים על עבודתם של מחיה-רמוס ושו"ת (Mejia-Ramos et al., 2012), אשר מבחינים בין הבנה מקומית והבנה הוליסטית של הוכחה, ומפרטים אספקטים שונים שלהם (במאמר זה נתמקד בהבנה מקומית, ראו טבלה). אנחנו מציעים שמסגרת זו מתאימה לתאר את אופי ההבנה שסטודנטים מוזמנים להפעיל בבואם לפענח את המשוב המפריך, לזהות פגמים בהוכחה, ולתקן אותה על פיו.

Local comp.	1. Meaning of terms and statements	1.1 Identify examples that illustrate a term/statement
		1.2 State a statement in an equivalent manner
		1.3 Identify trivial implication of a statement
	2. Proof framework / Logical status of statements	2.1 Identify the type of proof framework
		2.2 Identify the purpose of a statement within a proof
	3. Justification of claims	3.1 Make explicit an implicit warrant in the proof
		3.2 Identify data supporting a particular claim in the proof
		3.3 Identify claims supported by a statement in the proof

שיטה

נתונים נאספו בקורס אנליזה שניתן באוניברסיטה בארה"ב בשנת 2015. המרצה, שאותו נכנה מייק, היה מתמטיקאי בעל ניסיון של 20 שנים בהוראת מתמטיקה באוניברסיטה. מתוך ראיונות עמו (Pinto & Karsenty, 2018) אנחנו למדים שכוונתו הייתה להשתדל להגביל את המשוב שלו על הוכחות (עד כמה שניתן) לדוגמאות נגדיות, וזאת כדי לעודד פיתוח של הבנת ההוכחה. בכל שבוע ניתנה לסטודנטים רשימה של טענות ומסקנות שיש להוכיח, ודוגמאות שיש לבנות. סטודנטים הגישו את עבודתם וקיבלו עליה באופן שוטף משוב מעצב ללא ציון. בעקבות המשוב, סטודנטים הגישו עבודות מתוקנות, שעליהן קיבלו שוב משוב, וחוזר חלילה עד שלמרצה לא היו הערות. על גרסה אחרונה זו ניתן הציון. שבעה סטודנטים הסכימו להשתתף במחקר, והנתונים שנאספו כוללים 57 הגשות של מטלות ובמצטבר 2709 סימונים והערות של מייק על הגשות אלה. מבין כל המשובים איתרנו את כל אלה שעונים להגדרה של משוב מפריך. לגבי כל משוב, תחילה פירטנו את מרכיבי הארגומנט (טענה, נתונים, הצדקה), כאשר אנחנו משלימים את החלקים החסרים ומציינים לגבי כל חלק אם ניתן במפורש, במשתמע, או הושמט מהמשוב. לבסוף, ציינו לגבי כל משוב אילו אספקטים של הבנת הוכחה נדרשים כדי להשלים את החלקים החסרים בטיעון המפריך, לזהות בהוכחה את הפגמים אשר אפשרו את ההפרכה, ולתקן את ההוכחה בהתאם. דוגמאות לניתוח הנתונים יובאו בפרק הממצאים.

ממצאים ודיון

מבין כל המשובים המפריכים זיהינו שני סוגים. הראשונה, והמוכרת יותר בספרות, הינה הפרכה באמצעות דוגמה נגדית. הפרכה כזאת אפשרית, ואף מתבקשת, כאשר מופיעה בהוכחה טענה שקרית. אך קורה שקיים פגם בהוכחה על אף שההוכחה אינה מכילה טענה שקרית, לדוגמה כאשר חסרה הצדקה לטענת אמת המופיעה בהוכחה. במקרה זה, לא ניתן להפריך את ההוכחה על ידי דוגמה נגדית. במקרים כאלה זיהינו הפרכה באמצעות מסקנה שקרית. לדוגמה, סטודנטים נתבקשו להוכיח שפונקציה ממשית רציפה מקבלת מקסימום ומינימום על קטע סגור. הפרכה באמצעות מסקנה שקרית עשויה להיות "בהוכחה לא השתמשת בנתון שהפונקציה ממשית. אם ההוכחה תקפה, היא עובדת גם לפונקציה מעל הרציונאלים, אבל שם כבר ראינו שהטענה שקרית". בשני סוגי ההפרכה זיהינו שונות רבה במידת המפורשות של הטיעון המפריך, וכתוצאה מכך גיוון רב בהזדמנויות לעסוק בהבנת ההוכחה בעת פיענוח המשוב, זיהוי פגמים בהוכחה, ותיקונם. מפאת קוצר היריעה נתמקד בתקציר זה בהפרכה באמצעות דוגמה נגדית, ובהצגה בכנס נרחיב על הפרכה באמצעות מסקנה שקרית.

גמישות בבניית המשוב המפריך

כל אחד ממרכיבי הטיעון המפריך עשוי להופיע במשוב באופן מפורש, משתמע או חסר. ככל שהטיעון פחות מלא, כך נדרשת יותר הבנה בפיענוח המשוב. נדגים משובים שונים בהקשר של הוכחת המשפט: לריבוע היחידה במישור יש אותה העוצמה כמו לקטע היחידה על הישר.

במהלך ההוכחה, סטודנטים רבים בנו התאמה בין סדרות אינסופיות של ספרות (כייצוג עשרוני או בינארי של מספר ממשי בין 0 ל- 1) לזוגות של סדרות כאלה (כייצוג של נקודה בריבוע היחידה), וטענו שהתאמה זו משרה התאמה חח"ע מקטע היחידה על ריבוע היחידה.

<u>דוגמה א' – משוב מפריך מאד מפורש</u>

במשוב לסטודנט א' (אשר עבד בייצוג בינארי), המרצה סימן את הטקסט "נניח שההתאמה איננה חח"ע", וכתב: "ההתאמה שלך איננה חח"ע, כי הזוגות $(0.1\bar{0}, 0.1\bar{0})$ ו- $(0.\bar{1}, 0.0\bar{1})$ מתאימים לסדרות $0.11\bar{0}$ ו- $0.10\bar{1}$, אשר מייצגות את אותו המספר בקטע [0,1]". את הטיעון המפריך ניתחנו כך:

טענת הפרכה (מפורשת): ההתאמה שהצעת בין קטע היחידה לריבוע היחידה אינה חח"ע.

נתונים (מפורשים): שתי נקודות בריבוע היחידה שמתאימות לאותה הנקודה בקטע היחידה.

הצדקה (משתמעת): הנתונים מהווים סתירה לטענת חד חד ערכיות ההתאמה.

<u>דוגמה ב' – משוב מפריך מאד לא מפורש</u>

לסטודנט ב' ניתן המשוב "ומה אם $x = 0.000919191\ldots$?" כאן טיעון ההפרכה כולל רק נתונים, ועל הסטודנט להשלים את טענת ההפרכה ואת ההצדקה שלה בכוחות עצמו.

<u>דוגמה ג' – משוב מפריך מפורש באופן חלקי</u>

במשוב לסטודנט ג', המרצה סימן את הטקסט "ההתאמה הינה חח"ע", וכתב "לא נכון, כי הממשיים אינם בהתאמה חח"ע עם סדרות עשרוניות". כאן טענת ההפרכה מפורשת (ההתאמה איננה חח"ע), הנתונים משתמעים (קיימות שתי סדרות עשרוניות שמתאימות לאותו מספר ממשי ב- [0,1]), וההצדקה הושמטה (ייצוגים שונים של מספר מדגימים שההתאמה לא מוגדרת היטב ואיננה חח"ע).

הזדמנויות לעסוק בהבנת ההוכחה

על פי הנתונים שעמדו לרשותנו, הפרכה באמצעות דוגמה נגדית נשענה בעיקר על הבנה מקומית של ההוכחה, והפרכה באמצעות אימפליקציה שקרית (שלא מודגמת כאן) נשענה בעיקר על הבנה הוליסטית. נדון כאן באספקטים של הבנה מקומית.

<u>הבנת המשמעות של מושגים ושל טענות</u>: פיענוח המשוב המפריך עשוי להזמין סטודנטים להתעמת עם המשמעות המדויקת של מושגים מתמטיים כגון התאמה חח"ע, אם בהקשר של דוגמה מספרית ספציפית, ואם בהקשר כללי יותר של הקשר בין התאמה חח"ע והתאמה (הפוכה) מוגדרת היטב.

סטטוס לוגי של טענות והמסגור הכללי של ההוכחה: הפרכה חלקית מזמינה סטודנטים להבין את המסגרת הרעיונית של ההפרכה, ולזהות את התרומה של משפטים שונים במשוב לטיעון המפריך. למשל, בדוגמה ג' לא נאמר במפורש שקיימת דוגמה נגדית או שכדאי לחפש אותה. כמו כן, כאשר ניתנים נתונים ללא טענת הפרכה (דוגמה ב'), על הסטודנט לזהות את תפקיד הדוגמה בטיעון.

הצדקה של טענות: הבנה כזו עשויה להידרש כאשר מרכיב בטענת ההפרכה מושמט או משתמע. בדוגמה ג', על הסטודנט להצדיק כיצד הנתונים תומכים בטענה שההתאמה איננה חח"ע, ובדוגמה ב', לאחר שניסח לעצמו את טענת ההפרכה, על הסטודנט להצדיק כיצד הדוגמה הנתונה תומכת בטענה.

רשימת מקורות

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(2), 125–134.

Byrne, M., Hanusch, S., Moore, R. C., & Fukawa-Connelly, T. (2018). Student interpretations of written comments on graded proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(2), 228-253.

de Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In *Explanation and proof in mathematics* (pp. 205-221). Springer.

Knapp, J. (2005). Learning to prove in order to prove to learn. https://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 205-216.

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3-18.

Miller, D., Infante, N., & Weber, K. (2018). How mathematicians assign points to student proofs. *The Journal of Mathematical Behavior, 49*, 24-34.

Moore, R. C. (2016). Mathematics professors' evaluation of students' proofs: A complex teaching practice. International *Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(2), 246-278.

Pinto, A., & Cooper, J. (2019). Formative assessment of proof comprehension in undergraduate mathematics: Affordances of iterative lecturer feedback. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2630-2637). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Pinto, A., & Karsenty, R. (2018). From course design to presentations of proofs: How mathematics professors attend to student independent proof reading. *The Journal of Mathematical Behavior, 49*, 129-144.

Pinto, A., & Karsenty, R. (2020). Norms of Proof in Different Pedagogical Contexts. *For the Learning of Mathematics, 40*(1), 22-27.

Pinto, A., & Cooper J. (submitted) "This cannot be" – Refutation feedback and its potential affordances for proof comprehension.

Toulmin, S.E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge University Press.

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(4), 463-482.

האם ידע באנליזה יכול להיות בלתי-מספיק לפתרון בעיות בחשבון אינפיניטסימלי? המקרה של נתן

אנטולי קורופטוב, מכללת לוינסקי
ליה נח-סלע, אוניברסיטת תל אביב
דפנה אליאס, אוניברסיטת תל אביב
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

מבוא

אנליזה מול חשבון אינפיניטסימלי

סוגייה מהותית בחינוך מתמטי היא האם מתמטיקה כדיסציפלינה הינה עקבית וקוהרנטית (בפרט רעיונות מתקדמים כגון גבול, נגזרת ואינטגרל)? נדמה כי לא תמיד כך המצב. נשקול למשל את המחלוקת הנודעת בין ניוטון ללייבניץ כטיעון התומך במסקנה זו (Hall, 1920; Meli, 1993; Garber, 2008). כפועל יוצא מכך, חוקרים הציעו להבחין בין שני סוגי חדו"א – אנליזה (Analysis) וחשבון אינפיניטסימלי (Calculus). בעוד שאנליזה עוסקת בחקר פונקציות ובבסיסה גבול, נגזרת ואינטגרל, החשבון האינפיניטסימלי עוסק בכמויות שגודלן משתנה ובבסיסו גדלים אינפיניטסימלים, קצב שינוי והצטברות (Milner & Jiménez Rodríguez, 2021). אם כן, אנליזה היא מתמטיקה תיאורטית, וחשבון אינפינטסימלי הוא מתמטיקה שימושית. אנו טוענים כי ההבדל המהותי בין שני התחומים מוביל לאתגרים דידקטיים. חקר המקרה עליו אנו מדווחים מספק תימוכין אמפיריים לטענה זו.

Collapse Metaphor

ה-collapse metaphor היא מטפורה בה משתמשים לומדים על מנת להסביר ולבאר גבולות בהקשרים גאומטריים (Oehrtman, 2009). המשתמשים במטפורה זו 'מקריסים' את הממד ששואף לאפס, ועוברים לעסוק באובייקט מממד נמוך יותר. כך למשל, מי שעושה שימוש במטפורה כדי להסביר אינטגרל המחשב נפח גוף סיבוב יהפוך את הגלילים האינפיניטסימליים הנסכמים לדיסקות דו-ממדיות. סכימה של דיסקות אלה לדידם תיתן את נפח הגוף.

המחקר

נתן הוא מורה מוערך בחטיבת הביניים ובתיכון המלמד ברמת חמש יחידות לימוד. נתן השלים מספר קורסים אקדמיים באנליזה, והוא מיומן בנושא. נתן התנדב להתראיין במסגרת פרויקט מחקר שמטרתו לזהות את המשמעויות השונות שיש לתלמידים לקצב שינוי ולהצטברות.

ראיון חצי-מובנה עם נתן כלל את המטלות הבאות:

1. הערכת כמות הכסף שנצברה בהינתן גרף תזרים המזומנים (גרף קצב השינוי).
2. חישוב אורכה של עקומה המיוצגת על ידי פונקציה חלקה.
3. מציאת מסתו של חוט דק בהינתן פונקציית הצפיפות.

הריאיון הוקלט ותומלל.

ממצאים

מטלה ראשונה – כסף שנצבר בהינתן גרף קצב השינוי

במטלה זו הוצג לנתן גרף של תזרים המזומנים ביחס לזמן בבנק מסוים במשך שלוש שעות. הוא התבקש לבצע הערכות שונות לגבי כמות הכסף שהצטברה בבנק. מטלה זו, העוסקת בכמויות, צבירה וקצב שינוי בהקשר חוץ מתמטי היא מטלת חשבון אינפיניטסימלי.

נתן סיפק הערכות הולמות ומנומקות להתנהגות כמות הכסף שנצברה בתרחיש זה על ידי אנלוגיה בין כמות הכסף לשטח הכלוא בין הגרף לציר x. אף כי הערכותיו השונות את כמות הכסף היו נכונות, ניכר היה שימוש נרחב ב-collapse metaphor:

נתן: ההיגיון שלי אומר שכאשר Δx שואף לאפס או אפילו שווה לאפס, גודל ה... אני לא רוצה להגיד מלבן. זה קו. אין לו רוחב. הוא פשוט קו. ומכיוון שרוחב הקו הוא אפס, כשנחבר ביחד את כל הקווים האלה אנחנו נקבל את השטח שכלוא מתחת לעקומה.

מראיין: אתה יכול להסביר לי מה זה לחבר קווים?

נתן: לחבר קווים או להצמיד קווים?

מראיין: איך שנח לך.

נתן: לחבר, בעצם לחבר את שיעור y של כל, זאת אומרת לחבר את האורך של כל הקווים, כלומר לחבר את שיעור y של כל הנקודות, כל אינסוף הנקודות האלה.

מראיין: אתה מחבר אינסוף ערכים. איך אתה עושה את זה בפועל?

נתן: בעזרת גבולות ובעזרת אינטגרל על גרף של פונקציה.

כלומר, אינטגרל עבור נתן אינו סוכם שטחים של מלבנים (דו-ממדיים) בעלי רוחב אינפיניטסימלי, אלא סוכם קווים (חד-ממדיים). יתרה מזאת, אצל נתן סכימת קווים משמעה סכימת אורכיהם. לפיכך, אינטגרציה עבור נתן הינה סכימה של ערכי y של האינטגרנד.

מטלה שנייה – הערכת אורכה של עקומה

במטלה זו נתן התבקש לחשב את אורכה של עקומה בהינתן ייצוג אלגברי וגרפי של הפונקציה. במטלה אין הקשר חוץ מתמטי, והיא מתאימה לדיון מתמטי תיאורטי, קרי שאלת אנליזה.

בתחילה נתן עשה שימוש ב-collapse metaphor בכך שאמר "אני רוצה לקחת את כל הנקודות ולחבר אותן אחת לשנייה". כך, הפך נתן את הקטעים החד-ממדיים האינפיניטסימליים אותם עליו לסכום לנקודות חסרות ממד. משנתבקש להבהיר כוונתו, הוסיף נתן:

> אני רוצה לקחת שתי נקודות, לחשב את האורך ביניהן ולשאוף לכך שה-Δx שלהן ישאף לאפס, ואז אני מקבל אורך קטע בודד, והוא הולך להיות לכל זוג נקודות באשר הן על גרף הפונקציה, כאשר אם אני אעשה לזה אינטגרל אני אקבל את האורך של הקטע הזה לאורך גרף הפונקציה.

תחילה, נתן נאבק לפתח את הנוסחה לאורך העקומה. עקב כך, המראיין ביקש ממנו לספק אומדן. אף כי ניתן לצפות שנתן יחלק את העקומה לקטעים קטנים ויחזור על החישוב שתיאר מעלה עבור אורך קטע סופי, במקום זאת הוא סיפק גבול מלמעלה וגבול מלמטה בעזרת משיקים ומיתרים. חרף קשייו הראשוניים, הצליח לבסוף נתן לפתח את הנוסחה עבור המקרה הכללי. אף שייתכן שנתקל בנוסחה במסגרת לימודיו, התנהגותו ותגובותיו במהלך הריאיון מעידות כי לכל הפחות בנה אותה מחדש, ולא דקלם אותה מזיכרון.

מטלה שלישית – מציאת המסה בהינתן צפיפות

במטלה זו, נתן מתבקש לחשב מסה בהינתן פונקציית צפיפות. מטלה זו, בנוסף לכך שהיא משלבת הקשר חוץ מתמטי, עוסקת בכמויות (מסה, צפיפות, מרחק), וההשתנות המשותפת שלהן. כלומר, זוהי שאלה מתחום החשבון האינפיניטסימלי.

אף כי תגובתו המיידית של נתן למטלה הייתה האינטגרל הנכון, בהסבריו הוא לא הבחין בין צפיפות ומסה. כאשר המראיין הזכיר לו את יחידות המידה התעורר אצלו קונפליקט שגרם לו לאבד ביטחון: "אני נכנס לסחרור עם עצמי".

בתגובה לקונפליקט, נתן חזר בו מתשובתו (הנכונה), ובמקומה החליט לחפש פונקציה המייצגת את המסה בכל נקודה. ניסיון זה גרם לו להכריז "כל הביטחון שלי ירד", ולציין כי:

> עניין הצפיפות מול המסה, מאוד, זאת אומרת הוא מבלבל אותי [...] אני לא מצליח להחליט עם עצמי אממ, על מסה בנקודה. מה תהיה המסה של, בנקודה מסוימת. אני רוצה לקחת את הנקודה מסוימת על חוט, ולהביע פונקציה שתתן לי את המסה שם, והפונקציה הזאת תהיה האינטגרל

נתן מבהיר את כוונתו באומרו שאם המסה בכל נקודה נתונה על ידי $g(x)$ אז המסה הכוללת תהיה $\int_0^8 g(x)\,dx$. בחינה של הממצאים מגלה כי טעות זו הינה התגלמות נוספת של ה-collapse metaphor. רצונו של נתן לטנגרל פונקציית מסה כדי לקבל מסה מעידה כי גם כאן, בדומה למטלה הראשונה, הוא מפרש את האינטגרל כסכימה של ערכי האינטגרנד.

דיון

תפיסות ומשמעויות של נתן בנוגע לאינטגרל והצטברות

מושג האינטגרל של נתן מושפע עמוקות מה-collapse metaphor. כפי שהודגם בממצאים, נתן משתמש במטפורה בשלוש המטלות. במטלה של חישוב אורך העקומה נראה כי השימוש במטפורה מטרתו להתמודד עם מושג הגבול. בשתי המטלות האחרות, השימוש במטפורה אף מוביל למסקנה השגויה כי אינטגרציה היא סכימת ערכי האינטגרנד. כלומר, נתן אינו סוכם מכפלות מהצורה $f(x)dx$, אלא את ערכי $f(x)$. לפיכך, נראה כי עבור נתן dx אינו גודל אינפיניטסימלי הכופל את האינטגרנד, אלא סימון שמצביע על שם המשתנה הרלבנטי בלבד. אם כן, נראה כי במקרה של נתן 'הקרסת' הממד של dx משנה גם את משמעותו של dx. ממצאים אלה מעידים כי הוא אינו תופס את האינטגרנד בתור קצב השינוי של הכמות הנצברת, אלא בתור כמות הנצברת עצמה.

אנליזה מול חשבון אינפיניטסימלי

נתן הצליח להגיע לתוצאה נכונה במטלת תזרים המזומנים ובמטלת אורך העקומה, אך נכשל במטלת המסה. אנו טוענים כי המשמעות של נתן לאינטגרל, בשילוב עם ההבדלים בין אנליזה וחשבון אינפיניטסימלי מסבירים זאת. זאת משום שהמשמעויות של נתן לאינטגרל והצטברות אינן כוללות קצב שינוי – מושג מהותי בחשבון אינפיניטסימלי. במטלת אורך העקומה, שהיא מטלת אנליזה ללא הקשר חוץ מתמטי המתמקדת בפונקציות ולא בכמויות, נתן אינו זקוק להתייחס לאינטגרנד כקצב שינוי, ובהתאם הוא מצליח במטלה. במטלת תזרים המזומנים, הצלחתו של נתן מתבססת על אנלוגיה בין כמות הכסף הנצברת לשטח. אנלוגיה זו מאפשרת לנתן לגשר בין הצמדת הקווים באופן חזותי לבין סכימה של אורכיהם, וכך לחמוק מן הצורך לפרש את האינטגרנד כקצב שינוי ואת האינטגרציה כסכימה של מכפלות, משמעות שאינה בהלימה עם המשמעות שלו לאינטגרל. זאת משום שהוא פועל על השטח, במנותק מן ההקשר החוץ מתמטי, ו'מלביש' את ההקשר בדיעבד. לעומת זאת, במטלת המסה אנלוגיה לשטח אינה זמינה לו. ייתכן כי חוסר הזמינות נובע מכך שבמטלה זו, בניגוד למטלת תזרים המזומנים, לא נתון גרף פונקציית קצב השינוי. כך נחשפות עוד יותר תפיסותיו השגויות של נתן לגבי אינטגרציה, והוא לא מצליח להשלים את המטלה.

אחד ההבדלים בין אנליזה וחשבון אינפיניטסימלי הוא שלכמויות הנדונות במסגרת חשבון אינפיניטסימלי יש יחידות מידה, בעוד שהמשתנים והפונקציות בהם עוסקים באנליזה הם חסרי יחידות. השימוש ב-collapse metaphor אינו עקבי עם שימוש ביחידות מידה, ולכן עשוי להוביל לקונפליקט בחשבון אינפיניטסימלי בסבירות גבוהה יותר מאשר יוביל לקונפליקט באנליזה. מכאן שאין זה מפתיע שההבדל ביחידות בין צפיפות ומסה גרם לקונפליקט עבור נתן במטלה השלישית. היחידות השונות הן בסתירה עם משמעותו של נתן לאינטגרל מאחר ועבורו dx אינו מייצג כמות, ולכן חסר יחידות.

הקשר בין ה-collapse metaphor לאנליזה ניכר גם בשפה בה משתמש נתן. כאשר הוא מסביר את המטפורה הוא אינו מתייחס להקשר החוץ מתמטי של המטלה, לקצב שינוי או להצטברות, אלא לפונקציה, לגבול, ולסכומי רימן ודרבו. ממצא זה מעיד כי המשמעות של נתן לאינטגרל נוצרה במסגרת של אנליזה.

לאור כל הכתוב מעלה, אנו טוענים כי נתן מראה מיומנות רבה בבעיות אנליזה, אך מתקשה בבעיות חשבון אינפיניטסימלי. ממצא זה מחזק את הטענה כי שני התחומים נבדלים זה מזה אפיסטמולוגית.

אמנם טענה זו מצריכה תיקוף אמפירי נוסף, אך חשוב לתת את הדעת לסוגיות הדידקטיות הרבות אותן היא מעלה. ראשית, החדו"א הנלמדת בבתי הספר כיום קרובה יותר לאנליזה מאשר לחשבון אינפיניטסימלי. האם זוהי גישה רצויה? האם יש ללמד חשבון אינפיניטסימלי במקום, או שיש ללמד את שני התחומים במשולב?

שנית, לאור השימוש הנרחב של נתן ב-collapse metaphor, נשאלות השאלות עד כמה נפוץ השימוש במטפורה? האם לומדים אחרים המשתמשים בה מפרשים אותה באותה צורה, או אחרת? האם לפרשנויות השונות ל'סכימה של קווים' יש השלכות שונות בביצוע מטלות? באילו מצבים? מהם האתגרים וההזדמנויות שמטפורה זו מעלה?

שלישית נשאלות השאלות, האם קיימת משמעות לאינטגרל והצטברות שתהיה מועילה הן בחשבון אינפיניטסימלי והן באנליזה? אם כן, מה עלינו לעשות על מנת ליצור משמעות זו בקרב תלמידינו? על סמך ממצאינו הראשוניים, אנו משערים כי משמעות הקושרת בין הצטברות מתוך קצב שינוי לבין סכימה של כמויות כפליות עשויה להתאים לשני התחומים.

תודות

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק מספר 1743/19).

מקורות

Hall, R. (1920). *Philosophers at war: the quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge University Press.

Garber, D. (2008). Dead force, infinitesimals, and the mathematicization of nature. In Goldenbaum, U., Jesseph, D. (Eds.). *Infinitesimal Differences: Controversies between Leibniz and his Contemporaries* (pp. 281-306). Berlin, New York: De Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110211863.281

Meli, D. B. (1993). *Equivalence and priority: Newton versus Leibniz*. Oxford University Press.

Milner, F. O. & Jiménez Rodríguez, J. R. (2021). WG: Didactic Contrast between Calculus and Analysis. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala & P. M. Ruiz-Arias (Eds.), *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 171-174). Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(4), 396-426.

הקשר בין אינטגרל ופונקציית הצטברות בעיניו של תלמיד תיכון

ליה נח-סלע, אוניברסיטת תל אביב
אנטולי קורופטוב, מכללת לוינסקי
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב
דפנה אליאס, אוניברסיטת תל אביב

רקע תאורטי

בשנים האחרונות, לקראת כניסתה של תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לחטיבה העליונה, פונקציית ההצטברות, כחלק מתפיסת מושג האינטגרל, זוכה להתייחסות הן בבחינות הבגרות והן מצד מורי המתמטיקה. כניסתו של מושג זה לשיח הכיתתי מעוררת שאלות בדבר המשמעויות שלו בעיני תלמידים, והאופן בו הם מקשרים אותו לשאר הידע שלהם בחדו"א.

מחקר זה מהווה חלק מפרויקט בו אנו בוחנים את המשמעויות שנוצרו אצל תלמידים עבור מושגי היסוד של החדו״א, ובפרט האינטגרל ופונקציית ההצטברות. מחקרים רבים מראים כי הבנתם של תלמידים את מושג האינטגרל היא ברובה פרוצדורלית, וטומנת בחובה לא יותר מיכולת להשתמש בטכניקות נלמדות על מנת לפתור בעיות ספציפיות (Thompson & Harel, 2021). Thompson טוען כי סיבה משמעותית לכך הינה חוסר התייחסות למשמעות בהוראה ובמחקר (2013). לאור זאת, עלתה הקריאה ללמד את נושא האינטגרל בגישה המציבה את רעיון ההצטברות במרכז (Kouropatov & Dreyfus, 2014).

אף כי רעיון ההצטברות מוכר לתלמידים מחיי היום-יום, הם מתקשים לתפוס מהן ה'פיסות' שמצטברות בפונקציית ההצטברות (Thompson & Silverman, 2008). קושי נוסף העשוי לעמוד בפני התלמידים הוא מידור של ידע לגבי אינטגרל. מידור מתרחש כאשר ללומד יש שתי סכמות קוגניטיביות שונות למושג מתמטי יחיד. סכמות אלה יכולות אף להיות בסתירה אחת לשנייה, ולהוביל להתנהגות לא עקבית או לא קוהרנטית של הלומד (Vinner & Dreyfus, 1989). מידור עשוי להיווצר כאשר משתמשים במגוון ייצוגים לאותו מושג מתמטי, כאשר מתייחסים לאותו מושג במספר נושאים מתמטיים שונים, או כאשר משתמשים בהקשרים פנים וחוץ מתמטיים שונים. לפיכך ניתן לשער כי ההתייחסות לאינטגרל הן כאנטי-נגזרת, הן ככלי לחישוב שטח והן כפונקציית הצטברות עשויה לגרום למידור, קרי, להיווצרותן של מספר סכמות קוגניטיביות שונות למושג האינטגרל.

מתודולוגיה

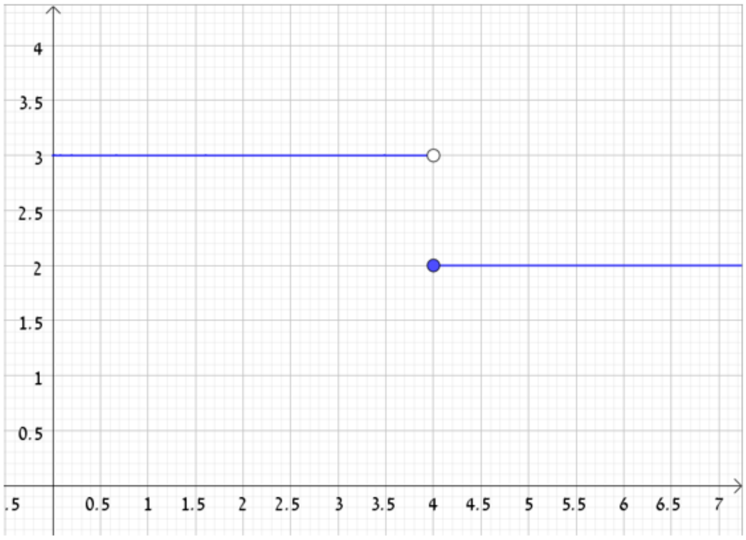
כלי המחקר

במאמר זה נדווח על ממצאים מריאיון מבוסס מטלה עם אורן, תלמיד י"ב הלומד ברמת חמש יחידות לימוד. במסגרת המטלה הוצגה בפני אורן סיטואציה בה לא נתקל בעבר – בקשה לחוות דעה לגבי גרף פונקציית ההצטברות של פונקציית מדרגה (איור 1). הבחירה בפונקציית המדרגה נעשתה משלושה טעמים. ראשית, מי שמתייחס לאינטגרל הנתון בשאלה כהצטברות יצליח לזהות כי על הגרף המתקבל להיות רציף בכל נקודה, בעוד שמי שאינו חושב על האינטגרל כהצטברות יתקשה בכך. שנית, ההתמודדות עם פונקציה שאינה מוכרת מקשה על התלמיד לענות באופן אוטומטי, מעודדת אותו לפקפק בתשובתו ולהתלבט, ובכך מאפשרת חשיפה של המשמעויות האישיות שיש לו. שלישית, מפני שהפונקציה מורכבת משני קטעים בהם ערכה חיובי וקבוע, האלגברה הנדרשת היא טריוויאלית, ולכן המיקוד הוא בהכרח בסוגייה הקונספטואלית שעולה מנקודת האי-רציפות.

איור 1

המטלה שניתנה לאורן במסגרת הריאיון

נתונה הפונקציה $f(x)$ כמתואר בשרטוט:



מספר תלמידים דיברו על הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, כאשר $x \geq 0$ ודנו כיצד יש לשרטט את הגרף שלה.

שאלות המחקר

- איזו משמעות אישית יש לאורן עבור פונקציית הצטברות?
- האם משמעות זו קשורה עבורו לשטח הכלוא בין הגרף לציר x ולאנטי-נגזרת, או שקיים עבורו מידור במושג האינטגרל?

ניתוח הנתונים

הריאיון עם אורן הוקלט ותומלל. על מנת לזהות אילו מהתבטאויותיו מעידות על משמעותו האישית השתמשנו במספר קריטריונים:

שפה ייחודית – כאשר המרואיין משתמש בשפה ומושגים שהוא לא קרא קודם לכן במטלה, ולא שמע קודם לכן מהמראיין, או כאשר ההתבטאויות אינן צפויות עבור החוקר או מפתיעות אותו. התבטאויות אלה לא שודלו או הוצעו על ידי המראיין או המטלה. לפיכך, שימוש בשפה ייחודית מעיד על כך שהאמירה מצביעה על המשמעות האישית של המרואיין.

חזרתיות – כאשר התבטאויות חוזרות על עצמן לאורך המטלה, או במטלות שונות ובהקשרים שונים. החזרה על ההתבטאויות מעידה גם כי הן זמינות למרואיין וגם כי הוא מוצא אותן רלבנטיות, ולפיכך הן חלק משמעותי בתפישתו את הסוגייה המתמטית, וכפועל יוצא מכך, במשמעות האישית שלו.

הסקה – כאשר התבטאויות מופיעות כחלק מתהליך הסקת מסקנות, להצדקה, להסבר או לנימוק. התבטאויות אלה מעידות על תהליך המחשבה של המרואיין, ולפיכך על משמעויותיו האישיות.

הבעת דעה – כאשר ההתבטאות ממוסגרת מפורשות על ידי המרואיין כדעתו או פרשנותו האישית. למשל, התבטאויות הכוללות ביטויים כגון "לדעתי", "אני חושב", "נראה לי", "כמו שאני מבין את זה", תיחשבנה למעידות על המשמעויות האישיות של המרואיין.

ממצאים

במהלך המטלה השתמש אורן בשני ביטויים המתייחסים כביכול לאינטגרלים משני מינים שונים, "אינטגרל צובר" ו"אינטגרל רגיל". ההתייחסות לאינטגרל צובר התחילה מיד כאשר נתקל בביטוי $\int_0^x f(t)dt$, מיוזמתו של אורן, לפני שנתקל כלל באזכור של הצטברות במטלה. לפי אורן, "אינטגרל רגיל זה הפעולה ההפוכה מנגזרת". לעומת זאת, לאינטגרל צובר הוא מציע הסבר אחר:

> אז אינטגרל צובר אני אוהב להסתכל עליו כמו, באיזשהו דימוי למשל לצבירת כסף בבנק. למשל אנחנו צוברים ערכים חיוביים, צוברים, צוברים, צוברים, ובעצם הכמות כסף שיש לנו גדלה. והחל מאיזשהו שלב, במקרה של הפונקציה הזו אנחנו צוברים ערך חיובי, אבל קטן יותר.

עוד נראה כי אורן מקשר בין אינטגרל לשטח – "באמת אינטגרל זה השטח שנתפס מתחת ל... בין ציר האיקס לבין הפונקציה. הפונקציה בעצם מהווה את התקרה שלנו, ציר האיקס מהווה את הרצפה, ומה שבין לבין, זה באמת האינטגרל שלנו". יחד עם זאת, כאשר התבקש אורן להתייחס לאמירה כי האינטגרל $\int_0^x f(t)dt$ "מייצג הצטברות של שטח", תגובתו המיידית הייתה כי "קשה להגיד שאינטגרל צובר מייצג שטח". לפיכך עבור אורן, אינטגרל צובר היא ישות מתמטית נפרדת מאינטגרל רגיל.

אף כי בתחילה אורן טען כי אינטגרל צובר לא צובר שטח, אלא "ערכים", מעניין לראות כי כאשר הוא שוקל מהן 'הפיסות' שמצטברות, הוא נפתח לרעיון כאפשרי, כפי שניתן לראות בהתבטאות הבאה:

> אני באמת חושב, כי מצד אחד, מה שאני צובר כאן, אני מרגיש שאפשר להתייחס אליו נטו כמושג המופשט של ערכי y, אבל מצד שני, מה זה הערכי y האלה? זה בעצם אותן משבצות שאנחנו סופרים מ-0.5 ברוחב ועד 3 באורך, אז באמת אולי אנחנו כן צוברים פה איזשהו שטח.

יתרה מזאת, ההתייחסות לסוגייה שהעלה גורמת לו לנסות לקשר בין אינטגרל צובר לאינטגרל רגיל בעזרת המחשבה על שטח:

> אני חושב שאינטגרל בסופו של דבר הוא צובר שטחים, פשוט פעם אחת כשמבקשים מאיתנו באופן מפורש שטח, אנחנו מתייחסים גם לחלק שמתחת לציר האיקס כשטח חיובי, כי בכל זאת מדובר בשטח, ושטח לא יכול להיות שלילי. אז לכן אני חושב שבאינטגרל בסופו של דבר, באינטגרל רגיל, וגם באינטגרל צובר, כשאנחנו מתייחסים אליו אז שניהם באמת צוברים שטחים.

עם זאת, הקושי בהתמודדות עם שטח שלילי, והקישור של שטח לחישוב המתבצע בבחינות הבגרות מובילים את אורן לנסות ולמצוא טרמינולוגיה חלופית:

> אז פה באמת נכנסת הבעיה של שטח בסופו של דבר הוא... נכון, שטח לא יכול להיות שלילי. אז פה באמת, אז האם לקרוא לזה שטחים? האם ההגדרה של שטח היא מדויקת? כנראה שלא. אז לקרוא לזה שטח לא הייתי קורא לזה, בדמיון שלי, מה שקורה פה, אנחנו צוברים ממש משבצות כאלו. אז שטח לא הייתי קורא לזה, משבצות אולי כן. בגלל זה נתתי את השם ערכים.

דיון

אורן מתייחס במהלך הריאיון לשני סוגים של אינטגרל, "אינטגרל רגיל" ו"אינטגרל צובר". מהתבוננות בממצאים ניתן לראות כי אף שלשניהם שמות דומים וסימון דומה, והלכה למעשה שניהם מתייחסים להיבטים שונים של אותו מושג מתמטי – האינטגרל, מבחינת אורן "אינטגרל רגיל" ו"אינטגרל צובר" מהווים שתי ישויות מתמטיות מובחנות, שבבסיסן מושגים מתמטיים שונים. בעוד שעבורו "אינטגרל רגיל זה הפעולה ההפוכה מנגזרת" ו"אינטגרל זה השטח [...] בין ציר האיקס לבין הפונקציה", כאשר נשאל על "אינטגרל צובר" המושגים פונקציה קדומה ושטח כלל לא נראו לו רלבנטיים – "קשה להגיד

שאינטגרל צובר מייצג שטח". למעשה אורן אף הביא מיוזמתו הקשר חוץ מתמטי על מנת להסביר מהו אינטגרל צובר – "אז אינטגרל צובר אני אוהב להסתכל עליו כמו, באיזשהו דימוי למשל לצבירת כסף בבנק". המשמעויות השונות והמנותקות זו מזו, וההקשרים השונים שבהם הוא מתייחס למשמעויות אלה מעידים על מידור.

עם זאת, כאשר אורן נדרש לשאלה 'מה מצטבר?' במסגרת הקשר פנים מתמטי, לאחר שנחשף לאפשרות שמדובר בשטח, ולמרות שטען בתחילה שאין זה שטח, אלא "ערכים", הוא מצליח להשתמש בטענה שאכן מדובר בשטח על מנת ליצור משמעות חדשה המקשרת בין אינטגרל רגיל ואינטגרל צובר, ובכך, לפחות חלקית, פורץ את המידור במושג האינטגרל – "אני חושב שבאינטגרל בסופו של דבר, באינטגרל רגיל, וגם באינטגרל צובר, כשאנחנו מתייחסים אליו אז שניהם באמת צוברים שטחים".

אף כי משמעות חדשה זו אינה יציבה, ובהיעדר מושג של שטח מכוון אינה מחזיקה מעמד, היא מעידה על החשיבות שבהתייחסות מפורשת ל'פיסות' שמצטברות בהוראת הנושא של פונקציית הצטברות. האופן בו נוצרה משמעות זו מעיד על כך שגישה המתייחסת לפונקציית הצטברות כצבירה של שטחים מכוונים יכולה לסייע לתלמידים ביצירת משמעויות לפונקציית ההצטברות הקשורות בצורה קוהרנטית יותר למושג האינטגרל. עוד כדאי לשים לב, כי ה'פיסות' אליהן מתייחס אורן הן תמיד מנות דיסקרטיות, בעלות גודל סופי, ולא אינפיניטסימלי. תפיסה 'צ'אנקית' (chunky) זו של הצטברות זוהתה במחקר כגורם קושי נוסף עבור תלמידים, שמוביל לטעויות מושגיות וחישוביות (Thompson & Harel, 2021), מה שמדגיש את הצורך בהתייחסות מפורשת ל'פיסות' אלה.

כאמור, המשמעויות השונות שזוהו סבבו סביב ישויות מתמטיות שהופיעו במשמעות אחת ונעדרו מן המשמעות האחרת, אף כי מדובר בהיבטים שונים של אותו מושג - האינטגרל. במרכזו של "האינטגרל הרגיל" היו השטח והפונקציה הקדומה, ובמרכזו של "האינטגרל הצובר" צבירה של ערכים. ניתוק זה מעיד על מידור שקיים אצל אורן במושג האינטגרל. מכאן שגישה מחקרית הבוחנת משמעויות יכולה לסייע בחקר של מידור. הקריטריונים אותם קבענו לזיהוי של התבטאויות המעידות על משמעות אפשרו לנו לזהות גם בריאיון יחיד משמעויות שונות של התלמיד, הקשרים שונים בהם הן מופיעות, ואת הקשרים ביניהן (או היעדרם).

תודות

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק מספר 1743/19).

רשימת מקורות

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM – Mathematics Education*, *46*(4), 533–548.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning… In K. R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 57–93). New York: Springer.

Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 507–519.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection* (pp. 43–52). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356-366.

עץ המימושים ככלי לבדיקת הפוטנציאל החקירתי של משימות באלגברה לינארית

מרים ולך, עינת הד-מצויינים ורם בנד, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

הוראה ממוקדת לומד, שבה התלמידים עובדים בקבוצות, דנים ביניהם ועוסקים בפתרון בעיות משמעותיות הוכיחה את עצמה כיעילה במסגרות בית ספריות אך נחקרה פחות במסגרת האוניברסיטה. במחקר זה, עיצבנו סדנאות שמטרתן לעודד דיונים מתמטיים פוריים בקורס אלגברה לינארית. מחקרים קודמים הראו כי עיצוב מוקפד של משימה מתאימה הינו חיוני לקיום דיונים עשירים ופוריים בכתה (Stein et al., 1996) . לפיכך, הצעד הראשון בבניית שיעורים המעודדים דיון היא עיצוב משימות שיתאימו לכך. מטרת המחקר הנוכחי היא לבחון האם המשימות שהצבנו בסדנאות האלגברה מספקות הזדמנויות משמעותיות ועשירות לדיון וללמידה חקירתית. לצורך כך, עשינו שימוש בכלי הנקרא "עץ מימושים", או RTA (Weingarden et al., 2019) שפותח במקור בכדי למפות השתתפות תלמידים בשיעורי מתמטיקה מבוססי דיון.

רקע תיאורטי

מחקר זה עושה שימוש בתיאוריה הקומוגניטיבית (Nachlieli & Tabach, 2019; Sfard, 2008), בכדי לבחון את הפוטנציאל של המשימה, וזאת בשל סט המושגים האופרציונליים שהיא מציעה סביב למידה והוראה חקירתית ובשל השאיפה שלנו להשיג אחידות תיאורטית בין אפיון המשימה לבין אפיון הלמידה שאמורה להתרחש סביבה. מושג ה"השתתפות החקירתית" מתייחס להשתתפות הרצויה אצל תלמידים בכתה, תוך שהוא מגדיר אותה כהשתתפות שבה התלמידים מראים עצמאות, גמישות בפרוצדורות שהם מפעילים, ובאופן כללי מיקוד במטרה של פתרון הבעיה ולא בהליך שיש לבצע (Nachlieli & Tabach, 2019). קומוגניציה מגדירה למידה כתהליך של אימוץ שיח חדש. תהליך זה מבוסס על "עיצום", בו הלומדים מתקשרים על ידי שימוש בסימונים מתמטיים כייצוג של עצמים קיימים (לדוגמא, cos 45°), ועל "saming" בו הלומדים מחברים בין מימושים שונים של עצמים מתמטיים (לדוגמא, 1 + i ו- $\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}$) (Sfard, 2008). במושגים קומוגניטיביים, תהליך למידה של אלגברה לינארית ניתן להמשגה כתהליך ההיכרות עם מימושים שונים של עצמים מתמטיים (כמו, מטריצות, מערכות משוואות לינאריות, מרחבים וקטורים וכו') וsaming של מימושים שקולים באופן המאפשר התייחסות אליהם כעצמים הקיימים בעולם במנותק מההליכים המבוצעים עליהם.

למידה, על פי התיאוריה הקומוגניטיבית, מתקדמת בשתי רמות: רמת האובייקט, שבה הלומדים מרחיבים את מערך ההיגדים שהם מאמצים על עצמים מוכרים, ורמת-העל, שבה הלומדים נחשפים לעצמים חדשים ומשנים את הרוטינות על פיהן הם מאמצים היגדים בנוגע לעצמים אלו. איחוד של שיחים שונים לשיח-על המכיל מימושים שונים של אותם האובייקטים (למשל, איחוד השיח על ביטויים אלגבריים והשיח על עקומות לכדי שיח על פונקציות) מהווה למידה ברמת-על (Sfard, 2008). באלגברה לינארית, נמצא (במחקרים לא קומוגניטיביים) כי הבנת נושא השקילות של ייצוגים השונים (למשל, קבוצות וקטורים, פתרון של מערכות משוואות ליניאריות, ומטריצה וכו') מהווה אתגר משמעותי ללומדים (Selinski & Rasmussen, 2014). מכך אנו לומדים שדרישה ללמידה ברמת-על וsaming של מימושים שונים ככל הנראה שכיחים מאוד בקורסי אלגברה לינארית. לאור זאת, בבואנו לבדוק את המידה שבה משימות באלגברה לינארית מזמנות השתתפות חקירתית, נבדוק את המימושים השונים לאובייקטים מתמטיים שהמשימה מזמנת וכן את הלמידה ברמת-על הנדרשת בה. כלי יעיל לצורך כך יכול להיות "כלי עץ המימושים" או RTA (Realization Tree Assessment) שפותח במקור על ידי ויינגרדן ושותפיה (2019) בכדי למפות השתתפות תלמידים בשיעורי מתמטיקה

מבוססי דיון. הכלי מתבסס על ההמשגה הקומוגניטיבית המגדירה עצם מתמטי כסימון מתמטי יחד עם כל המימושים האפשריים שלו. מיפוי משימה ביחס לעצם המתמטי המצוי במרכז המשימה, כולל המימושים השונים שלו הזמינים לתלמידים מתוך לימודיהם הקודמים, יכול להאיר את הזדמנויות הלמידה החקירתיות הטמונות במשימה. לאור זאת, וביחס למשימות שפותחו בסדנאות האלגברה הלינארית, שאלנו את השאלה הבאה: מה היו העצמים שנחשפו באמצעות המשימות, המימושים השונים וההזדמנויות לsaming שמשימות אלו מאפשרות?

מתודולוגיה

פיתחנו דיאגרמות RTA עבור שבע משימות אלגברה לינארית. כל משימה כזו עמדה בלב סדנא של שעתיים אקדמיות שתכליתה היה לעודד השתתפות חקירתית ודיון סביב נושאים שנלמדו בהרצאות ובתרגולים הסטנדרטיים בקורס. הסדנאות הוצעו לסטודנטים הלומדים בטכניון בקורסי אלגברה לינארית ברמה מתקדמת.

בניית עץ הRTA התבצעה במספר שלבים. ראשית, הוחלט מהו השורש, שהוא הסימון לעצם העומד בבסיס המשימה. לרוב, שמו של עצם זה תאם את הנושא המרכזי שטופל בקורס באותו השלב, למשל "מטריצות" או "מערכת משוואות ליניאריות". הסימון העומד בראש העץ הוא במידה מסויימת שרירותי, שכן כל המימושים של עצם מתמטי שקולים זה לזה. לפיכך, בחרנו לרוב בשם שניתן לעצם בסילבוס הקורס ו/או בספרי הלימוד. השלב הבא בבניית עץ RTA הוא מיפוי של כל המימושים של העצם המתמטי והקשרים ביניהם. בעצי מימושים ישנם "ענפים" הכוללים מימושים מאותו שיח, לדוגמא רשימות שונות של משוואות לינאריות שקולות. יצירת הקשרים (האנכיים) בין מימושים אלו מתבצעת לרוב בלמידה ברמת האובייקט (Weingarden et al., 2019). בנוסף, ישנם גם ענפים שונים, המייצגים שיחים שונים. לדוגמא, שיח רשימה של משוואות ושיח המטריצות המייצגות. הקשרים בין ענפים אלו (קשרים אופקיים) מהווים את הלמידה ברמת-על. המיון לענפים השונים התבצע תוך התייעצות עם מומחה. למיקום על גבי הענף (אנכית) אין משמעות בעבודה זו, שכן כל המימושים שקולים. דוגמא לעץ עבור העצם "מערכת משוואות לינארית" מוצגת בפרק הממצאים (איור 1).

ממצאים מרכזיים

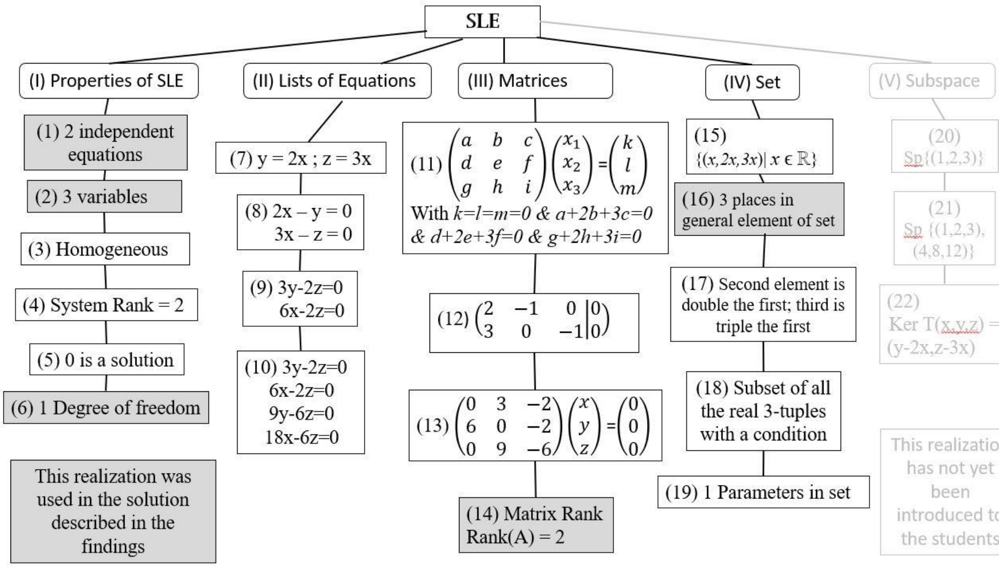
תחילה נדגים כיצד בנינו עץ RTA סביב משימה. המשימה הבאה ניתנה בסדנא שמטרתה היתה העמקה בנושא מערכות משוואות לינאריות (ממ"ל). הסדנא הועברה באמצע הסמסטר, כאשר הסטודנטים כבר נחשפו לנושאים על שדות ,מטריצות וממ"ל-ים, וטרם נחשפו למרחבים וקטורים.

משימה: *מצאו מערכת משוואות לינארית שפתרונה היא הקבוצה* $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

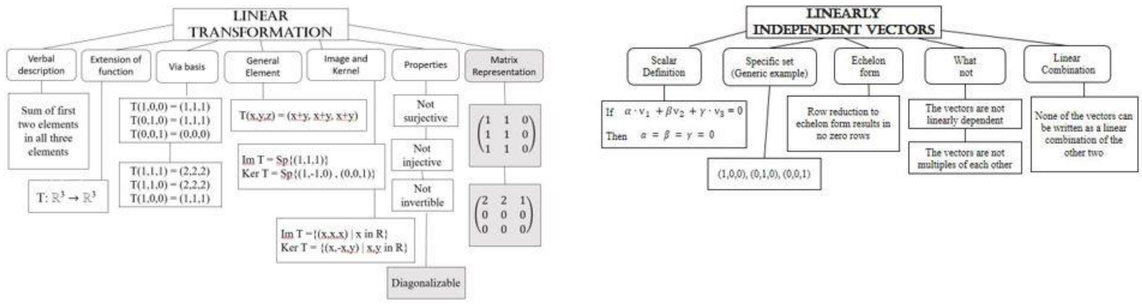
כפי שניתן לראות מניסוח המשימה "מצאו מערכת משוואות ליניאריות ש...", העצם העיקרי שהיא עוסקת בו הוא הממ"ל. לאור זאת, שורש העץ הוגדר כ"ממ"ל". מיפינו את המימושים השונים לממ"ל ואת הקשרים ביניהם. בשיח האלגברה הלינארית יש כמה סוגים של מימושים לממ"ל, אותם ניתן לראות באיור 1. יש מימוש, המוכר לתלמידי תיכון, של רשימת משוואות עם נעלמים. מימוש אחר, אליו נחשפים הסטודנטים בתחילת הקורס, הוא מטריצה מורחבת. ניתן לממש ממ"ל גם על ידי תכונות המערכת, וגם על ידי תכונות של הפתרון. ישנם מימושים אפשריים נוספים שאליהם הסטודנטים טרם נחשפו בשלב זה של הקורס, כגון גרעין של העתקה לינארית. מימושים אלו דהויים בעץ RTA.

בדומה לתהליך שתואר לעיל, בנינו עצי RTA לשש משימות נוספות שהיו בשימוש בסדנאות מבוססות הדיון שלנו . באיור 2 ניתן לראות, ברזולוציה נמוכה, דוגמא לעוד 2 עצי RTA עבור העצם "וקטורים בלתי תלויים" והעצם "העתקה לינארית".

איור 1 - עץ RTA של מערכת משוואות לינארית והמימושים שלו.



איור 2 – דוגמאות נוספות (ברזולוציה נמוכה) לעצי RTA



בעצי הRTA ניתן להבחין שיש בכל משימה לפחות ארבעה ענפים, כלומר בכל משימה היו לפחות ארבעה תת-שיחים של אלגברה לינארית. לפיכך, היו לסטודנטים הזדמנויות רבות ל-saming בין המימושים השונים של העצמים המתמטיים, כמו גם ללמידה ברמת על המאחדת את השיחים השונים.

כעת נדגים חלק של אחד הפתרונות האפשריים למטלת הממ"ל. זאת כדי להראות את האופן שבו הRTA מאפשר למפות את הsaming הנדרש לפתרון המשימה, כמו גם את מעברי השיח ברמת-על (כלומר, קשרים אופקיים משיח לשיח). הפתרון (אחד מיני רבים) מוצג כאוסף היגדים, כאשר כל היגד מתייחס למימוש מסויים של הממ"ל (המספר בסוגריים מצויין את מספר המימוש בתיבות הRTA). המימושים שבהם נעשה שימוש בפתרון מסומנים באיור 1 במלבנים אפורים.

חלק מפתרון אפשרי עבור: מצאו מערכת משוואות לינארית שפתרונה היא הקבוצה $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$:

א. באיבר הכללי של הקבוצה הנתונה יש 3 איברים (16), לכן יש 3 משתנים בממ"ל המצופה (2). **ב**. מספר דרגות החופש של הממ"ל (6) הוא מספר המשתנים (2) פחות הדרגה של המטריצה המייצגת (14). **ג**. לכן דרגת המערכת הוא 2 (14). **ד**. כלומר, יש שתי משוואות בלתי תלויות בממ"ל המצופה (1).

ננתח כעת את המעברים בין השיחים בסדרת ההיגדים הזו. בהיגד (א) יש מעבר בין מימוש משיח על קבוצות (ענף IV בעץ) "*איבר כללי*" לשיח על תכונות של ממ"ל (ענף I) "*3 משתנים*". בהיגד (ב) יש מעבר בין שיח של תכונות של ממ"ל (ענף I) "*דרגות חופש, מספר משתנים*" לשיח על מטריצות (ענף III) "*דרגה של מטריצה*" ואז לשיח על רשימת משוואת (ענף II בעץ) "*2 משוואות בת"ל*". סך הכל, הפתרון דורש מעבר בין ארבעה ענפים של הRTA, כאשר חלק מההיגדים (היגדים א' וב') אף דורשים שימוש בשני ענפים בו-זמנית. לא הצלחנו למצוא אף פתרון אפשרי שאיננו דורש שימוש של לפחות שני ענפים.

לפיכך, נראה כי המשימה דורשת saming בין שיחים שונים. חשוב לציין כי השקילות של שיחים שונים מהווה למידה ברמת-על וככזו, ההנחה היא שסטודנטים נחשפו אליה לפני הסדנא. המשימות אינן מציגות הזדמנות ראשונית ללמידה ברמת-על אלא מתרגלות את ה saming הכרוך בה.

ניתוח פתרונות שונים נוספים, הצביע על כך שכל פתרון למשימה כלל מספר מעברים בין שיחים שונים שניתן היה למפות לRTA. בנוסף, הניתוח העלה כי ניסוח המשימה עצמו רמז למעבר בין שיחים. זאת, משום שהמשימה מנוסחת כך שהחלק הראשון *"מצאו מערכת משוואות לינארית"*, משתמש במלות מפתח מתוך שיח רשימת משוואות (II), בעוד החלק השני "*שפתרונה היא הקבוצה...*" עושה שימוש במילת מפתח מתוך השיח על קבוצות (IV).

דיון

מטרת המחקר הייתה לבחון האם המשימות שהצבנו מספקות הזדמנויות משמעותיות ועשירות ללמידה חקירתית. גילינו שעצי RTA מספקים תמונה ברורה של העצמים מתוך המשימות, כולל מימושיהם השונים של העצמים, יחד עם אפשרות נוחה למיפוי מעברי השיח הנדרשים בכל פתרון. דבר זה מאפשר בחינה לא רק של המידה שבה המשימות *מאפשרות* saming של מימושים שונים אלא גם המידה שבה הן *דורשות* זאת. המחקר הנוכחי מרחיב מחקרים קודמים אודות הגורמים המעורבים במשימות חקירתיות לאלגברה לינארית (Laursen & Rasmussen, 2019). במיוחד, ראינו שמשימות חקירה כוללות את הפוטנציאל למימושים מרובים של העצם המתמטי ושפתרון המשימות כולל מעבר בין שיחים שונים.

מחקר זה מוגבל לשבע משימות מתוך קורס מסוים, ברמה מסוימת (אוניברסיטאית). עם זאת, למחקר מספר תרומות. מבחינה מתודולוגית, ככל הידוע לנו, אנו הראשונים להשתמש בכלי ה- RTA ככלי לבחינת פוטנציאל של משימות. כיוון זה עשוי להתקשר למחקרים על דרישה קוגניטיבית של משימות ולמחקרים על סוגי משימות התומכות בדיון עשיר (Stein et al., 1996). התרומה השנייה היא תיאורטית, בכך שהמחקר עושה צעד לכיוון אופרציונליזציה של תכני הלמידה הנדרשים באלגברה לינארית, תוך חשיפת תהליכי הsaming, עיצום ולמידה ברמת-על הנדרשים בקורס זה, ותוך קישור המשגה הזו לתיאוריה כללית של למידה והוראה (קומוגניציה). לבסוף, המחקר מאפשר לנו להתקדם אמפירית בחשיפת תהליכי למידה חקירתית בסדנאות: לאחר מיפוי הפוטנציאל של המשימות, אנו יכולים כעת לבחון מה קרה בפועל בדיונים בכיתה.

רשימת מקורות

Laursen, S. L., & Rasmussen, C. (2019). I on the Prize: Inquiry Approaches in Undergraduate Mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*(1), 129–146. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00085-6

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2019). Ritual-enabling opportunities-to-learn in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 253–271.

Selinski, N., & Rasmussen, C. (2014). A method for using adjacency matrices to analyze the connections students make within and between concepts: The case of linear algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(5), 550–583.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning : An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *Educational Research Journal*, *33*(2), 455–488.

Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E., & Nachlieli, T. (2019). The realization tree assessment tool – examining explorative participation in mathematics lessons. *Journal of Mathematical Behavior*, *56*(May), 1–13. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100717

ממפה שיח חשבוני (משי"ח) ככלי להערכת השיח של תלמידים על הרצף בין ריטואל לחקירה

עינת הד-מצויינים ואביטל אלבום-כהן, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

מבוא ורקע תיאורטי

להערכה ומיפוי של מיומנויות השיח החשבוני של תלמידים יש מספר יתרונות ושימושים. ראשית, היא יכולה לסייע למורים להעריך את תפקוד התלמיד.ה ביחס לדרישות תכנית הלימודים. שנית, הוא יכול לשמש למחקר, למשל לצורך הערכת האפקטיביות של התערבויות שנועדו לשכלל את השיח החשבוני. קיימים שני סוגים עיקריים של הערכת שיח חשבוני. סוג אחד הוא המבחנים הבית-ספריים הסטנדרטיים (למשל, מבחני המיצ"ב). סוג אחר הוא "אבחונים" המשמשים לרוב להערכת היכולות החשבוניות (או לקויות הלמידה) של תלמידים (למשל, Chinn, 2020). שני הסוגים הללו יעילים עבור מטרות מסוימות. מבחנים בית ספריים יעילים עבור הערכה, מהירה לביצוע באופן יחסי, של ביצועיהם של תלמידים לאחר תקופות הוראה מסוימות (לרוב – שנה לכל היותר). כלים פסיכולוגיים דיאגנוסטים שואפים להעריך יכולות נרחבות יותר (למשל, כלל הידע החשבוני שנלמד במהלך בית הספר היסודי), אך הם לרוב ממוקדים במציאת החסרים – כלומר מה התלמיד לא מסוגל לבצע.

מחקרה של מרים בן-יהודה (Ben-Yehuda, 2003) עשה צעדים ראשונים בהצעה של גישה חלופית להערכת המיומנויות החשבוניות של תלמידים, וזאת, בהסתמך על מה שלימים הוגדרה כגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008). מחקר זה הציע לערוך "פרופיל" של השיח החשבוני של תלמידים. יחד עם זאת, מחקר זה היה ראשוני מאוד מבחינת ההמשגה התיאורטית שבו, הניתוח שהוא הציע היה איכותני בלבד ולא הייתה לשיטה המוצעת בו אפשרות לכמת או להעריך את השיח של התלמידים על רצף ברור. בשני העשורים שחלפו מאז מחקרהּ של בן-יהודה, התיאוריה הקומוגניטיבית התפתחה רבות, ובפרט, התפתח המושג של השתתפות ריטואלית לעומת השתתפות חקירתית. לפי המשגה זו, למידה מתרחשת על ידי תהליך דה-ריטואליזציה של רוטינות, כאשר ההשתתפות הראשונית של הלומד בכל שיח חדש היא ריטואלית, כלומר מכוונת לריצוי או יצירת קשר עם מומחה. בהדרגה, תוך כדי התנסות הולכת וגוברת ברוטינות, בנרטיבים ובמימושים השונים של אובייקטים מתמטיים, השתתפותו של הלומד הופכת לחקירתית יותר, כלומר מכוונת תוצאה (ולא מכוונת תהליך). השתתפות חקירתית זו מאופיינת בגמישות הליכים, קישוריות בין תת-הליכים, ובסוכנות עצמאית (agentivity). לעומת זאת, רוטינות ריטואליות מאופיינות בנוקשות, בהיעדר קישוריות, ובהסתמכות על סמכות חיצונית (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019). לעתים קרובות, התיווך ברוטינות ריטואליות הוא סינטקטי, כלומר הלומד מתייחס לסמלים המתמטיים (למשל, ספרות או אותיות לועזיות) כסימנים שיש לערוך עליהם מניפולציות מוגדרות, ללא התייחסות לעצמים המתמטיים שסימנים אלו מסמלים (למשל, מספרים או משתנים). תהליך למידת המתמטיקה, או הדה-ריטואליזציה של רוטינות, מורכב אם כן מתהליך מתמשך של עיצום (אובייקטיפיקציה) שבו הלומד עובר מלדבר על מימושים שונים (למשל, ½, 0.5 ו"חצי") כמסמנים תהליכים שונים, אל שיח המתייחס אליהם כמסמנים עצם מסוים שקיומו איננו תלוי בתהליך או פעולה כלשהם.

כלי מיפוי השיח של בן יהודה (2003) הסתמך על ראיון בעל פה ובכתב של תלמידים סביב בעיות מתמטיות מגוונות, תמלול השיח שלהם ובחינת מאפיינים שונים שלו. במחקר זה, אנו שואפות לשכלל את הכלי הזה על בסיס ההמשגות העדכניות של תיאוריית הדה-ריטואליזציה. בנוסף, מטרתנו היא לייצר כלי מהימן, שתוצאותיו יאפשרו כימות כך שניתן יהיה למקם את השיח של תלמידים על רצף (או רצפים) של ריטואל וחקירה. שאלת המחקר המנחה אותנו היא כיצד ניתן לאפיין את השיח החשבוני של תלמידים על הרצף בין השתתפות ריטואלית לחקירתית?

שיטה

הכלי המתודולוגי אותו פיתחנו נקרא ממפה שיח חשבוני (משי"ח). פיתוחו התבסס על ניתוח נתונים שניוני של ראיונות חשבוניים שהתבצעו עם 12 תלמידי כתה ז' שערכה המחברת הראשונה בשנת 2008 (Heyd-Metzuyanim, 2011), כחלק ממחקר רחב בו המחברת לימדה את 12 התלמידים הללו בשלוש קבוצות, במסגרת חוץ-בית ספרית, לצורך חקירת ההיבטים הרגשיים והאופן שבו הם משתלבים עם היבטים מתמטיים של הלמידה. 12 התלמידים חולקו ל-3 קבוצות: בעלי הישגים נמוכים, הישגים ממוצעים-גבוהים, ומצטיינים (תלמידי כתת מופ"ת). החלוקה לקבוצות התבססה על דיווחים מבתי הספר של התלמידים וכן על היכרות של מנהלת מרכז הלמידה במסגרתו התבצע המחקר. הראיונות החשבוניים שימשו, במקור, ככלי להיכרות עם רמת השיח המתמטי של התלמידים בהיכנסם למחקר, אך הם מעולם לא נותחו באופן שיטתי. כל הראיונות נערכו באופן אינדיבידואלי על ידי המחברת הראשונה, כאשר התלמידים התבקשו לחשוב בקול רם תוך כדי שהם פותרים את הבעיות. במידה והם לא הצליחו וביקשו עזרה, המראיינת ניסתה לתווך את הבעיה תוך מתן סיוע מינימלי ככל שניתן. הראיונות הוקלטו על ידי שתי מצלמות וידאו. תוצרים כתובים נאספו אף הם.

פרוטוקול הראיון כלל 24 תרגילים מתוך פרוטוקול הראיון של בן-יהודה (2003). התרגילים/משימות (חלקם קצרים מאוד) נבחרו כך שיקיפו היבטים נרחבים ככל הניתן של חשבון הנלמד בבית הספר היסודי, אך כך שאורך הראיון יהיה סביר בישיבה אחת (בין 45-20 דקות). עבור המחקר הנוכחי, שמטרתו הייתה בעיקר פיתוח כלי הניתוח, בחרנו שלוש מטלות לניתוח. מטלות אלו היו: חשב (אם ניתן, בע"פ) 96+7935, 99×25, ו- $9\times\frac{2}{3}$. מטלות אלו נבחרו שכן הן מכסות טווח נרחב יחסית של רוטינות חשבוניות, כולל מניפולציה של מספרים טבעיים באמצעות חיבור וכפל, ומניפולציה של שברים.

הניתוח התבצע על תמלולים מלאים של הראיונות בשני שלבים. בשלב הראשון, חילקנו את רוטינת הפתרון של כל מטלה לתת-מטלות ותת-הליכים (למשל חיבור 96+7935 לרוב כלל מספר תת-רוטינות כגון חיבור 5+6, חיבור 11+8020 וכו'). בשלב שני, קודדנו את הרוטינה (תוך התייחסות גם לתת-הרוטינות) כחקירתית או ריטואלית על פי שמונה מאפיינים. חמישה מהם נלקחו מהספרות על ריטואלים וחקירות: עיצום, גמישות, סוכנות, מיקוד בהליך/מטרה, וקישוריות. הוספנו עוד שלושה מאפיינים: קאנוניות של הליך, קאנוניות של נרטיבים, ותיווך (האם הפתרון נעשה באופן מתווך או לא). השלבים הראשונים של מחוון הקידוד (אשר יודגם בפרק הממצאים) פותחו על ידי המחברת הראשונה והשלישית. לאחר מכן, המחברת השניה למדה את מחוון הקידוד, וקודדה 50% מהנתונים. מהימנות עיוורת על 33% מהנתונים התקבלה ב93% מהקידודים (Kappa 0.87).

ממצאים

מפאת קוצר המקום, נדגים את הקידוד על דוגמה אחת בלבד, של ביצוע מעורב, המאפשרת להדגים הן את ההיבטים הריטואליים והן את ההיבטים החקירתיים.

דוגמה לרוטינה מעורבת (חקירתית וריטואלית) - עדית מחשבת את 99×25

1. עדית: (קוראת את התרגיל, נאנחת): אני מסתבכת עם תרגילים כאלה בדרך כלל
2. מראיינת: או.קי. יש משהו אולי שבכל זאת את יכולה לעשות עם ה..תשעים ותשע? (.) שהוא קרוב מאוד למספר אחר?
3. עדית: מאה (מראיינת: או.קי.). אפשר לעגל את- כאילו ל-- (מביטה במראיינת), לא. קודם כל אני אעגל את זה ל.. עשרים וחמש כפול מאה. אני יכולה לעשות (את זה)? (מראיינת: או.קי.). שזה יוצא אלפיים חמש מאות. (מראיינת: אמהממ) ואז להוריד אחד. אבל— *(חוזרת לדבר על כך שהיא תמיד "נופלת. על זה במבחנים". המראיינת מעודדת אותה להמשיך ולנסות).* אז זה יוצא אלף.. לא. (מוחקת, כותבת 1049) רגע, לא. (מוחקת, כותבת 2499)
4. מראיינת: אלפיים ארבע מאות תשעים ותשע.
5. עדית: זה נראה לי הכי הגיוני

6. מראיינת: אבל לזה נראה לך נכון? (עדית מושכת כתפיים "נראה לי, כן". תוך כדי יש הפרעה מבחוץ). אם אני אגיד את זה כתרגיל של תשעים ותשע פעמים עשרים וחמש, זה יעזור?

7. עדית: (מצחקקת) לא

הביצוע של עדית במטלה זו נקבע על פי התבחינים הבאים: א. שיח מועצם/סינטקטי: בשיח של עדית סביב מטלה זו נמצאו אך ורק אינדיקציות **לעיצום (חקירה)**, ללא תיווך סינטקטי. היא דיברה על 25 כפול 100 כעצמים ("שזה יוצא אלפיים חמש מאות" ו"אני אעגל את זה ל25 כפול 100" [3]). ב. גמישות/נוקשות: הרוטינה **נוקשה (ריטואל)** שכן עדית לא מצאה הליך אחר לכפול 25 ב100, גם כאשר לא היתה בטוחה בתוצאה שלה. ג. סוכנות: ניתן ניקוד **הן לסוכנות והן להסתמכות על סמכות חיצונית (ריטואל וחקירה)**. במקומות מסוימים, עדית מקבלת החלטות עצמאיות ולא מבקשת שום הדרכה (למשל, מחליטה ש1049 זו טעות). במקומות אחרים, היא מבקשת אישור ("אני יכולה לעשות (את זה)?" [3]). ד. מיקוד בהליך/מטרה: אין אינדיקציות שעדית ממוקדת בהליך, ולעומת זאת היא מתייחסת לתוצאה הסופית ("זה נראה לי הכי הגיוני" [5]), לכן ההיבט קודד **כמיקוד במטרה (חקירה)**. ה. קאנוניות של הליכים: **ההליך הכולל של הרוטינה לא קאנוני (ריטואל)** שכן היא מתייחסת לשני ההליכים 1- 100×25 25×99 כשקולים. ו. קאנוניות של נרטיבים – כל תת-הנרטיבים ($25\times 100 =$ $2499 = 2500 - 1$;2500) קאנוניים אך הנרטיב הכולל ($25\times 99 = 2499$) איננו קאנוני. לפיכך קיבלה ניקוד 1 **הן בקאנוניות והן בחוסר-קאנוניות של נרטיבים (ריטואל וחקירה)**. ז. תיווך: הביצוע **מתווך (ריטואל)** על ידי המראיינת המציעה באופן עקיף את הליך הכפל ב100 [2]. ח. קישוריות: כל תת-ההליכים שמבצעת עדית מקושרים זה לזה. יחד עם זאת, ההליך הכולל איננו מקושר למטלה. לפיכך מקבלת ניקוד 1 ו- 1 עבור **קישוריות** (בתת-הליכים) **והיעדר קישוריות** (בהליך הכולל) בו זמנית **(ריטואל וחקירה)**. בסך הכל, אם כן, נמצאו 6 סממנים של ריטואל ו- 5 של חקירה כלומר יחס של 6/5.

טבלה 1 מציגה את סיכום תוצאות קידודי השיח של 12 התלמידים, ב-3 המטלות שנבחנו. הקידודים סוכמו כיחס חקירה/ריטואל (ריטואל במונה, חקירה במכנה), כך שיחס החקירה הגבוה ביותר האפשרי הוא 0/8 ואילו הביצוע הריטואלי ביותר יקבל יחס של 8/0. חלק מהמאפיינים יכלו לקבל קידוד הן כריטואל והן כחקירה. זאת, משום שרצינו להתייחס למצבים שבהם תת-רוטינות חקירתיות בעוד הרוטינה הכוללת ריטואלית (או להפך). כך, מאפייני הסוכנות, קישוריות, וקאנוניות של הליכים ונרטיבים יכלו לקבל קידוד כפול (כלומר 1 לריטואל ו1 לחקירה). לפיכך, יחסים שבהם סכום המונה והמכנה גדולים מ-8 (למשל 7/3 או 5/6) היו אפשריים.

טבלה 1 - יחסי חקירה/ריטואל בשיח החשבוני של 12 התלמידים

תלמיד	**קבוצה**	96+7935	25×99	$\frac{2}{3}\times 9$
דנה	נמוכה	6/4	8/2	7/3
הדס	נמוכה	7/2	לא ניסתה	לא ניסתה
הילה	נמוכה	7/3	7/1	לא ניסתה
נאור	נמוכה	2/6	8/3	4/5
עדנה	ממוצע-גבוה	8/3	6/7	לא ניסתה
עדית	ממוצע-גבוה	0/7	6/5	7/4
דן	ממוצע-גבוה	1/7	7/6	2/6
זיו	ממוצע-גבוה	3/6	3/8	2/6
רם	מופ"ת	0/6	0/8	1/7
גבי	מופ"ת	0/7	0/8	1/7
יורם	מופ"ת	0/7	0/8	0/7
אמיר	מופ"ת	0/7	1/8	0/8

מטבלה 1 אנו גוזרות מספר מסקנות: ראשית, נראה כי הקידוד המוצע תופס טווח רחב של ביצועים במטלות הנתונות, החל מ0/8 ועד 8/2, אך לא נמצא ביצוע ריטואלי לחלוטין, ככל הנראה משום שכמעט בכל ביצוע ישנן תת-רוטינות שיש בהם איזשהו אלמנט חקירתי. שנית, יחסי חקירה/ריטואל תואמים, באופן כללי, את מיקום התלמידים בקבוצות ההישגים, כך שבקבוצת ההישגים הנמוכים נצפים הביצועים הריטואליים ביותר, בקבוצת המופ"ת הביצועים החקירתיים ביותר, ובקבוצת ההישגים הממוצעים-גבוהים הביצועים יחסית מעורבים. ממצא זה נותן תוקף לכלי ומראה כי הוא תופס, ככל הנראה, אלמנטים בשיח של התלמידים שהיו חשובים להצלחתם בדרישות המתמטיקה הבית ספריות. שלישית, למרות ההתאמה הכללית שהוזכרה לעיל, ישנם גם תלמידים שרמת ביצועיהם לא עקבית ובמיוחד הדבר נכון לגבי קבוצת הבינוניים-גבוהים. זאת ועוד, חוסר העקביות הזה לעתים סותר את ההנחה שהשליטה בשיח "מתקדם" יחסית (למשל, שיח השברים) תהיה גבוהה יותר מהשליטה בשיח "בסיסי" יחסית (למשל, שיח הטבעיים). כך, למשל, ביצועו של דן במטלת השברים היה חקירתי בהרבה (1/7) מביצועו את תרגיל הכפל בטבעיים.

דיון וסיכום

הניתוח והממצאים שנציג במחקר זה מאפשרים לתקף את כלי המשי"ח החדש על סמך שלושה אלמנטים: ראשית, הם תואמים באופן כללי את הישגי התלמידים בבית הספר וכן את ההיכרות עם ביצועיהם במחקר האתנוגרפי המתמשך שערכה המחברת הראשונה, כך שתלמידים בעלי הישגים גבוהים ביצעו לרוב רוטינות חקירתיות בעוד התלמידים בעלי ההישגים הנמוכים השתתפו לרוב באופן ריטואלי. שנית, נמצא כי ההתקדמות בציר של ריטואל חקירה תאמה, באופן כללי את התיאוריה הקומוגניטיבית מבחינת התפתחות שיחים מתמטיים, כך שהביצועים באופן כללי בשיח על שברים היו ריטואליים יותר מבשיח על מספרים טבעיים. יחד עם זאת, בהיבט זה נמצאו גם ממצאים מפתיעים כגון תלמיד בעל הישגים גבוהים יחסית שביצע מטלה של כפל שברים באופן חקירתי, אך הביצוע שלו בכפל מספרים טבעיים היה ריטואלי יחסית. הסדירויות והיעדרן סביב התפתחות השיחים של תלמידים יחידים וכן של קבוצות תלמידים (למשל – מתקשים, מתקדמים וכו') מהוות כר פורה למחקרי המשך והבנתן תוכל להוביל להתערבויות חינוכיות מדויקות יותר, במיוחד עם תלמידים בעלי הישגים נמוכים.

תודות

המחקר המדווח נתמך על ידי הקרן הלאומית למדע, מענק מס' 744/20.

מקורות

Ben-Yehuda, M. (2003). *Using discourse analysis to investigate arithmetical thinking processes of students with learning difficulties* (Unpublished Dissertation). Haifa: Haifa University

Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevsky, L., & Sfard, A. (2005). Doing wrong with words: what bars students' access to arithmetical discourses. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(3), 176–247.

Chinn, S. (2020). *More trouble with maths* (3rd ed.). Routledge.

Heyd-Metzuyanim, E. (2011). *Emotional aspects of learning mathematics - how the interaction between identifying and mathematizing influences the effectiveness of learning* (Unpublished Dissertation). Haifa: University of Haifa.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 153–176.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press.

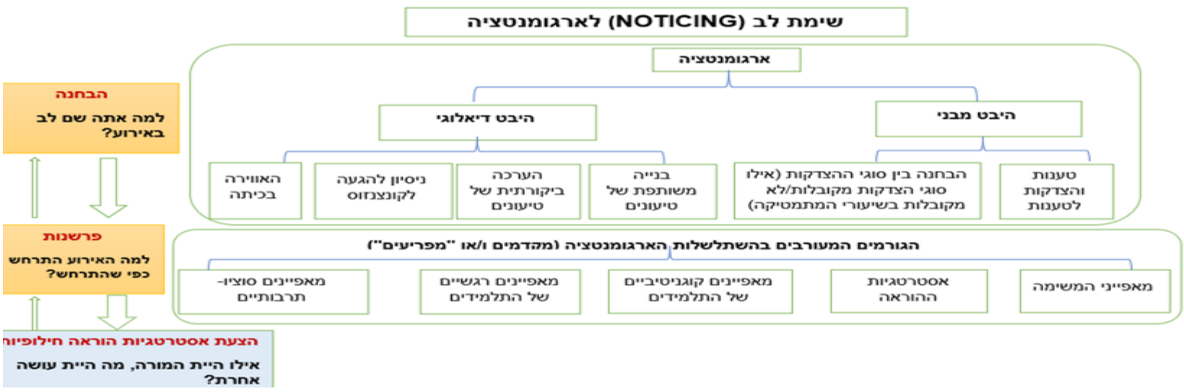
שינוי בשימת הלב (NOTICING) לארגומנטציה בקרב מורים למתמטיקה בעל-יסודי בעקבות השתתפות בסבב הערכת-עמיתים

סמאהר נעמה, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

פרספקטיבה תאורטית

בשנים האחרונות הולכת וגוברת החשיבות שניתנת לשילוב ארגומנטציה בשיעורי המתמטיקה. ארגומנטציה היא "פעילות מילולית, חברתית ורציונאלית, שמטרתה לשכנע מבקר סביר בקבילותה של עמדה על ידי הצבת אוסף של הצעות המצדיקות טענה או מפריכות אותה" (van Eemeren & Grootendorst, 2004, p. 1). לארגומנטציה שני היבטים מרכזיים: מבני ודיאלוגי (McNeill & Pimentel, 2010). ההיבט המבני מתמקד בטענה המוצעת ובהצדקה הניתנת לה; ובהקשר שלנו, בהתאמה לסוגי ההצדקות המקובלים בכיתה (Yackel & Cobb, 1996). ההיבט הדיאלוגי קשור באינטראקציה הנוצרת בין המשתתפים כשהם מעלים טיעונים, מגיבים ומעריכים זה את רעיונותיו של זה (Mueller et al., 2012). ההיבט הדיאלוגי כולל ארבעה מרכיבים: בנייה משותפת של טיעונים, הערכה ביקורתית של הטיעונים, אווירה מכבדת בכיתה וניסיון להגיע לקונצנזוס. על פי מחקרים, יש חמישה גורמים עיקריים המשפיעים על השתתפות התלמידים בארגומנטציה בשיעורי המתמטיקה: מאפייני המשימה, אסטרטגיות ההוראה, מאפיינים קוגניטיביים ואפקטיביים (רגשיים) של התלמידים ומאפיינים סוציו-תרבותיים (e.g., Staples, 2014; Yackel & Cobb, 1996). (איור 1, צד ימין).

איור 1. פרספקטיבה תיאורטית לארגומנטציה בכיתת המתמטיקה ומרכיבי שימת הלב (NOTICING) לארגומנטציה



מחקרים הראו שהשתתפות של תלמידים בפעילות ארגומנטטיבית שדורשת מהם לאתגר רעיונות שונים או להצדיק אותם, להעלות השערות ולהעריך עמדות חלופיות, מקדמת הבנה וחשיבה עמוקה (Asterhan & Schwarz, 2016). למרות זאת, העיסוק בארגומנטציה בשיעורי מתמטיקה אינו רווח (Umland & Sriraman, 2020), ומורים מתקשים לשלב ארגומנטציה בכיתה (Staples et al., 2014). המחקר הנוכחי ניגש לעניין זה. המחקר הוא חלק מפרויקט נרחב ששם לו למטרה לפתח שימת לב לארגומנטציה בקרב פרחי הוראה ומורים למתמטיקה. מיומנויות שימת לב נחשבות למרכיב מרכזי במומחיות מורים למתמטיקה ובהוראה ממוקדת-תלמידים, והן כוללות: (1) הבחנה באירוע/היבט מסוים של סיטואציה כיתתית; (2) מתן פרשנות לאירוע; (3) הצעת אסטרטגיות הוראה חלופיות (Jacobs et al., 2010).

קונטקסט המחקר

המחקר נערך במסגרת קורס אוניברסיטאי לקראת תואר שני בחינוך מתמטי. במסגרת זו נדרשו הסטודנטים לנתח אירועים (cases) כיתתיים ארגומנטטיביים כתובים שהובאו כדיאלוג שהתרחש בכיתה. אירוע כיתתי ארגומנטטיבי הוא אירוע בעל פוטנציאל ללמידה על ארגומנטציה, המספק למורים הזדמנויות להבחין בהיבטים מבניים ודיאלוגיים של ארגומנטציה. כמו כן הוא מאפשר להם להציע פרשנויות מנקודות מבט שונות להשתלשלות הארגומנטציה באירוע ולהתייחס לגורמים המקדמים ארגומנטציה או מעכבים אותה. הקורס כלל שלושה סבבים בני שלושה מפגשים כל אחד (סך הכול 5 שעות) של הערכת עמיתים לניתוח האירועים. בכל סבב היו חמישה שלבים: (1) הכנת דוח על ניתוח

של אירוע (עבודה אישית) תוך מילוי הנחיות הקשורות לשלוש המיומנויות של שימת לב לארגומנטציה: הבחנה בהיבטים המבני והדיאלוגי של ארגומנטציה, מתן פרשנות להשתלשלות הארגומנטציה באירוע ולגורמים המעצבים אותה והצעת אסטרטגיות הוראה חילופיות (איור 1, צד שמאל); (2) הערכה (בקבוצה קטנה) של הדוחות שכתבו העמיתים על ידי שימוש במחוון שפותח על ידינו ומשקף מדרג של רמות שימת לב לכל אחת מהמיומנויות; (3) העברת המשוב לעמיתים; (4) קבלת המשוב מהעמיתים; (5) עידון/שיפור של דוח ניתוח האירוע לאור המשוב שהתקבל (עבודה אישית). בחירתנו באסטרטגיות של הערכת עמיתים נעשתה בשל הפוטנציאל שיש בה ללמידה אפקטיבית (Ayalon & Wilkie, 2020).

במאמר זה אנחנו מתרכזות בשינוי שחל בשימת הלב של מורים לארגומנטציה בעקבות השתתפותם בפעילות של הערכת עמיתים שהתמקדה בניתוח אירוע ארגומנטטיבי. האירוע שנותח התרחש בשיעור בכיתה ט שבו התקיים דיון על פתרון בעיה העוסקת בנוסחאות הכפל המקוצר (האירוע, המחוון ודוגמה לשימוש במחוון יוצגו בכנס).

שאלות המחקר

1. האם בעקבות התנסות באסטרטגיות של הערכת עמיתים חל שינוי בשימת לב לארגומנטציה בקרב מורים למתמטיקה בעל-יסודי, ואם כן – מהו?

2. אילו גורמים קידמו את השינוי בשימת הלב לארגומנטציה אצל המורים או עיכבו אותו, מנקודת מבטם?

המשתתפים

עשרים ושלושה מורים למתמטיקה בכיתות על יסודי. ההשתתפות במחקר הייתה במסגרת קורס שהתמקד בארגומנטציה בהוראת המתמטיקה, כחלק מלימודיהם לתואר שני בחינוך מתמטי באחת האוניברסיטאות הגדולות בישראל.

איסוף נתונים

(1) דוחות על ניתוח האירוע: כל מורה הגיש/ה דוח בשלב הראשון של סבב הערכת העמיתים ודוח נוסף, משופר, בשלב החמישי. סך הכול הוגשו 46 דוחות, ואלו היו מקור הנתונים העיקרי לאפיון של מיומנויות שימת הלב לארגומנטציה אצל המורים ולזיהוי השינוי במיומנויות הללו בעקבות השתתפותם במעגל הערכת עמיתים (שאלה 1). (2) ראיונות אישיים מובנים למחצה עם 10 מורים. הראיונות נערכו כחודש וחצי לאחר סיום הקורס. בראיונות התבקשו המורים להסביר את ממצאי מנקודת מבטם (שאלה 2) בהתאם לשאלות מנחות: מה את/ה רואה בממצאי המחקר? האם ממצאי המחקר הגיוניים בעיניך? האם יש ממצאים שמפתיעים אותך? מהם? מדוע? כיצד לדעתך אפשר להסביר את הממצאים? אילו גורמים לדעתך קידמו את השינוי בשימת הלב של מורים או עיכבו אותו? מהן נקודות הדמיון וההבדלים בין הניתוח הראשוני שלך לאירוע לבין הניתוח המעודן לאחר תהליך הערכת עמיתים? מה גרם לדמיון ולהבדלים הללו? המורים התבקשו להסביר את תשובותיהם ולתת דוגמאות ממהלך התנסותם.

ניתוח נתונים

שאלת המחקר הראשונה – הניתוח כלל שלושה שלבים עיקריים: (1) שימוש במחוון המשקף מדרג של רמות של שימת לב (noticing levels) לכל אחת מהמיומנויות להערכת דוחות ניתוחי האירוע שהגישו המשתתפים בשלב הראשון של מעגל הערכת העמיתים (pre-test); (2) שימוש באותו מחוון לניתוח הדוחות המשופרים שהוגשו בשלב החמישי של הפעילות, בעקבות הערכת העמיתים (post-test); (3) שימוש במבחנים א-פרמטריים למדגמים תלויים (עקב כך ששימת הלב נמדדה בסולם סדר) לבחינת השינוי בשימת הלב ביחס לכל אחד מההיבטים הקשורים לארגומנטציה, בהתבסס על ההערכה שהתקבלה בשני השלבים הקודמים: מבחן McNemar's עבור בחינת השינוי במיומנות הבחנה של המורים בהיבט המבני של ארגומנטציה משום היותו משתנה דיכוטומי ומבחן Wilcoxon Signed-Rank עבור בחינת השינוי במיומנות הבחנה של המורים בהיבט הדיאלוגי של ארגומנטציה, במיומנויות הפרשנות והצעת אסטרטגיות הוראה חלופיות.

שאלת המחקר השנייה – ניתוח הראיונות התמקד בחקירת הגורמים אשר תרמו לשינוי בשימת ליבם לארגומנטציה. לשם כך תמלילי הריאיון נותחו באופן פרשני ומעמיק (Creswell, 2007) באמצעות קידוד אינדוקטיבי, שורה אחר שורה, תוך חיפוש תיאורים של אותם הגורמים. הניתוח כלל מספר איטרציות של מיון הנתונים והשוואה בין הנתונים לקטגוריות המתפתחות ובין הקטגוריות עצמן.

ממצאים

שאלת המחקר הראשונה. נמצא הבדל מובהק ביחס לשימת ליבם של מורים בכלל ההיבטים הקשורים לארגומנטציה (טבלה 1). יוצאת דופן היא ההבחנה בהיבט המבני של הארגומנטציה: כלל המשתתפים הצליחו להבחין בטיעונים שעלו באירוע ולהבחין בין סוגי ההצדקות והאיכות שלהם כבר בניתוח הראשוני שלהם (test statistic=2, df=1, p=.500).

טבלה 1.

תוצאות מבחן Wilcoxon Signed Rank עבור Pre- and Post-Assessment ואחוז המורים שניכרה אצלם עלייה במדרג של רמות שימת לב לארגומנטציה

מיומנויות שימת הלב	היבטים שונים של ארגומנטציה	Z	P	אחוז המורים שניכרה אצלם עלייה במדרג של רמות שימת לב לארגומנטציה
הבחנה	בנייה שיתופית של טיעונים	2.46	.016	30
	הערכה ביקורתית של טיעונים	2.46	.016	30
	ניסיון להגיע לקונצנזוס	2.53	.016	26
	אווירה בכיתה	2.27	.031	30
פרשנות	מאפייני משימה	2.84	.002	43
	אסטרטגיות הוראה	2.12	.034	22
	מאפיינים קוגניטיביים של תלמידים	2.58	.01	35
	מאפיינים רגשיים של תלמידים	2.87	.002	43
	היבטים סוציו-תרבותיים	3.12	<.001	52
הצעת אלטרנטיבות		3.21	.001	52

ממצא חשוב נוסף הוא כי בשני הניתוחים התייחסו המורים למאפיינים רגשיים של תלמידים ומאפיינים סוציו-תרבותיים פחות מאשר לשאר ההיבטים.

שאלת המחקר השנייה. בניתוח הראיונות העלו תשע תמות, מהן שש הקשורות בשיפור שימת ליבם של המורים לארגומנטציה בעקבות השתתפותם במעגל הערכת עמיתים ושלוש הקשורות להיעדר שיפור. שש התמות הקשורות בשיפור הן: (1) ההשתתפות בדיון הקבוצתי בהערכת ניתוח של עמיתים תרמה לחשיפה לנקודות מבט שונות ביחס למתרחש באירוע; (2) ההשתתפות בדיון תרמה לזיהוי פרטים חדשים באירוע הקשורים לארגומנטציה; (3) ההשתתפות בדיון תרמה לפיתוח גמישות במתן פרשנות; (4) המשוב לעמיתים תרם להבחנה טובה יותר בין רמות שימת הלב שהופיעו במחוון; (5) קבלת המשוב תרמה להבחנה בחוזקות ובחולשות במיומנויות של שימת הלב שלהם לארגומנטציה; (6) ההשתתפות בדיון וקבלת משוב העלו את המוטיבציה של המורים לחפש ולנתח את ההיבטים השונים של ארגומנטציה באירוע. שלוש התמות הקשורות להיעדר שיפור בשימת ליבם של המורים הן: (1) האירוע הכתוב עצמו, על האפשרויות הטמונות בו ועל מגבלותיו, הובילו להתייחסות להיבטים מסוימים הקשורים בארגומנטציה יותר מלאחרים; (2) תפיסות המורים לגבי החשיבות של ההיבטים השונים לעיצוב ארגומנטציה הובילו להתייחסות להיבטים מסוימים יותר מלאחרים; (3) חוסר ביטחון עצמי של המשתתפים ביחס למתן פרשנות להיבטים מסוימים הגביל את פרשנויותיהם.

דיון

ממצאי המחקר מספקים ראיות לשינוי בשימת הלב לארגומנטציה בקרב מורים למתמטיקה בחינוך העל-יסודי בעקבות השתתפותם בתהליך הערכת עמיתים. הגם שעיצוב המחקר מקשה לקבוע באופן נחרץ מהו חלקו של תהליך הערכת העמיתים בשינוי, ממצאי המחקר המבוססים על נקודת מבטם של המורים עשויים ללמד על כך. על פי תגובות המורים, נראה כי נתינה וקבלה של משוב עמיתים תוך שימוש במחוון להערכת ניתוח האירוע הארגומנטטיבי, הנחשב כלי חשוב בהערכה מעצבת יעילה (Swan & Burkhardt, 2012), תרמו לשיפור בשימת ליבם לארגומנטציה. מחקרים שהתמקדו בהערכת עמיתים ככלי ללמידה הראו כי הערכה של עבודות של לומדים אחרים מאפשרת להתרחק מהעבודה ולהעריכה באופן אובייקטיבי. כך גם החשיפה למגוון של עבודות מאפשרת להבין טוב מהי עבודה איכותית, ומקדמת כך את יכולתם של הלומדים לאתר בעיות בעבודה שלהם ולהגות רעיונות לשיפורה (Topping, 1998). לדעת המורים הגורמים שהפריעו להם יותר מכול לשפר את שימת הלב

להיבטים מסוימים של לארגומנטציה הם העובדה שלא הכירו את התלמידים שהשתתפו בשיעור וכן האמונות שלהם בנוגע לארגומנטציה, ובפרט האמונה שלהם שמאפיינים רגשיים והיבטים סוציו-תרבותיים פחות חשובים מהיבטים אחרים בעיצוב הארגומנטציה. ואכן, מחקרים מראים כי לידע ואמונות יש השפעה על שימת הלב של מורים (Meschede et al., 2017). כמו כן יש לציין כי לדעת המורים שני היבטים אלה פחות באו לידי ביטוי אירוע.

ממצאי מחקר זה מספקים עדות לפוטנציאל של אסטרטגיית הערכת עמיתים כסוג של גירוי חיצוני (Clarke & Hollingsworth, 2002) לפיתוח שימת הלב של מורים להיבטים מרכזיים של ארגומנטציה, שהיא מטרה מוערכת, אך קשה להשגה (Asterhan & Schwarz, 2016). בכך ממצאי המחקר תורמים לספרות המחקר המתמקדת בפיתוח של למידה מקצועית. שימוש באירועים ארגומנטטיביים ומעורבות באסטרטגיות הערכת עמיתים בלמידה עשויה לסייע למורים לשים לב להיבטים השונים של ארגומנטציה. אחת המגבלות של המחקר היא שאיננו יודעים אם השינוי שנוצר בעקבות מחזור אחד של תהליך הערכת עמיתים יישמר לאורך זמן, ועל כן נמשיך לחקור זאת כחלק מהפרויקט הנרחב יותר.

רשימת מקורות

Asterhan, C. S. C., & Schwarz, B. B. (2016). Argumentation for Learning: Well-trodden paths and unexplored territories. *Educational Psychologist, 51*(2), 164-187.

Ayalon, M., & Wilkie, K. J. (2020). Investigating peer-assessment strategies for mathematics pre-service teacher learning on formative assessment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*(4), 399–426.

Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, *18(*8), 947e967.

Creswell, J. W. (2007). Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202.

McNeill, K. L., & Pimentel, D. S. (2010). Scientific discourse in three urban classrooms: The role of the teacher in engaging high school students in argumentation. *Science Education, 94*(2), 203 – 229.

Meschede, N., Fiebranz, A., Möller, K., & Steffensky, M. (2017). Teachers' professional vision, pedagogical content knowledge and beliefs: On its relation and differences between pre-service and in-service teachers. *Teaching and Teacher Education*, *66*, 158-170.

Mueller, M., Yankelewitz, D., & Maher, C. (2012). A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. *Educational Studies in Mathematics, 80*, 369-387.

Staples, M. (2014). Supporting student justification in middle school mathematics classrooms: *Teachers' work to create a context for justification*. CRME Publications 4. Retrieved from: http://digitalcommons.uconn.edu/merg_docs/4.

Swan, M., & Burkhardt, H. (2012). A designer speaks: Designing assessment of performance in mathematics. *Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education, 2*(5), 1–41.

Topping, K. J., & Ehly, S. (Eds.). (1998). *Peer-assisted learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Umland, K., & Sriraman, B. (2020). Argumentation in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 63-65). Springer

van Eemeren, F. H., & Grootendorst, R. (2004). *A Systematic Theory of Argumentation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4)*,* 458-477.

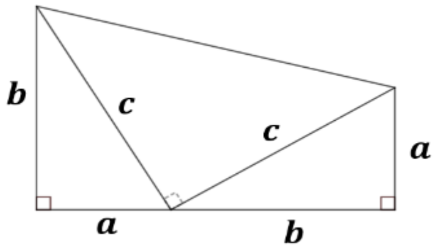
עיצוב הוכחות ללא מילים ללימוד הוכחות בקרב תלמידי תיכון

נדב מרקו, האוניברסיטה העברית, מכללת דוד ילין
אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית
ברוך שוורץ, האוניברסיטה העברית

מבוא

בפעילות "הוכחות ללא מילים" (הל"ם) (Proof-Without-Words-based activities) תלמידים מקבלים הל"ם כמשאב למידה, כמו זו המופיעה באיור 1 (להלן "ההל"ם של גרפילד"; מעובד על פי Nelsen, 1993 עמ' 7). הם מתבקשים לגלות את ההוכחה עליה רומז השרטוט במסגרת עבודה קבוצתית ולאחר מכן כל תלמיד מתבקש לכתוב ולהגיש הוכחה מפורטת כמידת יכולתו. מחקר זה מבקש לנצל את הפוטנציאל הפדגוגי של הל"ם (Marco, Palatnik & Schwarz, 2021) לקידום למידת הוכחות בקרב תלמידי תיכון. הממצאים המוצגים כאן לקוחים משלוש שנות מחקר עיצוב על פעילות הל"ם. אנו מדווחים על האופן בו ההל"ם עצמן עוצבו באופן איטרטיבי כדי לשפר את תוצרי ההוכחות הכתובות של התלמידים. ממצאי מחקר זה מנוסחים כחמישה עקרונות עיצוב (Van den Akker, 2013) שהובילו לשיפור משמעותי באיכות ההוכחות הכתובות של התלמידים.

איור 1
פעילות הוכחה ללא מילים: "גלו יחד את ההוכחה עליה רומז השרטוט. לאחר מכן על כל אחד מכם יהיה לרשום את ההוכחה באופן עצמאי."



$$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{c^2}{2} + 2 \cdot \frac{ab}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

רקע תיאורטי

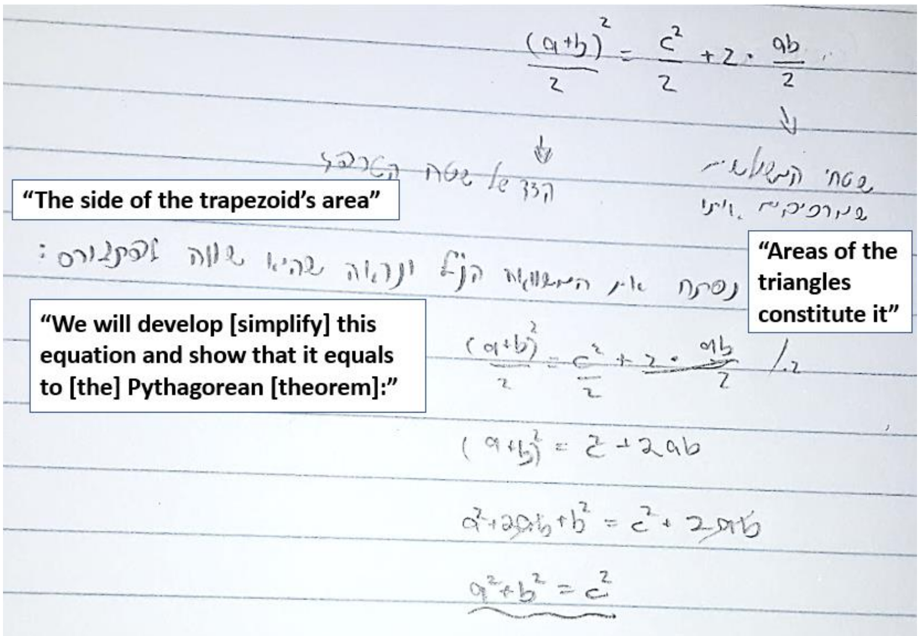
פעילות הוכחות ללא מילים (הל"ם) בקרב תלמידי תיכון

להוכחות ויזואליות עדויות עתיקות מתולדות המתמטיקה של יוון, הודו וסין (Nelsen, 1993). החל משנות השבעים הל"ם החלו להופיע באופן קבוע בכתבי עת אמריקאים כמו *Mathematics Magazine* ו- *The College Mathematics Journal* הפונים לקהל קוראים של מתמטיקאים. כאשר מתמטיקאי מתבונן בהל"ם הוא יכול בקלות יחסית לפתח הוכחה על ידי ביצוע פעולות מנטליות שונות כמו תרגום מידע ויזואלי לטענות מילוליות, העלאת השערות, בניית טיעונים והצדקתם תוך שימוש במשפטים מוכרים. אך האם הל"ם נגישות לתלמידי תיכון באותה מידה שהן נגישות למתמטיקאים מנוסים? או במילים אחרות, האם תלמידי תיכון יכולים לפתח הוכחה בהתבסס על הרמזים הוויזואליים הניתנים בהל"ם? במחקר קודם מצאנו שהתשובה לכך איננה חיובית באופן חד משמעי (Marco et al., 2021). מצד אחד, מצאנו שתלמידים שעבדו בקבוצות על הל"ם הצליחו לגלות את הרעיון המרכזי של ההוכחות הנרמזות בשרטוט. מצד שני, ההוכחות אותן התלמידים רשמו היו דלות וחסרו פרטים כמו הצדקות שונות, תיאור תהליך הבניה או הצגת טיעון מכליל. איור 2 מציג תוצר הוכחה כזה של תלמיד, אשר ניתן להניח כי רוב אנשי החינוך המתמטי לא יחשיבו כהוכחה תקפה למשפט פיתגורס.

אם כן, שמנו לנו כמטרה לעצב מחדש את ההל"ם של גרפילד כך שתגרום לתלמידים לכתוב הוכחות מפורטות ותקפות יותר.

איור 2

ניסיון הוכחה של תלמיד המתבסס על ההל"ם של גרפילד



תורת הפערים כמסגרת תיאורטית לניתוח ההוכחות הכתובות של התלמידים

מקורה של תורת הפערים בתחום של ביקורת הספרות (Perry & Sternberg, 1986). תיאוריה זו רואה בכל טקסט מערכת של פערים אותם הקורא משלים באופן פעיל תוך כדי תהליך הקריאה, על מנת ליצור את תמונת המציאות של הטקסט. במאמר קודם הצענו את תורת הפערים לניתוח טקסטים של הוכחות במתמטיקה (Marco et al., 2021). הגדרנו פער כפיסת מידע חסרה בטקסט המתמטי שהינה הכרחית ליצירת הבנה מלאה של טקסט ההוכחה בעיני קורא מסוים (תלמיד, מורה או מתמטיקאי). כמו כן, הגדרנו השלמת פער כהוספת מידע לטקסט ההוכחה בידי הקורא. לדוגמא: באיור 1, הקשר בין הדיאגרמה למשוואה העליונה איננו מצוין בשרטוט ועל כן מהווה פער. באיור 2, התלמיד כותב שהמשוואה מייצגת שטחים של הצורות המרכיבות את הדיאגרמה (טרפז ושלושה משולשים) – זוהי השלמת הפער. מהגדרות אילו ברור שכל תוספת או הסרה של מידע מטקסט הוכחה עשויה להשפיע באופן משמעותי על תהליך הקריאה של אותו טקסט.

שאלת המחקר

כיצד ניתן לעצב מחדש את ההל"ם של גרפילד כך שתגרום לתלמידים לייצר הוכחות יותר מלאות?

מתודולוגיה

היות ואין בנמצא מחקר אמפירי על פעילות הל"ם בקרב תלמידי תיכון בחרנו במתודולוגיה של מחקר עיצוב חינוכי (Bakker, 2018; Van den Akker, 20). גישה מחקרית זו מאורגנת במחזורי עיצוב הכוללים תכנון פעילות חינוכית לאור מטרות מוגדרות מראש, בדיקת הפעילות עם תלמידים, ניתוח הפעילות ועיצוב מחדש לאור הממצאים. ביצענו ארבעה מחזורי עיצוב (להלן איטרציות) אך דיווח מחקר זה איננו בא לפרט על כל כולן אלא על התוצרים המרכזיים של תהליך זה – על הגרסה החדשה להל"ם של גרפילד ועל השפעותיה על ההוכחות הכתובות של התלמידים. על כן, נתמקד בהשוואת ניסיונות ההוכחה של התלמידים באיטרציה השנייה, בה התלמידים עבדו על ההל"ם של גרפילד בגרסה המופיע

באיור 1, ובאיטרציה הרביעית בה עבדו על גרסה שעוצבה מחדש בהתבסס על חמשת עקרונות העיצוב שפיתחנו.

השימוש בתורת הפערים לניתוח ההוכחות הכתובות של התלמידים

האיטרציה הראשונה של מחקר העיצוב היתה איטרצית גישוש במסגרתה בדקנו כיצד 17 תלמידים עבדו עם ההוכחה של גרפילד. על בסיס הממצאים של איטרצית גישוש זו, יצרנו רשימה של תשעה פערים אותם ציפינו מהתלמידים לזהות ולהשלים באיטרציות הבאות של המחקר (ראו טבלה 1). בכל הוכחה של תלמיד סימנו 1 אם הפער הושלם, 0 אם הפער לא הושלם ו-0.5 אם הפער הושלם בצורה חלקית, או רק זוהה והושלם בצורה לא מדויקת. עבור כל פער יצרנו מדד בשם GFR (gap-filling rate) - הממוצע של ציוני השלמת הפער בקרב כלל התלמידים בכל איטרציה.

טבלה 1

רשימת הפערים אותם ציפינו מהתלמידים לזהות ולהשלים בכתיבת ההוכחות

#	תיאור של השלמת הפער
G1	ניסוח ברור של מה נתון ומה צריך להוכיח
G2	תיאור פעולות הבניה שיצרו את הדיאגרמה
G3	הצדקת היותם של שני המשולשים הצדדיים חופפים
G4	הצדקת היותו של המשולש האמצעי ישר זווית
G5	הצדקת היותה של הצורה כולה טרפז ישר זווית
G6	קישור הדיאגרמה למשוואה על ידי שימוש במושג השטח
G7	התאמת חישובי השטחים של המשולשים והטרפז בשרטוט למשוואה
G8	פישוט המשוואה והסקת הטענה אותה צריך להוכיח (ש- $a^2 + b^2 = c^2$)
G9	הסבר מדוע כל התהליך מהווה הוכחה כללית למשפט פיתגורס

שמנו לב כי הפערים המוצגים כאן הם מסוגים שונים: G1 ו- G9 הם פערי מסגרת שכינינו פערי הכללה (generality gaps), G2 הוא פער בנייה (constructional gap), G3, G4 ו-G5 הם פערי הצדקת תכונות של צורות (justification of figure's properties) ו- G6, G7 ו- G8 הם פערי הרעיון המרכזי (key-idea gaps). כבר באיטרציה הראשונה נוכחנו לגלות שהתלמידים השלימו את פערי הרעיון המרכזי ולא השלימו את פערי ההכללה ופערי הבנייה.

משתתפים

באיטרציה השנייה של המחקר השתתפו 37 תלמידי כיתות י' משתי הקבצות 5 יחידות מאותו בית ספר. באיטרציה הרביעית השתתפו 72 תלמידי כיתות י' מבית ספר אחר, לפני החלוקה להקבצות לימוד.

ממצאים - חמשת עקרונות העיצוב והגרסה החדשה להל"ם של גרפילד

אחרי שלושה מחזורים של מחקר עיצוב ניסחנו חמישה עקרונות עיצוב (Van den Akker, 20) שהובילו ליצירת הגרסה החדשה של ההל"ם של גרפילד המוצגת באיור 3, מימין. עקרונות העיצוב הם:

שמירת גילוי הרעיון המרכזי –שינויים המתבצעים בטקסט ההל"ם צריכים להבטיח את המשך גילויו של הרעיון המרכזי בהוכחה.

אבחנת תנאי המשפט – על הדיאגרמה להציג את תנאי המשפט המוכח באופן שונה מכל פרט אחר בבנייה ובהוכחה. זאת בכדי לעזור לתלמידים לזהות מה נתון בשרטוט.

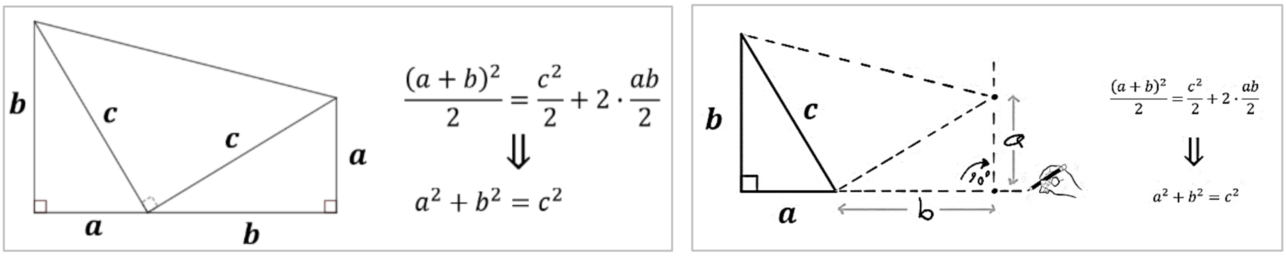
הצגת הבניה – על הדיאגרמה להראות את דרך הבניה של השרטוט.

אי סימון תכונות של צורות – על הדיאגרמה לרמוז לתכונות מסוימות מבלי לסמן אותן, באופן שאיננו מעורר ספק.

הנכחת פעילות אנושית – הצגת הדיאגרמה וההוכחה כתוצר של פעילות אנושית מכוונת.

איור 3

משמאל - הגרסה הראשונה של ההל"ם של גרפילד. מימין - הגרסה החדשה.



מצאנו שאחוז גבוה יותר של תלמידים שעבדו על הגרסה החדשה השלימו את הפערים G2, G3, G4 ו-G5 בהשוואה לאחוז התלמידים שהשלימו את אותם פערים בגרסה הראשונה. למשל, ה-GFR של G4 (מדוע המשולש האמצעי ישר זווית) בגרסה החדשה היה 0.5 (N=72) אל מול 0.18 בגרסה הראשונה (N=37 ; p<.001, effect size .756). ה-GFR של G2 (תיאור הבניה) בגרסה החדשה היה 0.34 אל מול 0.02 בגרסה הראשונה (p<.0001, effect size .887).

סיכום

ממצאי מחקר זה מדגישים את חשיבותם של פערים בטקסט המתמטי. פערים נותנים הזדמנות לפעילות השלמת פערים (gap-filling) בה שוזרים התלמידים את הידע המתמטי שלהם במידע המוצג בטקסט לצורך יצירת הוכחה שלמה ותקפה יותר. בפעילות הוכחה ללא מילים, הפערים בטקסט הדיאגרמטי הם משמעותיים עד כדי כך, שהתלמידים נדרשים ממש *לגלות* את ההוכחה ולא רק להשלים אותה. גילוי ההוכחה חשוב לפיתוח תחושת מסוגלות ובעלות על הידע.

זהו מחקר אמפירי ראשון שנעשה על פעילות הל"ם בקרב תלמידי תיכון. עקרונות העיצוב והשפעתם על ההוכחות הכתובות של התלמידים מלמדים כי לעיתים טקסט המציג פחות מידע מוביל תלמידים להתעמקות והשלמת פערים (השמטת סימון תכונות של צורות). לעומת זאת, לפעמים הוספת מידע לטקסט, כמו תיאור הבניה, מאפשר לתלמידים לכתוב תיאור מפורט יותר. חמשת עקרונות העיצוב עודם בגדר השערה תיאורטית וזקוקים לתיקוף ובחינה מחודשת עם הל"ם אחרות ובתחומים שונים שאינם גיאומטריה (Van den Akker, 2013). יחד עם זאת, אנו מאמינים כי עקרונות אילו מהווים נקודת מוצא טובה להמשך החקירה האמפירית של פעילות הל"ם במתמטיקה תיכונית ואף בהכשרת מורים.

רשימת מקורות

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers.* Routledge.

Marco, N., Palatnik, A., & Schwarz, B. B. (2021). Mind the gaps: gap-filling in proving activities. *For the Learning of Mathematics 41*(2), 21-25.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking* (No. 1). MAA.

Perry, M., & Sternberg, M. (1986). The King through Ironic Eyes: Biblical Narrative and the Literary Reading Process. *Poetics Today, 7*(2), 275-322.

Van den Akker, J. (2013). Curricular development research as specimen of educational design research. In *T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), Educational design research. Part A: An introduction* (pp. 53–70). Enschede, the Netherlands: SLO.

טיעון מעוגן גוף בהוראת גיאומטריה במרחב: משימות בנייה וחקר של מודלים מוחשיים

אליק פלטניק, האוניברסיטה העברית בירושלים

מבוא ורקע תיאורטי

מבחינה היסטורית, מקורותיה של גיאומטריה כדיסציפלינה מתמטית מעוגנות בפרקטיקה יום-יומית, המשרתת הקשרים אישיים, חברתיים ומקצועיים כגון חקלאות, אדריכלות, וניווט. עם זאת, בעוד שבני אדם חיים ופועלים במרחב תלת-ממדי ונמצאים באינטראקציה מתמדת עם אובייקטים בעלי נפח, גיאומטריית המרחב מוצגת לתלמידים באמצעים דו-ממדיים וייצוגים "שטוחים" (Alsina, 2010). לתלות זו יש מחיר. ישנם קשיים אובייקטיביים במשימות של גיאומטריה במרחב בצורתן הנוכחית, שדורשת מעבר מדו- לתלת מימד (Widder, Berman, Koichu, 2019).כמו כן, מחקר של פוג'יטה ושות' (Fujita et al, 2020) מתעד את הביצועים הלא מספקים של תלמידים בגאומטריה מרחבית.

חוקרים מתחומים שונים טענו שאם תלמידים יתחילו ללמוד גיאומטריה תוך הסתמכות וניצול של כל החושים שלהם, נוכל לשפר את היחסם למקצוע ואת ביצועיהם (Freudenthal 1971; Thompson, 2013). למידה עם המחשות פיזיות לא זרה לגאומטריה ויש לה היסטוריה רבת שנים. כבר עבודות הקלאסיות של רוסו ופרובל תמכו ב"עבודה עם הדבר עצמו". במאה 19 המתמטיקאים גספר מונג' ופליקס קליין קידמו גישה לפיתוח האינטואיציה אודות מבנים מורכבים באמצעות בניית מודלים מוחשיים (Mueller, 2001). בכל זאת, לאחר למעלה מ -60 שנות מחקר אמפירי על השימוש בהמחשות בכיתות מתמטיות, טרם נקבעו השפעותיהם הקוגניטיביות וטרם נמצאו שיטות אופטימליות להוראה (Bartolini Bussi et al., 2010).

למידה מעוגנת גוף—הטיעון הקוגניטיבי

התפנית של חשיבה מעוגנת גוף במדעי הקוגניציה יכולה להוות עוגן תיאורטי ומסגרת קונצפטואלית שעד כה היו חסרים לביסוס של פעילויות עם המחשות פיזיות בהוראה/למידת גיאומטריה בכל הרמות. חשיבה מעוגנת גוף דוחה את ההפרדה מוח-גוף ומדגישה כי התפיסה והפעולה שזורות ומשפיעות על התהליכים המחשבתיים. קוגניציה היא פעילות רב חושית וממוקמת בהקשר סביבתי (למשל, Chemero, 2013). תפקידו של המוח אינו לייצג את הסביבה באופן מדויק אלא לעסוק בה באופן דינמי מול דרישות מתגלות בהדרגה של משימות חברתיות-ביולוגיות והתנהגויות קונטקסטואליות. הסביבה מציעה הזדמנויות לפעולה פוטנציאלית - affordances (Gibson, 1986) - שהאדם מבחין ומשלב באופן אינטראקטיבי. אנחנו לומדים על העולם בו אנו פועלים עם בני אדם אחרים, אשר חולקים איתנו את תפיסותיהם כלפי מצבים משותפים, ומתאמים איתנו את פעולותיהם (Goodwin, 2018).

מחקר המוצג בהצעה זו בודק את אימוץ הגישה של למידה מעוגנת גוף להוראת גיאומטריה במרחב. גישה זאת משלבת עקרונות שונים שהתבססו בחקר הוראת הגיאומטריה: מידול רב מימדי (Herbst et al., 2017), כגון עבודה עם דגמים בקנה מידה שונה; עקרון של דקונסטרוקציה Mithalal & Balacheff ,2019) כאשר הדרך לפתרון תלויה בפירוק של אובייקט לרכיבים; רב-מודאליות של למידה (Abrahamson et al., 2020) ובניה אקטיבית של דגמים (רוזנסקי ופלטניק, 2021). כמו כן גישה זאת דורשת שינוי פרדיגמטי מדעות אידיאליסטיות לריאליסטיות וממודל חשיבה המפריד בין תפיסה, קוגניציה ופעולה למודל של חשיבה מעוגנת גוף שתיארנו לעיל. שאלת המחקר העיקרית היא: אילו מאפיינים של פעילות מעוגנת גוף עוזרים לתלמידים לפתור בעיות גיאומטריה מרחבית?

מתודולוגיה

על מנת לגבש עקרונות עיצוביים של פעילויות מעוגנות גוף בגיאומטריה במרחב, וגם לקדם את התיאוריה של למידה מעוגנת גוף נערך מחקר עיצוב (Design-Based Research ,Bakker, 2018).

בגישה מחקרית זו נערכים מחזורי עיצוב הכוללים תכנון פעילות חינוכית לאור התיאוריה המתגבשת ומטרות מוגדרות מראש, בדיקת פעילות זו עם תלמידים, ניתוח הפעילות ועיצוב מחדש לאור הממצאים. כמו כן, ממצאי המחקר מובילים לעדכון של התיאוריה לקראת האיטרציה הבאה של מחקר. הגישה האנליטית שאימצנו הינה של חקר מקרים מרובים (Stake, 2013).פעילות עם כל קבוצה היא חקר מקרה שמחולק לאפיזודות באופן כרונולוגי: שלבים בביית הדגם, ניסיונות לענות על שאלות תכונות גאומטריות של הדגם ועוד. כאשר כל אפיזודה נבחנת באמצעות ניתוח פעולות, מחוות, אמירות של תלמידים בדרך לפתרון של המשימה כפרטים וכקבוצה. לאחר מכן, אותה פעילות נבחנת בהשוואה בין קבוצות שונות על מנת להבחין בשינויים ודמיון בין הקבוצות.

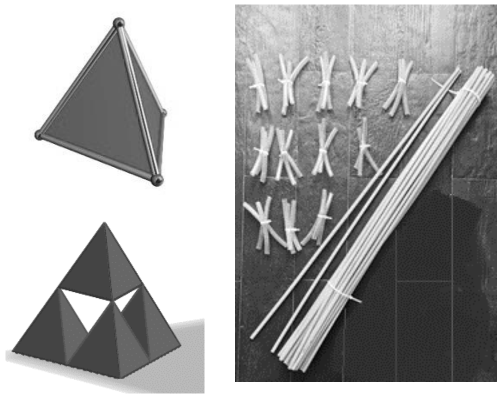
בכנס ירושלים הקודם דיווחנו על האיטרציה הראשונה של המחקר שכללה בניית דגמים גאומטריים באמצעות עט לשרטוט תלת-מימדי. בהצעה זאת נדווח על מחקר מקרה אחד בו השתתפו ארבעה תלמידי כיתת ז' של בית ספר במרכז הארץ. מדובר באיטרציה השלישית של המחקר.

הבניית ארגומנטים מעוגני גוף—מחוות, פעולות ושימוש בסביבה

נביא כאן תיאור של פעילות מתמטית שהייתה חלק מהפרויקט המחקרי "גיאומטריה פנימה והחוצה" (Benally et al., 2021). יאלי, תמי, נמי וגלי (שמות בדויים),ארבעה תלמידי כיתות ז', בנו גופים גיאומטריים (איור 1) ולאחר מכן ענו על השאלות הבאות: "פי כמה הנפח של הארבעון השני גדול מנפחו של ארבעון הראשון? תסבירו את התשובה שלכם. הארבעון הגדול מורכב מכמה ארבעונים קטנים. האם תוכלו לתאר צורה תלת ממדית כלשהי ביניהם? האם תוכלו לבנות אותה?"

איור 1

המשימה והחומרים לפעילות בניית ארבעונים



1) עליכם לבנות מודל תלת מימדי של הגוף הגיאומטרי הבא באמצעות ערכת בנייה. לגוף יש את המאפיינים הבאים:

- כל הפאות הם משולשים שווי צלעות חופפים
- מספר זהה של מקצועות יוצא בכל קודקוד.

2) הפאון שבניתם נקרא ארבעון. בנו פאון דומה שמקצועותיו גדולים פי 2 מהמקורי. אתם יכולים להשתמש באיור המצורף לבנייה.

לאחר שהקבוצה בנתה את הפירמידה הקטנה הראשונה, הניח יאלי אותה על ראשו (איור 4 א). נמי, שהשתמשה ביאלי כ"מעמד", במחווה עם כפות ידיה השטוחות סימנה את ארבעת פאותיה של הפירמידה ואמרה שהפאון הזה נקרא "ארבע-און". לאחר מכן, כשהסירה את הפירמידה מעל ראשו של יאלי, נמי סימנה באופן דומה, הפעם עם זרועותיה, לחברותיה את אותן ארבע פאות (איור 4 ב).

איור 2

שימוש במחוות ובאמצעים זמינים כפי שהם באים לידי ביטוי בפעולות התלמידים

א	ב	ג	ד

לתלמידים לקח כ-11 דקות עבודה שיתופית לבנות את המודל הגדול ולהתחיל לענות על השאלות. התוכנית שלהם לאמוד את נפחו של הארבעון הגדול הייתה לפרק אותו לחלקים המרכיבים אותו. הם

הבדילו בקלות והכירו בארבע ארבעונים קטנים: "שלוש בבסיס ואחד למעלה." עם זאת, התלמידים לא היו בטוחים לגבי צורת החלל התלת ממדי בין הארבעונים (תמניון המתואר באדום באיור 4 ג).

תמי, נמי וגלי הציעו שהחלל זה הוא גם ארבעון. יאלי לא הסכים והציע לספור את פאותיו של "המקום הריק." הוא סובב את הדגם הגדול, בתקווה להפוך אותו למוכר יותר, אך פעולה זו לא הועילה (יש לציין שלמספר קבוצות אחרות האסטרטגיה של סיבוב כן הועילה). תמי השיבה, "אתה פשוט לא יכול לראות את זה (ארבעון)". כדי לתמוך בטענתה, תמי גיבשה את האסטרטגיה הבאה – היא לקחה שני דפי נייר מהשולחן (דפים שהיו שם במקרה ולא תוכננו לשמש חלק בהתערבות) וניסתה להניח אותם על פאות הפאון בציפייה שיסתכמו בארבעה. יאלי מיד ניצל את האסטרטגיה של תמי, רק כדי להפריך את הטענה שלה. הוא לקח יותר דפים וחילק אותם לכל חברי הקבוצה. למעשה הוא יצר "תמנון של ידיים" כדי לכסות בו זמנית את כל פאותיו של הפאון אותו הם חקרו. הכנסת אובייקטים עזר אלה סייעה לתלמידים לגבש (תרתי משמע) את הצורה (איור 4 ד), לספור את הפאות ולבסוף לכתוב את ההגדרה הבאה: "לפאון שבין ארבעה משולשים (פירמידות) יש שמונה פאות זהות. כל פאה היא משולש שווה צלעות".

אפיזודה זו המחישה את הופעת הטיעונים מעוגני פעולה של התלמידים באמצעות התפתחות סמיוטית שיתופית של מחוות לתקשורת קונקרטית (ראה Arzarello, & Robutti, 2010). ידיהם של התלמידים, דגמים, חלקי הדגמים ואפילו אובייקטים שלא צפינו שימוש בהם מראש (כמו דפי נייר), הפכו להיות מכשירים לעיצוב והגדרה של הגוף אותו תלמידים חקרו. ה"חלל הריק" הבלתי מוגדר הפך בהדרגה לאובייקט שאפשר להצביע אליו, לנהל עליו שיח מתמטי, להגדיר את חלקיו ולאחר מכן נתפש על ידי כל חברי הקבוצה כגוף תלת מימדי מוגדר בצורה חד-משמעית וניתנת לביקורת והמשך חקירה.

לבניה ההדרגתית של הדגם היה תפקיד חשוב בתהליך הגלוי של התמניון הנסתר. תהליך הבניה יצר מטרה ברורה ומשותפת לכל חברי הקבוצה וגם צורך לתקשר. תלמידים במו ידיהם חיברו את מפרקי סיליקון (קודקודים) לקצוות של דיבלים מעץ (מקצועות) ולבסוף אחדו אותם יחד כפאות של הפאון. כך היה להם קל לעקוב לאחר היווצרות של הגוף התלת מימדי מתוך היררכיה של אובייקטים מממד 0—נקודות, מימד 1—קטעים ומימד 2—פאות. באופן זה תהליך הבניה הכין למעשה את הפעולה של דקונסטרוקציה (Mithalal and Balacheff, 2019) ההכרחית לפתרון הבעיה הגיאומטרית (במרחב). ללא הקדמה של בניה הצורך בדקונסטרוקציה לא ברור ואלול להיות מלווה בחוסר ודאות.

למחוות התלמידים היה תפקיד מכריע בהצלחת המשימה. אצל כל חברי הקבוצה המחוות התפתחו ממחוות הצבעה פשוטות—"prospective indexical" (Goodwin , 2018) אל מחוות מעצבות צורה (עם כפות ידיים שטוחות וזרועות) ולבסוף למחוות מורכבות שיתופיות שכללו שימוש בדפי נייר. כמו כן, במהלך הפעילות תלמידים סובבו את הדגם, נכנסו לתוכו (לפחות בצורה חלקית) וכך יצרו לעצמם ולשותפיהם למשימה מגוון של נקודות מבט ואפשרויות לפעולה (Gibson, 1986) אשר בלתי אפשרי ליצור בפעילות עם דיאגרמה דו מימדית או בקנה מידה קטן.

דיון

הצעה זאת נועדה להציג יסודות תיאורטיים וטיעונים אמפיריים למכלול משאבים ללימודי גאומטרית המרחב בחטיבת ביניים שאפשר לסווג כמשאבים מעוגני גוף, תנועה ופעולה. שיערנו שמשימות שבהן התלמידים בונים אובייקטים תלת-ממדיים כחלק אינטגרלי מפעילות חקר גאומטרית הן יותר מ"עבודה עם המחשות פיזיות". ניתן לראות בהן אפשרות לתלמידים, מורים ומפתחים להתגבר על התלות ההיסטורית של החינוך לגיאומטריה במדיה דו-ממדית נעוצה במסורת אפלטונית אידיאליסטית ובמודל הקוגניטיביסטי הייצוגי. הממצאים של ניתוח איכותני של האפיזודה מראים שלתלמידים יכולות טבעיות לתפיסה רב-מודאלית ופעולה שיתופית (ללא התערבות ישירה של מורה). בחקר מקרה זה הדגמנו כיצד קבוצת תלמידי חטיבת הביניים ביססה מושגים גיאומטריים של גופים תלת ממדיים, פאות, מקצועות וקודקודים בפעילות ממוקמת בהקשר הסביבתי וממוקדת מטרה של בניית מודלים תלת-ממדיים. יש לציין שהמעבר בין סוגים של ויזואליזציות שונות (non)iconic visualization התבצע כאשר התלמידים הכניסו אלמנט עזר מוחשי (דפי נייר כפאות) למודל התלת-ממדי. לפיכך, התלמידים ביצעו פירוק אינסטרומנטלי של צורה, פירוק צורני (mereologic) של צורה תלת מימדית לארבעה טטרהדרונים וצורה לא מוכרת, ולבסוף פירוק ממדי (dimensional deconstruction) של צורה תלת מימדית, אשר מיקד את תשומת ליבם על הפאתיו הדו-מימדיים של תמניון (ראו Palatnik & Sigler,

2021, לדיון תיאורטי על בניית עזר כשינוי תשומת לב). טיעון אקטיבי זה הפך מאוחר יותר לניסוח נורמטיבי של מאפיינים ולהגדרה פורמלית של גוף גיאומטרי.

רשימת מקורות

Abrahamson, D., Nathan, M. J., Williams-Pierce, C., Walkington, C., Ottmar, E. R., Soto, H., & Alibali, M. W. (2020). The future of embodied design for mathematics teaching and learning [Original Research]. *Frontiers in Education, 5*(147).

Alsina, C. (2010). Three-dimensional citizens do not deserve a flatlanders' education. In Z. Usiskin, (Eds.), *Future curricular trends in school algebra and geometry* (pp. 147-154). Information Age.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2010). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 730-759). Routledge.

Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers.* Routledge.

Bartolini Bussi, M. G., Taimina, D., & Isoda, M. (2010). Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI. *ZDM, 42*(1), 19–31.

Benally, J., Palatnik, A., Ryokai, K. & Abrahamson, D. (2021). Charting our embodied territories: Learning geometry as negotiating perspectival complementarities. *Manuscript under review.*

Chemero, A. (2013). Radical embodied cognitive science. *Rev. of Gen. Psychology*, 17(2), 145-150.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3(*3/4), 413–435.

Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S., & Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education. Research Journal, 32*, 235–255.

Gibson, J. J. (1986). *The ecological approach to visual perception*. Psychology Press.

Goodwin, C. (2018). *Co-operative action*. Cambridge University Press.

Herbst, P., Fujita, T., Halverscheid, S., & Weiss, M. (2017). *The learning and teaching of geometry in secondary schools: A modeling perspective*. Routledge.

Mithalal, J., & Balacheff, N. (2019). The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(2), 161–176.

Palatnik, A. & Sigler, A. (2021, July). *Introduction of an auxiliary element as a shift of attention*. [Paper presentation]. ICME14, Shanghai, PRC.

Rosenski, D. & Palatnik, A. (2021). Secondary students' experience using 3D pen in spatial geometry: affective states while problem solving. *Paper submitted to CERME12, TWG4*.

Stake, R. E. (2013). *Multiple case study analysis*. Guilford press.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning…. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 57–94). Springer.

Widder, M., Berman, A., & Koichu, B. (2019). An a priori measure of visual difficulty of 2-D sketches depicting 3-D Objects. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(5), 489–528.

בניית מודלים בהנדסת המרחב וצילום עצמי של שימוש בהם

עטרה שריקי, סמינר הקיבוצים – המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאמנויות
דורית פטקין, מכללת לוינסקי לחינוך

מבוא והקשר המחקר

יכולות מרחביות נחשבות כיום כמנבאות הצלחה בתחומי המדע, הטכנולוגיה, ההנדסה והמתמטיקה (STEM), כאשר יכולות מרחביות ברמה נמוכה עשויות להסביר את הקשיים שיש ללומדים בתחומים אלה ואת ההימנעות מעיסוק בהם בחייהם הבוגרים (Stieff & Uttal, 2015). מסקר הספרות שבוצע על-ידי אוטאל וחוב' (Uttal, Meadow, Tipton, et al., 2013) עולה שמיומנויות מרחביות ניתנות לשיפור משמעותי באמצעות אימון מתאים. בניסיון לבחון היבטים הנוגעים למאפייניו של אימון יעיל, ביצענו סדרה של מחקרים שבהם לקחו חלק סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי והעל-יסודי (Patkin, Shriki, & Barkai, 2019; Shriki, Barkai, & Patkin, 2017; Shriki & Patkin, 2021). מהמחקרים הללו עלתה, בין השאר, התרומה המשמעותית שיש לשילוב השימוש במודלים כחלק בלתי נפרד מאימון שנועד לשיפור המיומנויות המרחביות. אכן, לשימוש במודלים מוחשיים מיוחסים יתרונות רבים, בהיותם מקשרים בין הייצוג החיצוני של אובייקטים מתמטיים מופשטים לבין מוחו של הלומד (Jones & Rzekaki, 2016). יחד עם זאת, מתוך ספרות המחקר עולה שעל פי רוב המודלים מתוכננים ונבנים על-ידי אנשי החינוך היוזמים את האימון, מתוך התפיסה האישית שלהם בנוגע למידת ההתאמה של המודלים לאופי האימון. לאור זאת, מצאנו לנכון לבחון היבטים נוגעים למעורבות של הסטודנטים עצמם בתכנון ובבנייה של מודלים מרחביים.

בתוך כך, סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי התנסו בתכנון ובבניה של מודלים מרחביים ושימוש בהם לצורך ייצוג משפטים והוכחתם, ובנוסף צילמו את עצמם מסבירים את המשפט ואת ההוכחה שלו באמצעות המודל. המחקר אשר ליווה את התנסות הסטודנטים התמקד בהשפעה שהייתה להתנסות זאת על הידע המתמטי והידע הדידקטי של הסטודנטים. הבקשה מהסטודנטים לצלם את עצמם הייתה על רקע שיחות שערכנו במהלך שנת הלימודים תשע"א עם מורים למתמטיקה בנוגע לקשיים שאותם חוו כתוצאה מהצורך ללמד בזום בתקופת הסגרים שהוטלו על מערכת החינוך בשל מגפת הקורונה. יש לציין שמאז פרוץ המגיפה, הלכה והתחזקה המגמה של שימוש במדיה החזותית לצרכי הוראה ולמידה, ובאתרי האינטרנט השונים ניתן למצוא מגוון רחב של חומרים מצולמים (צילומים עצמיים של הרצאות ארוכות וקצרות, סרטוני הדגמה, ועוד). על אף שרבים מהחומרים הופקו על-ידי גופים ממסדיים, כולל משרד החינוך, הרי שמורים דיווחו על קשיים שנגעו לאופן שבו הם יכולים להתאים את המדיה, הן לצרכים האישיים שלהם כמורים למתמטיקה, והן לצרכים של תלמידיהם. על בסיס ספרות המחקר המייחסת חשיבות לפיתוח חומרי הוראה ולמידה על-ידי מורים, כחלק אינטגרלי מהתפתחות הידע המקצועי שלהם (למשל, Westbroek, de Vries, Walraven, Handelzalts, & McKenney, 2019), ההנחה שלנו הייתה שההתנסות בבניית מודלים וצילום עצמי של הסברים יקנה לסטודנטים ידע פדגוגי שאותו יוכלו ליישם במהלך ההוראה שלהם, תוך התאמת המדיה לצרכיהם השוטפים. יש לסייג ולומר שלא מצאנו מחקרים שעסקו באופן מובחן בתרומה של בניית מודלים על ידי מורים לצורך הוראת נושאים בהנדסת המרחב, לא כל שכן צילום עצמי של הסברים הנילווים לשימוש במודלים.

המחקר

בקורס שעסק בהנדסת המרחב השתתפו 42 סטודנטים משתי מכללות לחינוך, כחלק מהכשרתם להוראת מתמטיקה בבית הספר העל-יסודי. הסטודנטים התבקשו לבחור את אחד מהמשפטים הבסיסיים הנלמדים בקורס, לבנות מודל שימחיש את הרעיון של המשפט ושל הוכחתו, לתעד את תהליך בניית המודל, וכן לצלם סרטון שבו הם מציגים את המשפט ואת הוכחתו. התהליך התבצע בזוגות או בשלשות, ולווה בכתיבה של יומן חוקר אישי. הכתיבה האישית נועדה לאפשר לסטודנטים לבחון באופן רפלקטיבי את תפיסותיהם בנוגע לתרומה של תהליך בניית המודל ושל הצילום העצמי של תהליך הבנייה והשימוש במודל לצורך הדגמת המשפט וההוכחה שלו.

מטרות המחקר. המחקר שליווה את התנסות הסטודנטים התמקד במגוון ההיבטים הנוגעים להתנסות שלהם, ומתוך כך נגזרו שאלות המחקר הבאות:

א. מהם השיקולים המתמטיים והדידקטיים של משתתפי המחקר בבניית המודל? ב. כיצד תופסים משתתפי המחקר את תרומת תהליך העבודה על בניית המודל והצילום העצמי של הסבר המשפט והוכחתו: ב1. להתפתחותן של תובנות מתמטיות אישיות? ב2. להתפתחות תובנות הנוגעות לשימוש במודלים מוחשיים כחלק מהוראת נושאים בהנדסת המרחב?

שיטת המחקר. במחקר יושמה המתודולוגיה האיכותנית, גישה שנועדה להסביר התנהגויות ותפיסות של בני האדם מתוך נקודת ראותם (צבר-בן יהושע, 2016). מתודולוגיה זאת נמצאה מתאימה לצרכי המחקר הנוכחי שכן מטרתו הייתה לבחון את הפרשנות שהסטודנטים מייחסים לתרומה של בניית מודלים וצילום עצמי. בפרט, יושמה הגישה של חקר מקרה אינסטרומנטלי, המבוססת על ההנחה שהמקרה שנבחן מאפשר ללמוד על התנהגותם של אחרים דומים בקבוצת ההשתייכות (Yin, 2011), מתוך חתירה להבנות תיאוריה מעוגנת בשדה (Corbin & Strauss, 2015).

כלי המחקר. לצורך המחקר נעשה שימוש בשני כלי מחקר עיקריים: א. המודלים וסרטוני הוידאו שיצרו הסטודנטים, כמבטאים תוצרי למידה. תוצרי למידה משקפים תהליך, ויכולים לפתוח בפני החוקר צוהר לדברים שאינם באים לידי ביטוי במלל או בהתנהגות של נבדקים (Rosenthal & Rosnow, 2009); ב. היומנים הרפלקטיביים של הסטודנטים. כתיבה רפלקטיבית מאפשרת ללומדים להבין לעומק את מה שלמדו, להעריך האם המיומנויות שבהם השתמשו היו יעילות, ולספק מידע על תהליכי למידה, תובנות, תחושות, אמונות, ועוד (Zubizarreta, 2009).

שיטות לניתוח הממצאים. לצורך ניתוח המידע ובניית תיאוריה מעוגנת בשדה בוצעו שלוש שלבים של קידוד: קידוד פתוח, קידוד צירי, וקידוד סלקטיבי. תהליך הקידוד התבצע בזיקה לספרות המחקר, במטרה להעמיק את הרגישות התיאורטית (Corbin & Strauss, 2015).

ממצאים

אף כי משתתפי המחקר העידו על התרומה המשמעותית הן של תכנון ובניית המודל והן של הצילום העצמי להתפתחותן של תובנות מתמטיות ודידקטיות, הרי שכרבע מהם הביעו הסתייגות ראשונית מהשימוש במודלים במסגרת ההוראה של הנדסת המרחב. כפי שנראה להלן, הסתייגות זאת קהתה במהלך ההתנסות. בהמשך הדברים יוצגו עיקרי הממצאים אשר עלו מתוך היומנים הרפלקטיביים של הסטודנטים, בליווי ציטוטים נבחרים המייצגים את תכני הקטגוריות שעלו בשלב הקידוד הפתוח. בפרט נתמקד בנקודת המבט של הסטודנטים באשר לשיקולים המרכזיים שליוו את בניית המודל, וכן בתפיסותיהם בנוגע לתרומת הפעילות של בניית המודל לחיזוק הידע המתמטי שלהם, ותרומת הצילום העצמי של שימוש במודל להתפתחות תובנות מתמטיות ודידקטיות.

הסתייגויות שבאו לידי ביטוי לפני תחילת ההתנסות ותובנות שהתפתחו בהקשר לכך

תשעה מבין 42 הסטודנטים ציינו שטרם ביצוע המשימה סברו שיש להימנע משימוש במודלים כחלק מהוראת נושאים בהנדסת המרחב. להלן אמירה מייצגת בהקשר זה: "*למרות שאני מאוד תומכת בשילוב המחשה בהוראה, דווקא בתחום הנדסת המרחב הייתה לי תפיסה (שהתבררה כשגויה) לפיה אם נמחיש לתלמידים את הדברים באמצעות מודל מרחבי הם יתרגלו לזה ולא יצליחו לפתור בעיות במרחב שמוצגות למעשה במישור, כפי שמשרד החינוך דורש. חשבתי שמודל לא רק שלא יתמוך בהתפתחותן של תובנות מרחביות, אלא שאף עלול לעכב את התפתחות הכישורים המרחביים.*" שבעה סטודנטים שינו את תפיסתם בעקבות בניית המודל, מתוך הבנת התרומה שיש לכך לפיתוח תובנות מרחביות. לדוגמה: "*ההתנסות בבניית המודל גרמה לי להבין את התרומה המשמעותית שיש לבנייה עצמאית של מודלים בהנדסת המרחב ולשימוש בהם על-ידי תלמידים, לא רק לפיתוח המיומנות המרחבית, אלא בעיקר לפיתוח תובנות בנוגע לקשרים הקיימים בין האובייקטים המרחביים. כמורים, חובה עלינו לאפשר לתלמידים להתנסות בשימוש במודלים שאנחנו מכינים וגם בבניית מודלים.*" שני הסטודנטים האחרים מבין התשעה שינו את תפיסתם בעקבות הצילום העצמי: "*המודעות שלנו בנוגע לחשיבות של שימוש במודל התפתחה רק במהלך הצילומים של המודל שבנינו להדגמת המשפט 'אם אחד משני ישרים מקבילים מאונך למישור, אז גם הישר השני מאונך למישור' וההוכחה שלו. ראינו איך האינטואיציה יכולה להטעות אותנו כאשר אנחנו מסתמכים רק על סרטוט, כלומר- על הייצוג הדו ממדי,*

ואיזה דברים צריך לקחת בחשבון כאשר מתייחסים למעבר בין הסרטוט למודל. האמת היא שלא היינו עולות על זה בעצמנו אלמלא היינו צריכות לצלם את ההסברים."

שיקולים שליוו את תהליך בניית המודל

השיקולים המרכזיים של הסטודנטים בבניית המודלים היו קשורים להיבטים דידקטיים, ובפרט לתרגום הוכחה מופשטת לאובייקט מוחשי ולחיזוק התובנות והמיומנויות המרחביות של תלמידים. למשל: *"הכי חשוב היה לנו לבנות את המודל שמייצג את הקשר שבין נפח מנסרה משולשת לבין נפח פירמידה משולשת באופן שיאפשר לתלמידים לפרק את המודל ולסובב את החלקים במרחב. לדמיין את הדברים האלה, זה מה שהיה לנו הכי קשה, והייתה לנו תחושה שאם "נרגיש את המשפט בידיים", אז נבין אותו ואת ההוכחה שלו לעומק וגם נזכור אותו לאורך זמן. לפני בניית המודל הייתה לנו תחושה שהבנו את ההוכחה, אבל הקשיים שבהם נתקלנו במהלך התכנון מבחינת הבנייה של הפירמידות השקולות הבהירו לנו שההבנה הייתה ברמה מאד שטחית. ואם זה נכון לגבינו, אז בטח גם לתלמידים"*; *"מעבר לשימוש במודל כדי להוכיח את המשפט על חיתוך האלכסונים בתיבה, השקענו מחשבה על האופן שבו השימוש במודל ייתן לנו הזדמנות, כמורים, לפתח את המיומנויות המרחביות של תלמידים. לכן, בחרנו לבנות את התיבה באמצעות חיבור חוטי תיל בצבע שחור, את אלכסוני התיבה באמצעות חוטים בצבע צהוב, ואת אלכסוני הפאות באמצעות חוטים בצבע כחול. הדבר הראשון שחשבנו עליו הוא איך ליצור את ההתאמה של הגוף למרחב, והדבר השני שחשבנו עליו היה איך ליצור מודל 'שקוף' שיאפשר לראות פיזית את פנים התיבה והאלכסונים. במודל הזה אפשר יהיה להשתמש גם כדי להזכיר לתלמידים בכל פעם את ההבדלים בין אלכסוני התיבה לבין אלכסוני הפאות"*.

תרומת הפעילות של בניית המודל לחיזוק הידע המתמטי של הסטודנטים

מתוך ניתוח היומנים הרפלקטיביים עולה שלעצם ההתנסות בבניית מודל מתאים למשפט ולהוכחתו הייתה תרומה לידע המתמטי הנוגע להנדסת המרחב: *"התחלתי את התהליך כעוד משימה שצריך לבצע, אך באופן מפתיע גיליתי עד כמה זה היה משמעותי עבורי. בעת לימוד החומר בקורס, לעיתים קרובות הרגשתי שאני מבינה את הכל, אבל הרבה פעמים גיליתי שההבנה לא הייתה לטווח ארוך, ולאחר מספר ימים או שבועות אני כבר לא זוכרת את משמעות הדברים. תכנון הבנייה של המודל והבנייה עצמה, וגם החשיפה לעבודות של סטודנטים אחרים, כל אלו עזרו לי מאוד להטמיע את המושגים, ההגדרות, המשפטים, וההוכחות. עכשיו קיימת לי תמונה ברורה בראש של הדברים, ואני בטוחה שאזכור אותם מתוך הבנה."*; *"תוך כדי בניית המודל פתאום הבנתי שכאשר קראתי את ההוכחה והתייחסתי לייצוג הדו ממדי, בעצם התייחסתי רק למה שראיתי, והתעלמתי ממה שלא יכולתי לראות. עבדנו ביחד על המשפט 'ישר המאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו, מאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו'. עד שלא בנינו את המודל, לא ייחסנו למעשה חשיבות לדרישה של שני ישרים. קראנו את ההוכחה והבנו אותה כמו שהיא, אבל אפילו לא שאלנו את עצמנו למה לא מספיק שהישר יהיה מאונך לישר אחד שעובר דרך עקבו. ללא ספק הבנייה של המודל הייתה עבורנו דרך נפלאה לשאול את השאלות הנכונות ולהבין את הדברים לעומק."*; *"כשהתחלנו לבנות את המודל למשפט שלושת האנכים, פתאום שמנו לב לזה שהמושגים שאנחנו זקוקים להם כדי לתרגם את המשפט למודל לא ברורים לנו מספיק, ולכן גם לא הצלחנו לבנות מודל משכנע. לא שמנו לב לזה כאשר קראנו את ההוכחה והעלינו רעיונות למודל. זה גרם לנו לחזור על המושגים ולהבין אותם היטב, לא רק ברמה של הגדרות...אז בנינו מודל מדורג שיעזור לנו להסביר לתלמידים הן את המשפט עצמו, והן את כל המושגים והמשפטים שקשורים אליו. עכשיו אני באמת מרגיש שהבנתי את המשפט."*.

תרומת הצילום העצמי של שימוש במודל להתפתחות תובנות מתמטיות ודידקטיות

בדומה לערך שייחסו הסטודנטים לבניית המודל בהקשר לחיזוק הידע המתמטי והידע הדידקטי שלהם, גם לצילום העצמי ייחסו הסטודנטים ערך כזה: *"הצילום העצמי היה גם הוא חלק מאתגר במשימה. למרות שכתבנו את הטקסט מראש כתסריט, בסופו של דבר ביצענו מספר טייקים, כיוון שתוך כדי הצילום הבנו שאנחנו משתמשים במושגים באופן שגוי. לא ראינו את זה כשכתבנו את התסריט...אחרי שסיימנו לצלם, צפיתי בעצמי מסבירה את המשפט וההוכחה, וניסיתי להיכנס לראש של התלמיד. פתאום שמתי לב לדברים שלא ראיתי קודם, כמו העובדה שאת המודל היה כדאי להחזיק נטוי, ככה שהתלמידים יוכלו לראות חלקים נוספים שלו. דיברתי על זה עם שני השותפים שלי, ואחרי שהסתכלנו ביחד בסרטון החלטנו לצלם שוב, וגם להוסיף עוד אלכסון לדגם, כדי שהקשר בין האלכסונים ייראה*

יותר ברור"; *"בתיכון, היו לי קשיים רבים בהנדסת המרחב, ואני בטוחה שגם לתלמידים שלי יהיו. הרעיון של שילוב סרטונים יכול להוות פתרון מצוין, ובמיוחד העובדה שאני יכולה לצלם את עצמי בקלות מדגימה לתלמידים רעיונות בעזרת מודלים שמותאמים באופן ספציפי לקשיים שלהם. כמורה, זה מרגיע אותי, כי אני יכולה לעשות את זה בכל פעם שאני מרגישה שהתלמידים זקוקים לאיזשהו תיווך"*.

סיכום ודיון

מתוך החשיבות המיוחסת לפיתוח יכולות מרחביות (Stieff & Uttal, 2015) נגזרת החשיבות של זיהוי דרכים אשר יתמכו בפיתוח היכולת הללו, הן בקרב מורים והן בקרב תלמידים. ספרות המחקר מצביעה על התרומה הניכרת שיש לשילוב השימוש במודלים מוחשיים כחלק בלתי נפרד מפיתוח היכולות המרחביות. יחד עם זאת, בכל המקרים המוכרים לנו המודלים בהם עושים הלומדים שימוש הם כאלה אשר תוכננו ופותחו על-ידי אנשי חינוך. לאור זאת, במסגרת המחקר הנוכחי בחנו את התרומה של בניית מודלים מרחביים על-ידי מתכשרים להוראת מתמטיקה לבית הספר העל-יסודי ושימוש בהם לצורך ייצוג משפטים והוכחתם להעמקת הידע המתמטי והדידקטי של הסטודנטים. בנוסף, נבחנה התרומה של צילום עצמי של סרטון שבו הסטודנטים מסבירים באמצעות המודל שבנו את המשפט ואת הוכחתו. יש לציין, שבמהלך 20 השנים האחרונות הולך וגובר השימוש במדיה החזותית והאודיו-חזותית לצורכי הוראה, ובפרט בסרטי וידאו של הרצאות והדגמות, ומתרבות העדויות בנוגע להשפעה החיובית שיש לכך על הלמידה (Nagy, 2018). ממצאי המחקר מצביעים על התרומה של תכנון ובניית המודל ושל הצילום העצמי להעמקת הידע המתמטי והדידקטי של משתתפי המחקר, וכן לשינוי תפיסות ראשוניות בנוגע לכך ששימוש במודלים מוחשיים עלול לפגום בהתפתחות התפיסה המרחבית של תלמידים. בעוד השיקולים שליוו את בניית המודל היו דידקטיים בעיקרם, הרי שבניית המודל בפועל סייעה, לדעת הסטודנטים, להבנה מעמיקה יותר של המושגים, ההגדרות, המשפטים וההוכחות, ולהבנת הקשר בין האובייקטים הכלולים במשפט ובהוכחתו. יתירה מכך, ניכר שהסטודנטים פיתחו מודעות לעצם הצורך בהעמקת ההבנה של התכנים והמעבר בין הייצוגים, כמו גם לתפקיד של בניית המודלים בהקשר זה. הצילום העצמי של שימוש במודל לצורך הסבר המשפט וההוכחה שלו סיפקו רובד נוסף בהעמקת הידע המתמטי הנוגע להנדסת המרחב והזדמנות לבחינה עצמית של האופן שבו ראוי לעשות שימוש במודלים לצורך הסבר המשפטים והוכחתם. ממצאים אלה אכן תומכים בתוצאות מחקרים המצביעים על התרומה של פיתוח חומרי הוראה ולמידה על-ידי מורים להתפתחות הידע המקצועי שלהם (למשל, Westbroeket al., 2019). אף כי ניתן להניח שבניית המודלים וצילום עצמי של השימוש בהם גוזלים זמן הכנה יקר, הרי שלאור ממצאי המחקר אנו ממליצות ליישם את הגישה בתכניות להכשרת מורים למתמטיקה בכל שכבות הגיל ובתכניות המיועדות לתמוך בהתפתחותם המקצועית של מורים בפועל. נסיים בציטוט מתוך אחד היומנים הרפלקטיביים, ציטוט המייצג תפיסה שבאה לידי ביטוי על-ידי כמחצית מהסטודנטים: *"חשוב לבנות את הדגמים ביחד עם התלמידים, ולתת להם לצלם את עצמם מסבירים. לדעתי, מבחינת פיתוח היכולת המרחבית שלהם, זה אפילו יותר משמעותי מאשר שימוש במודלים שאנחנו נבנה עבורם, וגם יוביל לחוויה לימודית חיובית."*

רשימת מקורות

צבר-בן יהושע, נ. (2016). הקדמה: תפיסות אסטרטגיות וכלים מתקדמים. בתוך: נ. צבר-בן יהושע (עורכת), **מסורות וזרמים במחקר האיכותני: תפיסות, אסטרטגיות וכלים מתקדמים** (עמ' 22-11). מכון מופ"ת.

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research*: *Techniques and procedures for developing grounded theory* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 109–149). Rotterdam: Sense Publications.

Nagy, J. (2018). Evaluation of online video usage and learning satisfaction: An extension of the technology acceptance model. *International Review of Research in Open and Distributed Learning, 19*(1), 159-185.

Patkin, D., Shriki, A., & Barkai, R. (2019). Strategies applied by elementary school mathematics pre-service teachers for coping with tasks requiring a mental rotation. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(8), 1563–1584.

Rosenthal, R., & Rosnow, R. L. (2009). Artifacts in behavioral research. Oxford University Press.

Shriki, A., Barkai, R., & Patkin, D. (2017). Developing mental rotation ability through engagement in assignments that involve solids of revolution. *The Mathematics Enthusiast, 14*(1), 541-562.

Shriki, A., & Patkin, D. (2021). Developing spatial skills through mental rotation activities. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching Pre-K–12, 114*(7), 536-544.

Stieff, M., & Uttal, D. (2015). How much can spatial training improve STEM achievement? *Educational Psychology Review, 27*(4), 607-615.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., & Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin, 139*(2), 352-402.

Westbroek, H., de Vries, B., Walraven, A., Handelzalts, A., & McKenney, S. (2019). Teachers as co-designers: Scientific and colloquial evidence on teacher professional development and curriculum innovation. In J. Pieters, J. Voogt, N. P. Roblin (eds.), *Collaborative curriculum design for sustainable innovation and teacher learning.* Springer Open.

Yin, R. K. (2011). *Qualitative research from start to finish.* The Guilford Press: N.Y., London.

Zubizarreta, J. (2009). The learning portfolio: Reflective practice for improving student learning. Jossey-Bass: A Wiley Imprint.

טיפוח למידה על הערכה מעצבת בקרב מורים למתמטיקה

הילה מאירוביץ, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

פרקטיקות של הערכה מעצבת בשיעורי המתמטיקה נמצאו כמסייעות לתהליכי למידה של תלמידים אך קשות ללמידה עבור מורים. בספרות ישנה קריאה להדגיש מיומנות של הערכה מעצבת בקורסי התפתחות של מורים. במחקר השתתפו 34 מורים בסבבי הערכה מעצבת שכללו בחירת משימה, בניית מחוון, הפעלת המשימה בכיתה, הערכת תשובות התלמידים לפי המחוון, מתן משוב, קבלת משוב ורפלקציה. מטרת המחקר היא לנתח ולאפיין תפיסות של מורים למתמטיקה ביחס להערכה מעצבת בהיבטים קוגניטיביים ואפקטיביים בעקבות התנסות באסטרטגיות הערכה מעצבת.

רקע תיאורטי

הערכה מעצבת היא גישה פדגוגית המדגישה את החשיבות של שימוש במידע שנאסף על דרכי הבנה וקשיים של תלמידים בעיצוב ההוראה במטרה לתת מענה ולקדם את הלמידה (Black & Wiliam, 2009). היא כוללת שלושה תהליכים מרכזיים: קביעה היכן הלומדים 'נמצאים' בלמידה שלהם, קביעה להיכן הם 'הולכים', וקביעה כיצד ניתן 'להגיע' לשם (Wiliam & Thompson, 2007). הספרות מדגישה מספר אסטרטגיות הוראה ליישום הערכה מעצבת, כגון שיתוף התלמידים במטרות הלמידה והקריטריונים עבור הצלחה, יצירת פעילויות ודיונים שיאפשרו ללמוד על הלמידה של התלמידים ומתן משוב לתלמידים שיקדם את הלמידה. יישום הערכה מעצבת בכיתה אינו פשוט. חוקרים וקובעי מדיניות בחינוך מתמטי מדגישים את הצורך בהכשרה של מורים שתסייע בפיתוח מומחיותם בהערכה (Ayalon & Wilkie, 2020; NCTM, 2000). המחקר מצביע על צורך בלמידה על האופנים בהם מורים תופסים את ההערכה כדי לסייע בפיתוח דרכי הכשרה מתאימות (Stiggins, 2010).

לוני ושות' (Looney et al., 2018) הציעו מסגרת מושגית המכונה 'זהות המורה כמעריך/ה' (Teacher Assessment Identity) המתייחסת לא רק להיבטים קוגניטיביים של זהות המורים (אליהם התייחסו מחקרים קודמים), אלא גם להיבטים אפקטיביים (ריגושיים). המסגרת כוללת חמישה היבטים הבאים לידי ביטוי בגוף ראשון כדי להדגיש את התפיסה העצמית של המורה: (1) אני יודע/ת על הערכה מעצבת..., (2) התפקיד שלי בקידום הערכה מעצבת בכיתה... (שניים אלה נתפסים כהיבטים קוגניטיביים), ו-(3) אני מאמינ/ה ביחס להערכה מעצבת..., (4) יש/אין לי בטחון עצמי בהקשר למימוש הערכה מעצבת..., ו- (5) אני מרגיש/ה ביחס להערכה מעצבת... (הנתפסים כהיבטים אפקטיביים). במחקר זה אחפש אצל המורים ביטויים להיבטים קוגניטיביים ואפקטיביים אלה של תפיסותיהם ביחס להערכה המעצבת.

מתודולוגיה

שאלת המחקר

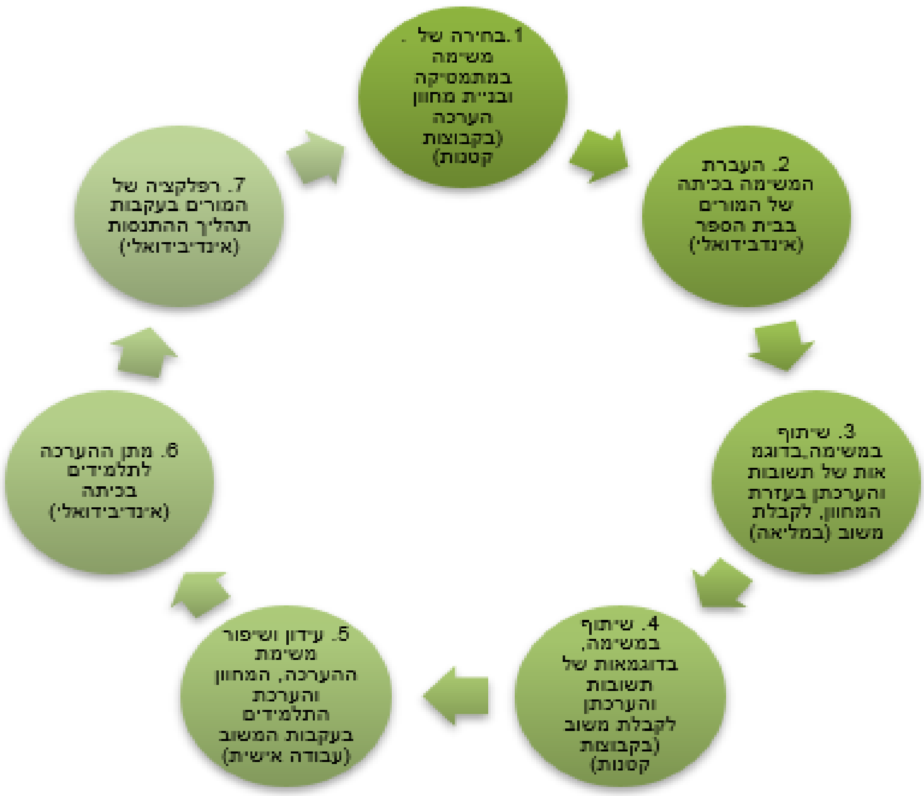
כיצד תופסים מורים למתמטיקה את ההערכה המעצבת, בהיבטים קוגניטיביים ואפקטיביים בעקבות התנסות באסטרטגיות הערכה מעצבת?

אוכלוסיית המחקר

שלושים וארבעה מורים למתמטיקה המלמדים בכיתות העל-יסודי השתתפו במחקר, במסגרת קורס בתכנית לתואר שני בחינוך מתמטי שהתמקד בידע ובהתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה. במהלך שני המפגשים שהתרחשו קודם לאיסוף הנתונים המורים למדו על הגדרות, רעיונות תיאורטיים ופרקטיקות הקשורים בהערכה מעצבת. כמו כן המורים קיבלו משימות מתמטיות בעלות פתרונות מרובים והתבקשו בקבוצות קטנות, לפתור אותן ולקבוע יעדי למידה וקריטריונים להערכה בעזרת מחוון. המורים דנו ברמות שונות אפשריות של פתרון איכותי ובקשיים צפויים של תלמידים. לאחר שני מפגשים אלה, השתתפו המורים בשני מחזורים של הערכה מעצבת (איור מס' 1): (1) המורים בחרו

משימה מתמטית ובנו מחוון (בקבוצות קטנות), (2) המורים הפעילו את המשימה בכיתתם, אספו תשובות של תלמידים והעריכו אותן באמצעות המחוון (אינדיבידואלי), (3) חלק מהמורים שיתפו במליאת הקורס במשימות ובדוגמאות של תשובות ובהערכתן כדי לקבל משוב, (4) המורים שיתפו במשימות ובדוגמאות של תשובות של תלמידים ובהערכתן בעזרת המחוון לקבלת משוב (בקבוצות קטנות), (5) המורים שיפרו את משימת ההערכה, הקריטריונים ואת הערכת התלמידים, לפי הצורך, בעקבות המשוב (עבודה אישית), (6) המורים נתנו משוב לתלמידיהם (אינדיבידואלי), ו- (7) המורים עשו רפלקציה על ההתנסות (אינדיבידואלי).

איור מס' 1: מחזור הערכה מעצבת



איסוף נתונים

שאלון רפלקטיבי לאחר השלמת שני מחזורים של סבבי הערכה, שבו התבקשו לכתוב על התנסותם בהערכה ביחס לכל אחד מההיבטים הבאים, בהתאם למסגרת המושגית של לוני ושות' (Looney et al., 2018): ידע על הערכה מעצבת, אמונות, רגשות, ביטחון עצמי/חוסר ביטחון עצמי ביחס להערכה מעצבת, והתפקיד שלהם במימוש ובקידום הערכה מעצבת בכיתה. כמו כן התבקשו המורים לכתוב מהם הגורמים בהתנסותם בסבבי ההערכה שתרמו, לדעתם, ללמידה שלהם על הערכה מעצבת.

ניתוח נתונים

מטרת ניתוח הנתונים היתה לחקור את נקודות המבט של המורים על התנסותם בסבבי ההערכה לצורך ניתוח ההיבטים השונים שהמורים העידו ברפלקציות הכתובות שלהם מבחינת הממדים הקוגניטיביים והאפקטיביים (ריגושיים). השאלונים נקראו קריאה חוזרת ונשנית ובמהלכה חיפשנו התייחסויות לממדים הקוגניטיביים והאפקטיביים המופיעים במסגרת של לוני ושות' (Looney et al., 2018). הניתוח כלל איטרציות של מיון הנתונים והשוואות מתמשכות בין הנתונים לבין הקטגוריות המתפתחות, כמו גם בין הקטגוריות עצמן.

ממצאים ראשוניים

ניתוח הרפלקציות של המורים ביחס להתנסותם בסבבי ההערכה המעצבת העלה 10 תמות, חלקן קשורות בהיבטים קוגניטיביים וחלקן בהיבטים אפקטיביים. **בהיבט הקוגניטיבי,** זוהו ארבע תמות:

(1) פיתוח ידע על מטרות הערכה, תכנים ושיטות: למעלה משני שליש מהמורים דיווחו שהתנסותם בסבבי ההערכה סייעה להם בפיתוח הידע על מטרות, תכנים ושיטות בהערכה. למשל, מטרות עיקריות שצוינו היו קידום ההוראה והלמידה והעברת האחריות ללמידה לתלמידים.

(2) פיתוח ידע הקשור בבחירה ובעיצוב משימות להערכה: מעט יותר משליש מהמורים דיווחו על פיתוח הידע ביחס לבחירה ועיצוב משימות הערכה. המורים כתבו שהתנסותם בבחירת משימה פתוחה בכל סבב, האינטראקציה עם התלמידים בביה"ס, והדיון ושיתוף הפעולה עם חברי הקבוצה, תרמו לפיתוח ידע זה. למשל, אחת המורות התייחסה ללמידה שלה בבחירת משימה.

> סבב שני של הערכה מעצבת היה מאוד דומה לסבב ראשון , כך שבחרנו במשימה אחרת בנושא חקירת פונקציות גם ודאגנו שלא תהיה ארוכה עם הרבה שלבים וסעיפים , כך על מנת להעלות את המוטיבציה אצל תלמידים להתעסק בה ולפתור כפי שצריך וכפי שראוי וברצינות יותר מפעם קודמת.

3) פיתוח ידע על בחירת קריטריונים ובניית מחוון: למעלה ממחצית מהמורים דיווחו שהתנסותם בסבבי ההערכה סייעה בפיתוח הידע הקשור בבחירת קריטריונים ובניית מחוון למשימות. בפרט, המורים כתבו על למידתם להתאים בין מטרות ההערכה, המשימה הנבחרת להערכה, וקביעת הקריטריונים ובניית המחוון. הדיון בין המורים ובפרט הביקורת שקיבלו מעמיתים על עבודתם אפשרו להם, לדבריהם, לפתח מודעות למאפיינים חשובים של המחוון ולבחון את המחוון שבנו בעצמם בהיבטים אלה. למשל, האם המחוון מתאים להערכה של מגוון פתרונות ודרכי חשיבה, האם יש קריטריונים חסרים, והאם רמות הביצוע מדורגות בצורה מתאימה.

(4) פיתוח ידע על מתן משוב: מעט יותר משליש מהמורים דיווחו על התרומה של השתתפותם בהתנסות בהערכה לפיתוח הידע על מתן משוב לתלמידים. המורים דיברו על מטרות המשוב (למשל, לשפר את הלמידה של התלמיד. המקום שבו הוא נמצא ומה נדרש ממנו כדי להתקדם.), סוגים שונים של משוב (למשל, משוב ריגושי המתייחס למאמצים שהתלמידים השקיעו בכדי ליישם את המטרות שהושגו) ועל יתרונות וחסרונות אפשריים של המשוב. למשל אחת המורות התייחסה לידע שלה במתן משוב יעיל.

> " אני יודעת שמתן משוב יעיל לתלמיד מפרט את השגיאות שלו, עוזר לתלמיד להחליט מה לעשות ומתאר אסטרטגיות שיפור..."

בהיבט האפקטיבי זוהו שש תמות: (1) ביטחון בבחירת קריטריונים ובניית מחוון: כשליש מהמורים הביעו שביעות רצון מהיכולת שלהם בבחירת קריטריונים להערכה ובניית מחוון. (2) ביטחון בבחירה ועיצוב משימות: קצת פחות משליש מהמורים הביעו שביעות רצון מהיכולת שלהם בבחירה ובעיצוב משימות להערכה. למשל, מורה שדיווח על הביטחון שצבר ועל כוונתו ל"העביר הלאה" את מה שלמד:

> אני מרגיש שההתנסות שלי בקורס תרמה מאוד ליכולת שלי להכין משימות הערכה ולבנות אותן בצורה הדרגתית כדי שיתאימו לכיתה. בנוסף לכך רכשנו כלים והתנסינו בבניית מחוונים מתאימים ולכן אני מרגיש שאני כן יכול להעביר את הידע שרכשתי לעמיתים שלי בבית הספר.

(3) ביטחון בהערכת תשובות התלמידים ובמתן משוב: קצת פחות משליש מהמורים הביעו שביעות רצון מהיכולת שלהם להעריך תשובות התלמידים ומתן משוב. (4) חוסר ביטחון בבחירה ועיצוב משימות הערכה: קצת פחות משליש מהמורים הרגישו פחות ביטחון ביכולת שלהם בבחירה ובעיצוב משימות להערכה. (5) חוסר ביטחון בבחירת קריטריונים ובניית מחוון: קצת יותר משליש מהמורים הרגישו חוסר ביטחון ביכולת שלהם לבחור קריטריונים ולבנות מחוון. למשל, מורה כתבה:

> חוסר הביטחון המרכזי שלי נובע מכך שאני עדיין מרגישה שקשה לי לזקק את הקריטריונים אותם אני רוצה לבדוק. אני חושבת שזה קושי שהוא משותף למורים רבים שלא מומחים בבניית הערכה מעצבת אלא מומחים בללמד. צריך לזכור שאלו מיומנויות שונות. לכן, אני חושבת שכדאי לעשות השתלמויות למורים בנושא הזה.

(6) חוסר ביטחון במתן פרשנות לדרכי חשיבה של תלמידים: קצת פחות משליש הרגישו חוסר ביטחון ביכולת שלהם לפרש מהי החשיבה העומדת בבסיס פתרון שתלמיד/ה הציע/ה.

דיון ומסקנות

במחקר זה בחנו את הפוטנציאל שיש להשתתפות בפעילויות הערכה מעצבת ללמידה על הערכה מעצבת. ממצאי המחקר מצביעים כי פרקטיקה זו יכולה לסייע למורים בפיתוח המומחיות שלהם בהערכה. המורים הדגישו את הידע והמודעות שלהם להיבטים שונים הקשורים בתכנון וביישום הערכה מעצבת בכיתה. המורים קשרו בין למידתם לבין השתתפותם בעבודת צוות שכללה דיונים, התייעצויות וביקורת עמיתים, שהיתה מעבר ל"עוד" התנסות רגילה בהערכה מעצבת בכיתתם. המחקר גם מצא כי לאחר ההתנסות בהערכה מעצבת חלק מהמורים הביעו ביטחון עצמי במיומנויות ההערכה שלהם, לעומת חלק שהביע חוסר ביטחון עצמי ביחס לאותן פרקטיקות: בחירה ועיצוב משימות הערכה, בחירת קריטריונים ובניית מחוון ומתן פרשנות לדרכי חשיבה של תלמידים. אצל חלק מהמורים, שימת הלב למורכבות שיש בהערכה התגלתה רק תוך כדי ההתנסות, כשקיבלו משוב על הערכתם. מחקרים הצביעו על כך שמורים יכולים להתנגד גם לביקורת הניתנת על-ידי עמיתים לעבודתם שלהם וגם למתן ביקורת על עבודת אחרים (Smith et al., 2002). במחקר זה המורים לא הביעו רגש שלילי ביחס למתן משוב ולקבלת ביקורת מעמיתיהם ביחס לבחירת המשימה, בניית המחוון והערכת התלמידים באמצעות המחוון, אלא התייחסו לביקורת העמיתים ולחילוקי הדעות ביניהם כתורמים לשיפור ההערכה.

השימוש במסגרת של לוני ושות', (Looney et al., 2018) אפשרה לנו להבחין בתפיסות המורים לגבי למידתם, הן בהיבטים קוגניטיביים והן בהיבטים אפקטיביים. התמות שעלו עד כה בניתוח הרפלקציות של המורים יוכלו לשמש כבסיס למחקר עתידי על אסטרטגיות לפיתוח מומחיות בהערכה מעצבת בקרב מורים למתמטיקה. המחקר הנוכחי, על מגבלותיו, מספק ראיות לפוטנציאל הטמון בהשתתפות מורים בפעילות שיתופית העוסקת באסטרטגיות הערכה מעצבת. בימים אלה אנו ממשיכות בניתוח הממצאים.

רשימת מקורות

Ayalon, M., & Wilkie, K. J. (2020). Developing assessment literacy through approximations of practice: Exploring secondary mathematics pre-service teachers developing criteria for a rich quadratics task. Teaching and Teacher Education, 89, 103011.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education), 21(1), 5-31.

Looney, A., Cumming, J., van Der Kleij, F., & Harris, K. (2018). Reconceptualising the role of teachers as assessors: teacher assessment identity. Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 25(5), 442-467.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Smith, H., Cooper, A., & Lancaster, L. (2002). Improving the quality of undergraduate peer assessment: A case for student and staff development. Innovations in education and teaching international, 39(1), 71-81.

Stiggins, R. J. (2010). Essential formative assessment competencies for teachers and school leaders. Handbook of formative assessment, 233-250.

Thompson, M., & Wiliam, D. (2007, April). Tight but loose: A conceptual framework for scaling up school reforms. In annual meeting of the American Educational Research Association. Chicago, IL.

מוטיבציה אוטונומית של מורות למתמטיקה ללמידה מקצועית: המוגנות של מורות המלמדות 5 יח"ל מפני שינויים במוטיבציה.

קני נעמן, אוניברסיטת בן גוריון
קני נעמן, דנה ודר וייס, אוניברסיטת בן גוריון

מבוא

המחקר הרב על מוטיבציה של תלמידים ללמידה (Ames, 1992; Deci & Ryan, 2000; Schunk, 1991) מצביע על כך שלמוטיבציה של מורות ללמידה מקצועית תיתכן השפעה קריטית על איכות ההוראה ועל הלמידה שלהן ושל התלמידים שלהן. לכן, החוסר שיש במחקר החינוכי על מוטיבציה של מורות ללמידה בפיתוח מקצועי ועל הגורמים המשפיעים עליה מפתיע (Kaplan,2014; Roth, 2014; Schunk ,Pintrich & Meece, 2008). במחקר זה, בהתבסס על תיאורית ההכוונה העצמית (Deci, Vallerand, Pelletier & Ryan, 1991; Deci & Ryan, 2000), בחנו באמצעות כלי מחקר חדש את ההבדלים בין ותק ורמות קבוצת ההוראה של המורות לבין המוטיבציה האוטונומית שלהן ללמידה מקצועית. באמצעות שאלונים אספנו נתונים מ- 546 מורות למתמטיקה בתיכון. הותק בהוראה חולק לארבע קבוצות: "צעירות" (1-4 שנות ותק), "ותק בינוני" (5-14), "ותיקות" (15-24), "ותיקות ביותר" (25+). רמות קבוצת הלימוד מתייחס למורות המלמדות ושאינן מלמדות 5 יח"ל. מן הממצאים עולה כי מורות המלמדות 5 יח"ל הן בעלות מוטיבציה אוטונומית גבוהה יותר מאלו שלא, ובנוסף בעלות חסינות מפני הבדלים מוטיבציוניים בין שנות הותק השונות. בפרט, מורות בשנות ותק 5-14 מוגנות מפני "הסערה המוטיבציונית" שמתחוללת אצל עמיתותיהן שאינן מלמדות 5 יח"ל.

רקע תיאורטי

תיאורית הכוונה העצמית

תיאורית הכוונה העצמית (SDT - Self-Determination Theory) מתארת סוגי מוטיבציה שונים בהתאם לרמת ההכוונה העצמית של האדם. בקצה האחד של רצף סוגי המוטיבציה ניצבת מוטיבציה פנימית-טהורה. בקצה השני ניצבת א-מוטיבציה. בין שני קצוות אלו ניצבים ארבעה סוגים של מוטיבציות המבטאות רמות שונות של תחושת אוטונומיה: ויסות חיצוני, ויסות מוחדר, ויסות הזדהותי וויסות משלב (Deci et al., 1991; Roth, 2014).

מוטיבציית מורות ללמידה

על פי תיאורית ההכוונה העצמית, המוטיבציה האוטונומית של המורות ללמידה בפיתוח מקצועי (להלן מוטיבציה ללמידה) נעה על הרצף בין מוטיבציה נשלטת למוטיבציה אוטונומית. מורות המונעות מתוך ויסות חיצוני תלמדנה כיוון שמופעל עליהן לחץ מההנהלה או מהפיקוח, או כדי לקבל תגמול. מורות המונעות מתוך ויסות מוחדר תלמדנה כדי לרצות את הפיקוח, ההנהלה, ההורים וכדי לעלות את הסטטוס המקצועי שלהן. מורות המונעות מתוך ויסות הזדהותי תלמדנה כיוון שהן מבינות את חשיבות הלמידה לשיפור ההוראה. מורות המונעות מתוך ויסות משולב תלמדנה מתוך רצון להגשמה עצמית ומתוך תחושת שליחות ומנהיגות, ומורות המונעות מתוך מוטיבציה פנימית תלמדנה מתוך עניין והנאה. מחקרים על מוטיבציה ללמידה, ברובם המכריע, עוסקים בתלמידים, למרות שמורות גם הן לומדות. ישנה חשיבות למחקר אודות מוטיבציה אוטונומית של מורות ללמידה בשל השלכותיה החיוביות, בדומה למוטיבציה אוטונומית של תלמידים ללמידה. אולם, לעומת תלמידים, למורות יש ערך מוסף בלמידה. למידה של מורות יכולה לשפר את איכות ההוראה שלהן ומכאן גם את למידת התלמידים (Hargreaves & Fullan, 2012; OECD, 2019; Wong, 2004). נובע כי מחקר על מוטיבציה של

מורות ללמידה חשוב הן למורות והן לתלמידים. עם זאת, מעט ידוע על מוטיבציה של מורות ללמידה (Kaplan,2014; Roth, 2014).

ותק ומוטיבציה ללמידה

הותק עשוי להשפיע על הסיבות בגינן המורות לומדות היות ושלבי הקריירה מזמנים צרכים מקצועיים שונים. ממחקרם של שריקי ולביא (Shriki & Lavi, 2012) ניתן להסיק כי ככל שהמורות ותיקות יותר הצורך שלהן בלמידה מונע מסיבות אוטונומיות יותר. אולם, במחקר אחר לא נמצא קשר לינארי בין הותק לבין מניעים אוטונומיים ללמידה (Louws et al., 2017). בסקר טאליס (OECD, 2019), החוקרים ציפו לקשר הפוך בין הותק לבין מוטיבציה אוטונומית ללמידה אך קשר זה לא נמצא. מטרת מחקר זה היא לשפוך אור על אי הבהירות בקשר להשפעת הותק על המוטיבציה של מורות ללמידה.

רמת קבוצת הלימוד ומוטיבציה ללמידה

רמות קבוצות ההוראה (3,4,5 יח"ל) עשויות להשפיע על המוטיבציה של המורות ללמידה. הדרישה ממשרד החינוך להרחיב את ההסמכה כדי ללמד 5 יח"ל, הרמה המתמטית הגבוהה הנדרשת ממורות המלמדות 5 יח"ל והאתגרים האינטלקטואלים בהוראת תלמידי 5 יח"ל יחד עם הסטטוס והיוקרה של מורות אלו, מובילים להשערה שהמוטיבציה ללמידה של מורות המלמדות 5 יח"ל תהיה אוטונומית יותר מהמוטיבציה של אלה שלא. השערה זו מקבלת חיזוקים ממחקרים שמצאו כי בעת ההוראה בכיתה, מורות לרמות הגבוהות עוסקות יותר בלמידה של תלמידיהן בעוד שמורות לרמות הנמוכות עוסקות יותר בבעיות משמעת (Oakes, 1987; Page, 1991), וכן כי על פי רוב, מורות פחות מיומנות מלמדות את ההקבצות הנמוכות (Oakes et al., 1993). ועדין, למיטב ידיעתנו, הקשר בין רמת קבוצת הלימוד ובין המוטיבציה האוטונומית של מורות ללמידה לא נבחן.

שאלות המחקר

לאור אי הבהירות בשאלת הקשר בין הותק ורמות קבוצות הלימוד למוטיבציית מורות ללמידה, מחקר זה בוחן:

1. האם קיימים הבדלים בין מורות המלמדות 5 יח"ל לאלו שאינן במוטיבציה ללמידה?
2. האם קיימים הבדלים בין קבוצות הותק השונות במוטיבציה ללמידה? האם קיימים הבדלים בין קבוצות ותק בקרב מורות שאינן מלמדות 5 יח"ל? בקרב מורות המלמדות 5 יח"ל?
3. האם קיימת אינטראקציה של ותק ורמות קבוצת ההוראה על המוטיבציה ללמידה?

מתודולוגיה

השתתפו במחקר 546 מורות ("מורות" מתייחס גם למורים גברים) למתמטיקה בתיכון מרחבי הארץ שמילאו שאלון מקוון. השאלון מדד את המשתנים הבאים:

מוטיבציה אוטונומית ללמידה מקצועית. זהו כלי חדש שפותח במסגרת מחקר זה (מתוקף ומהימן, מהימנות המשתנים, שחושבה על ידי אלפא קרונבך, נעה בין 0.7 ל-0.9) דרכו מדדנו את רמת המוטיבציה האוטונומית ללמידה של המורה כשיקלול של הויסותים השונים. הכלי מבוסס על התאמות שערכנו לשאלון שמודד מוטיבציה של תלמידים (Vansteenkiste et al., 2009) על פי תיאורית ההכוונה העצמית.

רמות קבוצת ההוראה של המורה. חלוקה לפי מורות המלמדות ושאינן מלמדות קבוצות 5 יח"ל.

ותק. לפי החלוקה של פרידמן ולוטן (1987): "צעירות" (1-4 שנות ותק), "ותק בינוני" (5-14), "ותיקות" (15-24), "ותיקות ביותר" (25+).

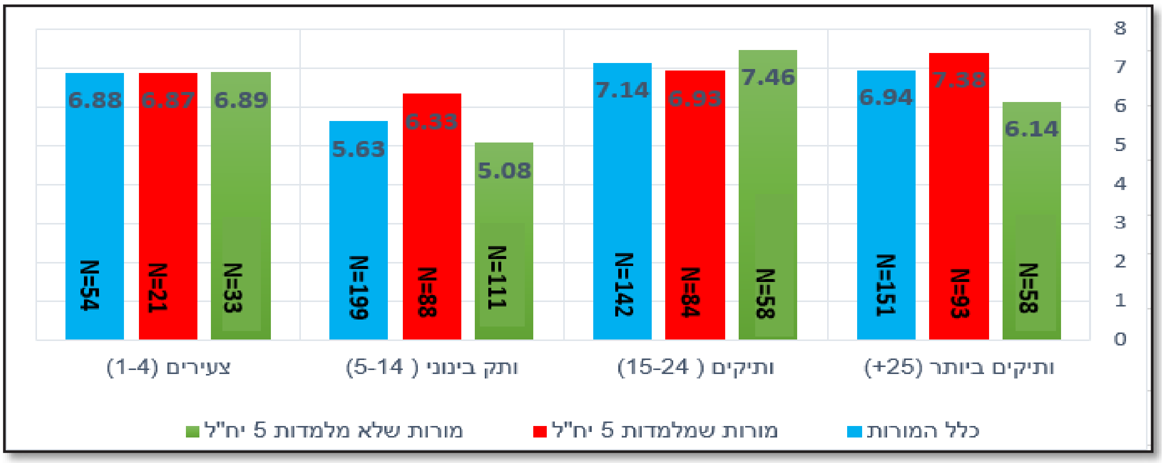
בכדי לענות על שאלות המחקר ביצענו ניתוחי שונויות (מבחני T, אנובה, ניתוח אינטראקציה ומבחני המשך מסוג scheffe).

ממצאים

מניתוח הממצאים עולה כי: א) מורות המלמדות 5 יח"ל בעלות מוטיבציה ללמידה גבוהה יותר באופן מובהק ממורות שאינן מלמדות קבוצות אלו ($t=-2.53, p<.05$); (ב) מורות בעלות ותק של 5-14 שנים בעלות מוטיבציה ללמידה נמוכה יותר באופן מובהק מבעלות ותק של 15-24 (Scheffe p=0.005) ו- +25 (Scheffe p=0.005) שנים ($F=5.55, p<.05$); (ג) מורות שאינן מלמדות 5 יח"ל בעלות מוטיבציה ללמידה נמוכה יותר בקבוצת ותק של 5-14 שנים באופן מובהק לעומת קבוצת הותק של 15-24 שנים ($F=6.22, p<.05$,) (Scheffe p=0.001); (ד) בקרב מורות המלמדות 5 יח"ל אין הבדל מובהק במוטיבציה ללמידה בקבוצות הותק השונות ($F=1.17, p>.05$); (ה) קיימת אינטראקציה של ותק ורמות קבוצת ההוראה על המוטיבציה ללמידה ($F=3.12, p<.05$): בקבוצות הותק של 4-15 ($t=-2.25, p<.05$) ו-+25 ($t=-2.02, p<.05$) שנים, מורות המלמדות 5 יח"ל בעלות מוטיבציה ללמידה גבוהה יותר באופן מובהק מאלו שאינן מלמדות רמה זו. ראו איור 1 לממוצעים לפי הותק ורמות קבוצת ההוראה.

איור 1

מוטיבציה אוטונומית ללמידה מקצועית לפי ותק ורמות קבוצות הוראה



דיון

הממצאים מצביעים על כך שמורות המלמדות 5 יח"ל בעלות מוטיבציה ללמידה גבוהה יותר מאלו שאינן. כמו כן, הממצאים מראים כי מורות בעשור הראשון, לאחר ארבע שנות ההסתגלות הראשונות, הן בעלות מוטיבציה ללמידה נמוכה יותר מהוותיקות מהן. אך כאשר מנתחים יחד שני משתנים אלו, ותק ורמת קבוצת לימוד, מתגלה כי מורות המלמדות 5 יח"ל מוגנות מפני המוטיבציה הנמוכה בשנים הקשות מוטיבציונית 5-14. ממצא זה מדגיש את העובדה כי מחקרים שמתבוננים בותק בלבד (Louws et al.,2017; Shriki & Lavi, 2012) עשויים להחמיץ תופעות חשובות ומדגים את חשיבות ההתבוננות על משתנים נוספים שעשויים להשפיע על מוטיבציה ללמידה.

ניתן להציע מספר הסברים להבדלים שנמצאו: ייתכן שמורות המלמדות 5 יח"ל מתמטיקה חשות חלק ממועדון אקסקלוסיבי, בשל תנאי הסף להוראת 5 יח"ל, הפיתוח מקצועי הייחודי והמחסור במורות לרמה זו. תחושות אלו תורמות לפעולה מתוך אוטונומיה (קפלן ועשור, 2001). בנוסף, תלמידי 5 יח"ל מאתגרים את המורות בשאלות ומכאן שיש להן צורך בלמידה תמידית. ייתכן שה"חיסון" של מורות 5 יח"ל מפני הירידה במוטיבציה בשנים 5-14 הוא תוצאה של הביקוש הגבוה להוראה שלהן שגורם לכך שהן נדרשות פחות למלא תפקידים חינוכיים ומנהלתיים. דבר זה מסייע להם להתמקצע בתחום הדעת. בשנים שלאחר מכן מורות שאינן מלמדות 5 יח"ל כבר צוברות ניסיון בהוראה ויכולות להיות פנויות יותר ללמידה וגם בעלות בטחון גדול יותר לסרב להנהלה למלא תפקידים שונים. לסיכום, אחת הדרכים לשמר את המוטיבציה של מורות ללמידה עשויה להיות הכשרת כלל המורות להוראת 5 יח"ל לפחות בין השנים 4-15. השערות אלה ייבחנו בהמשך המחקר באמצעות ראיונות עומק עם מורות.

מחקר זה תורם להבנת המוטיבציות של מורות ללמידה בתיכון, וכן מציע כלי מדידה חדש להמשך מחקר בנושא חשוב זה. במישור המעשי, מתוך המחקר עולות המלצות לגבי טיפוח ושימור המוטיבציה של מורות שונות ללמידה.

רשימת מקורות

פרידמן, י', לוטן, א' (1987). עולמו של המורה כמנבא שחיקתו הנפשית. מגמות, ל' (4), 416-434.

קפלן , א, עשור, א' (2001). מוטיבציה ללמידה בבית הספר- הלכה למעשה. *חינוך החשיבה*, כרך 20, עמ' 13-35.

Ames, C. (1992). Classrooms: Goals, structures, and student motivation. *Journal of Educational Psychology*, *84*(3), 261-271.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The “what" and “why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry*, 11(4), 227-268.

Deci, E. L., Vallerand, R. J., Pelletier, L. G., & Ryan, R. M. (1991). Motivation and education: The self-determination perspective. *Educational Psychologist*, *26*(3-4), 325-346.

Hargreaves, A., & Fullan, M. (2012). *Professional capital: Transforming teaching in every* school. Teachers College Press.

Kaplan, A. (2014). Section commentary: Theory and research on teachers’ motivation: Mapping an emerging conceptual terrain. In P. W. Richardson, H. M. G. Watt, & S. A. Karabenick (Eds.), *Teacher motivation: Theory and practice* (pp. 52-66). Routledge.

Louws, M. L., Meirink, J. A., van Veen, K., & van Driel, J. H. (2017). Teachers' self-directed learning and teaching experience: What, how, and why teachers want to learn. *Teaching and Teacher Education*, *66*, 171-183.

Oakes, J. (1987). Tracking in secondary schools: A contextual perspective. *Educational Psychologist, 22*(2), 129-153.

Oakes, J., Quartz, K. H., Gong, J., Guiton, G., & Lipton, M. (1993). Creating middle schools: Technical, normative, and political considerations. *The Elementary School Journal, 93*(5), 461–480.

OECD. (2019). TALIS 2018 results: *An international perspective on teaching and learning.*

OECD Publishing.

Page, R. N. (1991). Lower-track classrooms: *A curricular and cultural perspective*. Teachers College Press.

Roth, G. (2014). Antecedents and outcomes of teachers' autonomous motivation: A self - determination theory analysis. In P. W. Richardson, H. M. G. Watt, & S. A. Karabenick (Eds.), *Teacher motivation: Theory and practice* (pp. 36-51). Routledge.

Schunk, D. H. (1991). Self-efficacy and academic motivation. *Educational Psychologist, 26*(3-4), 207-231.

Schunk, D. H., Pintrich, P. R., & Meece, J. L. (2008). Motivation in education: Theory, research and application. Pearson.

Shriki, A., & Lavy, I. (2012). Perceptions of Israeli mathematics teachers regarding their professional development needs. Professional Development in Education, 38(3), 411-433.

Vansteenkiste, M., Sierens, E., Soenens, B., Luyckx, K., & Lens, W. (2009). Motivational profiles from a self-determination perspective: The quality of motivation matters. Journal of Educational Psychology, 101(3), 671-688.

גורמים המשפיעים על שיקול הדעת הפדגוגי של מורים בהערכת סקיצות של פרבולות בסביבה דיגיטלית

כאותר ח'לאילה, אוניברסיטת חיפה
שי אולשר, אוניברסיטת חיפה

רקע תיאורטי

הערכה היא חלק חשוב בהוראה ולמידה של מתמטיקה. ברחבי העולם מופעלים כיום פרויקטים חדשניים בנושא שימוש בטכנולוגיה בהערכת מתמטיקה. הספרות הנוגעת להערכה עשירה בטכנולוגיה צומחת במהירות (Drijvers et al., 2016). סקיצות נחשבות לרוב כ "לא מדויקות", "לא מדויקות מספיק", "מכילות את המאפיינים הרלוונטיים אך טעונות שיפור מבחינה גרפית" ואינן מתאימות להערכה אוטומטית (Cusi, Morselli & Sabena, 2017). הגדרת מהי תשובה נכונה לאור סקיצות אלה תוך שימוש בכלים טכנולוגיים משתנה בהתאם לשיקולים האישיים של המורה, כאשר תשובה יכולה להתפרש באופן שונה על ידי מורים שונים (Morgan & Watson, 2002). מצב זה עשוי להוביל למצבים בהם תשובה אחת מתקבלת על ידי מורה אחד עלולה להידחות על ידי אחר (2002 , Morgan, Tsatsaroni & Lerman). יחד עם זאת, סקיצות שנוצרו על ידי תלמידים נמצאו גם כדרך שימושית לתיאור המודל האלגברי של משוואה במקרים שבהם לא הצליחו התלמידים לייצר מודל סימבולי נכון (Yerushalmy, 2006). לינהארט וחוב' (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990) טוענים כי מורים נוטים להבין ששרטוט של סקיצות וגרפים כולל בתוכו תהליכים המאפיינים את הלמידה בנושא זה, מאפיינים כגון אינטואיציות ותפיסות מוטעות, וכן רצופים, הסברים, ודוגמאות. בנוסף, שימוש בשיקולים פדגוגיים המתייחסים למאפיינים אלו יכול לייצר למידה משמעותית ומקדמת (Leinhardt et al., 1990). סקיצות ביד חופשית יכולות לייצג מגוון רחב של מאפיינים מתמטיים המהווים חלק מהוראה ולמידה של נושאים מתמטיים, ויכולים לספק למורה מידע על מנת לתכנן את התקדמות ההוראה (Yerushalmy, Nagari-Haddif, & Olsher, 2017). אולשר וחוב' (Olsher, Yerushalmy, & Chazan, 2016) מציעים כי הערכה אוטומטית של סקיצות יכולה לסייע מעבר לדירוג התשובות הנכונות או בדיקת משימות רב ברירה, אך על מנת להשיג זאת יש להבין את הגורמים המשפיעים על המורים בפועל בעת הערכת סקיצות, על מנת להתאים את ההערכה האוטומטית.

מתודולוגיה

מטרת המחקר ושאלת המחקר

מטרת מחקר זה לבחון מהם הגורמים המשפיעים על שיקול הדעת הפדגוגי שמפעילים מורי מתמטיקה כשהם מעריכים את תשובות התלמידים בשרטוט סקיצות של פרבולות בסביבה דיגיטלית בסיטואציות הוראה-למידה שונות (במבחן, בעבודת כיתה, בשיעורי בית). שאלת המחקר היא אילו גורמים משפיעים על שיקול הדעת הפדגוגי של מורי המתמטיקה כשהם מעריכים אי דיוקים בסקיצות של פרבולות בסביבה דיגיטלית, וכיצד השפעה זאת באה לידי ביטוי בהערכה?

כלי המחקר ואוכלוסיית המחקר

כלי המחקר העיקרי היה שאלון שכלל תשובות שונות לשתי משימות הדורשות לצייר סקיצות של פרבולות העומדות בתנאים מסוימים בסביבה דיגיטלית. במאמר זה אנו מציגים תוצאות לאחת המשימות המוצגות בשאלון, אשר ביקשה מהתלמידים לשרטט סקיצה של פונקציה ריבועית אשר הנקודה (0,-4) נמצאת על הגרף שלה. עבור כל משימה הוצגו בשאלון 20 סקיצות, שכל אחת מהן מייצגת תשובה של תלמידים שונים, והמורים התבקשו לקבוע האם יקבלו את הסקיצה כתשובה נכונה ב- 3 סיטואציות הוראה שונות: שיעורי בית, עבודת כיתה ומבחן. האוכלוסייה כללה 62 מורים למתמטיקה מבתי ספר על יסודיים בישראל, בעלי תקופות שונות של ניסיון בהוראה. שלושה מתוך

המורים שהסכימו להתראיין על מנת לקבל תובנה נוספת לגבי תשובותיהם, נבחרו על מנת לייצג דעות שונות ומעניינות שזיהינו בחלק הכמותי.

ניתוח נתונים

כל אחד מ- 20 הסקיצות קודדו על מנת לקבוע את קיומם (או היעדר קיומם) של 14 מאפיינים של פרבולות אשר שהופיעו בתשובות התלמידים: (1) הסקיצה אינה עוברת בנקודה הנדרשת (0,-4); (2) הסקיצה אינה סימטרית; (3) לסקיצה אין נקודת קודקוד יחידה; (4) בסקיצה יש נקודת פיתול; (5) בסקיצה יש "שפיץ" או שאיננה גזירה; (6) הסקיצה אינה מייצגת פונקציה ריבועית; (7) הסקיצה אינה מגיעה לקצה אזור הסרטוט; (8) לסקיצה יש אורכי ענפים שונים; (9) הסקיצה אינה חותכת את ציר x; (10) נקודת הקודקוד של הסקיצה נמצאת על ציר y ; (11) לסקיצה יש נקודת קיצון מסוג מקסימום; (12) לסקיצה יש נקודת קיצון מסוג מינימום; (13) הסקיצה מייצגת פרבולה צרה; (14) הסקיצה מייצגת פרבולה רחבה. ששת המאפיינים הראשונים מייצגות מאפיינים של אי דיוקים, ושמונת המאפיינים האחרים אינם מייצגים מאפיינים של אי דיוקים בסקיצות. לאחר קידוד הסקיצות, נעשה שימוש במבחן פירסון על מנת לקבוע אילו מאפיינים תואמים את קבלת או אי קבלת הסקיצה כתשובה נכונה על ידי המורים. לבסוף, נעשה שימוש במבחן t כדי לקבוע אם קיים הבדל מובהק בין אחוז הקבלה עבור הסקיצות בסיטואציות ההוראה השונות.

ממצאים

בחלק הבא נתאר את סוגי המאפיינים השונים של אי דיוקים המתואמים ושאינם מתואמים (באמצעות מבחן פירסון) עבור מורים שאינם מקבלים סקיצות של תלמידים כתשובה נכונה ונפרט דוגמה אחת מכל סוג. נסיים בתפקידן היחסי של מסגרות ההוראה השונות בשיקולי ההערכה.

מאפיינים ומתאם שלהם עם מורים שאינם מקבלים סקיצות לא מדויקות של התלמידים

התוצאות מראות ארבעה מאפיינים (מתוכם 2 מתוארים בטבלה 1) של אי דיוקים המתואמים עם מורים שאינם מקבלים סקיצות לא מדויקות של התלמיד לאחר ביצוע בדיקת פירסון: 1) לסקיצה יש נקודת פיתול, 2) הסקיצה אינה מייצגת פונקציה ריבועית, 3) הסקיצה אינה סימטרית, 4) הסקיצה מייצגת פרבולה רחבה. התוצאות מראות גם ארבעה מאפיינים של אי דיוקים (מתוכם 2 מתוארים בטבלה 1) שלא תואמים לכך שמורים לא קיבלו סקיצות לא מדויקות של התלמידים לאחר ביצוע בדיקת פירסון: 1) הסקיצה אינה עוברת בנקודה הנדרשת (0,-4), 2) לסקיצה אין נקודת קודקוד יחידה, 3) הסקיצה אינה מגיעה לקצה האזור, 4) לסקיצה יש אורכי ענפים שונים.

טבלה 1

המתאמים של מאפיין עם מורים שאינם מקבלים סקיצות לא מדויקות

המאפיינים		שיעורי בית	עבודת כיתה	מבחן	לא מקובל
הסקיצה אינה מייצגת פונקציה ריבועית	מתאם פירסון	.476*	.606**	.622*	-.557*
	Sig. (2-tailed)	.034	.005	.003	.011
לסקיצה יש נקודת פיתול	מתאם פירסון	-.182	-.261	-.458*	.337
	Sig. (2-tailed)	.444	.266	.042	.147
הסקיצה אינה עוברת בנקודה הנדרשת (0,-4)	מתאם פירסון	.225	-.170	-.282	.098
	Sig. (2-tailed)	.339	.475	.229	.680
לסקיצה אין נקודת קודקוד יחידה	מתאם פירסון	.399	.049	.032	-.094
	Sig. (2-tailed)	.082	.839	.893	.695

N	20	20	20	20

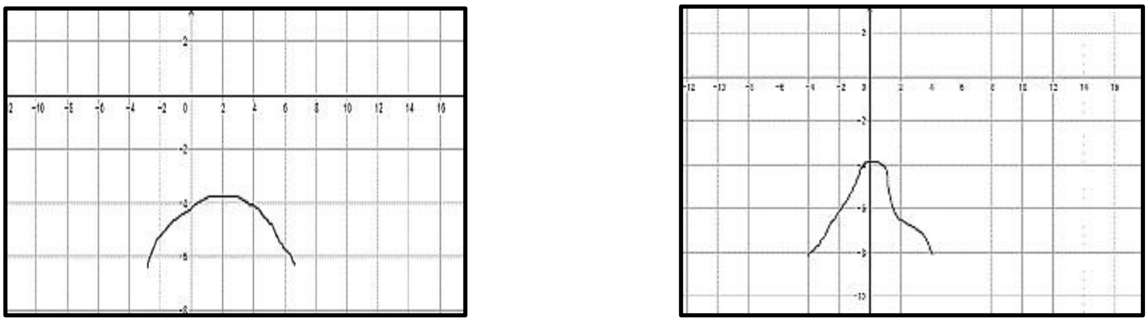
** - המתאם משמעותי ברמת 0.01 (2-tailed)

* - המתאם משמעותי ברמת 0.05 (2-tailed)

איור 1א מראה דוגמה של סקיצה עם נקודת פיתול. בראיון עם המורים של סקיצה ספציפית, מרים ציינה על הסקיצה המוצגת באיור 1א כי: "הייתי מקבלת את הסקיצה כתשובה נכונה בעבודות כיתה ושיעורי בית מכיוון שהיא עוברת בנקודה הנדרשת (0,-4), אך לא הייתי מקבלת אותה במבחן מכיוון שיש בה נקודת פיתול בענף הימני".

איור 1

א. סקיצה שיש בה נקודת פיתול *ב. סקיצה שאינה עוברת בנקודה הנדרשת (0,-4)*



איור 1ב מראה דוגמה של סקיצה ש אינה עוברת בנקודה הנדרשת (0,-4). כל המרואיינים ציינו שהם יקבלו הסקיצה המוצגת באיור 1ב כתשובה נכונה בכל סיטואציות הוראה-למידה שונות, למרות שהיא אינה עוברת בדיוק עם הנקודה (0,-4). מרים הצהירה כי: "הייתי מקבלת הסקיצה בכל 3 הסיטואציות למרות שהיא לא עוברת באופן ברור ב- (0,-4) אלא היא עונה על כל הקריטריונים האחרים של הפונקציה הריבועית ".

הערכה של אי דיוקים של סקיצות בסיטואציות הוראה – למידה שונות

התוצאות מראות שיש הבדל בין 3 סיטואציות הוראה-למידה השונות עבור כל הסקיצות הנכללות בשאלון. טבלה 2 מציגה את התוצאות עבור 4 מתוך 20 הסקיצות של תשובות התלמידים.

טבלה 2

תוצאות חלקיות (4 מתוך 20 של אחוזי הקבלה של סקיצות כתשובה נכונה במסגרות ההוראה השונות)

מס' הסקיצה	אחוז הקבלה כתשובה נכונה בשיעורי בית	אחוז הקבלה כתשובה נכונה בעבודת כיתה	אחוז הקבלה כתשובה נכונה במבחן
1	40	45	25
5	35	34	21
7	44	55	31
17	31	31	10

במקרים מסוימים (7 מתוך 20), אחוז הקבלה לשיעורי בית היה גבוה יותר מאשר עבור עבודות כיתה (למשל סקיצה מס' 7) ואילו באחרים (12 מתוך 20, למשל סקיצה מס' 1) אחוז הקבלה בעבודות כיתה היה גבוה יותר מאשר לשיעורי בית. היה מקרה אחד שבו האחוזים היו זהים (סקיצה 17). בכל המקרים אחוז הקבלה כתשובה נכונה במבחן היה הנמוך ביותר.

לא היה הבדל משמעותי בין אחוזי קבלת הסקיצות ב- 'שיעורי בית' ($M=43.2$, $SD=10.03$) ובין 'עבודת כיתה' ($M=46.80$, $SD=12.67$) ; $t(19)=-1.93$, $p>0.05$. ממצא זה נתמך על ידי מורים שונים בראיונותיהם המציינים מדוע כל אחת מהסיטואציות צריכה להפוך את המורים לקלים יותר בקבלת תשובות התלמידים. עם זאת, היה הבדל משמעותי באחוזי הקבלה בין סיטואציית 'המבחן'

(M=33.65, SD=14.34) וגם סיטואציית 'שיעורי בית', $t(19)=4.245$, $p<0.01$ וסיטואציית 'עבודת כיתה' $t(19)=8.884$, $p<0.01$. ממצא זה נתמך על ידי הראיונות עם המורים, כפי שאמר אמיר:

> במהלך המבחנים המורים מעריכים יותר את תשובות התלמידים, מכיוון שהם בודקים את התלמיד לאחר שלמדו את הנושא ורכשו את כל המיומנויות, ולכן התלמיד לא היה צריך לטעות בשרטוט הפרבולה.

דיון ומסקנות

הממצאים מראים כי ישנם הבדלים משמעותיים בין סיטואציות הוראה - למידה כאשר המורים מעריכים את עבודת התלמידים, במיוחד סקיצות של פונקציות ריבועיות. מה שיכול להיחשב כתשובה נכונה בסיטואציה אחת, יכול להיחשב כבלתי מספיק בסיטואציה אחרת. בנוסף, ישנם הבדלים בין המורים בעת הערכת עבודת התלמידים, אשר תואם את הממצאים של מורגן ואחרים (Morgan, Tsatsaroni & Lerman , 2002) הקובעים כי תשובה שמתקבלת על ידי מורה אחד עלולה להידחות על ידי מורה אחר - למרות שאנו עוסקים במתמטיקה שבה הנכונות אמורה להיות פשוטה. הממצאים מראים גם כי בעוד כמה מאפיינים הקשורים לנכונות (למשל לא מצטלבים במדויק עם הנקודה) לא היה בהתאמה עם מורים שאינם מקבלים את התשובה כנכונה - מאפיינים אחרים אכן התואמים עם מורים שאינם מקבלים את הסקיצות כנכונות (למשל נקודות פיתול בגרף). לבסוף, עלינו לזכור כי הסקיצות אינן כלי מדויק להערכה, ומאפייניהן, המנותחים אוטומטית, אינם עשויים לשקף את כוונותיו המדויקות של התלמיד (Yerushalmy et al., 2017).

תודות

מחקר זה נתמך על ידי קרן טראמפ, מענק 191.

רשימת מקורות

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. *ZDM*, *49*(5), 755-767.

Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education*: A concise topical survey. Springer Nature.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. Review of educational research, 60(1), 1-64.

Morgan, C., Tsatsaroni, A., & Lerman, S. (2002). Mathematics teachers' positions and practices in discourses of assessment. *British Journal of Sociology of Education*, *23*(3), 445-461.

Morgan, C., & Watson, A. (2002). The interpretative nature of teachers' assessment of students' mathematics: Issues for equity. *Journal for research in mathematics education*, 78-110.

Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). How Might the Use of Technology in Formative Assessment Support Changes in Mathematics Teaching? *For the Learning of Mathematics*, *36*(3), 11-18.

Yerushalmy, M. (2006). Slower algebra students meet faster tools: Solving algebra word problems with graphing software. *Journal for Research in Mathematics Education*, 356-387.

Yerushalmy, M., Nagari-Haddif, G., & Olsher, S. (2017). Design of tasks for online assessment that supports understanding of students' conceptions. *ZDM*, *49*(5), 701-716.

האם יש קשר בין ידע על שגיאות אופייניות לבין הציון שניתן בבחינה? המקרה של השוואת מספרים עשרוניים

דינה תירוש, החוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי, בית ספר לחינוך, אוניברסיטת תל אביב
פסיה צמיר, החוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי, בית ספר לחינוך, אוניברסיטת תל אביב

בארבעה העשורים האחרונים קיימת הסכמה רחבה בקהילת החינוך בכלל ובקהילת החינוך המתמטי בפרט כי ידע מורים על דרכי חשיבה של תלמידים הוא מרכיב משמעותי של ידע הוראתי (המאמרים של Shulman, 1986 ושל Ball, Thames, & Phelps, 2008 הם מאמרים קלסיים בהקשר זה). אחת השאלות שמתעוררת לאור הסכמה רחבה זו היא: האם יש קשר בין ידע על שגיאות אופייניות של תלמידים לבין האופן בו סטודנטים להוראה ומורים מעריכים ביצועי תלמידים? ובניסוח שונה מעט: האם כאשר מצוי אצל סטודנטים להוראה ואצל מורים מידע לגבי שגיאות אופייניות של תלמידים בנושא מסוים, הם נוטים להתייחס לידע זה בקביעת הציונים לתלמידים בבחינה באותו נושא, ואם כן - כיצד בא הדבר לידי ביטוי בקביעת הציונים? בכנס נתמקד בשאלה זו בהקשר לידע סטודנטים להוראה לגבי כללים מוטעים על פיהם תלמידים נוטים להשוות מספרים עשרוניים.

רקע תיאורטי

בספרות המחקרית בשנות השמונים מדווח בהרחבה על כללים מוטעים על פיהם תלמידים משווים מספרים עשרוניים (Nesher & Peled; 1986; Resnick et al, 1989; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). בכתבים אלה מתוארים שני כללים מוטעים מרכזיים באמצעותם תלמידים נוטים להשוות מספרים עשרוניים השווים בחלק השלם בהם. הכלל המוטעה הראשון הוא כלל השלמים. על פי כלל מוטעה זה "המספר העשרוני שמספר הספרות בחלק העשרוני בו רב יותר הוא הגדול יותר". בהתאם לכלל זה קיימת נטייה לקבוע, למשל, כי "0.4513> 0.9 כי 9<4513". תלמידים המשתמשים בכלל מוטעה זה מתייחסים, כנראה, לחלקים השבריים של המספרים העשרוניים כאל מספרים טבעיים ומשווים חלקים אלה באופן בו הם משווים מספרים טבעיים. הכלל המוטעה השני הוא כלל השברים הפשוטים, לפיו "המספר העשרוני שמספר הספרות בחלק העשרוני בו קטן יותר הוא הגדול יותר". בהתאם לכלל מוטעה זה קיימת נטייה לקבוע, למשל, כי "0.78< 0.4 כי עשיריות תמיד גדולות ממאיות". מקור כלל מוטעה זה הינו, כנראה, בידע לגבי גודל החלקים השבריים בשברים פשוטים (בדוגמה – לכך ש"עשיריות גדולות ממאיות ולכן מספר שיש בו רק עשיריות חולק לעשרה חלקים ולכן כל חלק בו גדול מהחלק של המספר שחולק ל100 חלקים"). המחקרים שנערכו בשנים אלה דיווחו על שימוש בכללים מוטעים אלה במדינות שונות וביניהן ארצות הברית, ישראל וצרפת. בעשורים האחרונים נערכו מחקרים נוספים בהקשר לקשיים אופייניים אלה (למשל Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Ren, & Gunderson, 2019). גם במחקרים אלה דווח על שימוש נרחב באחד או בשני הכללים המוטעים להשוואת מספרים עשרוניים, וזאת בקבוצות גיל שונות. ממצאים אלה מעידים על יציבות השימוש בכללים מוטעים אלה ומעוררים את הצורך להביא לידיעתם של סטודנטים להוראה ושל מורים את קיומם.

ניסיון לפיתוח מודעות ויכולת של המורה לאבחן את קיומם של הכללים המוטעים מתואר, למשל, במאמר של פלד (2000) בו מוצע מודל שמטרותיו הן: לגרום למורה להכיר בחשיבות ההסברים של הילדים בניתוח תשובותיהם, לגרום למורה להתעניין בידע הילד, העומד מאחורי פרופיל התשובות שלו, לתת למורה כלים לאבחן את ידע הילד ולשנות את דרכי ההערכה של המורה. המטרה המרכזית של מאמרה של פלד היא הצגת מודל להכשרת מורים ופרחי הוראה באמצעות שתי דוגמאות, שאחת מהן מתייחסת לידע המחקרי לגבי הכללים המוטעים להשוואת מספרים עשרוניים. הספרות המקצועית בדרך כלל מתייחסת לדרכים ליישום ידע לגבי שגיאות במהלכי הוראה, אך בחיפוש בספרות לא מצאנו

התייחסות לאופנים בהם סטודנטים להוראה ומורים מיישמים ידע לגבי כללים מוטעים באמצעותם תלמידים נוטים להשוות מספרים עשרוניים להערכת ידע לומדים. מטרת המחקר הרחב שלנו היא לבחון האם יש קשר בין ידע סטודנטים להוראה ומורים על שגיאות אופייניות לבין האופן בו הם מעריכים את הישגי תלמידיהם. בכנס הנוכחי נתייחס להשוואת מספרים עשרוניים.

שאלות המחקר

1. מהם הציונים אותם סטודנטים להוראה נוטים לתת על משימת השוואת מספרים עשרוניים לפני החשיפה לכללים מוטעים על פיהם תלמידים נוטים להשוות מספרים עשרוניים?
2. מהם הציונים אותם סטודנטים להוראה נוטים לתת על משימת השוואת מספרים עשרוניים לאחר החשיפה לכללים מוטעים אופייניים על פיהם תלמידים נוטים להשוות מספרים עשרוניים?

מתודולוגיה

כדי לבחון האם חלים שינויים בציונים שניתנים על ידי סטודנטים להוראה לאחר חשיפה ועידוד מודעות לכללים המוטעים בהם נוטים תלמידים להשתמש להשוואת מספרים עשרוניים, בנינו מהלך שמורכב משלושה שלבים מרכזיים. השלב הראשון והשני התבצעו במהלך שיעור בן 90 דקות בכיתה. השלב השלישי ניתן כעבודת בית אישית שהוגשה למורה הקורס.

שלב ראשון: נתינת ציונים לאייל ולגל

בשלב זה סטודנטים להוראה התבקשו, ראשית, להשיב בעצמם על משימת השוואה בה נכללו עשרה זוגות של מספרים עשרוניים. לאחר מכן, הסטודנטים להוראה קבלו שני דפים, האחד הציג את תשובותיו של אייל למשימת ההשוואה עליה הם השיבו והשני את תשובותיו של גל לאותה משימה (השמות בדויים). הסטודנטים התבקשו לרשום על כל אחד מהדפים את הציון אותו הם נותנים לעבודה ולהחזיר למורה הקורס את שני הדפים. הדפים שניתנו לסטודנטים, המוצגים באיור 1, מעובדים מתוך משימה שמוצגת בספר מתמטיקה: מחקר והוראה (תירוש, 1996).

איור 1

משימת מתן ציונים לאייל ולגל

לפניכם תשובותיהם של אייל ושל גל למבחן בנושא השוואת מספרים עשרוניים. אתם מתבקשים לתת ציון לכל אחת מהעבודות

עבודתו של אייל:	עבודתו של גל:
0.483 > 0.57	0.483 < 0.57
0.9876 > 0.673	0.9876 < 0.673
0.623 < 0.1256	0.623 > 0.1256
0.976 > 0.57	0.976 < 0.57
0.697 < 0.3476	0.697 > 0.3476
0.34 < 0.247	0.34 > 0.247
0.12 < 0.267	0.12 > 0.267
0.683 < 0.3467	0.683 > 0.3467
0.783 < 0.6467	0.783 > 0.6467
0.65 < 0.0257	0.65 > 0.0257
הציון של אייל ______	הציון של גל ___

שלב שני: היכרות עם הכללים המוטעים

לאחר מסירת הדפים, נערכה בכיתה שיחה בה הוצגו הכללים המוטעים בהם תלמידים נוטים להשתמש להשוואת מספרים עשרוניים ומחקרים בתחום זה. הסטודנטים להוראה קיבלו שוב שני דפים שעליהם רשומות תשובותיהם של אייל ושל גל. הם התבקשו להתייחס לטעויות אופייניות של כל אחד מהם ולמקורות אפשריים לטעויות אלה.

שלב שלישי: התייחסות לכללים ונתינת ציונים לאייל ולגל אחרי ההיכרות עם הכללים המוטעים

במשימת הבית הסטודנטים להוראה התבקשו:

1. להתייחס לטעויות של אייל ולטעויות של גל ולמקורות אפשריים לטעויות שלהם,
2. לתת ציונים לאייל ולגל להסביר את החלטתם לגבי הציונים אותם החליטו לתת.

המהלך המתואר הופעל במשך שנים רבות בכיתות של סטודנטים להוראה.

ממצאים

בפרק זה נתאר תובנות מרכזיות שעלו לאורך השנים הרבות בהן הוצג המהלך שתואר בפרק המתודולוגיה בכיתות של סטודנטים להוראה. נציין, ראשית, כי הציונים שניתנו לאורך השנים על ידי מרבית הסטודנטים להוראה על עבודותיהם של אייל ושל גל היו 30 ו70, בהתאמה, וזאת בהתאם למספר הפריטים עליהם כל אחד מהם השיב בצורה נכונה. בהקשר לציונים שניתנים על ידי סטודנטים להוראה לאחר היכרות עם הכללים המוטעים, בחרנו להציג בכנס ציונים והסברים אשר ניתנו במהלך השנים על ידי סטודנטים להוראה אשר: 1) הציונים אותם הם נתנו בשלב הראשון לאייל ולגל על עבודתם היו בהתאם למספר הפריטים עליהם כל אחד מהם השיב בצורה נכונה, כלומר 30 ו 70 בהתאמה, 2) הם ציינו, הן בשלב השני והן בשיעורי הבית, את שני הכללים המוטעים האופייניים כמקורות אפשריים לטעויות של אייל ושל גל. התגובות קובצו לשתי קטגוריות מרכזיות: נתינת ציון על פי מספר הפריטים הנכונים, נתינת אותו ציון לאייל ולגל.

ציון על פי מספר הפריטים הנכונים

תשובה זו ניתנה לאורך השנים על ידי מרבית הסטודנטים להוראה. נציג שני נימוקים מרכזיים שניתנו על ידי הסטודנטים שהחלטתם הייתה לשמר את הדרך בה הם נתנו את הציונים, כלומר, הציון ניתן בהתאם למספר הפריטים הנכונים (השמות בדויים).

עדי: הייתי רוצה לתת לשניהם ציון נכשל כי שניהם לא יודעים איך להשוות מספרים עשרוניים. אבל אין אפשרות לתת לתלמיד שיש לו שבע תשובות נכונות ציון נכשל. זה יכול מאד לסבך עם התלמיד ועם ההורים שלו ועם המערכת. כך שברור שלגל אני צריך לתת ציון 70. לאייל אני יכול לתת ציון 30.

ענת: בגלל שהם לא התבקשו להסביר איך הם חושבים אני לא יכולה להיות בטוחה שהם באמת טועים על פי הכללים האלה. אולי יש משהו אחר שגורם להם לענות כמו שהם עונים (אולי המספרים המסוימים האלה או משהו אחר). לכן נראה לי הכי נכון לתת את הציון לפי מספר הפריטים הנכונים ולהזמין אותם לשיחה כדי לדבר ולבדוק איך הם חושבים.

לאייל ולגל צריך לתת אותו ציון

בקטגוריה זו נכללות ארבע הצעות לתת ציון זהה לאייל ולגל. נציג הסבר אופייני לכל אחת מההצעות.

אייל 90, גל 90 - למעשה יש לכל אחד מהם רק טעות אחת, וזאת טעות שיטתית. שניהם עובדים באופן עקבי. לכן הציון הוא 90. יהיה קל לתקן את השגיאות שלהם.

אייל 80, גל 80 - אני מציעה לתת לאייל ולגל את הציון 80. הם עונים לפי כלל מסוים ולא סתם מנחשים. הכללים של אייל ושל גל לא נכונים אבל הם עובדים בצורה שיטתית ומסודרת וזה מאד חשוב במתמטיקה. לכן אני מציעה לתת להם את הציון 80 ולהיפגש ולשוחח איתם על הדרך הנכונה.

אייל 70, גל 70 - לגל אי אפשר לתת ציון שלילי כי יש לו שבעה פריטים נכונים. אבל אייל יודע לא יותר ולא פחות מגל, ולכן לשניהם צריך לתת אותו ציון.

אייל 0, גל 0 - שניהם לא יודעים להשוות בין מספרים עשרוניים ולכן לשניהם צריך לתת ציון אפס, אם משהו יוצא להם נכון זה במקרה ולא מתוך ידע והפעלת כללים נכונים. אם לא מקובל לרשום אפס אז אפשר לרשום נכשל אבל אני חושבת שכדאי לתת אפס כדי שיהיה ברור שהכל לא נכון.

דיון

בעשורים האחרונים מושקע מאמץ רב בתכניות הכשרת המורים ובהשתלמויות המורים בחינוך מתמטי בישראל ובמדינות אחרות, בקידום המודעות לשגיאות ולכללים מוטעים אופייניים בנושאים שונים. אחת השאלות שעולות, בהקשר זה, היא האם ידע זה בא לידי ביטוי באופן בו סטודנטים להוראה ומורים מעריכים את הישגי תלמידיהם. במאמר זה ציינו כי סטודנטים להוראה נוטים, לפני היכרות עם כללים מוטעים על פיהם תלמידים נוטים להשוות מספרים עשרוניים, לקבוע את ציוני התלמידים על פי מספר הפריטים עליהם התלמידים משיבים נכון. לאחר היכרות עם הכללים מרבית הסטודנטים נוטים לקבוע את הציונים באותו אופן, כשהנימוקים המרכזיים לכך קשורים בתגובות התלמידים, ההורים והמערכת ובמידת הביטחון שאכן השגיאות נובעות משימוש בכללים המוטעים ולא מסיבות אחרות. סטודנטים להוראה שבחרו לתת ציונים אחרים (לא על פי מספר הפריטים הנכונים) הציגו שיקולים המתייחסים לחשיבות שיש לעבודה שיטתית על פי כללים, להוגנות במתן הציונים בהתאם לידע היחסי של התלמידים, ולחשיבות שיש ליישום הכללים על פיהם יש להשוות מספרים עשרוניים. חשוב לציין שסטודנטים רבים טענו כי יש מקום לשקול את מטרת המבחן ולאור זאת את הפריטים שראוי לכלול בו. הערות אלה הביאו לדיונים בנושא ההבנייה של מבחן והאופן שבו הצלחה במבחן משקפת ידע, במטרות שונות של הערכה ובבניית דרכי הערכה להשגת מטרות אלה וכן לשאלות כלליות יותר לגבי שימוש בידע לגבי שגיאות אופייניות בבניית כלי הערכה ולנורמות סוציו- מתמטיות אותן ראוי לקבוע מראש עם תלמידים לגבי האופן בו נקבעים הציונים במבחנים.

רשימת מקורות

פלד, ע. (2000). פיתוח מודעות, מוטיבציה ויכולת של המורה לאבחן מודלים סמויים של תלמידים. *עלון למורי מתמטיקה, 26*, 33-41.

תירוש, ד. (1996). *מתמטיקה: מחקר והוראה*. תל אביב: מופ"ת.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, *22*, 206-214.

Nesher, P., & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 67 - 79.

Ren, K., & Gunderson, E. A. (2019). Malleability of whole-number and fraction biases in decimal comparison. *Developmental Psychology*, *55*(11), 2263–2274.

Resnick, L., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 8-27.

Sackur-Grisvard, C., & Leonard, F. (1985). Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers, *Cognition and Instruction*, *2*(2), 157-174.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

תפיסות תלמידים את למידת מתמטיקה בסביבת WHATSAPP במסגרת תוכנית "בגרופ"

יניב ביטון, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח); מכללת שאנן
רותי סגל, מכללת אורנים; מכללת שאנן

מבוא ורקע תיאורטי

המחקר הנוכחי הוא חלק ממחקר רחב העוסק בתפיסות מורים ותלמידים את הלמידה ברשת החברתית וואטסאפ ובזיהוי ואפיון תהליכי ההוראה והלמידה ברשת זו. במאמר הנוכחי נתמקד בתפיסותיהם של תלמידים את הלמידה ברשת החברתית וואטסאפ.
התקשורת מהווה מרכיב הכרחי וחיוני בתהליכי למידה והוראה ומקדמת שיח המאפשר לתלמידים לנהל שיח ולארגן את חשיבתם המתמטית, לנתח, להעריך ולשפר את יכולתם לבטא את החשיבה המתמטית שלהם באופן עקבי וברור לצד החשיבה המתמטית והאסטרטגיות של אחרים, וכן לעשות שימוש נכון בשפה המתמטית לביטוי מדויק של רעיונות מתמטיים NCTM (2000). ארגון שיח כזה מהווה אתגר ייחודי במסגרות מקוונות, כמו למשל ברשת החברתית, שבהן השיח בדרך כלל לובש צורה של דיונים על קריאות או התנסויות משותפות (Morge et al. 2020). למידה באמצעות רשת חברתית מזמנת ללומדים שיתופי פעולה על ידי תקשורת עם עמיתים ברשת, מתרחשת בכל סביבה שלמידת הרשת החברתית מאפשרת, מאיצה תהליכי למידה כתוצאה מחשיפה לאינטראקציות למידה רבות ומגוונות בין שותפי הקבוצה, ומאפשרת למידה אנונימית (Naidoo & Kopung, 2020). האינטראקציות המתרחשות בין המורה לתלמיד ובין התלמידים עצמם מאפשרות משוב מיידי, שיפור כישורי חשיבה והנמקה, התמקדות רבה יותר בטיפול בקשיים של הלומדים בתהליכי למידה והבנה וחשיפה לרעיונות המתמטיים של עמיתיהם (Biton & Segal, 2021; Freeman et al., 2016; Greenhow & Askari, 2017). לפיכך, חשוב לשלב תהליכי למידה ברשתות החברתיות, כדי לאפשר לתלמידים הזדמנויות למידה מעבר לסביבת הכיתה.

מטרת המחקר הנוכחי היא לזהות מהם הגורמים המרכיבים את תפיסת התלמידים את הלמידה בוואטסאפ במסגרת תוכנית "בגרופ".

המחקר:

סביבת המחקר: תוכנית בגרופ – מיזם חינמי ללמידה חברתית של תלמידי תיכון מכל רחבי הארץ באמצעות אפליקציית וואטסאפ, לקראת בחינות בגרות קיץ במתמטיקה. התוכנית פועלת בשיתוף פעולה בין משרד החינוך למרכז לטכנולוגיה חינוכית במטרה לאפשר לתלמידים להצליח בבחינות הבגרות, תוך כדי חיזוק תחושת הביטחון האישי של התלמידים באשר ליכולות שלהם להצליח במתמטיקה.

אוכלוסיית המחקר: 152 תלמידים שהשיבו לשאלון שהופץ בקבוצות התלמידים שהשתתפו בתוכנית בשנת 2018.

כלי המחקר: 1. שאלון לתלמידים שכלל 9 שאלות פתוחות ו־12 שאלות סגורות בסולם ליקרט של 1 עד 6. השאלות הפתוחות כללו התייחסות ליתרונות ולחסרונות הבולטים ביותר לדעת התלמידים בשימוש ב־WhatsAp – אלה מאפיינים ספציפיים הקיימים ב־WhatsApp ומאפשרים הנגשה של חומר מתמטי לתלמידים ועוד. 2. תצפית בקבוצות הוואטצאפ – מעקב אחר התקשורת והשיח בין התלמידים ובינם ובין המורה המתבטאים במגוון דרכים: הודעות טקסט, הודעות קוליות, תמונות וידאו, מאגרי שאלות, מצגות ועוד.

שיטת המחקר:

כאמור המחקר נערך בהתאם לפרדיגמה המשלבת מחקר כמותני ומחקר איכותני (Creswell, 2013). שיטת הדגימה למילוי השאלון הייתה בלתי הסתברותית ומבוססת על זמינות ונכונות המשתתפים להשיב על השאלון שנשלח בקבוצות. בשל מגבלת המקום במסמך הנוכחי יוצג ניתוח הנתונים הכמותניים מתוך השאלון לתלמידים (בהצגה בכנס נרחיב).

ממצאים

כדי לענות על שאלת המחקר: מהם הגורמים המרכיבים את תפיסת התלמידים את הלמידה בוואטסאפ במסגרת תוכנית "בגרופ" בוצע ניתוח גורמים ברוטציית ורימקס (Varimax rotation) במטרה לבחון כיצד נתפסת סביבת הלמידה בוואטסאפ על ידי התלמידים. מניתוח הגורמים הופקו שלושה גורמים המסבירים יחד מעל מחצית מהשונות בתשובות התלמידים (58.06%). הגורמים המרכיבים את תפיסות התלמידים הם: הגורם הראשון (חמישה היגדים) – תרומתה של סביבת וואטסאפ לצרכים הרגשיים של הלומד מסביר כרבע מהשונות בתשובות התלמידים. הגורם השני (ארבעה היגדים) – גורמים המקדמים למידה בסביבת וואטסאפ מסביר כחמישית נוספת מהשונות בתשובות התלמידים. הגורם השלישי – גורמים המעכבים למידה בסביבת וואטסאפ (שני היגדים) מסביר כ־8% נוספים מהשונות בתשובותיהם.

המאפיינים של תפיסות התלמידים את הלמידה בסביבת וואטסאפ במסגרת תוכנית "בגרופ"

בפני התלמידים הוצגו מספר משפטים המתייחסים לניסיון שלהם בלמידת מתמטיקה באמצעות וואטסאפ, והם התבקשו לדרגם לפי מידת נכונותם או הסכמתם, מ־1 = בהחלט לא מסכים/ה עד 6 = מסכים/ה במידה רבה מאוד. לוח 2 מציג את הממוצעים וסטיות התקן של כל שלושת המרכיבים וההיגדים הנכללים בהם. בתרשים

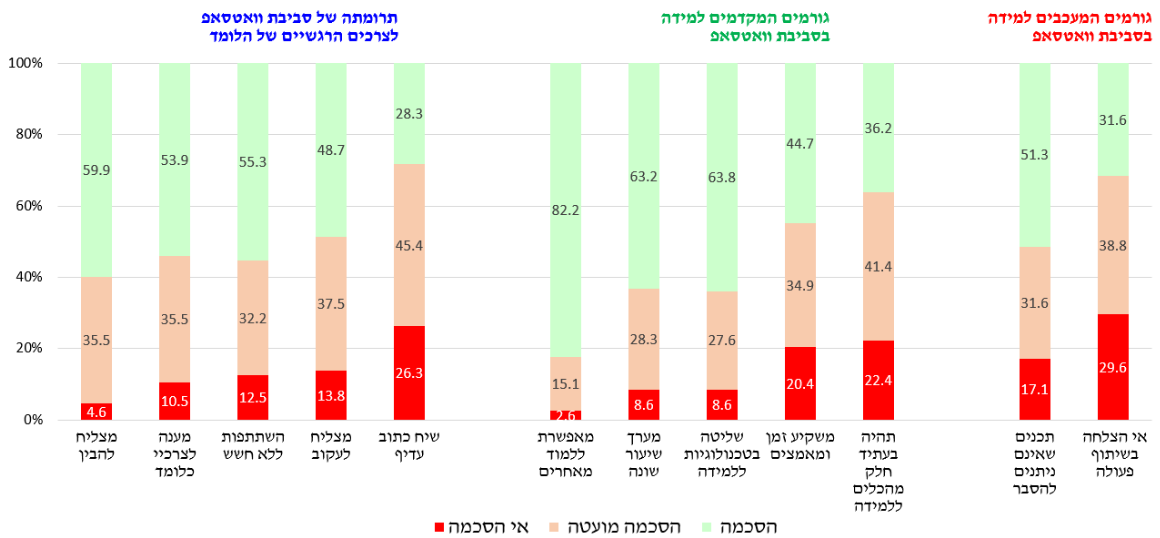
טבלה 1 - *ממוצעים וסטיות התקן של המרכיבים וההיגדים המתייחסים* ***לניסיון התלמידים*** *בלמידת מתמטיקה באמצעות וואטסאפ* המבוססים על השאלון

היגד	ממוצע	ס"ת
תרומתה של סביבת וואטסאפ לצרכים הרגשיים של הלומד	**3.51**	**1.15**
• אני מצליח לעקוב אחר השיעור במהלך השיח בוואטסאפ	3.46	1.65
• אני מצליח/ה להבין את החומר באותה מידה כמו בכיתה רגילה	3.84	1.30
• וואטסאפ מאפשר השתתפות ללא חשש לביצוע טעויות	3.73	1.68
• השיח הכתוב בוואטסאפ עדיף על פני השיח הדבור בכיתה רגילה	2.80	1.53
• הלמידה באמצעות וואטסאפ מאפשרת לי לענות לצרכים ספציפיים שלי כלומד יותר מאשר בכיתה רגילה	3.72	1.61
גורמים המקדמים למידה בסביבת וואטסאפ	**3.81**	**1.13**
• הלמידה באמצעות וואטסאפ מאפשרת לי ללמוד מאחרים יותר מאשר בכיתה רגילה	3.99	1.61
• מערך השיעור באמצעות וואטסאפ שונה ממערך שיעור של כיתה רגילה	4.65	1.40

• הלמידה באמצעות וואטסאפ שיפרה את השליטה שלי בטכנולוגיות זמינות ללמידת מתמטיקה	3.27	1.68
• אני משקיע יותר זמן ומאמצים במתמטיקה בפרויקט וואטסאפ לעומת תלמידים בכיתה רגילה	3.04	1.68
• וואטסאפ יהפוך בעתיד לחלק בלתי נפרד מהכלים העומדים לרשות התלמידים בלמידת מתמטיקה	4.09	1.67
גורמים המעכבים למידה בסביבת וואטסאפ	**3.09**	**1.29**
• ישנם תכנים מתמטיים שאינם ניתנים להסבר באמצעות וואטסאפ	3.53	1.73
• אינני מצליח לשתף פעולה עם תלמידים אחרים כמו בכיתה רגילה	2.66	1.47

N = 152

באופן בולט, מטבלה 1 אפשר לראות כי תפיסות התלמידים את הלמידה בסביבת וואטסאפ מגוונות. לפיכך, קובצו מידות ההסכמה של התלמידים להיגדים לשלוש רמות הסכמה: **אי הסכמה** (1 = בהחלט לא מסכים/ מסכימה), **הסכמה מועטה** (2 = במידה רבה לא מסכים/ מסכימה ו־3 = לא כל כך מסכים/ מסכימה) **והסכמה** (4 = מסכים/ מסכימה, 5 = מסכים/ מסכימה במידה רבה ו־6 = מסכים/ מסכימה במידה רבה מאוד).



תרשים 1. שיעור ההסכמה עם ההיגדים המתייחסים לניסיון התלמידים בלמידת מתמטיקה באמצעות וואטסאפ

במרכיב "תפיסת התלמידים את תרומתה של סביבת וואטסאפ לצרכים הרגשיים של הלומד" הובעה מידת ההסכמה הגבוהה ביותר כי בסביבת וואטסאפ "אני מצליח/ה להבין את החומר באותה מידה כמו בכיתה רגילה (ממוצע 3.84) כי "הלמידה באמצעות וואטסאפ מאפשרת לי לענות לצרכים ספציפיים שלי כלומד יותר מאשר בכיתה רגילה" (ממוצע 3.72) וכי "וואטסאפ מאפשר השתתפות ללא חשש לבצע טעויות" (ממוצע 3.73); מעל מחצית מן התלמידים הסכימו עם היגדים אלו, וכשליש מהם הביעו הסכמה מועטה עימם. רוב התלמידים הסכימו (48.7%) או הביעו הסכמה מועטה (37.5%) כי "אני מצליח לעקוב אחר השיעור במהלך השיח בוואטסאפ" (ממוצע 3.46). לעומת זאת, מעל רבע מהתלמידים (28.3) הסכימו כי "השיח הכתוב בוואטסאפ עדיף על פני השיח הדבור בכיתה רגילה" (ממוצע 2.80). קרוב למחצית (45.4%) הביעו הסכמה מועטה לכך ומעל רבע (26.3) לא הסכימו כי השיח הכתוב עדיף על השיח הדבור בכיתה.

במרכיב "גורמים המקדמים למידה בסביבת וואטסאפ" הובעה מידת ההסכמה הגבוהה ביותר כי "הלמידה באמצעות וואטסאפ מאפשרת לי ללמוד מאחרים יותר מאשר בכיתה רגילה" (ממוצע 3.99); 82.2% מהתלמידים הסכימו עם היגד זה. כשני שלישים מן התלמידים הסכימו כי "מערך השיעור באמצעות וואטסאפ שונה ממערך שיעור של כיתה רגילה" (ממוצע 4.65) וכי "הלמידה באמצעות וואטסאפ שיפרה את השליטה שלי בטכנולוגיות זמינות ללמידת מתמטיקה" (ממוצע 3.27). אולם פחות ממחצית מן התלמידים הסכימו (44.7) או הסכימו במידה מועטה (34.9%) עם ההיגד "אני משקיע יותר זמן ומאמצים במתמטיקה בפרויקט וואטסאפ לעומת תלמידים בכיתה רגילה" (ממוצע 3.04), בעוד שחמישית מהתלמידים לא הסכימו עם היגד זה. נוסף על כך, כשליש מן התלמידים הסכימו (36.2) או הסכימו במידה מועטה (41.4%) עם ההיגד לפיו "וואטסאפ יהפוך בעתיד לחלק בלתי נפרד מהכלים העומדים לרשות התלמידים בלמידת מתמטיקה (ממוצע 4.09) ו־22.4% מהם לא הסכימו עם ההיגד.

במרכיב "גורמים המעכבים למידה בסביבת וואטסאפ" רוב התלמידים הסכימו (51.3%) או הביעו הסכמה מועטה (31.6%) כי "ישנם תכנים מתמטיים שאינם ניתנים להסבר באמצעות וואטסאפ" (ממוצע 3.53); 17.1% מהתלמידים לא הסכימו כלל לכך. מידת ההסכמה הנמוכה ביותר במרכיב זה ובכלל ההיגדים הובעה בהיגד "אינני מצליח לשתף פעולה עם תלמידים אחרים כמו בכיתה רגילה" (ממוצע 2.66).

לסיכום, הממצאים החלקיים המופיעים במסמך זה בשל מגבלת המקום מצביעים על האופן שבו התלמידים תופסים את יתרונות סביבת וואטסאפ לתהליכי הלמידה שלהם. הם מצליחים להבין את החומר הנלמד בקבוצה, מצליחים להבין את ההסברים של עמיתיהם לקבוצה, מרגישים ביטחון להיות פעילים בקבוצה ללא חשש לטעות ומרגישים שסביבת וואטסאפ מאפשרת להם ללמוד מאחרים טוב יותר מאשר בכיתה רגילה ועונה על צורכיהם האישיים. לצד עמדות חיוביות כלפי הלמידה בסביבה זו נמצא כי יש נושאים שאינם מתאימים ללמידה בסביבה זו בעיני התלמידים ושהלמידה אינה תמיד מאפשרת שיתוף פעולה כמו בכיתה רגילה.

רשימת מקורות

Biton, Y., Segal, R. (2021). Learning and teaching mathematics with online social networks: The case of Facebook [Online First], IntechOpen, DOI: 10.5772/intechopen.95998

Creswell, J. W. (2013). Steps in conducting a scholarly mixed methods study.

Freeman, B. Higgins, K. N., & Horney, M. (2016). How students communicate mathematical ideas: An examination of multimodal writing using digital technologies. *Contemporary Educational Technology, 7*(4), 281–313.

Greenhow, C., & Askari, E. (2017). Learning and teaching with social network sites: A decade of research in K–12 related education. *Education and Information Technologies*, *22*(2), 623–645.

Morge, S. P., Schwartz, C. S., & Hargrove, T. (2020). Strategies and tools for promoting discourse during mathematics problem-solving in online settings. In *Handbook of Research on Online Pedagogical Models for Mathematics Teacher Education* (pp. 216–233). IGI Global.

Naidoo, J., & Kopung, K. J. (2020). Technology for the 21st century: Exploring the use of WhatsApp Instant Messaging for pre-service teachers' learning of mathematics. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *27*(2).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Tella, A. (2014). Globalisation, Blended Learning, and Mathematics Education: Implications for Pedagogy in Tertiary Institutions. In *Advancing Technology and Educational Development through Blended Learning in Emerging Economies* (pp. 190-211). IGI Global.

"זה שהתלמידים מבקשים ללמוד כך, זה אומר הרבה." עמדות מורים למתמטיקה כלפי למידה אדפטיבית

כרמית טל, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב; מכללת שאנן, חיפה
סיגלית פרסר־רחום, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב
הגר רובינק, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב
יניב ביטון, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב; מכללת שאנן, חיפה

מבוא

בשנים האחרונות מתחזקת גישת הפרסונליזציה בחינוך שלפיה יש להתאים תוכנית למידה אישית לכל תלמיד על פי צרכיו, יכולותיו, סגנון הלמידה ותחומי העניין שלו (מורגנשטרן ושות', 2019).

בעקבות העלייה בלמידה בעזרת כלים דיגיטליים הופיעו מגוון כלים וגישות התומכות בחוויית הלומד. מערכת למידה אדפטיבית בונה למשתמש מסלול למידה אישי המותאם לו, והמטרה היא לשמור על המשתמש במצב התפתחות מקסימלי ולעקוב אחר התפתחותו להמשך התאמה באונליין (Kelly & Tangney, 2006). מטרת המחקר שלנו היא לבחון את עמדות המורים המלמדים בעזרת מערכת למידה אדפטיבית כחלק ממחקר רחב יותר העוסק בשאלות נוספות הנוגעות למערכת למידה זו.

רקע תאורטי

בעולם הלמידה הדיגיטלי (K12) יש היום יותר ויותר פתרונות המבוססים על למידה אדפטיבית במודלים שונים – כמוצרים המקדמים פרסונליזציה ונותנים מענה שלם לתוכנית הלימודים (בעיקר במתמטיקה, אם כי לא רק בתחום זה) או כמוצר משולב בסביבות ובמוצרים קיימים ונותנים ערך מוסף משמעותי ללמידה ולמעבר לפרסונליזציה.

השימוש ההולך וגובר בניתוח נתוני הלמידה (Learning Analytics) מאפשר למורה לקבל תמונת מצב של כל תלמיד בכל זמן ולאורך זמן. התפיסה היא שהלמידה צריכה להיות רלוונטית ובעלת ערך ללומד ולמלמד ולכן צריכה להיות פעילה ולא פסיבית. מכאן נובעת ההבנה שהלמידה אפשרית בכל עת ובכל שעה ואינה מוגבלת למקום וזמן ייחודיים. כל אלה מסבירים את ההיצע הרחב ואת הפתרונות המגוונים שהלמידה האדפטיבית מציעה כיום.

הגישה האדפטיבית רואה לנגד עיניה את התלמיד במרכז תהליך ההוראה על ידי מתן אפשרות שווה לכל התלמידים ללמוד לפי הרמה המתאימה להם. ניצול נכון של מערכת אדפטיבית למטרת למידה מותאמת אישית יכול לאפשר למורה להעניק לתלמיד הדרכה אישית, הדרכה בקבוצות קטנות, העשרה או תגבור בהתאם לקצב שלו או לקבוצת תלמידים שהגיעו לצרכים זהים בעזרת הלמידה האדפטיבית. ניצול נכון של הטכנולוגיות יכול להביא לשיפור בהישגי התלמידים (Grant & Basye, 2014).

מערכות למידה טכנולוגיות נחשבות אדפטיביות כשהן משתנות באופן דינמי עבור כל תלמיד ותלמיד בתגובה למידע הנאסף במהלך הלמידה עצמה, ולצורך התאמה טובה יותר ללמידה (Kara & Savin, 2013). המערכת משתמשת במידע המצטבר בשעה שהתלמיד עובד כדי לשנות, לדוגמה, את הדרך שבה מושג מיוצג, את רמת הקושי, את רצף הבעיות או המטלות ואת אופי הרמזים או המשובים הניתנים לתלמיד. כך התלמידים מקבלים מסלול, קצב ופדגוגיה אישיים וגמישים, על פי צורכיהם.

כדי ליצור מסלולי למידה, בשלב הראשון יש צורך לאסוף נתונים על התכנים, על ביצועי התלמידים ועל קשיים ברמת התלמיד הבודד וברמת הכיתה כולה. בשלב זה התלמידים נדרשים לענות על כל השאלות, והמערכת לומדת באילו שאלות יש שכיחות גבוהה של הצלחות/כישלונות, באילו שאלות תלמידים בחרו לבקש עזרה מהמורה, את משך זמן הצפייה באותו מסך ונתונים נוספים.

במחקר זה מוצגים ממצאים כחלק מפרויקט "שברים בדרך שלי" מטעם המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח) בשיתוף מיקרוסופט אשר נועד לפתח ולהעריך מערכת אדפטיבית להוראת ולמידת נושא השברים בכיתות ד–ה. מערכת זו פעילה זה כבר 4 שנים ויושמה עד כה במעל חמישים בתי ספר ברחבי הארץ. המחקר המוצג הוא חלק ממחקר רחב יותר העוסק בשאלות נוספות הנוגעות למערכת למידה זו. מטרת המחקר הייתה ללמוד את עמדותיהם של מורים המלמדים את נושא השברים בכיתתם בעזרת מערכת הלמידה האדפטיבית.

מתודולוגיה

במחקר הנוכחי השתתפו 185 מורים מהמגזר היהודי ומהמגזר הערבי. ממצאי המחקר נאספו בעזרת כלים אלה:

1. שאלוני מורים מהחברה היהודית והערבית
2. 2 קבוצות מיקוד ובהן מורים מהחברה היהודית ומהחברה הערבית
3. נתונים מתוך המערכת (KPI – Key performance indicators)

השאלון למורים היה בנוי מ־40 שאלות: 36 שאלות סגורות ו־4 שאלות פתוחות. מתוך 185 מורים שאליהם נשלח השאלון, ענו 33 מורים שהם 18% מכלל המשתתפים. מתוך מורים אלה 52% מהמשיבים ענו רק לגבי כיתה ד, 42% ענו רק לגבי כיתה ה ו־6% ענו לגבי שתי הכיתות. מבחינת ניסיון בהוראה, ל־78% מהמורים שהשתתפו במחקר יש ניסיון קודם בהוראת נושא השברים לכיתות ד או ה. קבוצות המיקוד היו מורכבות מ־12 מורים בסך הכול. המורים חולקו ל־2 קבוצות מיקוד – אחת בערבית ואחת בעברית. המטרות של קבוצות המיקוד היו לשמוע את דברי המורים, את התובנות שלהם בעקבות העבודה במערכת הלמידה האדפטיבית וכן לחשוף אותם זה לזה לצורך שיתוף ויצירת דיון ושיח. הנתונים שנאספו בקבוצות הדיון שימשו ליצירת השאלונים למורים.

בהלימה עם למידת התלמידים במערכת האדפטיבית, ניתן למורה לוח בקרה אישי (דשבורד) שבו הוא יכול לבחון את מצב התלמידים בכל רגע נתון. לוח הבקרה מאפשר לו לנווט את תהליך הלמידה מתוך בחינה אישית של כל אחד מהתלמידים, ולהציג נתוני הצלחה וכישלון, מיקום ברצף הלמידה וציונים, ובכך לתת מענה נוסף לתלמידים על פי הצורך. ניתוח הממצאים משולב מכלל מקורות המידע.

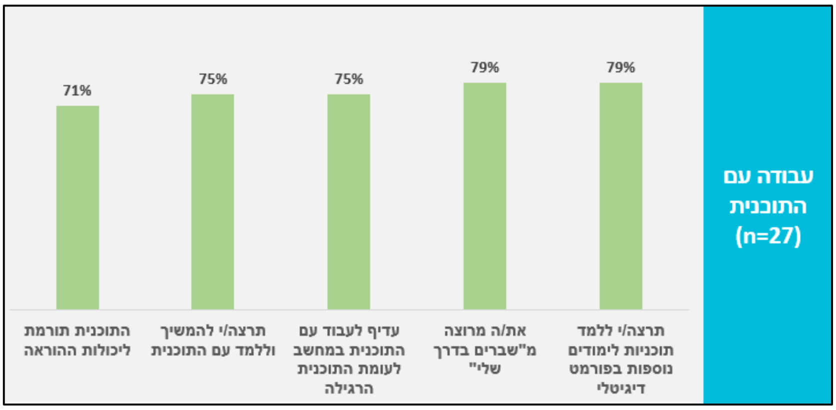
ממצאים

הנתונים שנאספו בקבוצות המיקוד ובשאלוני הסקר מלמדים על עמדותיהם של המורים לגבי הוראה בעזרת מערכת הלמידה האדפטיבית "שברים בדרך שלי".

הנתונים הנוגעים לשביעות רצונם של המורים מראים כי 79% מהמורים מרוצים מהמערכת וכי 71% מהם חשים שהתוכנית תורמת ליכולות ההוראה שלהם (ראו איור 1).

איור 1

עמדות המורים כלפי למידה אדפטיבית



נתונים אלה חזרו על עצמם גם בשאלות הפתוחות כאשר המורים ציינו את יתרונות העבודה במערכת: "כל תלמיד מתקדם בקצב שלו, המורה רואה את ההתקדמות ואת הציון מניסיונות ראשונים וגם מהניסיון האחרון – כך קל לתת מענה דיפרנציאלי"; "המערכת הזו באמת תומכת בפיתוח לומד עצמאי". שני מורים אף הביעו את ציפיותיהם להתרחבות התוכנית: "אשמח להמשך התוכנית בשברים עשרוניים וגם לתחומי דעת אחרים"; "אני מחכה שכל חומרי הלימוד יעברו למערכת כמו זו של שברים בדרך שלי". בקבוצות המיקוד ציינו המורות כי הן היו ממליצות על התוכנית גם לעמיתותיהן למקצוע וכי היו מעוניינות להמשיך ללמד באופן זה.

השאלונים אפשרו לבחון את אופן העבודה של המורים במערכת, את התנהלותם במהלך השנה, את השימוש שלהם במדריך למורה ואת השילוב שעשו עם חוברת הלימוד ועם תכנים נוספים, מעבר לתכנים שמערכת הלימוד הממוחשבת מציעה. 63% מהמורים משלבים עבודה בחוברת עם עבודה במערכת הממוחשבת, ו־59% מהם נעזרים במדריך למורה במחשב לעבודתם. המורים מאפשרים לתלמידים לעבוד באופן עצמאי ומסייעים במידת הצורך, ורק 10% מתוכם מאפשרים לתלמידים לעבוד באופן עצמאי לגמרי ללא כל סיוע מצידם. בהתייחסות לשאלות הפתוחות המורים כותבים כי "המערכת מאפשרת תרגול עצמאי מכל מקום" וגם "למידה עצמאית המפנה זמן לעבודה עם מתקשים".

מקבוצת המיקוד עלה כי היו מורות שחיכו לתקופת הסגר השלישי כדי להתחיל בתוכנית, בייחוד בחברה הערבית.

בהתייחס לעבודה עם לוחות הבקרה האישיים נמצא כי 77% מהמורים מצליחים לעקוב אחר נתוני התלמידים בדוחות ולזהות רמות שונות של תלמידים (73%), 63% מהמורים מעידים על עצמם כי הדוחות מסייעים להם לתכנן את השיעור ואילו 46% מהמורים עובדים עם התלמידים על בסיס הדוחות: מזהים נושאים בעייתיים, מבצעים הקניות ומקדישים זמן לעבודה עם התלמידים המתקשים (ראו איור 2).

איור 2

שימוש המורים בלוחות הבקרה (דשבורד)

מבחינת התאמת התוכנית לשונות בכיתה, 89% מהמורים ציינו כי התוכנית נותנת מענה לתלמידים מתקדמים ומאתגרת את החזקים, וכן 48% סברו שהתוכנית מותאמת לתלמידים ברמות שונות. בקבוצות המיקוד היו מורות שטענו כי השימוש במערכת מעודד תלמידים מתקשים לא לפחד לטעות, מאפשר להם לתקן את שגיאותיהם ולהתקדם בקצב שהם קובעים וכן מעודד אותם. אחת המורות שיתפה כי תלמידים שבדרך כלל אינם משתתפים בשיעורים, משתתפים ונשמעים יותר כאשר הם עובדים במערכת.

לסיכום

המחקר הנוכחי מהווה חלק מפיתוח והערכת תוכנית הלימודים הממוחשבת ללימוד שברים: "שברים בדרך שלי". מטרת המחקר הייתה לאסוף ממצאים על סמך התנסותם ודעתם של מורים שלימדו

במערכת הלמידה האדפטיבית לצורך הפקת לקחים ושיפור התוכנית. ממצאי המחקר מחזקים את מורגנשטרן ושות' (2019) המצדדים בגישת הפרסונליזציה בחינוך והגורסים כי תוכנית למידה המתאימה את עצמה לכל תלמיד תאפשר לו להביא לידי ביטוי את יכולותיו באופן מרבי, לשפר את הישגיו ולהפוך לתלמיד האחראי לתהליך הלמידה האישי שלו. בהתבסס על הנתונים והמשובים שהתקבלו מהמורים, נמצא כי שילובה של המערכת אפשר למורים להתמודד עם השונות בקרב תלמידי כיתתם. המורים רואים במערכת בכלל ובתכניה הדיגיטליים בפרט ערך חשוב התורם להוראת נושא השברים באופן חווייתי ומהנה עבור התלמידים. לטענתם, השימוש במערכת עודד את המוטיבציה וההנעה ללמידה, תרם לפיתוח כישורי למידה עצמית של התלמידים ואפשר מעקב אחר התקדמותם בצורה טובה יותר לעומת הלמידה באופן המסורתי. המורים דיווחו על למידה פעילה ושיתוף פעולה בקרב תלמידים שאינם משתפים בדרך כלל פעולה בשיעורי המתמטיקה (ללא המערכת), אם כי עלה הנושא של תלמידים מתקשים שלא קיבלו מענה מספק. עוד עלה כי השימוש במערכת מאפשר למידה המותאמת ללמידה מרחוק. זוהי נקודה חשובה המהווה יתרון בתקופה הנוכחית שבה המציאות מעמידה בפנינו אתגרים של ריחוק פיזי ובידוד. המורים הביעו שביעות רצון מהמערכת ורצון להמשיך וללמד באמצעותה.

ביבליוגרפיה

מורגנשטרן, ע', פינטו, א', וגרהוף, ע', הופמן, ת' ולוטטי, ש. (2019). פדגוגיה מוטת עתיד 2: מגמות, עקרונות, השלכות ויישומים. משרד החינוך.

Kara, N., & Sevin, N. (2013). Adaptive Learning Systems: Beyond Teaching Machines. Contemporary Educational Technology, 2013, 4(2), 108-120.

Kelly, D., & Tangney, B. (2006). Adapting to intelligence profile in an adaptive educational system. Interacting with Computers, 18(3), 385–409. https://doi.org/10.1016/j.intcom.2005.11.009

Grant, P., & Basye, D. (2014). Personalized learning: A guide for engaging students with technology. Eugene, OR: International Society for Technology in Education.

אמונות של מבוגרים לגבי קידום חשיבה מתמטית אצל ילדים צעירים

רותי ברקאי, מכללת סמינר הקיבוצים, אוניברסיטת תל אביב
אסתר לוינסון, אוניברסיטת תל אביב
דינה תירוש, אוניברסיטת תל אביב
פסיה צמיר, אוניברסיטת תל אביב

רקע תיאורטי

מרבית המחקרים שהתמקדו בחקירת אמונות של מבוגרים לגבי החשיבות שיש לקידום חשיבה מתמטית של ילדים בשנים שלפני כיתה א מתמקדים באמונותיהם של גננות ושל הורים. במרביתם מדווח כי גם הגננות וגם ההורים סבורים כי יש חשיבות לקידום החשיבה המתמטית של הילדים הצעירים (למשל, Missall, Hojnoski, Caskie, & Repasky, 2015). עם זאת, מספר מחקרים מצאו כי הורים סבורים שחשוב יותר לשפר כישורי קריאה מאשר כישורים מתמטיים (Sonnenschein, Stites, & Dowling, 2020) ומחקר אחר אף הצביע על כך שחלק מההורים סבורים כי הוראת מתמטיקה בגיל הרך עלולה לעכב התפתחות חברתית ורגשית (Cannon & Ginsburg, 2008).

אמונות של מבוגרים לגבי חשיבות קידום ידע מתמטי של ילדים יכולות להשפיע על האינטרקציות שלהם עם ילדים. מספר מחקרים דיווחו כי הורים נוטים לסייע לילדיהם ללמוד מיומנויות שפה יותר מאשר כישורי מתמטיקה, הן בהקשרים יומיומיים כגון בביצוע מטלות בית, והן בהקשרים מובנים יותר, כגון הוראה ישירה (למשל, Cannon & Ginsburg, 2008). במחקר שנערך לאחרונה (Sonnenschein et al., 2020), רוב ההורים דיווחו על מעורבות ילדים בפעילויות קריאה מדי יום בעוד שתדירות העיסוק בפעילויות מתמטיות הייתה פחותה והתרחשה לכל היותר פעמיים בשבוע. במחקר בו הורים התבקשו לנהל יומן ולציין את המידה בה הם יוזמים סוגים ספציפיים של פעילויות מתמטיות עם ילדיהם ובנוסף נערכה בו צפייה על אינטראקציות מתמטיות בין ילדים להורים דווח כי מרבית הפעילויות התייחסו למספרים ולפעולות בהם. מספר קטן של פעילויות התייחס לגיאומטריה ולצורות (Skwarchuk, 2009). עם זאת, במחקר אחר (Missall, et al., 2015) ההורים דיווחו הן על ספירה בקול והן על שיום צורות פשוטות כעל פעילויות מתמטיות שכיחות ביותר אותן ביצעו בבית עם ילדיהם.

הידע המתמטי של מבוגרים ותחושתם לגבי מידת הבקיאות שלהם בידע המתמטי הרלוונטי לגיל הרך ובדרכים להצגתם לילדים עשויים להשפיע על התייחסותם לחשיבות קידום החשיבה המתמטית של ילדים בגיל הרך. במחקר של Cannon & Ginsburg (2008) שנערך בארצות הברית דווח כי מרבית ההורים שהשתתפו במחקר ציינו כי חסר להם ידע לגבי דרכי קידום חשיבה מתמטית בגיל הרך וכי הם לא מודעים ליעדים שנקבעו בתכניות הלימודים בארצות הברית ללימוד מתמטיקה בגיל צעיר. במחקר נוסף (Sonnenschein et al., 2020) דווח כי 64% מההורים שהשתתפו במחקר ביקשו לקבל מידע שיסייע להם לתמיכה בקידום החשיבה המתמטית של ילדיהם. רובם ביקשו שיספקו להם רעיונות לביצוע פעילויות מתמטיות מהנות עם ילדיהם, כשליש ביקשו לקבל דיווח על הידע המתמטי של ילדיהם ורבע מהמשתתפים התעניינו בקבלת דפי עבודה שניתן לתת לילדיהם. במחקר נוסף נמצא כי הורים שרמות חרדת המתמטיקה שלהם גבוהות עסקו פחות בפעילויות מתמטיות עם ילדיהם מאשר הורים שרמות חרדת המתמטיקה שלהם נמוכות (Elliott, Bachman, & Henry, 2020).

כפי שציינו, מחקרים קודמים התמקדו בעיקר באמונות של גננות ושל הורים לגבי פיתוח חשיבה מתמטית בגיל הרך. עם זאת, ילדים מבלים לעתים קרובות עם מבוגרים אחרים כגון סבא וסבתא, דוד ודודה. בנוסף, גם לאמונות של חברים בקהילה שאין להם בשלב בו נערכים המחקרים קשרים עם ילדים צעירים לגבי קידום החשיבה המתמטית בגיל הרך יכולה להיות חשיבות רבה בעיצוב מדיניות לגבי קידום חשיבה מתמטית בגיל הרך. בהתאם לכך, במחקר הנוכחי אנו בוחנים אמונות של מבוגרים שאינם גננות לגבי קידום חשיבה מתמטית של ילדים צעירים.

שאלות מחקר הן: (1) האם מבוגרים רואים חשיבות בהתערבות מבוגרים לקידום חשיבה כמותית וחשיבה גיאומטרית של ילדים צעירים, ומהן הסיבות הניתנות על ידם לעמדתם? (2) האם מבוגרים רואים חשיבות בקבלת הדרכה לקידום חשיבה כמותית וחשיבה גיאומטרית אצל ילדים צעירים, ומהן הסיבות הניתנות על ידם לכך? (3) האם יש הבדל בין אמונות המבוגרים לגבי חשיבות קידום חשיבה כמותית לבין אמונותיהם לגבי קידום חשיבה גיאומטרית?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 51 מבוגרים (מתנדבים), בגילאי 20 עד 60, אשר אינם גננות: 22 מהם הם הורים לילדים בגילאי שלוש עד שש, 18 ציינו שיש להם קשרים עם ילדים בגיל זה (סבתא/ סבא; דודה/ דוד). השאר (11) הבהירו שאין להם קשר עם ילדים בגילאים אלו. המשתתפים במחקר השיבו על שני שאלונים, בהפרש של לפחות שבוע. השאלון הראשון התייחס לאמונות מבוגרים לגבי קידום היבטים כמותיים אצל ילדים צעירים, והשני לאמונות מבוגרים לגבי קידום ידע גיאומטרי של ילדים צעירים.

המשתתפים התבקשו להשיב (בכתב) על שתי שאלות בכל שאלון. בשאלון לגבי קידום היבטים כמותיים נכללו השאלות: (1) האם לדעתך חשובה התערבות של מבוגר/ת כדי לפתח חשיבה כמותית אצל ילדים בגיל הגן (3-6) ? הסבירו. (2) האם לדעתך חשוב לתת הדרכה למבוגר/ת כך שיוכל לפתח חשיבה כמותית אצל ילדים בגיל הגן (3-6) ? הסבירו. בשאלון שהתייחס לקידום ידע גיאומטרי של ילדים צעירים המשתתפים נשאלו: (3) האם לדעתך חשובה התערבות של מבוגר/ת כדי לפתח חשיבה גיאומטרית אצל ילדים בגיל הגן (3-6) ? הסבירו. (4) האם לדעתך חשוב לתת הדרכה למבוגר/ת כך שיוכל לפתח חשיבה גיאומטרית אצל ילדים בגיל הגן (3-6) ? הסבירו.

בשלב הראשון בניתוח הממצאים נבדקה שכיחות התגובות לגבי חשיבות קידום ידע ילדים צעירים בכל אחד מהתחומים וכן לגבי חשיבות ההדרכה. לאחר מכן, בוצע ניתוח איכותני כדי לעמוד על הסיבות שהמשתתפים הציעו לתגובותיהם. שני חוקרים סיווגו את כל הסיבות. חוקר שלישי אימת את הסיווג. ההסכמה הראשונית הייתה של 91% לקטגוריות לגבי שאלות חשיבות ההתערבות, ו -88% לקטגוריות לגבי שאלות ההדרכה. לאחר דיון בין שלושת החוקרים, הושגה הסכמה של 100%.

ממצאים

טבלה מספר 1 מציגה את שכיחות התשובות התומכות בהתערבות מבוגרים כדי לפתח חשיבה כמותית וחשיבה גיאומטרית אצל ילדי גן ובהדרה בהקשר זה.

טבלה 1

שכיחות המבוגרים (%) שהציגו אמונות חיוביות בנוגע להתערבות והדרכה של מבוגרים

	חשיבה כמותיים		חשיבה גיאומטרית	
	התערבות	**הדרכה**	**התערבות**	**הדרכה**
הורים (N=22)	21(95)	12(55)	20(91)	14(64)
קשר אחר (N=18)	18(100)	15(83)	15(83)	12(67)
אין קשר (N=11)	10(91)	8(73)	10(91)	8(73)
סך הכל (N=51)	49(96)	35(69)	45(88)	33(65)

כפי שניתן לראות, כמעט כל המשתתפים האמינו כי יש חשיבות להתערבות מבוגרים לשם קידום החשיבה הכמותית והגיאומטרית אצל ילדים צעירים. נציין גם כי לא נמצאו הבדלים משמעותיים (McNemar test) בין אמונותיהם לגבי חשיבות ההתערבות לפיתוח חשיבה כמותית לבין אמונותיהם לגבי פיתוח חשיבה גיאומטרית. בנוסף, לא נמצאו הבדלים בין הורים, מבוגרים שיש להם קשר אחר עם ילדים צעירים, ואלה שטענו כי אין להם קשר עם ילדים קטנים, באמונות לגבי חשיבות ההתערבות לפיתוח חשיבה כמותית וחשיבה גיאומטרית של ילדים צעירים.

כפי שאפשר לראות מטבלה 1, מרבית המבוגרים חשו שיש חשיבות למתן הדרכה למבוגרים כדי שיוכלו לפתח את החשיבה הכמותית ואת החשיבה הגיאומטרית של ילדים בגיל הגן. עם זאת, יותר מבוגרים

הביעו עמדות התומכות בחשיבות שיש להתערבות מבוגרים כדי לקדם את חשיבת הילדים הצעירים בשני התחומים מאשר בצורך לקבל הדרכה בהקשר זה (McNemar test; p<.01). למרות שלא נמצאו הבדלים משמעותיים לגבי האמונה בחשיבות ההדרכה בתחום הכמותי ובתחום הגיאומטרי, תשעה מבוגרים ציינו כי לדעתם יש חשיבות לקבלת הדרכה בתחום הכמותי, אך לא בתחום הגיאומטרי. אחת המשתתפות, למשל, רשמה, בהתייחס לקבלת הדרכה לגבי היבטים כמותיים: "דרכי החשיבה של ילדים צעירים הן שונות ולכן אתה צריך להסביר להם בדרכים שהם יבינו". בהתייחס לאמונות שלה לגבי הדרכה בתחום הגיאומטרי אותה משתתפת רשמה: "לא. הילדים צעירים מכדי ללמוד רעיונות מורכבים בגיאומטריה". לעומת זאת, ארבעה מבוגרים ציינו כי אין חשיבות למתן הדרכה בתחום הכמותי אך תמכו בחשיבותה בתחום הגיאומטרי. לדוגמה, בהתייחס להדרכה בתחום הכמותי, אחד המבוגרים רשם: "זה לא הכרחי. באופן כללי, אנו מדברים על מושגים מספריים פשוטים, ולדעתי כל מבוגר עם מעט דמיון יכול להסביר זאת לילדים". עם זאת, בהתייחס להדרכה בתחום הגיאומטרי, הוא כתב, "כן, זה חשוב. כדי לדעת כיצד להסביר מושגים בצורה נכונה ולהניח את הבסיס למה שיבוא אחר כך".

ציינו כי כמעט כל המבוגרים ראו חשיבות בהדרכת מבוגרים. סיבות שונות ניתנו על ידם לאמונה זו. מהנתונים עלו שבע קטגוריות של סיבות. הסיבות להתערבות בתחום הכמותי היו דומות לאלו של התחום הגיאומטרי. עם זאת, המבוגרים לא בהכרח נתנו את אותה סיבה להתערבות בתחום הכמותי ובתחום הגיאומטרי. קטגוריות הסיבות שנמצאו: (i) ילדים צריכים מבוגרים שילמדו אותם; (ii) מבוגר יכול לחשוף ילדים למושגים חדשים; (iii) הכנה לכיתה א'; (iv) מתמטיקה נמצאת בכל מקום (בסביבה שלנו); (v) ילדים צריכים לתרגל (מעבר למה שלומדים בגן); (vi) פיתוח גישה חיובית למתמטיקה; (vii) התייחסות ללמידה אפקטיבית בגיל צעיר.

מבוגרים בודדים טענו שאין חשיבות להתערבות של מבוגר/ת כדי לקדם חשיבה מתמטית של ילדים בגיל הגן (שניים לגבי היבטים כמותיים ושישה לגבי היבטים גיאומטריים). שניים הסבירו זאת בכך שילדים בגיל הזה לומדים בעצמם (למשל, "על ידי צפייה במבוגר או בילדים אחרים"). השאר ציינו שזה תפקיד הגננת, ולא של ההורים או מבוגרים אחרים.

כפי שציינו, מרבית המבוגרים קבעו כי יש חשיבות להדרכת מבוגרים לגבי פיתוח חשיבה כמותית וגיאומטרית בגיל צעיר. מניתוח ההסברים שניתנו לכך, עולה כי מרביתם סבורים שיש חשיבות לרכישת כלים שעשויים לסייע למבוגרים בכך. הסברים נוספים שנתנו, לגבי הצורך בהדרכה, התייחסו לצורך להיזהר שלא להטעות את הילדים; להכיר דרכי חשיבה של ילדים ולהתייחס כראוי להיבטים רגשיים וזאת בהתאמה לגיל הצעיר של הילדים. כ- 30% מהמשתתפים שציינו כי, לדעתם, אין צורך בהדרכה נימקו את קביעתם בכך שזהו תפקידה של הגננת לקדם את הידע המתמטי של הילדים ולכן חשוב שהגננות יקבלו הדרכה ובכך שקידום היבטים כמותיים וגיאומטריים מתרחשים באופן טבעי אצל ילדים ולמבוגרים יש את הידע הנדרש כדי לתמוך בתהליכים אלה, וזאת כיוון שהמתמטיקה הרלוונטית לגיל זה היא בסיסית ופשוטה.

דיון

במחקר זה נבחנו אמונות מבוגרים לגבי החשיבות שיש למעורבות מבוגרים בפיתוח חשיבה כמותית וחשיבה גיאומטרית של ילדים צעירים (לפני כניסה לכיתה א') ולקבלת הדרכה בנושאים אלה. ממצאי המחקר מעידים כי מרבית המשתתפים רואים חשיבות למעורבות מבוגרים. יתר על כן, בעוד שחלק מהמחקרים מצאו כי הורים עוסקים יותר בפעילויות בתחום הכמותי מאשר בפעילויות בתחום הגיאומטרי (Skwarchuk, 2009), במחקר זה לא נמצאו הבדלים בין אמונות המשתתפים בחשיבות מעורבות המבוגרים בשני תחומים אלה. בהתאם לכך, אם מבוגרים מאמינים שהתערבות מבוגר חשובה לצורך קידום חשיבת הילדים הן בתחום הכמותי והן בתחום הגיאומטרי, אך מדווחים על פחות מעורבות בפעילויות גיאומטריות, ייתכן שיש צורך בתמיכה רחבה יותר בתחום הגיאומטרי. חשוב לציין כי רוב המחקרים הקודמים התמקדו באמונות הורים (Missall et al., 2015), במחקר זה נמצא כי בדומה להורים, גם סבים, סבתות, דודים ודודות ואף מבוגרים שאין להם קשרים עכשוויים עם ילדים צעירים, מאמינים בחשיבות שיש לאינטראקציות של מבוגרים עם ילדים בהקשר להיבטים כמותיים וגיאומטריים. ברמה המעשית, יתכן כי ראוי לקיים סדנאות לקידום חשיבה מתמטית של ילדים לא רק

להורים, אלא גם למבוגרים אחרים שנמצאים בקשר עם ילדים ואולי אף לאחרים שלא נמצאים בקשר עם ילדים אך מעוניינים לרכוש ידע בהקשר זה.

בנוסף, נמצא כי הסיבות לאמונות המבוגרים בחשיבות האינטראקציה של מבוגרים עם ילדים שונות. סיבות אלה עשויות להשפיע על סוגי הפעילויות המתמטיות שיתרחשו באינטראקציות אלה. מחקר עתידי יכול לחקור זאת. מעניין לציין כי בעוד שמחקרים קודמים התייחסו לכך שחרדת מתמטיקה עשויה להשפיע על האינטראקציות המתמטיות של הורים עם ילדיהם (Elliott, et al., 2020), במחקר זה מעט מבוגרים התייחסו לנושאים ריגושיים.

בהתייחס לאמונות לגבי הדרכת מבוגרים, הממצאים שהתקבלו הראו כי פחות מבוגרים רואים חשיבות בקבלת הדרכה. בין אלה שהסכימו כי הדרכה חשובה, מעטים הביעו את הצורך ללמוד יותר על דרכי חשיבה של ילדים. ייתכן שידע מסוג זה יכול להשפיע באופן משמעותי על סוגי הפעילויות המתמטיות שמבוגרים מציעים לילדים. התובנות מדוע מבוגרים מאמינים (או אינם מאמינים) בצורך בהדרכה עשויות לסייע לגייס מבוגרים (לא רק הורים) להשתתף בסדנאות המעודדות אינטראקציות בין מבוגרים לילדים במטרה לקדם את החשיבה המתמטית של ילדים צעירים.

המחקר שמתואר במאמר זה ממומן על ידי הקרן הלאומית למדע (מענק מחקר 1631/18)

רשימת מקורות

Cannon, J., & Ginsburg, H. P. (2008). “Doing the math”: Maternal beliefs about early mathematics versus language learning. *Early Education and Development*, *19*(2), 238-260.

Elliott, L., Bachman, H. J., & Henry, D. A. (2020). Why and how parents promote math learning with their young children: A mixed-methods investigation. *Parenting*, 20(2), 108-140.

Missall, K., Hojnoski, R. L., Caskie, G. I., & Repasky, P. (2015). Home numeracy environments of preschoolers: Examining relations among mathematical activities, parent mathematical beliefs, and early mathematical skills. *Early Education and Development, 26*(3), 356-376.

Skwarchuk, S. L. (2009). How do parents support preschoolers’ numeracy learning experiences at home? *Early Childhood Education Journal*, *37*(3), 189-197.

Sonnenschein, S., Stites, M., & Dowling, R. (2020). Learning at home: What preschool children’s parents do and what they want to learn from their children’s teachers. *Journal of Early Childhood Research*, 1-14, https://doi.org/10.1177/1476718X20971321.

כיצד מגיבים ילדים בגן למטלה שאין לה פתרון? המקרה של דגם חוזר.

איריס שרייבר, אוניברסיטת בר אילן, מכללת סמינר הקיבוצים

מבוא ורקע תאורטי

מאמר זה מתאר חלק ממחקר העוסק בלימודי מתמטיקה בגן ילדים בנושא דגמים. למידת המתמטיקה בגיל הגן חיונית להנחת היסודות של נושאים ומושגים מתמטיים רבים שילמדו הילדים מאוחר יותר בבית הספר, מאפשרת לילדים לחקור אובייקטים ורעיונות מתמטיים, וכמו כן, חשובה לפיתוח יצירתיות, כישורים מתמטיים ויכולות חשיבה (משרד החינוך בישראל, 2010; NCTM, 2000). המחקר הנוכחי מתמקד בנושא המתמטי של דגמים, המהווה חלק מתכנית הלימודים במתמטיקה לגני ילדים בישראל. דגם הוא סדרה של איברים המסודרים על פי כלל מסוים. לכל איבר בסדרה יש ערך יחיד הנקבע על פי מקומו בסדרה, כך שהאיברים יופיעו בצורה ניתנת לניבוי. חשיבות הנושא מודגשת במסמכי מדיניות (NCTM, 2000) כיוון שדגמים עשויים להוות בסיס לפיתוח חשיבה אלגברית, ולקדם רכישת מושגים מתמטיים שונים - כגון משתנה, פונקציות וביטויים אלגבריים (Zazkis & Liljedahl, 2002; Warren, 2005). דגמים עשויים גם להוביל לרמת חשיבה גבוהה - ליכולת הכללה (משרד החינוך בישראל, 2010). מחקרים רבים ממליצים ללמד דגמים חוזרים וצומחים בכל הגילאים, במיוחד בגן ילדים, ומציעים פעילויות שונות ומשימות דגמים כגון תיאור, יצירה, המשך או השלמה של דגם (Threlfall, 1999; Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011; Warren, 2005).

לכל משימת דגמים ישנם מאפיינים שונים העשויים להשפיע על ביצועי הילדים, כגון אורך הדגם הנתון, אופן הצגתו לילדים, מורכבות ואורך יחידת החזרה ועוד. אחד המאפיינים הללו הוא מה שאנו מספקים לילדים על מנת שיוכלו לבצע משימה נתונה. לדוגמה, אם ילדים מתבקשים להמשיך ולבנות מגדל קוביות המורכב מדגם חוזר של קובייה כחולה - קובייה צהובה - קובייה כחולה - קובייה צהובה, נוכל לספק להם: (1) קוביות בצבע כחול וצהוב בלבד (בדיוק הצבעים הדרושים להם) ; (2) קוביות במגוון רחב של צבעים, ביניהם הכחול והצהוב הנדרשים למשימה, כך שהילדים צריכים לזהות ולבחור את הקוביות המתאימות להם להשלמת המשימה; (3) סט קוביות בו חסר אחד או יותר מהצבעים הדרושים: רק קוביות כחולות, או רק קוביות צהובות, או קוביות בצבעים שונים שאינם כוללים את הצבעים הדרושים. במקרה זה למטלה אין פתרון, הילדים אינם יכולים להמשיך ולבנות את המגדל בשל היעדר הצבעים הדרושים.

באופן כללי, בספרות המקצועית , כמעט ואין התייחסויות למצבים בהם תלמידים מקבלים בעיה שאין לה פתרון, ובפרט, נמצאו מעט מאד התייחסויות לכך בגיל הגן. מחקרים קודמים בהם נתנו לתלמידי בית ספר יסודי בעיה ללא פתרון (De Corte & Verschaffel, 1985; Reusser & Stebler, 1997) מצאו כי ילדים לא זיהו כי הבעיה איננה ניתנת לפתרון וחלקם נתנו תשובות שאינן רלוונטיות. במחקר אחר שנערך עם ילדי גן קיבלו הילדים בעיה שאין לה פתרון (לחלק ב"מסיבת יום הולדת" עשרים ושבעה כרטיסי ממתקים לארבע צלחות שווה בשווה), ונמצא כי רוב הילדים לא זיהו שהבעיה איננה ניתנת לפתרון ולא הוטרדו מכך. הם נתנו פתרון אלטרנטיבי או פרקטי לבעיה: מכיוון שהוסבר להם שמדובר במסיבת יום הולדת, הילדים חילקו את הממתקים כך שבצלחת מסוימת היה פחות מאשר באחרות (Tirosh, Tsamir, Levenson, Tabach, & Barkai, 2015).

לשאלות ללא פתרון יש ערך מוסף ברמת פיתוח החשיבה המתמטית: השיפוט הנדרש (באם יש לשאלה פתרון או לא) דורש חשיבה ברמה גבוהה כיוון שנדרשת מהילד הבנה עמוקה של השאלה ושל מה נדרש באופן תאורטי לפתרון. בחלק זה של המחקר הנוכחי, המוצג במאמר זה, נבדק כיצד משיבים ילדי גן לבעיית "המשך דגם חוזר" ללא פתרון: הילדים קיבלו דגם שאינם יכולים להמשיך, מכיוון שלא ניתנו להם הצורות הדרושות לפתרון הבעיה. כמו כן-, הילדים נשאלו במפורש אם ניתן לפתור את הבעיה - האם ניתן להמשיך את הדגם.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו מאתיים ושישה ילדים: תשעים ותשעה ילדים בגן טרום חובה (בגילאי 4 עד 5), מאה ושבעה ילדים בגן חובה (בגילאי 5 עד 6). כל הילדים למדו בגנים בהם למדו יחד ילדים בגילאי 4-6: לילדים בגילאי 4-5 זו השנה הראשונה בגן, ולילדים בגילאי 5-6זו השנה השנייה בגן.

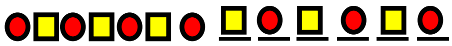
הדגם החוזר שנבחר למחקר זה הוא: 

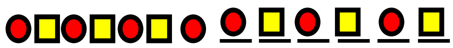
השאלון נבנה כשאלון ממוחשב: המבדק בוצע מול צג מחשב באמצעות תכנה שפותחה במיוחד לצורך המחקר. על צג המחשב הופיע הדגם ומתחתיו הצורה/ צורות שמהן יכול הנבדק לבחור את המתאימות לדעתו. תחילה, הוצג לילדים הדגם כשמתחתיו הצורות המתאימות לפתרון הבעיה (ריבוע צהוב ועיגול אדום) – כלומר, בעיה שהם כן יכולים לפתור. לאחר מכן, קיבלו מספר שאלות שאין הם יכולים לפתור: ארבע שאלות שבהן קיבלו שתי צורות (שאינן שתי הצורות הדרושות לפתרון הבעיה), ושלוש שאלות בהן קיבלו צורה אחת בלבד.

הילדים נשאלו: האם אפשר להמשיך את הדגם הזה? במידה והם ענו שלא, הם התבקשו להסביר למה; אם ענו שכן, הם התבקשו להמשיך, ואז נשאלו האם זה מתאים, למה זה מתאים, והאם הם מרוצים מתשובתם או רוצים לשנותה. האופן בו המשיכו הילדים את הדגם הוקלט באופן אוטומטי על ידי התוכנה, וכמו כן, הוקלט גם הריאיון בו הסבירו את תשובתם.

ממצאים

השאלה הראשונה שהילדים קיבלו הייתה בעיה שיש לה פיתרון. הילדים קיבלו את הדגם ותחתיו שתי הצורות הדרושות להם לפתרון הבעיה. לשאלה זו התקבלו שתי תשובות:





בשתי התשובות (הממצאים מופיעים במלואם בטבלה 1) ניתן לזהות ידע של הילדים בנושא דגמים: הילדים מקפידים על דגם חוזר שבו מופיעים לסירוגין עיגול אדום וריבוע צהוב. עם זאת, התשובה שנלקחה בחשבון כנכונה במחקר זה היא התשובה הראשונה, בה יחידת הבסיס החוזרת על עצמה היא עיגול-ריבוע, ועל כן, אחרי העיגול צריך לבוא ריבוע (ולא עוד עיגול כפי ששמו חלק מהילדים בתשובה השנייה).

טבלה 1

אחוז משיבים נכון לבעיה בעלת פתרון

	תשובת הילדים	כל המדגם N = 206	גיל: טרום חובה N = 99	גיל: חובה N = 107
*		80.6	71.7	88.8
		19.4	28.3	11.2

התשובה הנכונה מסומנת ב- *

כפי שניתן לראות בטבלה 1, רוב הילדים פתרו נכון את השאלה כאשר ניתנו להם הצורות הדרושות להמשך הדגם והם יכלו להמשיך אותו - בעיה בעלת פתרון. כצפוי נמצא הבדל בין האוכלוסיות. במענה לשאלות שבהן אין פתרון לבעיה (טבלה 2) ולא ניתן להמשיך את הדגם, נמצא כי גם במקרה זה, רוב הילדים מבחינים שאי אפשר לפתור את הבעיה, משיבים נכון ואומרים שלא ניתן להמשיך את הדגם.

טבלה 2

אחוז המשיבים נכון על השאלות השונות

האם יש פתרון לשאלה?	הצורות שניתנו לילדים	כל המדגם N=206	גיל		
			טרום N=99	חובה N=107	הבדל
כן	■●	80.6	71.0	88.8	**
אין פתרון: הילדים קיבלו 2 צורות שאינן מספיקות לפתרון הבעיה	■■	79.6	72.7	86.0	*
	☆▲	75.2	65.7	84.1	**
	●■	72.8	65.7	79.4	*
	☆▲	76.2	65.7	86.0	**
אין פתרון: הילדים קיבלו צורה אחת שאיננה מספיקה לפתרון הבעיה	●	90.3	87.9	92.5	--
	●	89.3	85.9	92.5	--
	△	89.8	86.9	92.5	--

הממצאים, המפורטים בטבלה 2, מראים כי קיים הבדל בין המקרה בו הילדים קיבלו רק צורה אחת לבין המקרה בו הילדים קיבלו שתי צורות. כאשר הילדים קיבלו רק צורה אחת בלבד, רובם המכריע (כ- 90%) השיבו שלא ניתן להמשיך את הדגם כיוון שאין להם את הצורות הדרושות. באופן מפתיע, אחוז המשיבים נכון הינו אף גבוה יותר מזה של השאלה הניתנת לפתרון, בה קיבלו הילדים את הצורות הדרושות להם. קרוב ל-10% מהילדים שגו בשאלה זו, ואמרו כי ניתן להמשיך את הדגם. כל הילדים ששגו ענו באותו אופן: המשיכו את הדגם על ידי חזרה על אותה צורה שניתנה להם. כאשר הילדים קיבלו 2 צורות שאינן מכילות את הצורות הנדרשות לפתרון הבעיה, כ- 75% מהילדים השיבו נכונה ואמרו שלא ניתן להמשיך את הדגם כיוון שחסרה להם אחת הצורות הדרושות או שתיהן.

בדיקת נימוקי הילדים בראיונות הראתה כי ילדים ששיפוטיהם נכונים מזהים נכון את הצורות הדרושות להם, ומשיבים נכון כי הם לא יכולים לפתור את הבעיה כיוון שחסרות להם צורות דרושות. לדוגמא, בשאלה בה הילדים קיבלו ריבוע צהוב וריבוע אדום (במקום ריבוע צהוב ועיגול אדום), נימקו הילדים באופן נכון והסבירו כי חסר עיגול אדום על מנת להמשיך את הדגם.

בקרב הילדים שהשיבו לא נכון על הבעיה ואמרו שכן ניתן להמשיך את הדגם, התשובה הרווחת ביותר הייתה המשך של הדגם עם דגם חוזר אחר. כלומר, הילדים לקחו את שתי הצורות הנתונות ובנו המשך של הדגם עם דגם חוזר אחר. סוג זה של מענה (בניית דגם חוזר חלופי) לא נצפה, למיטב ידיעתי, במחקרים קודמים. בנימוקי ילדים אלה ניתן לראות כי הם לא מתייחסים לשני מאפייני הדגם, צבע וצורה, אלא רק לאחד המאפיינים. למשל, כאשר הם קיבלו את שני הריבועים, הם המשיכו את הדגם על פי הצבעים.

דיון ומסקנות

מחקר זה עסק בנושא הדגמים ובמסגרתו קיבלו הילדים בין היתר גם שאלות שאין להן פתרון. התשובה המצופה הייתה שלא ניתן להמשיך את הדגם כיוון שחסרות הצורות הדרושות. ממצאי המחקר מעידים על כך כי רוב הילדים (בייחוד הילדים הבוגרים יותר) לא נבוכו או התבלבלו מכך שהשאלה אינה ניתנת לפתרון וקיבלו זאת באופן טבעי. מנימוקיהם ניכר כי הם שמים לב למאפייני הדגם ומבחינים במה שצריך ובמה שלא צריך להיות בהמשך

הדגם. אחוז המשיבים נכון הגבוה ביותר היה בשאלות בהן הילדים קיבלו צורה אחת בלבד (בין אם אחת מהצורות הדרושות, ובין אם לא). כפי הנראה, הילדים הבחינו כי בדגם ישנן שתי צורות ואילו הם קיבלו צורה אחת בלבד.

הצגת הבעיה באופן כזה, כך שקיימות שאלות שאין להן פתרון, הובילה לתשובות שלא נצפו במחקרים קודמים, כמו המשך של הדגם עם דגם אחר, דגם חלופי אלטרנטיבי. מציאת פתרון פרקטי אלטרנטיבי מחזק את ממצאי מחקר קודם שטיפל בבעיה שאין לה פתרון בגן הילדים, אשר גם בו הילדים קיבלו את האפשרות שאין פתרון לבעיה והציעו פתרון פרקטי במקום (Tirosh et al., 2015).

ניתן להסיק מכך שכדאי להרחיב את ההתנסות של הילדים בגן ולתת להם מגוון משימות במגוון ייצוגים, כולל דוגמאות ואי דוגמאות וכולל בעיות ללא פתרון. ממצאי הבעיה הראו כי יש ילדים שלא מבחינים או מקפידים על מאפייני הדגם ועל יחידת החזרה אלא רק על חלקם. זה מדגיש את הצורך לחדד בהוראת הנושא את ההבחנה במאפייני הדגם, ביחידת החזרה שלו ובכך לקדם לרמת חשיבה גבוהה של הכללה והנמקה. כמו כן, אופן הצגת בעיה ללא פתרון עשוי להוביל לחשיבה ביקורתית על ידי שאלות כמו: האם אפשר להמשיך את הדגם? למה? איך? האם אתה מרוצה מהתשובה שלך? למה? איך? ובכך לחזק אצל הילדים את ההבנה והלמידה של הדגם ומאפייניו.

רשימת מקורות

משרד החינוך והתרבות. (2010). תוכנית לימודים במתמטיקה לגני ילדים בישראל. ירושלים: ת"ל.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia, USA: NCTM.

Papic, M., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42,* 237–269.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution—the social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and instruction,7(4)*, 309-327.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Threlfall, J. (1999). Repeating pattern in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp.18–29). London.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2015). Unsolvable mathematical problems in kindergarten: are they appropriate?. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *CERME 9- Congress of the European Society for Research in Mathematics Education -.* Prague, Czech Republic. 2010-2016.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing pattern. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *PME 29th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (4, 305–312). Melbourne.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 379-402.

הצגות קצרות
וקבוצות שיח

הקשר בין מיומנויות שפתיות לביצועים אריתמטיים

סתו סנדיוק כחלון בהנחיית ד"ר נופר סוקניק בית הספר לחינוך, אוניברסיטת בר אילן

שפה היא מיומנות אנושית בסיסית המאפשרת לנו לתקשר עם אחרים, להביע רעיונות ולפתח מושגים ותחומי דעת שונים, ביניהם גם תחום המתמטיקה (Peng et al., 2020). משאבים רבים מושקעים בכדי לוודא את הצלחתם של התלמידים במקצוע. השאלה היא האם ובאיזו מידה קיים קשר בין מיומנויות שפתיות למתמטיות? מרבית המחקרים הקודמים התמקדו במיומנויות שפה ספציפיות (כמו פונולוגיה או תחביר) ובמיומנויות מתמטיות מצומצמות ומצאו קשר בין המיומנות השפתית הנחקרת למיומנות המתמטית. ממצאים אלו מצביעים על כך שיש קשר בין רמה שפתית לביצועים מתמטיים ככלל וביצועים אריתמטיים בפרט.

המחקר הנוכחי בוחן את הקשר בין כלל מאפייני השפה (פונולוגיה, תחביר, סמנטיקה ופרגמטיקה) לביצועים אריתמטיים (אריתמטיקה פרוצדורלית והבנה אריתמטית) בשפה העברית ומספק מבט מעמיק אודות הקשרים הספציפיים בין תפקודי השפה השונים למגוון רחב של ביצועים אריתמטיים.

מטרת המחקר הנוכחי הינה לבחון את הקשר בין מאפייני השפה (פונולוגיה, תחביר, סמנטיקה ופרגמטיקה) לביצועים אריתמטיים (אריתמטיקה פרוצדורלית והבנה אריתמטית) בקרב תלמידי כיתה ה' משיגים ותת משיגים. מטרתו לאפשר לנו אנשי החינוך, התבוננות אינטגרטיבית אודות השפעתם של המיומנויות השפתיות השונות על הביצועים האריתמטיים. המחקר הנוכחי בחר להתמקד בתלמידי כיתה ה' היות ובגיל זה מצופה מהם להכיר את תחום המספרים והפעולות ; ולבצע פרוצדורות אריתמטיות לצד פעולות הדורשות הבנה אריתמטית (משרד החינוך, האגף לתכנון ופיתוח תוכניות לימוד, 2006). כמו כן, מבחינה שפתית, ההישג הנדרש בכיתה ה' הינו הכרה והבנה של המערכת הלשונית- מבנים, תופעות ותהליכים (משרד החינוך, מדינת ישראל, 2019). כלומר, שליטה בארבעת מאפייני השפה אשר נבדקו (פונולוגיה, תחביר, סמנטיקה ופרגמטיקה).

המחקר כלל 40 נבדקים, בני עשר (m = 129.4 months, sd = 5.04) , תלמידי כיתה ה'. הועברה להם סוללת מבדקים שפתיים (שכללו מבדקים בכל אחד מתחומי השפה) ואריתמטיים (אריתמטיקה פרוצדורלית והבנה אריתמטית). תוצאות הביצועים של הנבדקים נבדקו ברמה הקבוצתית (בוצעו ניתוחי מתאם פירסון בין המדדים השונים אשר בדקו את הקשרים ביו המיומנויות השפתיות והביצועים האריתמטיים וניתוח רגרסיה)וכמו כן נעשתה השוואה בין נבדקים משיגים ותת משיגים (בוצעו מבחני T לבחינת ההבדלים בין ממוצעי הקבוצות במדדי השפה).

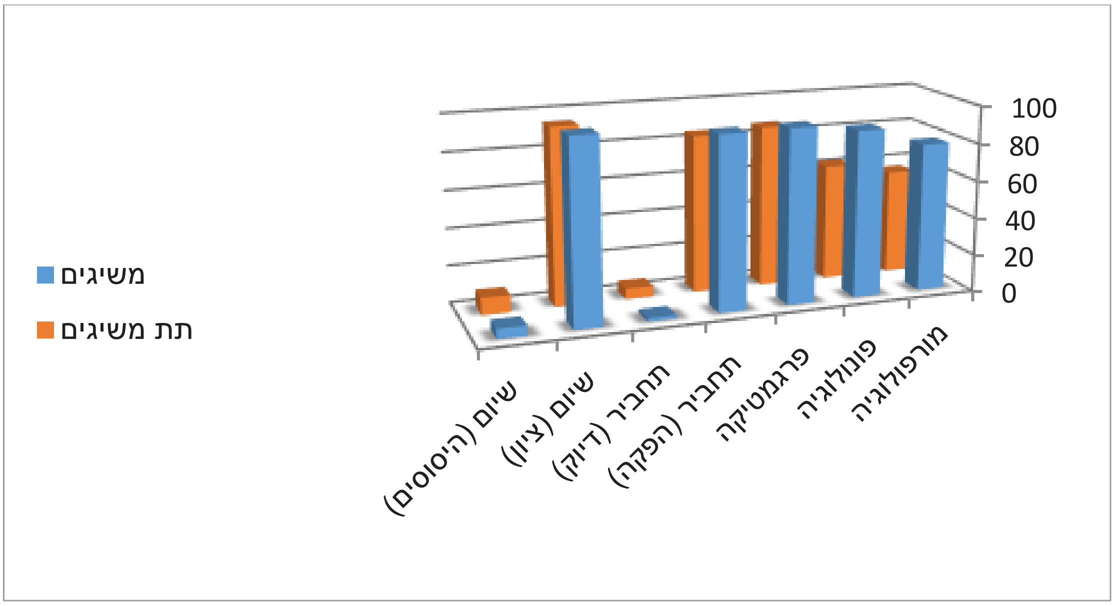
מתוצאותיו של המחקר הנוכחי עולה כי כלל המיומנויות השפתיות נמצאו קשורות באופן מובהק הן לציון האריתמטי המשוקלל והן לציונים המשוקללים באריתמטיקה פרוצדורלית ובהבנה אריתמטית. כמו כן, תוצאותיו של מחקר זה מצביעות על מערכת קשרים מגוונת המשתנה בהתאם לסוג המיומנות השפתית הנבדקת. פונולוגיה ומורפולוגיה הינן מיומנויות השפה אשר נמצאו בעלות הקשרים המובהקים ביותר לביצועים אריתמטיים. מיומנויות פונולוגיות הינן בעלות הקשר החזק ביותר למיומנויות היסוד האריתמטיות- שליפת עובדות יסוד והפקת רצף מספרי דבור. לעומת זאת, מיומנויות מורפולוגיות נמצאו כבעלות הקשר החזק ביותר לפתרון בעיות מילוליות ובאופן מפתיע גם לחשיבה אלגוריתמית.

מיומנויות סמנטיות נמצאו בעלות הקשר המובהק ביותר להבנה ויישום של חוקי סדר פעולות חשבון וליכולת ביצוע אומדן מופשט; באשר למיומנויות תחביריות, הן במדד דיוק והן במדד הפקת משפט, נמצא קשר מובהק למיומנויות אריתמטיות, ככל שהרמה התחבירית גבוהה יותר כך משך שליפת עובדות היסוד קצר יותר וככל שהדיוק התחבירי גבוהה יותר כך נראה פחות שגיאות גם בהפקת רצף מספרי דבור. על אף המחקר הדל בנושא, נמצאו קשרים גם למיומנות פרגמטית- ככל שהמיומנויות הפרגמטיות גבוהות יותר כך גם הביצועים במשתני ההבנה האריתמטית גבוהים יותר, במיוחד במדד בעיות מילוליות.

בנוסף, נבדק הקשר בין שליפת עובדות יסוד לבין פונולוגיה, קשר שנדון רבות הספרות המחקרית. משתני השליפה של עובדות היסוד, הבודקים שטף ודיוק של שליפת עובדות יסוד בחיבור וחיסור בין ובתוך עשרת, בכפל ובחילוק, יחדיו אכן הצליחו לנבא את רמת הביצוע במדד הפונולוגיה של הנבדקים וניתן לראות כי למשך הביצוע של חיבור וחיסור במעבר לעשרת יש את ההשפעה החזקה ביותר על הביצוע בפונולוגיה, כך שככל שמשך המענה היה ארוך יותר כך הציון של הנבדקים בפונולוגיה היה נמוך יותר ולהפך.

כמו כן, נבדקו ההבדלים בין תלמידים משיגים ותת משיגים. לצורך כך, הנבדקים חולקו לשתי קבוצות ביחס לציון האריתמטי המשוקלל, כך שנבדקים שקיבלו החל מציון החציוני ומעלה (67) סווגו כ׳משיגים׳ (n =21) ואילו נבדקים מתחת לציון זה סווגו כ׳תת משיגים׳ (n =19). ניכרים ההבדלים מובהקים בכלל משתני השפה בין נבדקים משיגים לתת משיגים, כך שהמשיגים הינם בעלי מיומנויות שפתיות גבוהות יותר ביחס לתת משיגים. ההבדלים המשמעותיים ביותר שעלו במחקר זה הינם במיומנויות פונולוגיות ומורפולוגיות.

מיומנויות שפתיות בקרב תלמידים משיגים ותת משיגים



מן המחקר הנוכחי עולה כי נבדקים בעלי מיומנויות שפתיות טובות יותר יהיו בעלי ביצועים אריתמטיים טובים יותר. למחקר הנוכחי מספר השלכות חשובות. ראשית, המחקר מצביע בבירור על קשר בין מיומנויות שפתיות לביצועים אריתמטיים. לכן, אל לנו, אנשי החינוך, לתחום קושי שפתי לתחומי רבי המלל בלבד. שנית, לרוב קושי שפתי ניתן לזיהוי כבר בגיל הרך, ולכן ניתן באמצעותו לנבא ביצועים אריתמטיים עתידיים. באמצעות הבנת קשרים אלו ניתן לפתח תכוניות התערבות ייעודיות לצמצום ואף מניעת פערים עתידיים באריתמטיקה. כך למשל, קושי במודעות הפונולוגית אשר לרוב מאובחן בגילאי הגן, יכול להצביע על קושי שעתיד להתפתח בשליפת עובדות יסוד. ילד אשר מתקשה בשליפת עובדות ייסוד יקדיש את מירב המשאבים הקוגניטיביים שלו לחישובים ובכך נפגעים באופן משמעותי סיכויו להצליח במשימות אריתמטיות מורכבות יותר כגון משימות הדורשות חשיבה אלגוריתמית או בעיות מילוליות. תכנית התערבות מוקדמת, אינטנסיבית וממוקדת אשר תסייע לילד ברכישת עובדות היסוד יכולה למנוע זאת. כמו כן, לאור הקשר העמוק בין שפה למתמטיקה העולה ממחקר זה יש לקחת בחשבון את התפקודים השפתיים בעת הוראת המתמטיקה.

ביבליוגרפיה

משרד החינוך. (התשע"ד 2014). *הוראת מתמטיקה*. דוח שנתי 64 ג.

משרד החינוך, האגף לתכנון ופיתוח תוכניות לימוד. (2006). *תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א'-ו' בכל המגזרים*. משרד החינוך, התרבות והספורט. ירושלים: תל.

Abedi, J., & Lord, C. (2001). The Language Factor in Mathematic tests. *Applied Measurement in Education*, 14(3), 219-234.

Chow, J.C., & Ekholm, E. (2019). Language domains differentially predict mathematics performance in young children. *Early Childhood Research Quarterly*, 46, 179-186

Cuadro, A., Singer, V.& Strasser, K. (2019). Direct and indirect paths from linguistic skills to arithmetic school performance. *Journal of Educational Psychology*. *111*(3), 434-445.

Donlan, C., Cowan, R., Newton, E. J., & Lloyd, D. (2007). The role of language in mathematical development: Evidence from children with specific language impairments. *Cognition*, 103(1), 23-33.

Powell, S. R., Driver, M. K., Roberts, G., & Fall, A. M. (2017). An analysis of the mathematics vocabulary knowledge of third-and fifth-grade students: Connections to general vocabulary and mathematics computation. *Learning and Individual Differences*, 57, 22-32.

Kleemans, T., Segers, E., & Verhoeven, L. (2014). Cognitive and linguistic predictors of basic arithmetic skills: Evidence from first-language and second-language learners. *International Journal of Disability, Development and Education*, 61(3), 306-316.

Peng, P., Lin, X., Ünal, Z. E., Lee, K., Namkung, J., Chow, J., & Sales, A. (2020). Examining the mutual relations between language and mathematics: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *146*(7), 595.

Santos, S., & Cordes, S. (2021). Math abilities in deaf and hard of hearing children: The role of language in developing number concepts. *Psychological Review.* Advance online publication. http://dx.doi.org/10.1037/rev0000303

Vukovic, R. K., & Lesaux, N. K. (2013). The relationship between linguistic skills and arithmetic knowledge. *Learning and Individual Differences*, 23, 87-91.

נרטבים מגדריים: את מי נבחר להציג פתרון בכיתה, ומאיזה סוג

לורי רובל, אוניברסיטת חיפה

מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

ג'והיינה שחברי, מכללת אלקאסמי

מבוא ורקע תיאורטי

שיעור העוסק בפתרון בעיות מתחיל בדרך כלל בהצגת משימה מתמטית, מתן זמן להתמודדות עם המשימה, ולאחר מכן דיון כיתתי שבמהלכו המורה בוחר/ת את אילו תלמידים יציגו את פתרונותיהם (Stein et al., 2008). הספרות (כמו, Smith & Stein, 2011) מציינת חמישה עקרונות מנחים בבחירת פתרונות להצגה מול הכיתה: א) בניית סיפור מתמטי קוהרנטי המתאים למטרות השיעור; ב) הנגשת המתמטיקה לתלמידים, בדרך-כלל על-ידי התקדמות מפתרון הנתפס כקל למורכב, קונקרטי לאבסטרקטי, ספציפי לכללי, וכדומה; ג) גיוון בדרכי פתרון, למשל, ייצוגים שונים ויוריסטיקות שונות לפתרון הבעיה; ד) שימוש בפתרון שגוי, לצורך העמקת ההבנה המתמטית ונורמליזציה של טעויות; ה) שיקולים חברתיים הקשורים במי לבחור שיציגו את פתרונם בכיתה. הזמנת תלמידים להצגת פתרונותיהם מול עמיתיהם מאפשרת שיתוף והערכה של רעיונות והעברת סמכות אינטלקטואלית לתלמידים (Gresalfi & Cobb, 2006). השיקולים של המורה בבחירת פתרונות יכולים להיות מגוונים. לעיתים יבואו זה על חשבון זה והתחייבות של מורה ברגע מסוים לשיקול אחד על פני האחר, ינחה את קבלת ההחלטות באותו הרגע. כאשר מורה מזמינ/ה תלמיד/ה להציג פתרון מול הכיתה, זוהי הזמנה פומבית של התלמיד/ה לנקוט עמדה ביחס לרעיון מתמטי (לכאורה) ראוי לציון. הנורמות החברתיות בכיתה מעצבות את האופן שבו הכיתה תפרש את העמדת התלמיד/ה מול הכיתה (Cobb et al., 2009). למשל, בכיתות מסוימות, הזמנת תלמידים להציג את הרעיונות שלהם בכיתה יכולה לסמן באופן פומבי את היכולות המתמטיות שהמורה משייכת לתלמידים אלה.

הספרות קוראת למחקרים שיבחנו את השיקולים שמורים עושים בבחירת פתרונות להצגה בכיתה. מספר מחקרים שניגשו לעניין זה מצאו כי השיקול המרכזי הינו הנגשת המתמטיקה לתלמידים (עלייה הדרגתית ברמת הקושי), מתוך הנחה שבדרך זו יסייעו לתלמידים מתקשים (Livy et al., 2017). המחקר הנוכחי מצטרף למחקרים אלה. שאלת המחקר הינה: מבין תלמידים (אשר "מתויגים" כבעלי הישגים נמוכים או גבוהים וכבנים או כבנות), את מי מורים למתמטיקה יבחרו להציג פתרון מסוים בכיתה, ולמה?

מתודולוגיה

42 מורים השתתפו במחקר במסגרת קורס אוניברסיטאי. רובם (38) הזדהו כנשים, ורובם (37) מהחברה הערבית. למשתתפים הוצגה הבעיה "לחיצת ידיים": במפגש הראשון של חוג כדורסל נכחו תשעה ילדים. כדי לערוך היכרות קצרה, ביקש המאמן מהילדים ללחוץ ידיים זה לזה ולהציג כל אחד את שמו. כמה לחיצות ידיים היו, אם כל ילד לחץ את ידו של כל אחד מהילדים האחרים פעם אחת?

בנוסף, קיבלו המשתתפים שמונה פתרונות לבעיה (איור 1) והתבקשו לתת פרשנות לחשיבה המתמטית העומדת בבסיס כל פתרון. בנוסף, הם התבקשו לדמיין את עצמם כמורים בכיתה ז', הקבצה א', שבה לומדים 32 תלמידים. כל פתרון (מבין השמונה) הוצע על-ידי ארבעה תלמידים: בת או בן, בעלי הישגים גבוהים/נמוכים. נאמר להם שהם מתכוונים לערוך דיון כיתתי בבעיה לאחר עבודה אישית של התלמידים, ולהזמין אל הלוח שלושה תלמידים שיציגו את הפתרונות שלהם בפני הכיתה. המשתתפים התבקשו לציין: א) אילו שלושה פתרונות הם יבחרו להציג בפני הכיתה ובאיזה סדר, ב) איזה תלמיד (מתוך ארבע הקטגוריות של בת\בן, בעלי הישגים גבוהים\ נמוכים) הם יבחרו להצגת כל פתרון, ולנמק את בחירותיהם. בסה"כ התקבלו 42 דו"חות כתובים.

בחירות המורים בפתרונות וסדר הצגתם נרשמו (טבלה 1). כמו כן תועדו בחירות המורים בהתאם למגדר ולרמת הישגים (טבלה 2). הצדקות המורים לבחירותיהם נותחו באמצעות ניתוח תמטי (Braun & Clarke, 2006). הצדקות קודדו ככוללות נרטיבים מגדריים אם הן כללו אמירות בהן בנים/בנות מהווים את נושא המשפט, כמו, למשל, "בנות יצירתיות יותר מבנים" (P23) או "בנים בדרך כלל מוצאים פתרונות יוצאי דופן יותר מבנות" (P2). הנרטיבים הדומים קובצו לקטגוריות. זיהינו משפטים שבהם המורה מדברת על ההשפעה הפוטנציאלית שיש בהזמנת תלמיד/ה מסוים/ת להציג רעיון, על התלמיד/ה עצמה/ו, או על תלמידים אחרים בכיתה, ושוב, אמירות דומות קובצו לקטגוריות. חזרנו על תהליך הקידוד במספר חזרות ופתרנו חילוקי דעות באמצעות דיון.

איור 1: שמונת הפתרונות לבעיית לחיצת הידיים

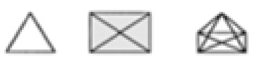
A (Additive, no answer). The first player shakes hands with the other eight players. The second shakes seven players' hands, and so on. The number of handshakes decreases in 1 for every other player, until the eight player, who has only one hand to shake. The ninth player does not have any hand to shake. 1 + … + 7 + 8

B (Inductive, tabular, correct answer). In case of 2 players there is one handshake. In case of 3 players there are three handshakes. In case of 4 players there are six handshakes. So I think that 2 + 1 = 3 is the next result of the number of handshakes (for 3 players). Then 3 + 3 = 6 is the subsequent number of handshakes (for 4 players). My rule is 'the next number of handshakes = number of players + number of handshakes'.

Number of players	Number of handshakes
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36

The answer is 36 handshakes

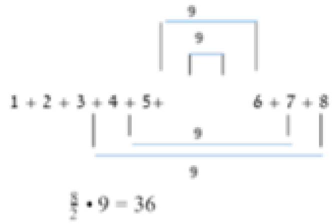
C (Inductive, geometric, no answer).



3 players – 3 handshakes
4 players – 6 handshakes
5 players – 10 handshakes

D (Multiplicative, error). I multiplied 8 in 9 and got 72 handshakes.

E (Additive, correct answer).



$\frac{8}{2} \cdot 9 = 36$

F (Multiplicative, story, correct answer). Every player shakes the hands of the other players – 9·8=72. But only half of it, because each handshake involves two players. So the answer is 36 handshakes.

G (Multiplicative, error). 9·9=81

H (Direct model, no answer).

(8 handshakes)	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	1-8	1-9
(7 handshakes)	2-3	2-4	2-5	2-6	2-7	2-8	2-9	
(6 handshakes)	3-4	3-5	3-6	3-7	3-8	3-9		
(5 handshakes)	4-5	4-6	4-7	4-8	4-9			
(4 handshakes)	5-6	5-7	5-8	5-9				
(3 handshakes)	6-7	6-8	6-9					
(2 handshakes)	7-8	7-9						
(1 handshake)	8-9							

ממצאים

המשתתפים בחרו לרוב את הפתרונות C, H, או את אחת השגיאות (D או G) (טבלה 1). אלה שבחרו בפתרון H, בחרו שיוצג ראשון או שני (מתוך השלושה שבחרו), ונימקו זאת בכך שהפתרון נגיש, מקיף ונכון. אלה שבחרו בפתרון C, בחרו אותו כמעט תמיד כאחרון ברצף, מכיוון שהוא "לא שגרתי" ו"יצירתי". המשתתפים ברובם הצביעו על שיקולי נגישות בבחירת רצף הפתרונות, המתחיל במודל הישיר (H) או בטעות (D ו- G) ומסתיים בפתרון אינדוקטיבי בייצוג גיאומטרי (C). באופן כללי, המשתתפים בחרו בנים או בנות באופן שווה (טבלה 2). שני דפוסים מרכזיים הקשורים במגדר זוהו: המשתתפים הזמינו (1) בת בעלת הישגים נמוכים שתציג את פתרון H ו- (2) בן בעל הישגים גבוהים שיציג את פתרון C.

טבלה 1: בחירת רצף הפתרונות להצגה בכיתה

פתרון	בחירה כראשון	בחירה כשני	בחירה כשלישי	סה"כ

A	2	9	0	11(26%)
B	0	2	4	6(14%)
C	0	4	30	34(81%)
D or G	21	8	0	29(69%)
E	1	3	1	5(12%)
F	2	6	1	9(21%)
H	16	10	6	32(76%)

מתוך 32 המשתתפים שבחרו בפתרון H, 23 בחרו בבת, וכמעט תמיד (19, 59%) בבת בעלת הישגים נמוכים. בתשובות המשתתפים זוהו מגוון נרטיבים: חלקם מדברים על חולשה של בנות במתמטיקה (למשל, "בנות בדרך כלל בוחרות בדרך הארוכה והבטוחה" (P27)), חלקם על כישורים של בנות הקשורים בתקשורת של הפתרונות, כמו הצגה והסבר (למשל, "היא תוכל לפשט את ההסבר במונחים ידידותיים" (P25)). הנרטיב השכיח ביותר (זוהה בקרב 16 משתתפים) דיבר על כך שהזמנה של בת בעלת הישגים נמוכים להציג פתרון בפני הכיתה "תטפל" בחוסר הביטחון העצמי, בתפיסת המסוגלות העצמית ובמידת ההשתתפות שלה בכיתה. למשל, "זה ידוע שלבנות בדרך כלל יש ביטחון עצמי נמוך, רציתי לתמוך בה ושתחווה הצלחה, במיוחד מכיוון שהפתרון הזה (H) ברור ונכון, ובנוסף, זה יכול לעודד את שאר הבנות עם ביטחון עצמי נמוך" (P23).

טבלה 2: שיוך הפתרונות לפי מגדר והישגים במתמטיקה

פתרון	בן - הישגים נמוכים	בת - הישגים נמוכים	בן או בת - הישגים נמוכים	בן - הישגים גבוהים	בת - הישגים גבוהים	בן או בת - הישגים גבוהים	סה"כ(%)
A	4	6	1	0	0	0	11(26%)
B	1	0	0	2	3	0	6(14%)
C	5	2	0	17	6	4	34(81%)
D or G	5	3	1	10	7	3	29(69%)
E	3	0	0	2	0	0	5(12%)
F	2	1	1	1	4	0	9(21%)
H	4	19	2.5*	2	4	0.5*	32(76%)
סה"כ	24	31	5.5	34	24	7.5	126

לעומת זאת, מתוך 34 המשתתפים שבחרו בפתרון C, 22 מהם ציינו שיזמינו בן להציג, כמעט תמיד (17) בן בעל הישגים גבוהים. הנרטיבים הפעם היו קשורים בחשיבה המתמטית המפותחת של בנים או בכישורי התקשורת שלהם. המשתתפים ייחסו לבנים אלה תכונות כגון "מצטיינים", "יצירתיים" ו"מיוחדים". למשל, "מהניסיון שלי, בנים פחות אוהבים עבודה שחורה מאשר בנות, ובעיקר הם מנסים למצוא דרכים אחרות לפתור את הבעיה. בנוסף, לבנים יש יכולת מרחבית טובה יותר מבנות, כך שהפתרון הזה (C) מתאים יותר לבן" (P26). בניגוד לפתרון H, נמצאו מעט (3) נרטיבים הקשורים

בתרומה הפוטנציאלית בהזמנת בן בעל הישגים גבוהים להציג את פתרון C עבור התלמיד עצמו או עבור שאר תלמידי הכיתה. לעומת זאת, כאשר המשתתפים שייכו את פתרון C לבנות בעלות הישגים גבוהים (מה שקרה הרבה פחות), הם נטו, שוב, להסביר זאת כהזדמנות "לתקן" את חוסר הביטחון העצמי של אותן בנות. למשל, "לבנות אין ביטחון עצמי והן ביישנות, אז בחרתי בבת כי לבנים יש ביטחון עצמי ללכת ללוח ולדבר מול הכיתה" (P8).

דיון

ממצאי המחקר, על מגבלותיו (אוכלוסייה מסוימת, משימה מתמטית אחת), מצביעים על כך שלשיקולים חברתיים תפקיד חשוב בקבלת החלטות של מורים ביחס למי להזמין להציג פתרון כלשהו מול הכיתה. משתתפים רבים ציינו העדפה להצגת פתרון H כראשון או שני, ושיוצג על-ידי בת בעלת הישגים נמוכים. אם קיימת נורמה בכיתה התומכת בהנגשה על-ידי הצגת הפתרון הכי קל או הכי פחות מתוחכם ראשון, כפי שנמצא במחקר (Meikle, 2014), הרי שהזמנת בת בעלת הישגים נמוכים להצגתו, תסמן לכיתה ולתלמידה עצמה שהפתרון שלה הוא בעל ערך נמוך. כלומר, הזמנת בת בעלת הישגים נמוכים להצגת רעיונה כדרך "לטפל" בחוסר בטחון עצמי שלה, כפי שנתפס על-ידי המשתתפים, למעשה אולי רק תחזק את תחושת חוסר הביטחון שלה. ביחס לפתרון C, רוב המשתתפים ציינו שיזמינו בן בעל הישגם גבוהים להציגו בכיתה. גם במקרה זה סדר הצגת הפתרונות הינו משמעותי, שכן רוב המשתתפים בחרו בפתרון זה שיוצג אחרון. שוב, אם ישנה נורמה בכיתה הקשורה בסדר הפתרונות המוצגים, הרי שהזמנה להציג אחרון ברצף יכולה לסמן עבור הכיתה את איכות הפתרון כמתוחכם ביותר. הממצאים האלה תומכים (ונתמכים על ידי) נרטיב דומיננטי לפיו מצוינות של בנים במתמטיקה היא פונקציה של הכישרון המתמטי שלהם בעוד שהצלחה של בנות במתמטיקה נגרמת כתוצאה מחריצותן. ניתן לראות קשר בין ממצאים אלה והקשרו החברתי של המחקר, שכן על אף שבנות מהחברה הערבית משיגות ציונים גבוהים יותר במתמטיקה מבנים במבחנים הארציים והבינלאומיים, החברה מעודדת אותן פחות לכיוון מקצועות עתירי מתמטיקה בלימודיהם האקדמיים (פרט להוראה).

רשימת מקורות

Black, L., & Radovic, D. (2018). Gendered positions and participation in whole class discussions in the mathematics classroom. In U. Gellert (Ed.), Inside the Mathematics Class. Advances in Mathematics Education (pp. 229–244). Springer.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology, 3(2), 77–101.

Cobb, P., Gresalfi, M., & Hodge, L. L. (2009). An interpretive scheme for analyzing the identities that students develop in mathematics classrooms. Journal for Research in Mathematics Education, 40, 40–68.

Gresalfi, M., & Cobb, P. (2006). Cultivating students' discipline-specific dispositions as a critical goal for pedagogy and equity. Pedagogies: An International Journal, 1(1), 49–57.

Livy, S., Downton, A., & Muir, T. (2017). Developing pre-service teachers' knowledge for teaching in the early years: Selecting and sequencing. Mathematics Teacher Education and Development, 19(3), 17–35.

Meikle, E. (2014). Preservice teachers' competencies to select and sequence students' solution strategies for productive whole-class discussions. Mathematics Teacher Educator, 3(1), 27-57.

Smith, M.K. & Stein, M.S. (2011). Five practices for orchestration productive mathematics discussions. National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S. and Hughes, E.K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. Mathematical Thinking and Learning, 10, 313–340.

תרומה ישירה ועקיפה של תפקודים ניהוליים ספציפיים להישגי בגרות במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב, בזיקה לרמות לימוד

יחיאל תנעמי, מכללת חמדת הדרום

מבוא

תפקודים ניהוליים הם אוסף של יכולות ותהליכים השולטים ומנחים את עיבוד המידע שלנו, לצורך השגת מטרה (Cragg, Keeble, Richardson, Roome & Gilmore, 2017). בשנים האחרונות בולטת בשדה המחקר חשיבותם של התפקודים הניהוליים להסבר ולקידום תהליכי למידה. תשומת לב מיוחדת הודגשה לקשר שבין תפקודים ניהוליים למתמטיקה (למשל: Geary, 2004). שלושה מחקרים שנערכו בשנים האחרונות בישראל (תנעמי ועילם, 2021; תנעמי ועילם, בדפוס; תנעמי, 2021) עסקו בקשר שבין תפקודים ניהוליים המיוצגים על ידי שלושה מדדים מרכזים – מדד ניהולי כללי, מדד מטא-קוגניציה ומדד ויסות התנהגות - לבין הישגים בבחינת בגרות במתמטיקה, וכן בניבוי הישגי הבגרות באמצעות משתנים כמו תחושת מסוגלות, בזיקה ליחדות הלימוד השונות. המחקר הנוכחי בא להרחיב את הידע שנאסף בשלושת המחקרים הקודמים: (1) לבדוק את התרומה הדיפרנציאלית להישגי הבגרות במתמטיקה ברמות הלימוד השונות, של מגוון תפקודים ניהוליים ספציפיים המשקפים מגוון תפקודי לומד (למשל: שליטה ברגשות, בקרה, תכנון והתארגנות, ארגון סביבה וחפצים וסיום משימה), בנוסף לזיכרון עבודה, גמישות ואינהיביציה, הנתפסים כקשורים באופן הדוק ליכולת מתמטיות (Cragg, Keeble, Richardson, Roome & Gilmore, 2017). (2) לבדוק האם הקשר שבין התפקודים הניהוליים הספציפיים לבין הישגי הבגרות במתמטיקה מתווך על ידי תחושת מסוגלות.

שאלות המחקר

א. מה הקשר בין מגוון התפקודים הניהוליים הספציפיים להישגי הבגרות במתמטיקה, ברמות הלימוד השונות?

ב. האם הקשר בין מגוון התפקודים הניהוליים הספציפיים להישגי הבגרות במתמטיקה מתווך על ידי תחושת מסוגלות התלמיד במתמטיקה, ברמות הלימוד השונות?

מתודולוגיה

המשתתפים: 409 תלמידי כיתה י"ב, משישה בתי-ספר רגילים בחינוך היהודי ברחבי הארץ, הלומדים מתמטיקה ביחידות לימוד שונות – 3, 4, 5, אשר נבחנו בבחינת הבגרות החיצונית הראשונה שלהם במתמטיקה בסוף כיתה י"א. מתוכם 37% בנים ו- 63% בנות, בגילאי 16-18, ממוצע 17.4. בין התלמידים במחקר כאלו המדווחים שהם מאובחנים כבעלי לקות למידה (9.5%), או עם הפרעת קשב (16.1%) או עם לקות למידה והפרעת קשב (4.4%).

כלי המחקר

א. ***שאלון למדידת תפקודים ניהוליים*** The Behaviour Rating Inventory of Executive Function–Self Report - BRIEF-SR (Guy, Gioia & Isquith, 2004). בשאלון נבדקים שמונה מרכיבים שונים של תפקודים ניהוליים המחולקים לשני תחומים: ויסות-התנהגות ומטה-קוגניציה, שיחד מרכיבים את המדד הניהולי הכללי.

ב. ***הישגי בחינת בגרות במתמטיקה*** של סוף כיתה י"א. ציון משוקלל של ציון המגן במתמטיקה וציון בבחינת הבגרות החיצונית הראשונה במתמטיקה בה נבחנו התלמידים בסוף כיתה י"א.

ג. ***שאלון פרטים אישיים*** של פרטים סוציו-דמוגרפיים, עמדות והערכה כלפי מתמטיקה.

המשתנים

- ***משתנים בלתי תלויים:*** רמות הלימוד השונות לקראת בגרות - 3,4,5 יח"ל.

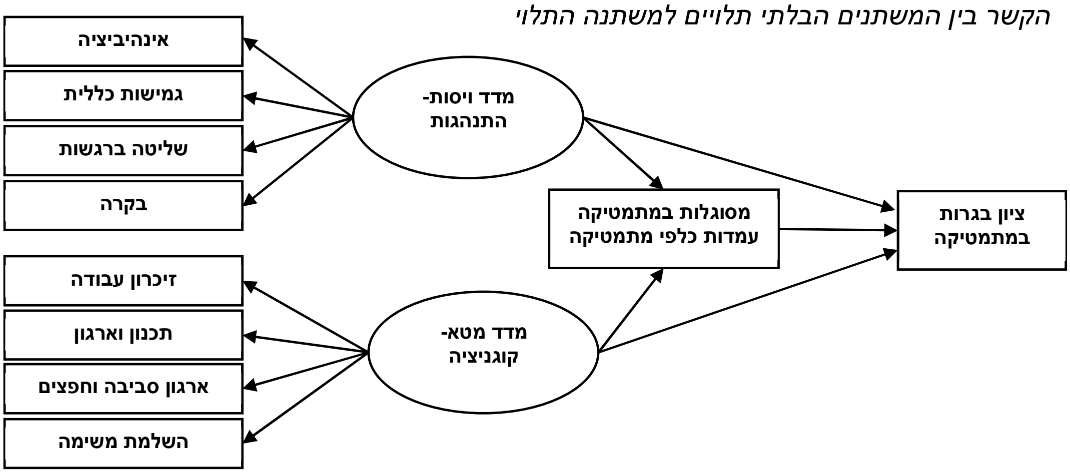
- ***משתנים תלויים:*** ציון בגרות במתמטיקה בסוף י"א ; התפקודים הניהוליים הספציפיים.
- ***משתנים מתווכים:*** תחושת מסוגלות במתמטיקה, מדד ויסות-התנהגות ומדד מטא-קוגניציה.

הליך: השאלונים שאושרו על ידי המדען הראשי של משרד החינוך, הועברו בכיתה כחלק משיעור מתמטי במפגש אחד של 30 דקות. לתלמידים הובהר שהם רשאים לא למלא את השאלון ואי מילויו לא יפגע בהם.

אופן ניתוח הנתונים

ממוצעים וסטיות תקן, רגרסיות ליניאריות היררכיות וניתוח נתיבים באמצעות משוואות מבניות למודל המובא באיור 1. מודל זה הוא כללי לכל אחת מיחידות הלימוד השונות.

איור 1: *מודל ניתוח נתיבים של הקשרים בין התפקודים הניהוליים למשתנים הלטנטיים ותיווך של הקשר בין המשתנים הבלתי תלויים למשתנה התלוי*



ממצאים

נמצא כי תחושת מסוגלות במתמטיקה הינה המשתנה המנבא ביותר את ציון הבגרות בקרב 3 יח"ל (β=.554, p < .01) ב-4 יח"ל (β=.687, p < .01) וב-5 יח"ל (β=.623, p < .01). כמו כן, ממצאי המודל הראו מדדי טיב התאמה טובים, כלומר שהנתונים תואמים למודל התיווך המשוער.

$\chi^2(93) = 240.19$; $p < .001$; GFI = .91; NFI = .93; CFI =.92; RMSEA = .06, SRMR = .04

בטבלה 1 שלהלן, מובא סיכום ניתוחי הנתיבים ביחידות הלימוד השונות, המאפשר הסתכלות הוליסטית ואינטגרטיבית על הממצאים שנמצאו בכל יחידת לימוד:

טבלה 1: *הקשר הישיר והעקיף של התפקודים הניהוליים והמשתנים המתווכים להישגים במתמטיקה בזיקה ליח"ל*

יחידת לימוד	N	תחושת מסוגלות במתמטיקה	מדד מטא-קוגניציה	מדד ויסות-התנהגות	תפקודי הניהול של המשתנה הלטנטי מדד וויסות התנהגות				תפקודי הניהול של המשתנה הלטנטי מדד מטא-קוגניציה			
					אינהיביציה	גמישות	שליטה ברגשות	בקרה	זיכרון עבודה	תכנון וארגון	ארגון סביבה וחפצים	השלמת משימה
3	172	.446**	.240**	.115	.879**	.512**	.826**	.669**	.859**	.782**	.596**	.671**
4	89	.605**	.179*	.129*	.824**	.512**	.722**	.577**	.842**	.880**	.703**	.817**
5	146	.615**	.131	.185*	.867**	.629**	.691**	.699**	.885**	.819**	.798**	.855**

*p<.05 **p<.01

- צבע כתום משקף את המשתנים שיש להם קשר עקיף להישגים במתמטיקה דרך תחושת מסוגלות
- צבע כחול משקף קשר חזק של התפקוד הניהולי למדד
- צבע צהוב משקף קשר בינוני של התפקוד הניהולי למדד

ניבוי הישגי הבגרות במתמטיקה בקבוצת 3 יחידות לימוד

מטבלה 1 עולה כי תחושת מסוגלות ומדד מטא-קוגניציה מנבאים באופן ישיר את ציון הבגרות במתמטיקה. עם זאת, תחושת מסוגלות לא נמצאה כמתווכת את התפקודים הניהוליים להישגי הבגרות. כל התפקודים הניהוליים המרכיבים את מדד מטא-קוגניציה נמצאו קשורים להישגי הבגרות באופן עקיף בתיווך של מדד מטא-קוגניציה, כאשר לזיכרון עבודה ולתכנון וארגון יש תרומה חזקה יותר להישגי הבגרות מאשר לארגון סביבה וחפצים ולהשלמת משימה.

ניבוי הישגי הבגרות במתמטיקה בקבוצת 4 יחידות לימוד

מטבלה 1 עולה כי תחושת מסוגלות, מדד מטא-קוגניציה ומדד ויסות-התנהגות מנבאים באופן ישיר את ציון בגרות במתמטיקה. כמו כן, נמצא שתחושת מסוגלות מהווה מתווך בין מדד מטא-קוגניציה ומדד ויסות-התנהגות לבין הישגי הבגרות: ככל שרמת כישורי ויסות-התנהגות ומטא-קוגניציה של תלמיד טובים יותר, כך תחושת המסוגלות שלו במתמטיקה גבוהה יותר, שבתורה מובילה לציון גבוה יותר בבגרות במתמטיקה. כל התפקודים הניהוליים המרכיבים את מדד מטא-קוגניציה ומדד ויסות התנהגות נמצאו קשורים להישגי הבגרות במתמטיקה באופן עקיף בתיווך של מדד מטא-קוגניציה ומדד ויסות-התנהגות בהתאמה. יש לציין שכל התפקודים המרכיבים את שני המדדים, קשורים בקשר חזק להישגי הבגרות פרט לארגון סביבה וחפצים ולהשלמת משימה שתרומתם נמוכה יותר בהשוואה לתפקודים הניהוליים האחרים.

ניבוי הישגי הבגרות במתמטיקה בקבוצת 5 יחידות לימוד

מטבלה 1 עולה כי תחושת מסוגלות ומדד וויסות-התנהגות מנבאים באופן ישיר את ציון הבגרות במתמטיקה. כמו כן, נמצא שתחושת מסוגלות מהווה מתווך בין מדד וויסות-התנהגות לבין הישגי הבגרות: ככל שרמת כישורי וויסות-התנהגות של תלמיד טובה יותר, כך רמת תחושת המסוגלות שלו במתמטיקה גבוהה יותר, שבתורה מובילה לציון גבוה יותר בבגרות במתמטיקה. כל התפקודים הניהוליים המרכיבים את מדד ויסות-התנהגות נמצאו קשורים להישגי הבגרות באופן עקיף בתיווך של מדד ויסות-התנהגות, כאשר לאינהיביציה יש תרומה חזקה להישגי הבגרות יותר מאשר גמישות, שליטה ברגשות ובקרה על התנהגות.

ניתן לסכם ולמפות את ממצאי המחקר כמובא בטבלה 2:

טבלה 2: *סיכום ומיפוי הקשר הישיר והעקיף של המשתנים השונים להישגי הבגרות במתמטיקה*

יח"ל	N	קשר ישיר להישגי בגרות			משתנים מתווכים להישגי הבגרות			הקשר של תפקודי הניהול הספציפיים להישגי הבגרות דרך המשתנים הלטנטיים	
		תחושת מסוגלות במת'	מדד מטא-קוגניציה	מדד ויסות-התנהגות	תחושת מסוגלות במת'	מדד מטא-קוגניציה	מדד ויסות-התנהגות	תפקודי הניהול של המשתנה הלטנטי מדד ויסות-התנהגות	תפקודי הניהול של המשתנה הלטנטי מדד מטא-קוגניציה
3	172	+	+			+			+
4	89	+	+	+	+	+	+	+	+
5	146	+		+	+		+	+	

א. המשתנים הלטנטיים (המדדים ויסות-התנהגות ומטא-קוגניציה) תורמים להישגי הבגרות במתמטיקה בצורה דיפרנציאלית ביחידות הלימוד השונות. דיפרנציאליות זו באה לידי ביטוי בכמות המשתנים הלטנטיים התורמים להישגים בכל יחידת לימוד ובאופן התרומה – ישירה או גם עקיפה.

ב. בכל יחידות הלימוד נמצא קשר חיובי, בין מגוון התפקודים הניהוליים הספציפיים למשתנה הלטנטי אליו הם משתייכים – מדד ויסות-התנהגות ומדד מטא-קוגניציה. כמו כן, תרומתם של התפקודים הספציפיים להישגי הבגרות דיפרנציאלית ביחידות הלימוד השונות, דרך המשתנים הלטנטיים. תרומתם כקבוצה, באמצעות המשתנים הלטנטיים, גדולה יותר מתרומת כל אחד מהם בנפרד.

ג. תחושת מסוגלות במתמטיקה היא המשתנה התורם ביותר להישגי הבגרות במתמטיקה בכל יחידות הלימוד ומשמשת כמשתנה מתווך בין המשתנים הלטנטיים לבין הישגי הבגרות במתמטיקה, בכל יחידת לימוד באופן שונה. ככל שתחושת המסוגלות של התלמידים גבוהה יותר כך גבוהים יותר הישגי הבגרות במתמטיקה, ללא תלות בקבוצת הלימוד בה הם לומדים.

דיון

הממצאים עולים בקנה אחד עם ממצאי מחקרים קודמים שמצאו קשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה (למשל: Bull & Lee, 2014; תנעמי ועילם, 2021) ומנבאים הצלחה במתמטיקה (Fuhs, Nesbitt, Farran, & Dong, 2014). כמו כן, שהתפקודים הניהוליים קשורים גם לרמות שונות של ידע מתמטי הנדרש בבחינות הבגרות מתוך הלימה ליחידות הלימוד השונות (תנעמי ועילם, 2021).

ממצאי מחקר זה מרחיבים את הידע הקיים בשלושה היבטים עיקריים:

א. מגוון של תפקודים ניהוליים קשורים להישגים במתמטיקה ולא רק המדדים המרכזיים – מדד ניהולי כללי, מדד מטא-קוגניציה ומדד ויסות-התנהגות, או רק פונקציות ספציפיות הנחשבות כקשורות יותר למתמטיקה כמו גמישות, זיכרון עבודה ואינהיביציה.

ב. הקשר בין התפקודים הניהוליים לבין הישגי הבגרות במתמטיקה הוא דיפרנציאלי ביחידות הלימוד השונות, כך שתפקודים ניהוליים שונים תורמים להישגי הבגרות במתמטיקה ביחידות לימוד שונות. הדבר נובע כנראה בשל מאפייני התלמידים ומאפייני השאלונים בכל אחת מרמות הלימוד.

ג. תחושת מסוגלות תורמת להישגי הבגרות במתמטיקה בכל יחידות הלימוד, דבר התומך בממצאים קודמים (תנעמי ועילם, בדפוס; Skaalvik, Federici & Klassen, 2015). ממצאי מחקר זה מרחיבים את הידע בכך שתחושת מסוגלות משמשת כגורם מתווך בין התפקודים הניהוליים להישגים וכן שהתיווך הוא דיפרנציאלי ביחידות הלימוד השונות.

התרומה התיאורטית של מחקר זה מתייחסת להבהרת הקשר שבין התפקודים הניהוליים להישגים במתמטיקה ברמות ידע שונות. ההשלכות היישומיות מתייחסות להוראת המתמטיקה והכשרת מורים.

רשימת מקורות

תנעמי, י', עילם, א' (2021). "הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב". *מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 8*, 73-81.

תנעמי, י', עילם, א' (בדפוס). "ניבוי הישגי בגרות במתמטיקה על פי תפקודים ניהוליים, מסוגלות עצמית ומגדר בקרב תלמידי כיתה יב". "כָּעֵת" – כתב עת לענייני חינוך חברה ותרבות.

תנעמי, י' (2021). "הקשר בין תפקודים ניהוליים ויכולת מתמטית בקרב תלמידי כיתה י"ב, בזיקה להפרעת קשב". *חוקרים@החינוך המיוחד, 1*, 120-151.

Bull, E., & Lee, K. (2014). Executive functioning and mathematics achievement. Child Development Perspectives, 8(1), 34-41.

Cragg, L., Keeble, S., Richardson, S., Roome, H. E., & Gilmore, C. (2017). Direct and indirect influences of executive functions on mathematics achievement. *Cognition*, *162*, 12-26.

Fuhs, M. W., Nesbitt, K. T., Farran, D. C., & Dong, N. (2014). Longitudinal associations between executive functioning and academic skills across content areas. *Developmental Psychology, 50*, 1698 – 1709. http://dx.doi.org/10.1037/a0036633

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of learning disabilities*, *37*(1), 4-15.

Guy, S. C., Gioia, G. A., & Isquith, P. K. (2004). BRIEF-SR: Behavior Rating Inventory of Executive Function--self-report Version: Professional Manual. Psychological Assessment Resources.

Skaalvik, E. M., Federici, R. A., & Klassen, R. M. (2015). Mathematics achievement and self-efficacy: Relations with motivation for mathematics. *International Journal of Educational Research*, *72*, 129-136.

בעיות דומות, פתרונות שונים, היתכן?

רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים – המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאמנויות

מבוא

בספרי הלימוד מוצגות בעיות שבהן מתאים, לכאורה, ליישם את מודל היחס וכולן תחת הכותרת בעיות יחס ופרופורציה. הרעיון למחקר עלה בעקבות דיון על תשובות של תלמיד שפתר בעיה מספר הלימוד שלו, והוא הציג מספר פתרונות אפשריים שונים לבעיה. הוא התלבט לגבי מעמדם המתמטי של הפתרונות. נראה שפתרון מסויים לדעתו היה צודק, ופתרון אחר היה נכון. ההתלבטות שלו נבעה מהיכרותו את דעת המורה שלו על התאמת מודל במצב כמו זה המתואר בבעיה. התהליך בו מתאימים את המודלים והכלים המתמטיים לסיטואציות השונות נקרא תהליך המידול. במחקר נוצר רצף הוראה במטרה להעמיק את הבנתם של מורים ופרחי הוראה לגבי מהות הקשר בין סיטואציה לבין המודל המתמטי המותאם לה. למורים תפקיד חשוב בבנייה של הבנת התהליך על ידי תלמידים, ולכן חשוב לקדם את תפיסותיהם. כלומר, יש צורך בשינוי הידע והתפיסות של המורה לגבי תפקיד המתמטיקה בפתרון בעיות ובשינוי האמונות שלהם בנושא זה.

רקע תאורטי

למורה תפקיד חשוב בקביעת הדרכים שבהן תלמידים פותרים בעיות. כדי לגרום לתלמידים לשנות את התייחסותם לפתרון בעיות, יש צורך בשינוי של הידע, של התפיסות ושל האמונות של המורה על תפקיד המתמטיקה בכלל, ועל פתרון בעיות בפרט. יאקל וקוב (Yackel & Cobb, 1996) חקרו את למידת המתמטיקה כפעילות חברתית בכיתה במטרה להסביר כיצד תלמידים מפתחים אמונות וערכים מתמטיים, ואיך כתוצאה מכך מתפתחת אצלם חשיבה עצמאית במתמטיקה.

המחקר הנוכחי עוסק ביחסי הגומלין בין מודלים מתמטיים לפתרון בעיות מילוליות והבאתם למודעות של מורים למתמטיקה. תהליך המידול מאפשר בניית מודלים מתמטיים המתמקדים במאפיינים מבניים של מערכות שאינן מתמטיות (Lesh & Doerr, 2003). זהו מעין גשר המחבר בין המתמטיקה השימושית, זו המכונה בפי התלמידים המתמטיקה של המציאות, ובין המתמטיקה המופשטת והפורמאלית. הגשר המחבר בין בעיה מתמטית הניתנת בשיעור ובין בעיה בחיי היום-יום (Greer, 1997).

רוב התלמידים פותרים בעיות מילוליות לפי "כללי המשחק" של המערכת שבה הם נמצאים, היינו, הכיתה שבה הם לומדים (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2002). לתלמידים מערכת הנחות סמויות באשר לפתרון הנכון של בעיות מילוליות, מערכת הנובעת מניסיונם בכיתה ומתגובותיהם של המורים לפעילותם בעבר. לרוב, תלמידים מניחים שכל בעיה הכתובה בספר או הניתנת על ידי המורה ניתנת לפתרון, ושכל המידע הנדרש מופיע בשאלה המילולית. כמו כן, הם מניחים שאין צורך להקיש מידע נוסף כדי להגיע לפתרון, ויוצאים מנקודת הנחה שלכל בעיה יש בהכרח פתרון מספרי, מדויק ויחיד. נוסף על כך, תלמידים סבורים שהפתרון לבעיה מילולית צריך להתקבל באמצעות פעולות מתמטיות, וחייב להתחשב בכל הנתונים המוזכרים בשאלה. לרוב הם מצפים לפתרון המכיל מספרים שלמים ולא גדולים, ומרגישים שהם אינם צריכים להיות מוטרדים אם הפתרון לא תואם את הידע היום-יומי שלהם.

מתברר כי גם תלמידים שלא התחשבו בשיקולים הקשורים למציאות היום-יומית, מבדילים בין "העולם" הבית ספרי והמתמטיקה שבו ובין המציאות שבה חיים מחוץ לבית הספר. גריר (Greer, 1997) מצטט קטע מראיון עם תלמיד שמתייחס לקשר שבין בעיות מתמטיות ובין נסיבות מהמציאות היום-יומית: *"אני יודע את כל הדברים האלה* (הנסיבות המציאותיות)*, אבל אני מעולם לא אחשוב להכליל אותם בבעיה מתמטית. מתמטיקה זה לא הדברים האלה, אלא לקבל תוצאות נכונות בבית הספר, ואתה לא צריך לדעת דברים מבחוץ כדי לקבל תוצאות נכונות".*

הסתבר כי התלמידים חשבו על קישור למציאות בזמן תהליך פתרון הבעיה אך בסופו של דבר התעלמו מקביעת מתן התשובה הסופית, כי חשבו שמצפים מהם לתת תשובה "רגילה" (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2002).

מחקרים בנושא השתנות מורים, עסקו בשאלות מדוע מורים אינם מיישמים חידושים כפי שמפתחיהם ציפו. אחד ההסברים לכך הוא שהמורים נדרשו לבצע שינויים שנכפו עליהם מגורמים חיצוניים בלי לקחת בחשבון את אמונותיהם, מחשבותיהם, וקשייהם (Richardson, 1990). מחקרים שחקרו מתי הצליחו תהליכי שינוי בהוראה, מצאו שאחד הגורמים החשובים להצלחה היה שיתוף ומעורבות המורים בתהליך השינוי ובקבלת ההחלטות. קיימת אשליה שיש צורך בהצגת בעיות מורכבות ומסובכות על מנת להסביר למורים תפיסה מסוימת, ולהוביל אותם לפעול על פיה. אך לא כך הדבר. ישנו דווקא ייתרון בסיטואציות פשוטות המקלות על ההבנה, ולכן מומלץ לעשות שימוש במצבים לא מסובכים, בהם ניתן להיעזר בקלות להצגת הרעיון הכללי של הבעיה (Peled & Suzan, 2013). בבעיות בהן ניתן ליישם יותר ממודל מתמטי אחד, הבאה של מורים להבנה הזו אינה משימה פשוטה. ישנן אסטרטגיות הוראה שונות לעשות זאת. לצורך שיפור ההבנה של מורים ושינוי בגישתם לפתרון בעיות נבחרה שיטת הקונפליקט הקוגניטיבי אשר הוכיח עצמו ככלי הוראה המאפשר שינויים בנושאים מתמטיים שונים (Springer & Borthick, 2007). טכניקה זו מביאה את המורים לשינוי התפיסתי הנדרש, וגורמת להם להבין את מהות השימוש במודלים מתמטיים (Peled & Balachef, 2011).

שיטת הקונפליקט הקוגניטיבי, יושמה אף במחקר זה וניתן לראות כי היא אכן הביאה לשינוי משמעותי בתפיסתם והכרתם של המורים.

מטרת המחקר

לבחון את השפעת רצף ההוראה שנבנה בגישת המידול על תפיסות המורים את תפקיד המתמטיקה.

שאלת המחקר

האם ביצוע רצף של הוראה מתוכנן יכול להוביל לשינוי בתפיסות של מורים ושל פרחי הוראה על תפקיד המתמטיקה ועל המשמעות של התאמת מודל מתמטי בפתרון בעיות מילוליות?

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה שתי קבוצות נבדקים, מורים ופרחי הוראה במכללה להכשרת מורים במרכז הארץ, שכללו ביחד 42 נבדקים. בקבוצה האחת 23 מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א' – ו' בבתי ספר יסודיים ובקבוצה השנייה 19 פרחי הוראה אשר הכשרתם היא הוראת מתמטיקה לבית הספר היסודי. חתך המשתלמים הן בקבוצת המורים והן בקבוצת פרחי ההוראה היה דומה מבחינת רקע כלכלי, חברתי ותרבותי. לקבוצת המורים היה ותק בהוראה מעל שש שנים ואילו לקבוצת פרחי ההוראה שהיו בשנת הלימודים השלישית שלהם לא היה ותק בהוראה כלל, פרט להתנסות מעשית במסגרת לימודים במכללה.

כלי המחקר

כלי המחקר כללו רצף משימות הוראה וחלק איכותני אשר כלל את ההסברים, הנימוקים והדיונים לאורך סדנת ההשתלמות. תחילה, נבנה בסיס להכנת רצף משימות בו נאספו דוגמאות של בעיות ודוגמאות של תשובות תלמידים לדוגמאות. אלו התבססו על הראיונות עם מומחים מתחומי דעת שונים. התבצע ניתוח של הדוגמאות ואפיונן של הבעיות אל מול בעיות מספרי לימוד וממחקרים שונים אשר בעזרתם נבנו כלי ניתוח ומיון בגישת המידול.

רצף משימות ההוראה התחלק לארבעה נושאים הקשורים בפתרון בעיות: שיקולי מציאות, אבחנה בין סוגי בעיות, סטטוס מתמטי של הפתרונות, ותפיסת תפקידי המתמטיקה. בכל אחד מהנושאים חולקו המשימות לשלוש קבוצות. למשימות שלפני התפעול של הקונפליקט הקוגניטיבי, התפעול שלפיו נעשה הקונפליקט הקוגניטיבי ולמשימות שלפיהן נעשו בדיקות להשפעת התפעול.

שיטת המחקר

המחקר התבצע במסגרת סדנאות להשתלמות מורים ופרחי הוראה. במחקר שולבו ניתוח כמותני עם ניתוח איכותני. הניתוח הכמותני בודק את מידת האפקט של מהלך ההוראה על ידי השוואה של תפיסות המורים בתחילת ההשתלמות כנגד תפיסותיהם בסוף ההשתלמות. הניתוח האיכותני עוקב אחר מאפייני תהליך השינוי במהלך השתלמות המורים ופרחי ההוראה, במטרה לאתר את העוצמות והחולשות של מהלך ההוראה שנבנה. זוהי למעשה גישה מחקרית מעצבת, המאפשרת להגיב תוך כדי התהליך.

המחקר כלל שלושה שלבים עיקריים: השלב הראשון בו פתרו המשתלמים משימות ראשוניות; השלב השני ההתערבות שמטרתו הייתה לעורר את המודעות למידול, והשלב האחרון שבו פתרו משימות נוספות, ושנועד לבדוק אם חלו שינויים בתפיסות המשתלמים בעקבות רצף ההוראה שהוצג להם ובעיקר בעקבות שלב ההתערבות. רצף המשימות עסק בארבעה נושאים הקשורים בפתרון בעיות: שיקולי מציאות, הבחנה בין סוגי בעיות, סטטוס מתמטי של פתרונות, ותפיסת תפקידי המתמטיקה. פתרון המשימות כלל פעולות שונות ובהן: פתרון אישי של הבעיות, התייחסות לפתרונות שונים, מיון הבעיות, השוואה בין הבעיות במטרה למצוא את הדומה ואת השונה ביניהן, התייחסות לראיונות מומחים ודיונים שנבנו במיוחד כדי להבליט מאפיינים מסוימים של הבעיות. מטרת הפעולות הייתה להביא לשינוי בתפיסות המשתלמים דרך קונפליקט קוגניטיבי וכמובן דרך התהליך כולו. בסיום הועברו כמה משימות נוספות אשר נועדו לוודא שהמורים אכן עברו שינוי כלשהו.

דיון ביחס לספרות

בהתייחס **לשיקולי המציאות** חל שיפור ואכן ניתן לראות כי לכל הנבדקים היתה ירידה בשימוש בהיגדים המסורתיים אשר נשענים על פתרונות קלאסיים סטנדרטיים כפי שמקובלים בשיעורי המתמטיקה ועליה בהיגדים האלטרנטיביים הנשענים על מודלים מתמטיים אחרים אשר לא עומדים בקנה אחד עם הנורמות המקובלות בכיתה. לדוגמא, תחילה נבחרו כנכונים ההיגדים המסורתיים המקובלים בשיעורי המתמטיקה. לעומת זאת, לאחר רצף המשימות אשר הציגו דוגמאות לפתרונות הנשענים על שיקולי מציאות ובמיוחד לאחר משימת הקונפליקט והעיסוק בדברי המומחים אשר העידו על שימוש בשיקולי המציאות בתהליך עבודתם, היתה עליה בשיקולי המציאות בהתייחס להיגדים האלטרנטיביים. הנבדקים נחשפו להיגדים שונים, מסורתיים ואלטרנטיביים, מה שגרם להם לחשוב על פתרונות נוספים מזווית ראיה שונה המביאה בחשבון שיקולי מציאות.

יש לציין שבאופן כללי הן אצל המורים והן אצל פרחי ההוראה גם במדידת ה"לפני" וגם במדידת ה"אחרי" עדיין הגישה המסורתית בפתרון בעיות היתה רבה יותר מאשר הגישות האלטרנטיביות. ממצאים אלה אכן עולים בקנה אחד עם הנחות המחקר הנוכחי שבהן תוכנית ההתערבות אשר מרכזה בהפניית המורים ופרחי ההוראה לראייה מעמיקה בהיבטים נוספים של בעיות מתמטיות ולא להתמקד בהיבט אחד בלבד, אכן מביאה את הנבדקים לכוון חשיבה בעל סממנים יותר אלטרנטיביים מאשר מסורתיים אף כי בשלב ראשוני זה עדיין שיקולי מציאות מסורתיים בולטים יותר מאשר האלטרנטיביים.

יתכן, כי העובדה שיש יותר היגדים מסורתיים מראה את העומק בחינוך שמורים ופרחי ההוראה התחנכו על פיהם לאורך השנים. החינוך הזה מקבע, מקשה ולא מאפשר פתיחות לדרך חדשה. ריצ'רדסון מתאר את התהליכים וההתרחשויות שעוברים המורים והמצבים הפוקדים אותם בכיתות במהלך עבודתם. לדבריו, מתברר כי לאור השינויים המהותיים אשר מנסים להכניס להוראה, קיים קושי בקרב המורים לצעוד בנתיב הוראה שונה מזה שהורגלו בו (Richardson, 1990). ההשפעה החזקה של בית הספר על המורים ודרך העבודה שלהם הן כתלמידים והן כמורים אשר אינה מעודדת שאלות מן העולם האמתי גורמת להם לא להתחשב בשיקולי המציאות.

מורים מחוייבים לתוכנית הלימודים. הם מורגלים לעבוד על פיה ולכן עושים את האבחנה בין פתרון בעיות בית הספר לבעיות במציאות. בעקבות התייחסות המורים למתרחש בכיתותיהם בכל הקשור לפתרון בעיות, גם תלמידיהם נוטים להתייחס לפתרון הבעיות בצורה דומה. ממחקרים, הסתבר כי תלמידים אשר תחילה חשבו, אך בסופו של דבר התעלמו מקישור למציאות בתהליך פתרון בעיות, עשו זאת כי חשבו שמצפים מהם לתת תשובה "רגילה" (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2002). תלמידים נוטים לאמץ לעצמם אסטרטגיות פתרון מתוך חיקוי הפתרון של בעיות אנלוגיות מבלי לקחת

בחשבון או לנתח שיקולים רלוונטיים כמו שיקולי מציאות. לכן במחקר זה, תוכנית ההתערבות חושפת לשיקולי מציאות ומביאה את המורים ואת פרחי ההוראה להכרה כי בעיות הניתנות בשיעור מתמטיקה ובעיות הניתנות מחוצה לו ראויות לפתרון זהה המתחשב בשיקולי המציאות.

ממצאים אלה תומכים במה שאמרו וורשפל ואחרים, כי תלמידים פותרים בעיות מילוליות לפי "כללי המשחק" במערכת בה הם מעורבים – בכיתה בה הם לומדים. לתלמידים מערכת הנחות סמויות לגבי פתרון בעיות מילוליות. לדוגמה, אחת ההנחות הנפוצות בקרב התלמידים הינה שאין להיות מוטרדים אם הפתרון מפר את הידע היומיומי. זאת כמובן מפני שאת הבעיות בכיתה אין פותרים התלמידים בהתבסס על שיקולי מציאות, אלא עפ"י מוסכמות אחרות – מוסכמות "מתמטיות" הנלמדות בבית הספר (Verchaffel, Greer & De Corte, 2002).

ממצאי המחקר עלה כי לגבי שיקולי מציאות אומנם חל שיפור ברמת החשיבה והנבדקים חושבים אחרת, חשיבתם יותר רב ממדית מאשר היתה לפני כן, אך עדיין יש מקום לשיפור.

תרומת המחקר הנוכחי היא בבדיקה וביישום של תכנית התערבות הכוללת קונפליקט קוגניטיבי. הממצאים מצביעים שהקונפליקט והדיון סביבו מאפשרים שיפור בחשיבה המתמטית המטה-קוגניטיבית בקרב מורים ופרחי הוראה כאחד. במחקר זה נמצא כי הקונפליקט הקוגניטיבי הביא לשיפור בשתי קבוצות המשתלמים. המחקר מציג דרך התערבות (רצף משימות) שבאמצעותה ניתן לשפר את תפיסת המורים על המשמעות של פתרון בעיות ועל תפקיד המתמטיקה, ומכאן תרומתו היישומית להוראת המתמטיקה. הממצאים מצביעים שלאורך כל שלבי המחקר, תהליך ההתערבות הוביל לשינוי בתפיסות המורים. על כן, במהלך השתלמויות מורים למתמטיקה ובהכשרת פרחי הוראה מומלץ ליישם את עקרונות ההתערבות.

רשימת מקורות

Greer, B. (1997). Modeling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 293-307.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A model and modeling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Album.

Peled, I., & Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: Modelling conceptions and controls in task examples with simple word problems. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education,* 43(2), 307-315.

Peled, I. & Suzan, A. (2013). Designed to facilitate learning: Simple problems that run deep. In C. Margolinas (Ed.) *Proceedings of ICMI Study 22*, 633-640.

Richardson, V. (1990). Significant and worthwhile change in teaching practice. *Educational Researcher*, 19(7), 10-18.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 257-276). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

פתרון בעיות עצמאי על ידי התלמידים בשיעורי מתמטיקה בעל-יסודי: עמדות והצעות של מורים

רחל זקס, מכון ויצמן למדע, מכללת שאנן
בוריס קויצ'ו, מכון ויצמן למדע

רקע תיאורטי

פתרון בעיות הוא מטרה חשובה של החינוך המתמטי, לא רק כדרך ללמוד מתמטיקה אלא כדרך לעשות מתמטיקה (NCTM, 2000). משימה נחשבת *בעיה*, לפי ההגדרה של Schoenfeld (1985), אם לפותר לא ידועה מראש האסטרטגיה שעליו לנקוט כדי להגיע לפתרון, אולם יש לו הרקע הדרוש לפתרונה. תכניות הלימודים במתמטיקה מציבות ציפייה ממורי המתמטיקה שיובילו את תלמידיהם להיות פותרי בעיות גמישים ובעלי תושייה (NCTM, 2000). ואכן, במהלך שלושת העשורים האחרונים מוקדשת תשומת לב מרכזית לפתרון בעיות, הן במחקר החינוך המתמטי והן בהוראת המתמטיקה (Felmer, Pehkonen & Kilpatrck, 2016). אולם, בשיעורים רבים המכוונים לפתרון בעיות, התלמידים – גם אם הם צופים במוריהם פותרים בעיות או משתתפים בדיון אודות בעיה וכדומה - למעשה אינם חווים תהליך עצמאי של פתרון בעיות (Lester & Cai, 2016).

המחקר אודות הקשר בין פרקטיקות ההוראה של מורים ובין העמדות או הגישות (attitudes) שלהם אינו נפוץ (Philipp, 2007), ולמעשה אין הסכמה כללית בין החוקרים לגבי טבעה של *עמדה* (Zan & Di Martino, 2007). לפי הצעתם של Goldin, Rösken and Törner (2009), עמדה יכולה להיחשב כנטייה לדפוסי התנהגות מסוימים או כנטייה לסוגים מסוימים של תחושות רגשיות כלפי תחום כלשהו.

איתור משימה שתהווה בעיה עבור התלמידים אינו פעולה טריוויאלית עבור המורה; שכן האבחנה אם משימה היא אכן בעיה, היא סובייקטיבית, ותלויה באינדיבידואל המנסה לפתור אותה בעיתוי מסוים (Kilpatrick, 1985). כאשר מורה מציג בעיה לתלמיד, עליו לשים את עצמו במקום התלמיד, להתעלם מדרך הפתרון שהוא עצמו היה נוקט לו נדרש לפתור את המשימה, ולהשתדל לדמיין כיצד יפעלו תלמידים שונים (Stein et al., 2008). היכולת להבין במה אחרים מתקשים, מה מרתק אותם או כיצד הניסיון שלהם מעצב את הפרשנויות שלהם אינה פשוטה כלל; ולכן נדרשת הכשרת מורים לטיפוח מיומנויות לא טבעיות אלה (Ball & Forzani, 2011).

מטרות המחקר

המחקר המוצג כאן הוא חלק ממחקר הבוחן קשר בין שתי פרקטיקות הוראה: יצירת הזדמנויות בשיעורים שבהן התלמידים יחוו פתרון עצמאי של בעיות, וחיזוי פתרונות צפויים של תלמידים שונים. מטרות המחקר הנוכחי הן ללמוד מן המורים כיצד הם מציעים לשלב פעילויות של פתרון בעיות עצמאי על ידי תלמידים בשיעורי מתמטיקה בחט"ב ובתיכון, ולחשוף מניעים העומדים מאחורי גישה חיובית או שלילית של מורים כלפי פעילויות הוראה מסוג זה.

מתודולוגיה

איסוף הנתונים התבצע מתוך תמלולים מלאים של מפגשי השתלמות שנתית מקוונת סינכרונית מטעם מרכז השתלמויות מורים במכללה להוראה, בנושא אסטרטגיות לשילוב משימות אתגר בשיעורים. תכנית ההשתלמות נבנתה בהשראת מודל ארבעת השלבים שמציע Swan (2011) לאתגור ערכים, אמונות ופרקטיקות של מורים במסגרת פיתוח מקצועי שלהם: (1) זיהוי ערכים, אמונות ופרקטיקות קיימים, (2) ניתוח פרקטיקות מבוססות דיון, (3) דחיית חוסר אימון ואימוץ פרקטיקות חדשות, ו(4) רפלקציה על ההתנסות.

בהשתלמות השתתפו 12 מורות למתמטיקה מבתי ספר מגוונים ברחבי הארץ ברמות הוראה שונות בחט"ב ובתיכון. עשרת מפגשי ההשתלמות, בני 105 דקות כל אחד, הוקלטו ותומללו במלואם בסמיכות למועד ההשתלמות. ניתוח הנתונים התבצע בשיטות מקובלות של תיאוריה המעוגנת בשדה (Creswell & Poth, 2016).

ממצאים

מניתוח התבטאויות המורות במפגשי ההשתלמות נמצא שעמדותיהן כלפי שילוב פתרון בעיות עצמאי על ידי התלמידים בשיעורים הן מגוונות. העמדות שהושמעו נעות על הסקאלה שבין התנגדות, ספקנות או הסתייגות, דרך מודעות ושאיפה לאימוץ הפרקטיקה, ועד לתמיכה ואף לשתדלנות בקרב מורים עמיתים בעד יצירת הזדמנויות לפעילויות הוראה המזמנות לתלמידים פתרון בעיות עצמאי. בקרב המורות שדיווחו על הימנעות מפרקטיקה של שילוב בעיות לפתרון עצמאי של תלמידים בשיעוריהן, נמצאו נימוקים שונים; חלקם עקרוניים ונעוצים באמונות המורות כלפי מתמטיקה בכלל וכלפי מתמטיקה בית ספרית בפרט, וחלקם נובעים מאילוצים מוסדיים או אישיים.

נמצאו מי שסוברות שפעילות הוראה של פתרון בעיות עצמאי בשיעורים אינה נדרשת כלל, למשל:

> מתמטיקה לא אמורה להיות חידה. אמורה להיות דרך מאוד מאוד ברורה איך לפתור אותה. ואם עובדים לפי הכללים הם אמורים לדעת איך לפתור אותה.

אחרות אמנם חושבות שפעילות כזו נחוצה, אך לטענתן היא אינה ישימה בשל אילוצים שונים. לדוגמה:

> לצערי בשלושת השבועות שחלפו עוד לא הגעתי לרמה של בעיות, עדיין נמצאים רק בתרגילים. בגלל צורת הלימוד דרך זום והלחץ שבית ספר מציב בתאריכי מבחנים, אני עסוקה רק בלהספיק חומר.

> הסיכון להביא בעיה בכיתה, זה שאת מאבדת חלק מהתלמידים, ואחר כך את צריכה להזכיר להם לחזור לעניינים אחרי שסיימת את הבעיה.

לעומתן יש מהמורות התומכות בפרקטיקת ההוראה הזו, אך מדווחות שהן אינן בוחרות בה. הן תולות את הימנעותן משילוב פתרון בעיות עצמאי של תלמידים בשיעוריהן במאפיינים אישיים, כגון סגנון ההוראה המועדף עליהן או רמת הביטחון האישי שלהן בחומר הלימוד. למשל:

> ... זה לשחרר מעצמי קודם כל [...] כאילו עדיין אני במקום שכאילו אני למדתי משהו, אני יודעת אותו בדרך מסוימת, אז בואי נעביר אותו. אולי קצת חוסר ביטחון עצמי. האם באמת אני יודעת להעריך גם דרך אחרת? לדעת באמת אם היא שווה או לא שווה? זה חלק מהניסיון, תלוי איזה נושא.

רוב המורות מבחינות בין תלמידים ברמות שונות, ונוטות להתאים פעילויות של פתרון בעיות עצמאי רק לתלמידים מתקדמים בהקבצות גבוהות, כפי שעולה מן הציטוטים הבאים:

> אני מאוד אוהבת את המתמטיקה, מאוד אוהבת את האתגר, ובפועל כשאני מגיעה לקבוצה שלי של 4 יח"ל [...] אני מחפשת את השאלות היותר פשוטות, כדי שהן לא יגידו לי 'לא הצלחתי', ויבואו לי בשיעור הבא בלי תרגיל.
>
> יש שאלות מסוימות שאני לא אביא לתלמידים. איך אומרים? שלא... שלא אקשה, והיא תעבור, -- ואולי באמת זה לא מספיק אמון בתלמידים גם, שהן כן יכולות והן כן מסוגלות. לא יודעת. זה בהחלט מעלה כל מיני מחשבות. אבל בסדר.

התפקידים שייחסו המורות לפעילויות פתרון בעיות עצמאי כוללים: עידוד חקרנות של תלמידים, יצירת בעלות על הידע, עידוד אינטראקציה בין תלמידים, כלי אבחוני בידי המורה והכנה למבחני הבגרות.

בהצעות המורות ליצירת סיטואציות הוראה המזמנות פתרון בעיות עצמאי על ידי התלמידים נמצאו ארבעה סוגים של משימות המועמדות להוות בעיות בשיעורים ומתאימות לפעילות הוראה המיועדת להעניק לתלמידי התיכון התנסות בפתרון בעיות אותנטי:

(1) *משימות שיגור המטרימות את זמנן*: משימות המוצגות בפתיחת נושא. התלמידים מתבקשים לפתור משימה לפני שנחשפו למושגים ו/או לפרוצדורה הדרושה. במקרים רבים הם יפתחו את האלגוריתם המתאים בעצמם. דוגמה למשימה כזו יכולה להיות משימה של מציאת פונקציה קדומה לפני היכרות עם מושג האינטגרל, או מציאת נוסחה לחישוב מרחק בין שתי נקודות.

(2) *קישור בין תחומים מתמטיים*: משימות המזמינות שילוב בין שני תחומים מתמטיים או משימות שבהן נדרש יישום של מה שנלמד בהקשר אחד, כאשר עוסקים בנושא אחר או בתחום מתמטי אחר. לדוגמה: בשיעור אנליזה מתבקשים לפתור בעיית ערך קיצון של מרחק בין שתי נקודות ונדרש שימוש בנוסחה שמוכרת משיעורי אלגברה, בנושא גאומטריה אנליטית.

(3) *שאלות סיכום מיוחדות*: משימות שניתנות בדרך כלל לקראת מבחנים. משימות אלו, המכונות בלשון המורות 'שאלות יפות', נראות לתלמידים כבלתי מוכרות או כחדשות ואינן נתפסות באופן מיידי כדומות למשימות שכבר נפגשו בהן בעבר, לעתים בגלל ניסוח שונה. בין השאלות המיוחדות נמנות גם משימות המזמינות חשיבה ברמה גבוהה.

(4) *פתרון בידיים כבולות*: פתרון משימה בדרכים חלופיות ולא בדרך הטריוויאלית. למשל, פתרון בעיית ערך קיצון ללא שימוש באנליזה. בקטגוריה זו נכללת הנחיה לפתרון משימה בדרכים רבות, שבמוקדם או במאוחר תהווה בעיה עבור כל פותר, לאחר שימצה את דרכי הפתרון שבידיו.

אף שנמצאו הבדלים בין עמדות המורים כלפי יצירת הזדמנויות לפתרון בעיות עצמאי לתלמידים מתקדמים ולתלמידים בהקבצות נמוכות, בכל ארבעת סוגי המשימות שהוצעו על ידי המורות כמיועדים להוות בעיות לתלמידים, המשימות הן בלתי תלויות ברמת הכיתה ואף לא בנושא המתמטי.

סיכום ודיון

למרות הדעה הרווחת אודות מקומן של פעילויות לפתרון בעיות בשיעורי המתמטיקה, נראה שחסרות הזדמנויות שבהן התלמידים חווים תהליך עצמאי של פתרון בעיות. ממצאי המחקר הנוכחי מצביעים מצד אחד על המניעים מאחורי עמדות מורים המתנגדים לשילוב בעיות עצמאי בשיעורים ומן הצד השני על מאפיינים של משימות המתאימות לעיצוב סיטואציות הוראה המזמנות פתרון בעיות כאלו ועל התפקידים שמייחסים להן המורים.

כאשר תלמיד נתקל במשימה המהווה בעיה הולמת עבורו, הוא חווה *מאבק פרודוקטיבי*, ומשקיע מאמצים על מנת להבין את המתמטיקה ולפענח משהו שאינו ניכר באופן מיידי (Hiebert & Grouws, 2007). ממצאי המחקר הנוכחי עשויים למלא את החסך המתואר על ידי Livy, Muir and Sullivan (2018), לפיו לא קיים 'מתכון' ליצירת מאבק פרודוקטיבי; ובכך לתרום לגוף הידע אודות פרקטיקת הוראה של שילוב בעיות לפתרון עצמאי בשיעורי מתמטיקה בתיכון.

חשיפת המניעים מאחורי עמדות המורים המתנגדים ליצירת תהליכי פתרון בעיות עצמאי על ידי התלמידים בשיעורים, עשויה לסייע בידי מורי מורים בבואם לעצב השתלמויות להתפתחות מקצועית של מורים (למשל בהשראת המודל של Swan, 2011), המטפחות פתרון בעיות עצמאי על ידי תלמידים ומובילות שינוי בעמדות המורים כלפי תמיכה ביצירת הזדמנויות כאלו בשיעוריהם בחט"ב ובתיכון.

רשימת מקורות

Ball, D. L., & Forzani, F. M. (2011). Teaching skillful teaching. *The Effective Educator, 68(4),* 40– 45.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2016). Qualitative inquiry and research design: *Choosing among five approaches*. SAGE.

Felmer, P. L., Pehkonen, E., & Kilpatrck, J. (2016). *Posing and solving mathematical problems.* Springer.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs - no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In *Beliefs and attitudes in mathematics education* (pp. 1-18). Brill Sense.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1,* 371-404.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 1-15.

Lester, F. K., & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Springer.

Livy, S., Muir, T., & Sullivan, P. (2018). Challenging tasks lead to productive struggle!. *Australian Primary Mathematics Classroom, 23(1),* 19-24.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Author.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 257-315.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Swan, M. (2011). Designing tasks that challenge values, beliefs and practices: A model for the professional development of practicing teachers. In *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (pp. 57-71). Springer.

Zan, R & Di Martino, P. (2014). Students' attitude in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 572-577). Springer.

לטוב ולרע – מה למדנו מהקורונה לגבי שיעורי מתמטיקה מקוונים?

סמדר אורן, אוניברסיטת תל אביב
פרופ' טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

סקר ספרות

באמצע מרץ 2020 עולם החינוך השתנה בבת אחת מאופיו המסורתי ועבר בין-לילה ללמידה מקוונת עקב מגפת הקורונה. למידה מקוונת מורכבת משיעורים סינכרוניים, בהם המשתתפים פעילים יחד בזמן אמת, ושיעורים א-סינכרוניים, בהם המשתתפים פעילים בזמנים שונים (Rice, 2006). מחקרים בנושא למידה מרחוק (למשל Bernard et al., 2004) הגדירו בנפרד הוראה מרחוק ולמידה מרחוק, מכיוון שהלמידה אינה תמיד נגזרת מההוראה. הפעולות הקשורות בהוראה שונות מאלו הקשורות בלמידה.

למידת מתמטיקה מקוונת אינה מושג חדש. מוקד אחד במחקר אודות לימודי מתמטיקה מקוונים ברחבי העולם הוא המענה לפיזור גיאוגרפי, כפי שדווח באוסטרליה ובאירן (Lowrie & Jorgensen, 2012; Safavi, et al., 2013). מוקד נוסף במחקר זה הוא שימוש בטכנולוגיות בלימודי המתמטיקה (למשל Kim, Park & Cozart, 2014). בישראל, משרד החינוך (2015) כלל בתוכניתו לחיזוק לימודי המתמטיקה את הרחבת הלמידה המקוונת במסגרת התיכון הוירטואלי, אשר הוקם בשנת 2012. ביטון ואחרים (2018) עקבו אחר התיכון הוירטואלי במשך חמש שנים ודיווחו על שביעות רצון מהמודל.

עם זאת, המעבר הפתאומי והנרחב שהתרחש עקב מגפת הקורונה יצר קרקע פורייה למחקר שונה מבעבר, הכולל בתי ספר שלמים שעברו לתרבות למידה שונה בתכלית. מחקר זה עוסק בשיעורי מתמטיקה מקוונים סינכרוניים, ומתמקד בתקופה של תחילת המעבר (מאי-יוני 2020).

מחקר זה כולל שני נושאים עיקריים. הנושא הראשון קשור באחריות על תהליך הלמידה ומנסה לשייך פעולות של מורים ותלמידים בשיעור המקוון לסגנון ההוראה: ממוקד מורה או ממוקד תלמיד. הנושא השני עוסק בגישת הוראת המתמטיקה בלמידה המקוונת. מחקרים שנערכו בתקופת הלמידה מרחוק עקב הקורונה עסקו גם בסוגיות אלו. Sullivan ואחרים (2020) זיהו סכנות והזדמנויות בלמידת מתמטיקה מרחוק, אשר קשורות הן ליכולת ההתמדה של תלמידים והן לתכנון שיעורי מתמטיקה מקוונים על ידי המורים. חוקרים נוספים (Drijvers, 2020; Aldon et al., 2020) סיכמו את השינויים בגישות ההוראה עקב המעבר ללמידה מקוונת, תוך התייחסות לחלקי השיעור השונים הכוללים הוראה של נושא חדש (הבנה רעיונית לעומת פרוצדורות חדשות) ותרגול של נושאים שכבר נלמדו.

מתודולוגיה

שאלות המחקר

המחקר עוסק בשתי שאלות מרכזיות: הראשונה היא אחריות הלמידה: מהי אחריות המורים בהוראה מקוונת ובאילו פעולות הם נוקטים, ומהי אחריות התלמידים בלמידה מקוונת? כיצד המורים מנסים להעביר את אחריות הלמידה לתלמידים ואיך התלמידים מגיבים לכך? השאלה השנייה קשורה במרכיבי השיעור המקוון: כמה זמן מוקדש להבנה רעיונית לעומת למידת פרוצדורות חדשות? האם יש הבדל בעת לימוד נושאים חדשים לעומת תרגול נושאים שכבר נלמדו? האם יש הבדל בין פוקוס על "למה" לעומת פוקוס על "איך"?

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו מורים ותלמידיהם בכיתות ז-יב מבתי ספר במרכז הארץ.

כלי המחקר

המחקר כלל שני חלקים, שאלון דיגיטלי ל-35 מורים ו-259 תלמידים, ותצפיות על עשרה שיעורים מקוונים. מטרת השאלון היתה למקד את המחקר. הנשאלים התבקשו לדרג משפטים שהשוו בין למידה מקוונת ללמידה בכיתה בהתאם לרמת הסכמתם. בהמשך, נערכו תצפיות על עשרה שיעורים מקוונים אשר הוקלטו על ידי מורים שונים שהסכימו לשתפם עם המחקר.

ניתוח הנתונים

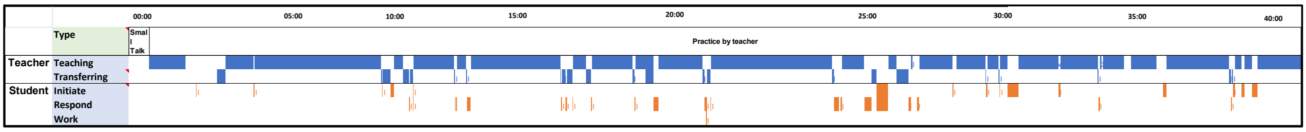
מטרת תצפיות השיעורים הינה לנתח פעולות של מורים ותלמידים ולשייך אותן לקטגוריות הקשורות לאחריות הלמידה ולמיקוד מרכיבי השיעור המקוון. הניתוח התבסס על מודל TRU של Schoenfeld (2013) אשר הותאם ופושט לצורך מחקר זה. בכל סגמנט במהלך השיעור סומנו פעולות המורה והתלמידים המתרחשות באותו סגמנט. מודל זה מאפשר למדוד עבור כל פעולה הן את אורכי הזמן שלה והן את כמות המופעים שלה. פעולות המורים חולקו לשתי קטגוריות: פעולות בהן המורה מלמד (Teach) ופעולות בהן המורה מנסה להעביר אחריות לתלמידים (Transfer). פעולות התלמידים חולקו לשלוש קטגוריות: פעולות אותן יוזמים התלמידים (Initiate), פעולות בהן התלמידים מגיבים לפעולות של המורה (Respond) ופעולות בהן התלמידים עובדים בעבודה עצמית (Work).

ממצאים

השיעורים אשר השתתפו במחקר מופו בהתאם למודל ולכל שיעור נוצר ציר-זמן המתאר את הפעולות המתרחשות בו. איורים 1 ו-2 מתארים צירי זמן של שני שיעורים שונים.

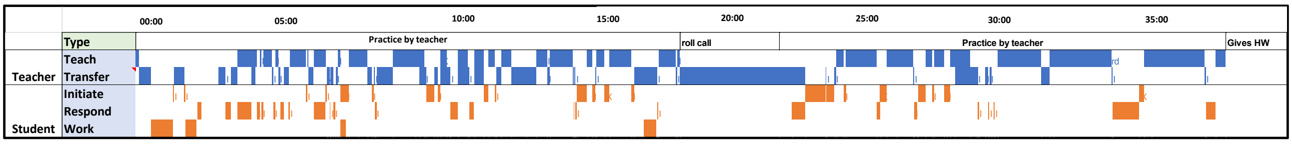
איור 1

ציר זמן של שיעור מס' 2



איור 2

ציר זמן של שיעור מס' 3



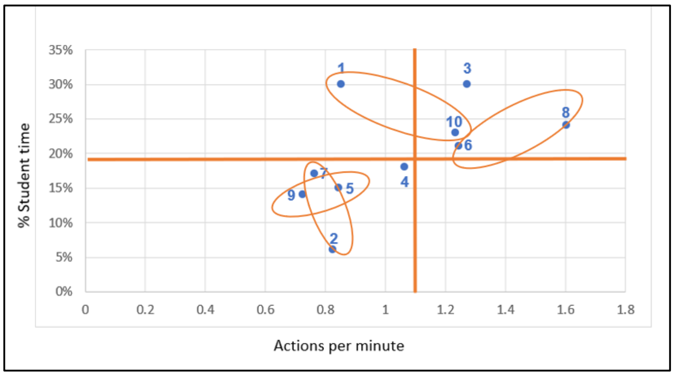
ניתן לראות כי בשיעור 2 המורה מלמד רוב הזמן וממעט בהעברת אחריות לתלמידים, וכי התלמידים משתתפים מעט מאוד ולמשך זמן קצר. בשיעור 3 המורה מנסה להעביר אחריות לתלמידים לעיתים תכופות והתלמידים מגיבים לכך ("פינג פונג").

על פי ניתוח כל עשרת השיעורים ניתן לסכם כי בממוצע כ-80% מהזמן מוקדש לפעולות של המורים לעומת כ-20% מהזמן המוקדש לפעולות של התלמידים. כמעט בכל השיעורים פעולות התלמידים כתגובה לפעולות המורה היו רבות יותר (54%) מאשר פעולות אותן יוזמים התלמידים (36%) ופעולות הקשורות בעבודת כיתה (10%).

פעולות התלמידים נספרו ובהתאם חושב לכל שיעור מדד של כמות פעולות תלמידים לכל דקה, בממוצע. פיזור הנתונים של מדד זה נמדד ביחס לאחוז הזמן של פעולות התלמידים מסך זמן השיעור. התוצאות מופיעות באיור 3. שיעורים של אותו מורה סומנו בעיגול.

איור 3

תדירות השתתפות תלמידים

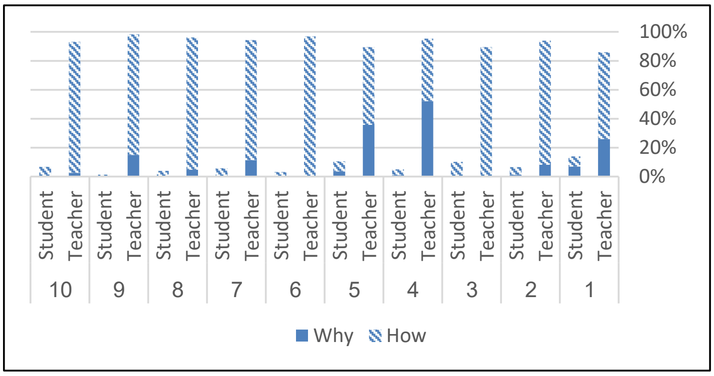


ניתן לראות כי סגנונות הוראה שונים יכולים להשפיע על מידת ההשתתפות של התלמידים בשיעור.

המחקר בדק את מרכיבי השיעור המקוון והתמקד בפוקוס הלמידה. האם המיקוד הוא ב-"למה" (הבנה של ההקשרים והסיבות המתמטיים של נושא השיעור), או ב-"איך" (איך פותרים את הבעיה המתמטית). הזמן אשר הוקדש (למה לעומת איך) חושב כאחוז מזמן הלמידה הכולל – ראו באיור 4.

איור 4

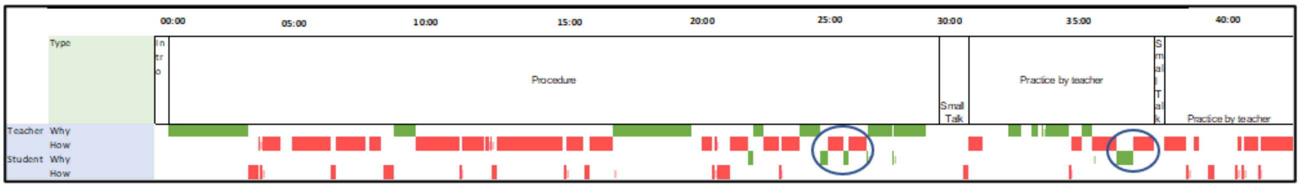
חלוקת השיעור "למה" לעומת "איך"



התלמידים מתמקדים בעיקר ב-"איך". גם כאן ניתן לייחס את סגנון ההוראה להבדלים המופיעים בין השיעורים השונים (שיעורים 5 ו-9 הועברו על ידי אותו מורה). ניתן לייצג את מיקוד השיעור (למה לעומת איך) באופן גרפי, בדומה לציר הזמן לעיל, כמוצג באיור 5.

איור 5

ציר זמן למה/איך של שיעור 5



באזורים המסומנים בעיגול ניתן לראות שהתלמידים שואלים "למה" והמורה משיב ב-"איך". זהו מצב ייחודי, בשאר השיעורים מתקיים סנכרון של הפוקוס למה/איך בין התלמידים והמורים.

דיון

מחקר זה נערך על מספר מצומצם של שיעורים, ואף לא נערך מחקר משווה ללמידה בכיתות. עם זאת, כלי המחקר שפותח הינו גמיש וניתן להרחבה, ולכן יכול לתרום למחקרים עתידיים בתחום.

כאשר בוחנים את תוצאות המחקר ניתן לזהות קושי של המורים להעביר אחריות לתלמידים. בחלק מהמקרים הקושי נובע מסגנון ההוראה ובחלק מהמקרים הקושי נובע מאופי ההשתתפות הפסיבי של התלמידים. Sullivan ואחרים (2020) זיהו קושי בתכנון שיעורים מקוונים באופן מיטבי ללמידת מתמטיקה, וניתן להסיק כי עקב כך שכפלו המורים את מודל הלמידה המסורתי, לפחות בתחילת תקופת המעבר ללמידה מקוונת. עם זאת, ניכר מתוצאות המחקר כי לסגנון ההוראה של המורה יש השפעה על שיתוף התלמידים בכיתה וכי ישנם מורים אשר מצליחים בכך יותר ממורים אחרים.

בנוסף, תוצאות מחקר זה עומדות בשורה אחת עם טענתם של Sullivan ואחרים (2020) כי הוראה מקוונת עלולה לגרום לדגש יתר על פרוצדורות וכללים ופחות על הבנה רעיונית (התמקדות ב-"איך"). עם זאת, יתכן כי ממצא זה קשור לתקופה בה נערך המחקר (מרץ-יוני 2020), שבה כבר נלמד רוב החומר החדש בכיתות.

מקורות

משרד החינוך, 2015. *התוכנית לחיזוק לימודי מתמטיקה*.
https://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Dovrut/pedagogia/Tochniyot/hizuklimudeimatematika.htm

Aldon, G., Cusi, A., Schacht, F., & Swidan, O. (2021). Teaching Mathematics in a Context of Lockdown: A Study Focused on Teachers' Praxeologies. *Education Sciences, 11*(2), 38.

Bernard, R. M. et al. (2004). How does distance education compare with classroom instruction? A meta-analysis of the empirical literature. *Review of Educational Research, 74*(3), 379-439.

Biton, Y., Fellus, O., Raviv, D., Feilchenfeld, D., & Koichu, B. (2018). Mathematics at the Virtual School: Why? Why not? Who? What? And so what? In Movshovitz-Hadar, N. (Ed.) *K-12 mathematics education in Israel: Issues and innovations* (pp. 145-153). Singapore: World Scientific.

Drijvers, P., 2020. *Math@Distance: distance mathematics teaching during COVID-19 lockdown* [online webinar]. https://www.nationalacademies.org/event/07-09-2020/math-distance-distance-mathematics-teaching-during-covid-19-lockdown

Kim, C., Park, S. W., & Cozart, J. (2014). Affective and motivational factors of learning in online mathematics courses. *British Journal of Educational Technology, 45*(1), 171-185.

Lowrie, T., & Jorgensen, R. (2012). The tyranny of remoteness: Changing and adapting pedagogical practices in distance education. *International Journal of Pedagogies and Learning, 7*(1), 1-8.

Rice, K. L. (2006). A comprehensive look at distance education in the K-12 context, *Journal of Research on Technology in Education, 38*(4), 425–448.

Safavi, A., Rostamy-Malkhalifeh, M., Behzadi, M. H., & Shahvarani, A. (2013). Study on the efficiency of mathematics distance education. *Mathematics Education Trends and Research, 2013*, 1-6.

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *ZDM, the International Journal of Mathematics Education, 45*, 607-621.

Sullivan, P. et al. (2020). Threats and opportunities in remote learning of mathematics: implication for the return to the classroom. *Mathematics Education Research Journal*, *32*(3), 551-559.

"מעניין ללמוד כך, נותן את הרצון ללמוד עוד."
עמדותיהם של תלמידים במתמטיקה כלפי למידה אדפטיבית

ארין אלוש, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב
אפרת דסקל, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב; המכללה האקדמית כנרת
ארבל צרפתי, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב
יניב ביטון, המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב; מכללת שאנן, חיפה

מבוא

בעידן טכנולוגי זה, שבו האנושות מתמודדת עם קשיים רבים ברמה החברתית, הכלכלית והרגשית, עולה השאלה כיצד התלמידים צריכים ללמוד. בשנים האחרונות מתחזקת גישת הפרסונליזציה בחינוך, המתאפיינת בהתאמת תוכנית למידה אישית לתלמידים, כזו שתיתן מענה לצרכים האישיים שלהם, להעדפות הלמידה שלהם וליכולות שלהם (מורגנשטרן ושות', 2019). בעקבות העלייה בלמידה באמצעות כלים דיגיטליים, הגיעו מגוון כלים וגישות התומכות בחוויית הלומד. מערכת למידה אדפטיבית בונה למשתמש מסלול למידה אישי, המותאם לו, במטרה לשמר מצב של התפתחות מקסימלית ולעקוב אחר התפתחותו (Kelly & Tangney, 2006). מטרת המחקר שלנו היא לבחון את עמדות התלמידים הלומדים במערכת למידה אדפטיבית כדי להעריך את התוכנית.

רקע תאורטי

כיום הוראה על פי רמת התלמיד הממוצע היא עדיין אסטרטגיית הלמידה הרווחת ביותר, אף שהיא משאירה מאחור תלמידים מתקשים ומשעממת תלמידים מתקדמים, ואינה מנצלת את הזמן בצורה יעילה. יצירת למידה מותאמת אישית בעזרת שימוש בכלים טכנולוגיים מאפשר "להגדיל" את המורה בדרכים שונות (Vainas et al., 2019). ויגוצקי (Vygotsky, 1986) הדגיש את חשיבות הלמידה המותאמת לצרכים וליכולות של התלמיד והמאפשרת למידה יעילה.

מערכות למידה אדפטיביות מציעות סביבת למידה מתקדמת, שמטרתה לספק מענה לשונות שבין התלמידים ולצרכים האישיים שלהם. המערכות מתאימות את עצמן לידע וליעדים של התלמידים כדי להוביל ללמידה אישית ומיטבית (Kelly & Tangney, 2006).

בשונה מהוראה בגישה המסורתית, הגישה המותאמת אישית שמה בראש מעייניה את התלמיד ברמת הפרט. לפי גישה זו, התשובות והנתונים של כל התלמידים מנותחים באופן שווה על פי הרמה המתאימה להם, ומתוך כך כל תלמיד מקבל את התמיכה שהוא זקוק לה בהתאם לקצב ולסגנון הלמידה שלו, מה שמפנה את המורה לתת לתלמידים מענה מעמיק יותר על ידי עבודה אישית או בקבוצות קטנות על פי הצורך. ניצול נכון של הטכנולוגיה יכול להביא לשיפור בהישגי התלמידים (Grant & Basye, 2014).

המערכת האדפטיבית מבוססת על מנוע חכם, המתאים את מסלול הלמידה בתוך המערכת לכל תלמיד. מנוע הלמידה ההסתגלותי מפעיל טכניקות לבחירת רצף הלמידה והמשימות שיקבל התלמיד כך שיאתגרו אותו אך לא יקשו עליו מעל לרמתו. כך האלגוריתם תומך בהתאמה אישית של תוכנית הלימודים הנתונה ומאפשר העברה של תוכני לימוד מותאמים (Vainas et al., 2019). במקביל להתאמת מסלול הלמידה ללומדים, המערכת האדפטיבית אוספת כמות גדולה של נתונים הנובעים מהאינטראקציה של התלמיד עם המערכת. בשלב ניתוח הנתונים על הממשק להתייחס לכל הנתונים שנותחו, למשל חוויית הלמידה הדיגיטלית, משך העבודה בכל משימה, שימוש בעזרי למידה, שימוש ברמזים וסיוע ללומד. מטרת איסוף הנתונים היא הכרת הלומד והחלטותיו ובניית מסלול למידה מותאם אישית(Gibson & de Freitas, 2016). המסלול המותאם של כל תלמיד כולל מטרות למידה ברורות המוגדרות מראש ומטרה עיקרית אחת, והיא לשמור על התלמיד במצב התפתחות מקסימלית: לשמור

ברמת למידה מאתגרת עבור התלמיד כך שלא תהיה קשה ומתסכל מדי, אך במקביל לא תהיה קלה מדי, ותוביל ללמידה מקסימלית ויעילה (Vainas et al., 2019).

שילוב הטכנולוגיה בלמידה מוסיף לתלמידים רבדים שונים המשפיעים על חוויית הלמידה שלהם. ההחלטות מתי, איפה וכיצד תתבצע הלמידה הן החלטות גמישות, המאפשרות התאמה לכל תלמיד, דבר העשוי לסייע להסיר מחסומים רבים. כמו כן, הלמידה משלבת כלים דיגיטליים, מדיה ותקשורת מקוונת, הכוללת סרטונים, סימולציות ועזרים, ובכך הלמידה הופכת לחוויה אישית ומהנה יותר (Grant & Basye, 2014). במחקר זה מוצגים ממצאים מפרויקט "שברים בדרך שלי" של המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח) בשיתוף עם מייקרוסופט, והוא נועד לפתח ולהעריך מערכת למידה אדפטיבית להוראת נושא השברים בכיתות ד–ה. מחקר זה הוא חלק ממחקר גדול יותר, ומתמקד בעמדות של התלמידים כלפי למידה אדפטיבית.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 157 תלמידי כיתות ד–ה, מתוכם 78% מהמגזר היהודי ו־22% מהמגזר הערבי. התלמידים שהשתתפו במחקר למדו במערכת הלמידה האדפטיבית, והמידע נאסף באמצעות שאלון שהוטמע במערכת כחלק מרצף הלמידה.

בשאלון היו 19 שאלות, מתוכן 17 שאלות סגורות ושתי שאלות פתוחות. השאלות הסגורות עסקו בנושאים אלה: שביעות רצון מהמערכת, אחריות אישית על למידה, תפקיד המורה, למידה בסביבה ממוחשבת לעומת למידה באמצעות ספרים, איכות הלמידה ותחושת מסוגלות. כמו כן, כדי להנגיש את השאלון לתלמידים (Phan, Amerhein, Rounds & Lewis, 2019), במקום להשתמש בסולמות מדידה של 1–5, שולבו סולמות מדידה מתוקפים של סמלונים (אימוג'י). השאלות הפתוחות בחנו את יתרונות התוכנית והיבטים לשיפורה. התשובות לשאלות הפתוחות נותחו בגישת ניתוח תוכן. התשובות קודדו לצורך זיהוי תמות חוזרות וקובצו לקטגוריות המזהות היבטים שונים הנוגעים ללמידה בכלל וללמידה בסביבה אדפטיבית בפרט. כמו כן חושבה השכיחות של כל תמה שזוהתה.

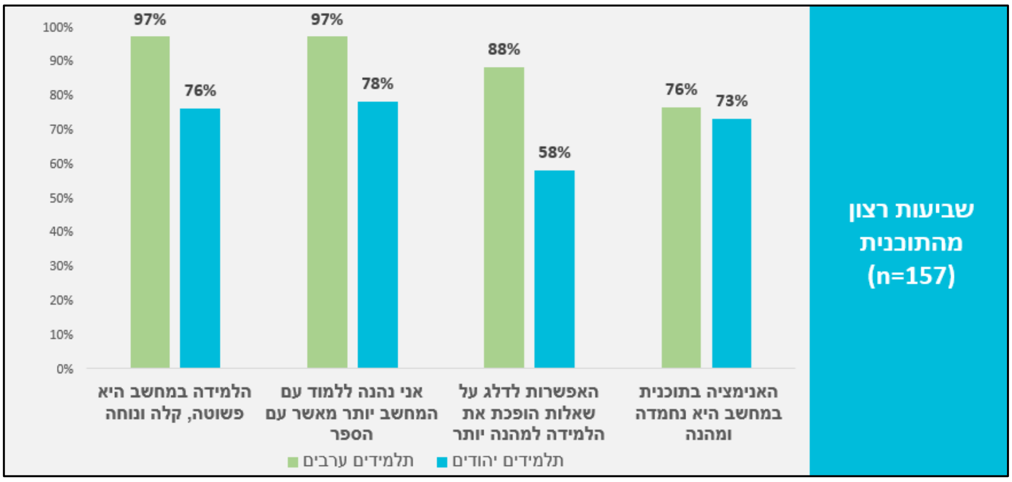
ממצאים

מהנתונים שנאספו בשאלונים אפשר ללמוד על עמדות התלמידים כלפי למידה באמצעות מערכת הלמידה האדפטיבית "שברים בדרך שלי".

הנתונים המעידים על שביעות רצונם של התלמידים מהעבודה במערכת מראים כי 78% מהתלמידים מהמגזר היהודי ו־97% מהתלמידים מהמגזר הערבי נהנים ללמוד בעזרת המחשב לעומת ספר הלימוד, וכן 76% מהתלמידים מהמגזר היהודי ו־97% מהתלמידים מהמגזר הערבי דיווחו כי הלמידה במחשב פשוטה, קלה ונוחה יותר עבורם. נתונים אלה חזרו גם בשאלות הפתוחות, לדוגמה: "אני נהנית ללמוד ב'שברים בדרך שלי' כי זה יותר נוח וכיף יותר ללמוד מהמחשב מאשר בספר הלימוד", "היד לא מתעייפת וגם זה תמיד נגיש לנו בבית ואפשר להיכנס לאתר מכל מחשב". עוד נתון המחזק ממצא זה מראה כי 84% מכלל התלמידים ציינו בשאלות הפתוחות כי נהנו מתהליך הלמידה וכי העבודה במחשב קלה יותר עבורם. נוסף על כך אפשר להבחין בעובדה שגם תלמידים שנוח להם פחות לעבוד במחשב מעדיפים את הלמידה בו: "לפעמים פשוט לא נוח, קשה עם העכבר, שכל שנייה הולך למקום אחר, או שזה לא נותן 'להסביר' עם אותיות אלא רק עם מספרים. אבל בכל זאת אני מעדיפה את זה על פני עבודה בחוברת".

איור 1

עמדות התלמידים כלפי למידה אדפטיבית

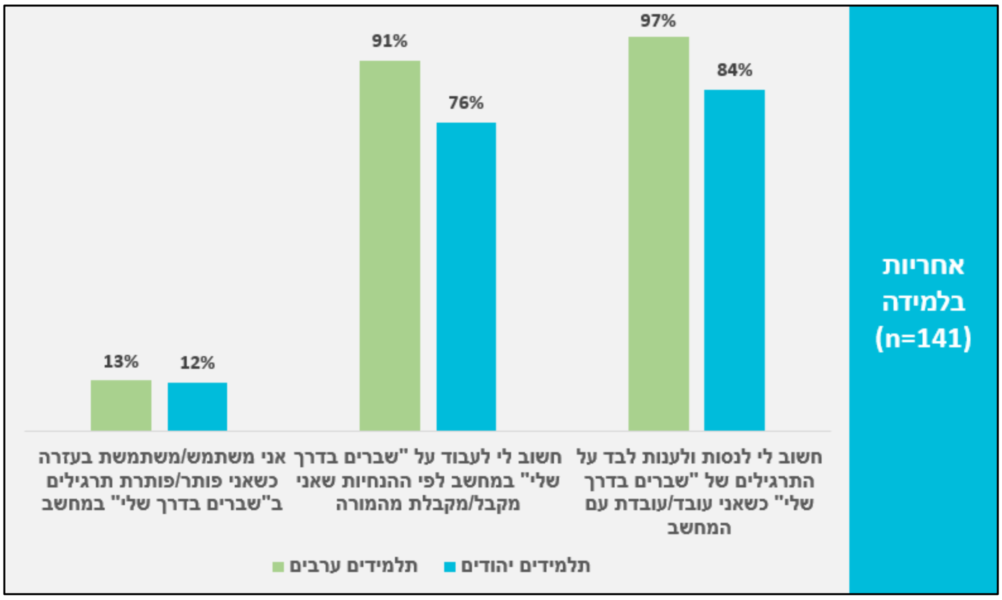


כשהתבקשו התלמידים לדווח אם האפשרות לדלג על שאלות פתוחות הופכת את הלמידה למהנה יותר, 58% מהתלמידים מהמגזר היהודי ו־88% מהתלמידים מהמגזר הערבי הסכימו עם אמרה זו.

בכל הקשור להעדפת למידת שברים במחשב עם המורה לעומת למידה בעזרת ספר והמורה אפשר להבחין בפער ניכר, שכן 58% מהתלמידים במגזר היהודי מעדיפים ללמוד שברים במחשב עם המורה, לעומת 18% מהתלמידים המעדיפים ללמוד בעזרת הספר והמורה. נתונים דומים אפשר למצוא במגזר הערבי, שבו 75% מהתלמידים מעדיפים ללמוד במחשב עם המורה, לעומת 39% המעדיפים ללמוד בעזרת הספר והמורה. מתוך התלמידים המעדיפים ללמוד שברים בעזרת המחשב והמורה, 84% מהתלמידים מהמגזר היהודי ו־97% מהתלמידים מהמגזר הערבי מעדיפים לנסות לפתור לבד תרגילים במערכת האדפטיבית, ואילו 76% מהתלמידים מהמגזר היהודי ו־91% מהתלמידים מהמגזר הערבי רוצים לקבל הנחיות מהמורה במהלך העבודה בסביבה האדפטיבית.

איור 2

אחריות בלמידה בקרב התלמידים



נתון מעניין נוסף העולה מהמחקר מראה כי רק 12% מהתלמידים במגזר היהודי ו־13% מהתלמידים במגזר הערבי משתמשים באפשרות ללחוץ על הכפתור "עזרה" כשהם לומדים ומתרגלים במחשב.

במבט על הצלחת התלמידים בעבודה במחשב, על הלמידה ועל ההבנה של נושא השברים, אפשר להבחין מתוך ניתוח הנתונים בכך ש־66% מהתלמידים מהמגזר היהודי חשים כי הם מבינים את נושא השברים טוב יותר בעזרת המחשב לעומת השימוש בחוברת הלמידה, ואילו 88% מהתלמידים מהמגזר הערבי חשים כך. 56% מכלל התלמידים שענו על השאלה הביעו במילים שונות שהם נהנים ללמוד בסביבת "שברים בדרך שלי".

לסיכום

מחקר זה הוא חלק מפיתוח והערכה של תוכנית הלימודים האדפטיבית "שברים בדרך שלי". מטרת המחקר הייתה לאסוף ממצאים על סמך התנסותם ודעתם של תלמידים במערכת הלמידה האדפטיבית לצורך הפקת לקחים ושיפור התוכנית. על סמך הנתונים והמשובים שהתקבלו מהתלמידים, נמצא כי הם שבעי רצון מהעבודה בסביבה האדפטיבית. אפשר לזהות זאת מעדויות חוזרות של התלמידים על כך שהעבודה במחשב קלה, נוחה ונגישה להם יותר מהעבודה בחוברת. ניכר שהתלמידים מעדיפים את העבודה במחשב ונהנים מהאפשרות להתקדם ולדלג על משימות, ומשתמשים פעמים רבות במילה "כיף" כדי לתאר את התרגול שלהם בסביבה האדפטיבית.

נתונים אלה באו לידי ביטוי גם כשהתבקשו התלמידים לדווח אם הם מעדיפים לעבוד בסביבת "שברים בדרך שלי" או בחוברת הלימוד, אז היה אפשר לראות כי מרבית התלמידים דיווחו שהם מעדיפים ללמוד בעזרת מערכת הלמידה האדפטיבית. ההנאה והצלחה של התלמידים משתקפות גם בתחושת אחריות גדולה יותר ללמידה, דבר המצביע על מוטיבציה גבוהה ללמידה.

נתון נוסף הניכר בממצאים הוא שתלמידים מועטים מאוד משתמשים באפשרות "עזרה" בסביבת הלמידה. מנתון זה עולה כי יש לחשוף את התלמידים לאפשרות לעזרה ולעודד אותם להשתמש באפשרות זו כדי לבסס את ההבנה.

בנתונים שהוצגו לעיל אפשר להבחין בכך שמערכת הלמידה האדפטיבית מהנה יותר, מעלה את המוטיבציה של התלמידים ומאפשרת להם להבין את החומר טוב יותר לעומת עבודה בשיטה המסורתית.

רשימת מקורות

מורגנשטרן, ע', פינטו, א', וגרהוף, ע', הופמן, ת' ולוטטי, ש. (2019). פדגוגיה מוטת עתיד 2: מגמות, עקרונות, השלכות ויישומים. משרד החינוך.

Gibson, D., & de Freitas, S. (2016). Exploratory Analysis in Learning Analytics. *Technology, Knowledge and Learning*, *21*(1), 5–19. https://doi.org/10.1007/s10758-015-9249-5

Grant, P., & Basye, D. (2014). Personalized learning: A guide for engaging students with technology. Eugene, *OR: International Society for Technology in Education*

Kelly, D., & Tangney, B. (2006). Adapting to intelligence profile in an adaptive educational system. *Interacting with Computers*, *18*(3), 385–409. https://doi.org/10.1016/j.intcom.2005.11.009

Vainas, O., Ben-David, Y., Gilad-Bachrach, R., Ronen, M., Bar-Ilan, O., Shillo, R., Lukin, G., & Sitton, D. (2019). Staying in the zone: Sequencing content in classrooms based on the zone of proximal development. *EDM 2019 - Proceedings of the 12th International Conference on Educational Data Mining*, 659–662.

Vygotsky, L.S. (1986). Thought and language. Cambridge, MA: MIT Press

פרסונליזציה של הוראת מתמטיקה ולמידתה בקבוצות תגבור

רותי סגל, אורנים מכללה אקדמית לחינוך
יוסי לוי, מנהל תוכנית Teach-in
נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון

רקע תיאורטי

לפני כ- 150 שנה, ברוח המהפכה התעשייתית, עוצבו בתי הספר כמערכת הנשענת על הוראה פרונטלית, זהה לכל התלמידים, כך שהמורה מכוון את הוראתו ל"תלמיד הממוצע". השינויים שהתרחשו מאז בעולם בכלל ובעולם החינוך בפרט, הובילו לתובנה שעל מנת להכין את התלמידים היטב לעולם בו הם יתפקדו כבוגרים, יש לכוון את תהליכי ההוראה/למידה למגוון יכולות התלמידים תוך מתן מענה אישי לכל תלמיד. מטרות החינוך הממלכתי החל משנת 2000 קובע כי יש "לפתח את... כישרונותיהם השונים למיצוי מלוא יכולתם... ,לבסס את ידיעותיהם...בתחומי הדעת והמדע השונים..., להעניק שוויון הזדמנויות...,לאפשר להם להתפתח על פי דרכם וליצור אווירה המעודדת את השונה והתומכת בו". ארגונים מהמגזרים השונים מפעילים זה שנים תוכניות חינוכיות חיצוניות במוסדות חינוך באישור משרד החינוך. כל התכניות המאושרות מופיעות בפורטל רשויות ובעלויות חינוך. חלק ניכר מתכניות אלה הן תוכניות אקסטרא קוריקולריות המושתתות "על תפיסה המכירה בחשיבותה ובערכה הייחודי של חברה אזרחית מפותחת ועצמאית, מתוך הבנה שכך ייתרמו ויתחזקו מערכת החינוך והחברה בישראל" (שם). אחת התוכניות המאושרות היא תכנית teach-in המהווה את סביבת המחקר הנוכחי ומתמקדת בפרסונליזציה של ההוראה והלמידה.
לפי זלקוביץ וגולדשטיין (2011) פרסונליזציה של הלמידה (personalized learning) הינה גישה חינוכית-מערכתית לפיה יש לשנות את תפיסת הבסיס של ההוראה והלמידה במערכת החינוך מרעיון ה "One size fits all"- להוראה קלינית המותאמת לצרכי התלמיד הייחודי ומקדמת את למידתו. גישת זו מציעה דרך בה מורים, מנהיגי חינוך ומערכות חינוך יכולים לתמוך ולהנחות תלמידים באופן המעודד מצוינות אישית, אהבת למידה והגעה למומחיות גבוהה, על ידי הצבת התלמיד במרכז והתאמת ההוראה והלמידה אליו באופן ייחודי ופרטני (Gates Foundation, 2014) . פרסונליזציה של הלמידה נשענת על הוראה קלינית, המבוססת על אבחון, הערכה ומדידה של למידת התלמיד ותפירת תכנית למידה אישית בהתאם למידותיו. זאת ועוד, מטרות הלמידה, תכנית הלמידה האישית, גישות ההוראה, תוכן ההוראה והרצף שלה עשויים כולם להשתנות בהתאם לצורכי הלומד. התלמיד לומד בין השאר עם תלמידים אחרים ובעזרת המבוגרים שסביבו שכן מערכות יחסים משמעותיות ומיטיבות תורמות להתפתחות הלמידה שלו, ולכן התלמידים מעודדים לבנות מערכות יחסים המבוססות על פתיחות, אמון, מחויבות הדדית והתמדה זה עם זה, עם מוריהם ועם מבוגרים אחרים (Gates Foundation, 2014 ibid). אבוט ושותפיו קבעו כי פרסונליזציה של הלמידה נועדה ליצור מצב בו ההוראה והלמידה פוגשות את התלמיד במקום ובמצב בו הוא נמצא ומסייעות לו להגשים את הפוטנציאל הטמון בו ולהגיע למומחיות בתחומים שונים באמצעות בחירה של אסטרטגיות למידה מתאימות מתוך טווח רחב של אסטרטגיות הוראה ולמידה אפשריות. התלמידים מועצמים, מצופים לקחת אחריות ובעלות על למידתם בהתאם לתחומי העניין ולמטרות האישיות שלהם, להתחבר ללמידה ולהבין את משמעותה וערכה עבורם. כמו כן, התלמידים מקבלים משוב באופן קבוע ובזמן אמת ככל האפשר, על מנת לקדם את למידתם (Abbott et al., 2014). עם זאת, הדרך להגעה למטרה מותאמת אישית עבור כל תלמיד וזמן ההגעה אליה משתנה. זאת לעומת מערכת החינוך המסורתית, בה ההוראה בדרך כלל אחידה וזהה עבור כל התלמידים, בעוד שרמת ההישג בין התלמידים משתנה (Gates Foundation, 2014 ibid). למידה מותאמת אישית משנה את הדינמיקה בין המורה לתלמיד, באופן שבו מורים מתפקדים כמנטורים, כלומר כמנחים המתאימים לכל תלמיד את הפיגומים המתאימים לו כדי לטפס על בניין הידע.(Patrick et.al ,2016) . אחת הדרכים לבניית פיגומים מותאמים לכל תלמיד במהלך למידה מותאמת אישית כוללת שימוש במגוון חידושים פדגוגיים וטכנולוגיים, כמו למשל שילוב של מערכת

הנשענת על בינה מלאכותית - Artificial Intelligence (AI) המאפשרת למידה וקבלת החלטות אנושיים תוך התבססות על גישה למידע ממערכות מידע שונות (Abbott et al., 2014; Becker et.al, 2016). חידושים פדגוגיים בהקשר ללמידה מותאמת אישית עשויים לכלול בין היתר יצירת סביבת למידה המזמנת למידה רגשית חברתית לפיתוח תחושת המסוגלות של הלומדים. למידה רגשית חברתית (SEL Social Emotional Learning) הינו תהליך למידה שבמסגרתו מתפתחות היכולות החברתיות והרגשיות, לצד היכולות הקוגניטיביות. הלומדים רוכשים ומיישמים ביעילות את הידע, מגדירים ומשיגים יעדים, מרגישים אמפתיה מהסביבה, מבססים ומקיימים יחסים חיוביים וקבלת החלטות אחראיות (Weissberg, Durlak, Domitrovich, & Gullotta, 2015). טיפוח של מיומנויות חברתיות רגשיות מהווה נדבך חשוב ובלתי נפרד מתהליכי חינוך ולמידה המכוונים בין היתר להעלאת המוטיבציה של הלומד. אחת הדוגמאות לכך היא הגישה המוטיבציונית ההתפתחותית המבוססת בעיקר על זימון התנסויות וחוויות מצטברות המספקות ללומד צרכים בסיסיים התומכים בשייכות, חיזוק תחושת המסוגלות, המוביל לתפיסת עצמי אחר ופיתוח אוטונומיה ומוטיבציה ללמידה. הוראה המקדמת גישה זו מבוססת בין היתר על מיומנויות התומכות במסוגלות על ידי מתן משוב ספציפי תכוף ולא השוואתי, הקשבה, אמפטיה ויצירת סביבה לימודית חברתית תומכת ומאתגרת Asor (2015).

המחקר

המחקר הנוכחי הוא חלק ממחקר יותר רחב העוקב אחר תהליכי ההוראה והלמידה בסביבה מותאמת אישית ב **תכנית טיץ' אין** (Teach-in).

סביבת המחקר: במערכת החינוך בישראל פועלות סביבות אחדות המיועדות להטמעת למידה פרסונלית. (כגון: סביבת Meta, ו-סביבת Full-proof). כאמור, המחקר הנוכחי נערך בסביבת תכנית **Teach-in**, הפועלת במסגרת התכניות החיצוניות של משרד החינוך כנזכר לעיל, ומספקת בין היתר תגבור במתמטיקה לתלמידי תיכון בשיטה שניתן לה השם MPC - Mathematics Personal Coaching. זוהי שיטה של יצירת פרסונליזציה בתהליך ההוראה והלמידה לאור המטרות אליהן רוצים להגיע, בהתאמה מלאה לרקע התיאורטי על פרסונליזציה הנזכר לעיל. תהליך ההוראה/למידה מכוון לאור: 1. זיהוי הידע של התלמיד: בנקודת הזמן, 2. המוטיבציה שלו 3. עקומות הלמידה המצטברות. התהליך הוא דינמי ומשתנה בהתמדה הודות להפעלה של מערכת נתמכת בינה מלאכותית (AI) המסייעת לבניית תכנית לימודים גמישה ומותאמת אישית לכל לומד. לתכנית שלושה היבטים: 1. ההיבט של מעקב ובקרה - זיהוי התפלגות ההישגים של כל אחד מהתלמידים בכל תת-נושא בתחום התוכן הנלמד. 2. ההיבט הרגשי – חיזוק הביטחון העצמי ותחושת המסוגלות של הלומדים באמצעות מיפוי החזקות והחולשות שלהם. 3. ההיבט האישי - יצירת תכנית למידה מותאמת אישית לתלמיד. התכנית הראשונית מבוססת על תהליך מיפוי של צורות החשיבה המתמטית של הלומד על בסיס שאלון ייעודי ושיחה אישית עם התלמיד, בנוסף למידע שמתקבל מהמסגרת הפורמלית אליה שייך התלמיד. צורות החשיבה של התלמידים ממוינות בהתאם לחמש קטגוריות: 1. חשיבה נוסחתית, 2. חשיבה כמותית, 3. חשיבה יחסית, 4. חשיבה מילולית 5. חשיבה גרפית. (הרחבה על ההגדרות של חמש הקטגוריות תובא בכנס). הודות לשיטת MPC התלמידים מגיעים מרצונם ללמוד בקבוצת למידה בה משתתפים בין 6-8 תלמידים מכיתות שונות, מרמות שונות ומצורות חשיבה שונות. המנחה של כל קבוצה מתאים לכל תלמיד את תכנית הלמידה האישית שלו לכל שיעור תוך שהוא נעזר במערכת AI. המנחה עובר בין התלמידים במהלך השיעור, מתייחס אל הקשיים של התלמידים, מגיש הסברים ובוחן את תהליכי ההבנה וההתקדמות. בהתאם לכך תכנית הלמידה האישית מתעדכנת לקראת השיעור הבא.

המשתתפים במחקר: ארבעה תלמידים בכיתה ט בעלי צורות חשיבה מ-4 קטיגוריות שונות הלומדים באותה כיתת אם ובאותה כיתת מתמטיקה (רמה א) בחינוך הפורמלי בבית הספר. תלמידים אלה, שלכאורה מצבם הלימודי במתמטיקה במסגרת הבית ספרית זהה, לומדים בתכנית Teach-in בשעות אחה"צ עם אותו חונך בלמידה מותאמת אישית.

מטרת המחקר: בחלק זה של המחקר המטרה הייתה לענות על השאלה הבאה: איזה הבדלים אפשר לזהות בין תוכניות הוראה/למידה אישיות של תלמידים במהלך השתתפותם בתכנית תגבור Teach-in, שבמערכת הפורמלית מצבם הלימודי זהה.

שיטת המחקר: המחקר התבצע על פי פרדיגמת המחקר האיכותני, מסוג חקר מקרים (Stake, 1995), תוך ניתוח השלבים בתוך כל מקרה ובין מספר מקרים.

כלי המחקר: 1. תוצאות המבחנים של כל תלמיד בבית-הספר. 2. שאלון מקדים לאפיון צורת החשיבה, חזקות וחולשות של כל תלמיד. 3. שיחה אישית עם כל תלמיד לצורך היכרות אישית, בחינה של המוטיבציה והמודעות של התלמיד למצבו הלימודי והמאמצים הנדרשים לצורך השגת היעדים שהוגדרו. 4. פריטי הערכה מעצבת ומסכמת במסגרת התכנית Teach-in שהוגשו לכל אחד מהתלמידים במהלך תהליך למידת תכנית לימודים מותאמת אישית. 5. מערכת AI הפועלת לניתור ובקרה של תהליכי הלמידה של כל תלמיד על סמך נתונים מהכלים הנ"ל.

תוצאות המחקר: בטבלה 1 מוצגים הנתונים המרכזיים של תהליך הוראה/למידה המותאמת אישית שהותוותה מיד לאחר סיום שלב האפיון לכל אחד מארבעת התלמידים. בנוסף, מוצג מספר השיעורים בכל תכנית אישית, המבוססת על האפיון הראשוני, על הישגי התלמידים בשני המבחנים האחרונים בבית הספר, על לוח המבחנים העתידי של בית הספר הכולל את הנושאים שיכללו בכל מבחן ומועד המבחן ועל שיחה משותפת עם התלמיד. תכנית הלימודים כוללת נתונים נוספים לאלו המוצגים בטבלה כאשר לכל אחד מתתי התחומים (למשל חוקי חזקות) מוזן ציון ראשוני, ציון יעד ותאריך מתוכנן להשגת ציון היעד המנותרים ומבוקרים על ידי מערכת המבוססת על AI.

טבלה 1 – מספרי השיעורים בתכנית למידה מותאמת אישית לכל אחד מארבעת התלמידים בשלושה נושאים

תכנית למידה \ תלמיד וצורת חשיבה	תלמידה א נוסחתית-מילולית	תלמיד ב כמותי-גרפית	תלמיד ג כמותית-מילולית	תלמיד ד גרפית-יחסית
טכניקה אלגברית (חוקי חזקות, כפל מקוצר)	19	22	20	21
גיאומטריה (משולשים ומרובעים)	24	12	24	20
פונקציה ממעלה שניה	24	24	24	24

ניתן לזהות בטבלה הבדלים בין התוכניות האישיות, במיוחד חלוקה שונה של מספר השיעורים לכל אחד מהתלמידים בכל אחד מהנושאים. בתכנית מפורטת יותר, שאינה מוצגת כאן בשל מגבלת המקום, ותוצג בכנס מופיעים פרטים נוספים כגון: חלוקה פנימית של מספר השיעורים לכל תת-נושא, מספר התרגילים, רמת התרגילים, ציון ראשוני, ציון יעד, תאריך מיועד להשגת ציון היעד בהתאם לתוכנית הלימודים של המערכת הפורמלית בבית הספר. כך למשל, לתלמידה א, שהיא בעלת צורת חשיבה נוסחתית-מילולית הותאמה תכנית למידה של הנושא חוקי חזקות במהלך 3 שיעורים ובהמשך כשהיא עוברת ללמידה של תת נושא אחר משולב בלמידה גם תרגול בתת הנושא הזה. הציון הראשוני שהוזן טרם תחילת הלמידה היה 80, ציון היעד שנקבע יחד עם התלמידה היה 95 ובמבדק המסכם בתאריך היעד היא השיגה 90 (איור 1). בתכנית ההוראה/למידה שלה בנושא משולש שווה שוקיים נקבע זמן למידה של 4 שיעורים. ציון ראשוני שהוזן טרם תחילת הלמידה היה 40, ציון היעד נקבע ל 65, בתחילת הלמידה היא השיגה ציון של 60 ובמבדק המסכם השיגה 75 (איור 2). בשני האיורים ניתן לזהות מגמות של עליה וירידה בהישגים הנובעים בעיקר מעלייה ברמת הקושי והמורכבות של המשימות שהיא נדרשה לפתור. בכנס נציג באופן דומה את כל הפרטים של מהלכי הלמידה של ארבעת התלמידים ונתייחס להשוואה ביניהם.

איור 1

איור 2

סיכום ומסקנות

ההבדלים בין תכניות ההוראה/למידה האישיות של ארבעת התלמידים שכאמור לומדים במסגרת הפורמלית באותה כיתה ומקבלים בדיוק את אותה הוראה נקבעו לאחר זיהוי צורות החשיבה השונות שלהם והתאמה של תכנית אישית הנשענת על כך ועל תהליכי הערכה רציפים (זלקוביץ וגולדשטיין,2011; Abbott et al., 2014) ההישגים שלהם השתפרו באופן ניכר. כך למשל, סדר ההוראה/למידה של הנושאים שהותווה לתלמידה א הותאם לצורת החשיבה שלה נוסחאתית-כמותי. זאת במטרה לחזק את תחושת המסוגלות שלה (Asor, 2015)**.** נקודת פתיחה כזאת נותנת לה סיכוי לעמוד בהמשך באתגרים של למידת נושאים פחות נוסחתיים ויותר גרפיים, כמו גיאומטריה. ההבדל בין מסלולי ההוראה של ארבעת התלמידים בא לידי ביטוי לא רק בסדר ההוראה/למידה של הנושאים אלא גם בהקצאת שעות ההוראה/למידה של כל תת נושא, ברמה ובכמות של התרגול ובקצב ההתקדמות. תכניות ההוראה/למידה השונות, המתעדכנת הודות לניתור באמצעות מערכת ה AI הן אלה שהביאו את ארבעת התלמידים להשיג שיפור בהישגיה.

רשימת מקורות

זלקוביץ, צ., גולדשטיין, א. (אפריל, 2011). מגמת הפרסונליזציה של חינוך בעידן טכנולוגיות מידע – סקירת ספרות. **כנס מיומנויות המאה ה 21- בהוראה ובהכשרת מורים. מכון מופ"ת**

Abbott, J., Basham, J., Nordmark, S., Schneiderman, M., Umpstead, B., Walter, K., & Wolf, M. A. (2014). Technology-enabled personalized learning: Findings & recommendations to accelerate implementation.

Assor, A. (2015). An Instruction Sequence Promoting Autonomous Motivation for Coping with Challenging Learning Tasks. In John Wang, Liu Woon Chia, and Richard Ryan. (Eds.). Building Autonomous Learners: Research and Practical Perspectives using Self-determination Theory. Springer.

Becker, S. A., Freeman, A., Hall, C. G., Cummins, M., & Yuhnke, B. (2016). *NMC/CoSN horizon report: 2016 K* (pp. 1-52). The New Media Consortium.

Gates Bill & Melinda Foundation, (2014) A Working Definition of Personalized Learning. Retrieved 9-Oct-21 https://s3.documentcloud.org/documents/1311874/personalized-learning-working-definition-fall2014.pdf

Patrick, S., Worthen, M., Frost, D., & Gentz, S. (2016). Meeting the Every Student Succeeds Act's Promise: *State Policy to Support Personalized Learning*. *iNACOL*.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. sage.

Weissberg, R. P., Durlak, J. A., Domitrovich, C. E., & Gullotta, T. P. (2015). *Social and emotional learning: Past, present, and future*.

תפיסות של מורים המלמדים מתמטיקה בכיתה י' ברמת חמש יחידות לימוד: מטרות ההוראה והלמידה של מושג הנגזרת והאמצעים להשגת מטרות אלו

אמירה עאבד, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא ורקע תיאורטי

מושג הנגזרת הוא אחד המושגים הבסיסיים בלימודי המתמטיקה בבית הספר התיכון, והבנתו חיונית גם בהמשך לימודי המתמטיקה ובתחומי לימוד אחרים, כגון פיזיקה, הנדסה וכלכלה. אלא שתלמידים רבים מתקשים להבין את המושג, את אופני הייצוג שלו ואת הקשר בין הנגזרת של פונקציה בנקודה ובין הסתכלות גלובלית על הפונקציה הנגזרת (Sahin et al., 2015). מחקרים הראו שכדי לפתח את הבנת המושג ההוראה צריכה לשלב אינטואיציה ועבודה עם גרפים. למרות זאת, הוראת מושג הנגזרת בבתי הספר מתמקדת בעיקר בטכניקות לפתרון תרגילים, ללא תשומת לב להבנת הרעיון שנמצא בבסיס הטכניקה (Bingölbali, 2008). מחקרים רבים עוסקים בתפיסות של תלמידים את מושג הנגזרת, אולם רק מעטים התמקדו במורים ובהוראה בהקשר זה. תפיסות של מורים הן מרכיב חשוב בהוראת המתמטיקה, שכן הן משפיעות על איכות ההוראה של המורים, על החלטותיהם בתהליכי האינטראקציה עם תלמידיהם ועל התפתחות מומחיותם (Genc & Erbas, 2019). המחקר הנוכחי נדרש לחוסר זה.

מחקר זה רואה בתפיסות של מורים ביטוי לידע שלהם ולאמונותיהם (Thompson, 1992). המחקר מתמקד בתפיסות של מורים המלמדים את מושג הנגזרת בכיתה י' ברמת חמש יחידות לימוד, תוך התמקדות בשני היבטים: (1) מטרות ההוראה והלמידה של מושג הנגזרת; (2) האמצעים להשגת מטרות אלו. מטרות הוראה מוגדרות במחקר כציפיות של המורה בנוגע לשיפור ההישגים האינטלקטואליים, החברתיים והרגשיים של תלמידים כתוצאה מהתנסותם בכיתה (Artzt et al., 2015), כאשר כל מטרה מבקשת להשיג שינוי בין מצב בהווה למצב רצוי בעתיד. המסגרת שנבחרה כמתאימה למיון המטרות נבנתה על בסיס מודל 'הפוטנציאל המתמטי' (The mathematical potential) (Leikin, 2019) (פירוט להלן). במחקר הנוכחי התייחסנו ל"אמצעי' כאל עשייה חינוכית המשמשת להשגת מטרה מסוימת. המסגרת שנבחרה כמתאימה למיון האמצעים נבנתה על בסיס מודל 'שלשת ההוראה' (Jaworski, 1992), שיפורט בהמשך.

המחקר הוא חלק ממחקר גדול יותר המבקש בין היתר לענות על השאלה: מהן מטרות המורים למתמטיקה בתיכון ביחס להוראה וללמידה של מושג הנגזרת ובאילו אמצעים הם משתמשים כדי ליישם מטרות אלו? המחקר הנוכחי מבקש להציג את המודל שנבנה כדי לענות על שאלה זו.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו 10 מורים למתמטיקה המלמדים אנליזה בכיתה י' ברמת 5 יחידות לימוד. המורים הם בוגרי אוניברסיטאות ומכללות ומלמדים בבתי ספר שונים ברחבי הארץ. הבחירה באוכלוסייה הטרוגנית למחקר נובעת מכך שמטרות הוראה של מורים והאמצעים להשגתם יכולים להיות מושפעים מהרקע שלהם, למשל רקע אקדמי, מאופי בית הספר שבו הם מלמדים וממגדרם (Eichler & Erens, 2014). כל המורים שהשתתפו במחקר מוסמכים להוראת מתמטיקה בכיתות י'–י"ב, שבהן האנליזה היא תחום לימוד מרכזי, ולמדו בקורסים אקדמיים שתחום הליבה שלהם הוא אנליזה.

כלי המחקר, איסוף נתונים וניתוח נתונים

איסוף הנתונים נעשה באמצעות ריאיון אישי חצי מובנה. כל ריאיון נמשך 90–120 דקות וכלל ארבע שאלות עיקריות שביקשו ללמוד על מטרותיהם של המורים בהוראה ולמידה של מושג הנגזרת ועל האמצעים שהשתמשו בהם כדי להשיג מטרות אלו. השאלה הראשונה התמקדה באסטרטגיות

ההוראה של המורה בעת הצגת מושג הנגזרת. השאלה השנייה התייחסה לחומרי ההוראה ולמשימות שבהם משתמשים המורים בעת הצגת המושג. השאלה השלישית דנה בשלבי ההוראה הבאים לאחר המבוא למושג הנגזרת והקשר שלהם למבוא. השאלה הרביעית עסקה בציפיות המורים מתלמידיהם ודרכי המענה שלהם לחשיבה וללמידה של התלמידים.

ניתוח הנתונים שילב ניתוח מכוון וניתוח אינדוקטיבי. הניתוח האינדוקטיבי כלל זיהוי תפיסות של המורים בנוגע למטרות ההוראה ולאמצעים המשמשים אותם להשגתן. במחקר זיהינו מטרה של מורה כאמירה המתארת את התוצאה הצפויה או התוצאה שמתכוונים להשיג בעקבות פעילות כלשהי. בהתאם, כל אמירה של מורה המרמזת על כוונה או על דרך למימוש מטרה פורשה כאמצעי להשגתה. הניתוח המכוון קישר בין הקטגוריות שזוהו בניתוח האינדוקטיבי לבין הקטגוריות הנכללות במודלים הקיימים בספרות. שני המודלים ששימשו מחקר זה הם: **(1) מודל הפוטנציאל המתמטי** (The Mathematical Potential) (Leikin, 2019), המתאר את הפוטנציאל המתמטי של תלמיד וכולל את המשתנים הבאים: יכולות אנליטיות ויצירתיות, גורמים רגשיים (מקומיים וגלובליים) כמו אמונה ומוטיבציה, מחויבויות של התלמיד ללמידת מתמטיקה והזדמנויות למידה בהתאם להבדלים בין התלמידים. מודל זה נבחר כמתאים **לניתוח המטרות** לאחר שניתוח נתונים ראשוני העלה כי המטרות שזוהו בראיונות מתאימות לשלושה תחומים המקבילים למרכיבי המודל. לפיכך בוצעה התאמה של מודל זה למחקר כך שישקף את הנתונים שנמצאו; (**2) מודל שלשת ההוראה** (The Teaching Triad) (Jaworski, 1992) – מודל המקשר בין שלושה היבטים של פעילות המורה ומנתח את ההוראה לפיהם: ניהול למידה, רגישות לתלמידים ואתגר מתמטי. מודל זה נבחר כמתאים **לניתוח האמצעים** לאחר שניתוח נתונים ראשוני העלה כי האמצעים שזוהו בראיונות מתאימים לשלושה תחומים המקבילים למרכיבי המודל. לפיכך בוצעה התאמה של מודל זה למחקר כך שישקף את הנתונים שנמצאו. השימוש בשני המודלים התבסס על מחקר שבחן תפיסות של מתרגלים למתמטיקה בתיכון וירטואלי והשתמש במודלים אלה לאפיון המטרות והאמצעים של המתרגלים (Weissman et al., submitted*)*. בתהליך הניתוח במחקר הנוכחי נבנה מודל **'מטרות ואמצעים בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת'**.

ממצאים

ניתוח הראיונות הוביל לפיתוח מודל **'מטרות ואמצעים בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת'** – מודל לניתוח תפיסות של מורים ביחס להוראה של מושג הנגזרת. להלן פירוט הקטגוריות העיקריות במודל. פירוט נוסף על המודל ועל תהליך בנייתו וכן המחשת השימוש בו לאפיון תפיסות של מורים יוצגו בכנס.

'מטרות ההוראה' – זוהו מטרות משלושה סוגים: (1) מטרות המכוונות **לפיתוח היכולות המתמטיות** של התלמידים הקשורות ללמידה של מושג הנגזרת: לסוג זה, המתאים לרכיב פיתוח יכולות מתמטיות ב'פוטנציאל המתמטי', שויכו מטרות המכוונות לפיתוח דרכי חשיבה והרגלי העבודה שלהם בלמידת מושג הנגזרת, פיתוח הבנה ודימוי המושג של הנגזרת ופיתוח מיומנויות יישום של הנגזרת; (2) מטרות המכוונות ל**הזדמנויות למידה** לתלמידים במהלך ההוראה והלמידה של מושג הנגזרת: לסוג זה, המתאים לרכיב מתן הזדמנויות למידה ב'פוטנציאל המתמטי', שויכו מטרות הקשורות במתן הזדמנות ללמידת מושג הנגזרת לכל תלמיד ותלמידה; (3) מטרות שייעודן **פיתוח גורמים רגשיים** של התלמידים כלפי ההוראה והלמידה של מושג הנגזרת: לסוג זה, המתאים לרכיב התחשבות בגורמים רגשיים ב'פוטנציאל המתמטי', שויכו מטרות הקשורות בהתחשבות בגורמים רגשיים המתלווים לתהליך הלמידה של מושג הנגזרת.

'אמצעים להשגת המטרות' – זוהו אמצעים הקשורים לשלוש קטגוריות עיקריות: (1) אמצעים הקשורים **לאתגר המתמטי** בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת: לסוג זה, המתאים לרכיב האתגר המתמטי ב'שלשת ההוראה', שויכו אמצעים המכוונים לקידום הלמידה, להעמקה, להנמקה ולהמחשה של מושג הנגזרת. אמצעים אלה מזמנים לתלמידים אתגרים ברי-השגה, מעודדים הבנה קונספטואלית ומקשרים את ההבנה לידע פרוצדוראלי הקשור במושג הנגזרת; (2) אמצעים הקשורים **לרגישות לתלמידים** בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת: לסוג זה, המתאים לרכיב הרגישות לתלמידים ב'שלשת ההוראה', שויכו אמצעים המכוונים להתחשבות בצורכי התלמידים הן מבחינה קוגניטיבית והן מבחינה אפקטיבית (רגשית) בלמידת מושג הנגזרת; (3) אמצעים הקשורים **לניהול הלמידה** בהוראה

ובלמידה של מושג הנגזרת: לסוג זה, המתאים לרכיב ניהול הלמידה ב'שלשת ההוראה', שויכו אמצעים המתארים פעולות שהמורה עושה על מנת לייעל את הלמידה, כולל ארגון הכיתה, דרכי עבודה, מבנה השיעור ובנייה של נורמות סוציו-מתמטיות מקובלות בכיתה.

כדוגמה, להלן ציטוטים הלקוחים מתוך הריאיון עם המורה סוהאד ומשקפים את תפיסותיה בנוגע למטרת ההוראה 'פיתוח דימוי למושג הנגזרת' (המופיעה תחת הקטגוריה 'פיתוח היכולות המתמטיות של התלמידים הקשורות ללמידה של מושג הנגזרת') והאמצעים המשמשים להשגתה. המספרים בסוגריים מציינים את האמצעים להשגת המטרה כפי שעלו בריאיון. ניתן לראות בציטוט זה כי סוהאד מנסה להסביר את המושג נגזרת דרך הדימוי של שיפוע, וכדי להשיג מטרה זו היא משתמשת בשני אמצעים: גיאוגברה ככלי טכנולוגי דינמי לצורך קישור מושג הנגזרת למשיק ושינון 'הנגזרת כשיפוע המשיק'.

מראיינת: הבנתי שאת מתחילה ממשהו שהתלמידים מכירים, משיפוע פונקציה ליניארית, לחשב דלתא y חלקי דלתא x, תסבירי יותר בבקשה.

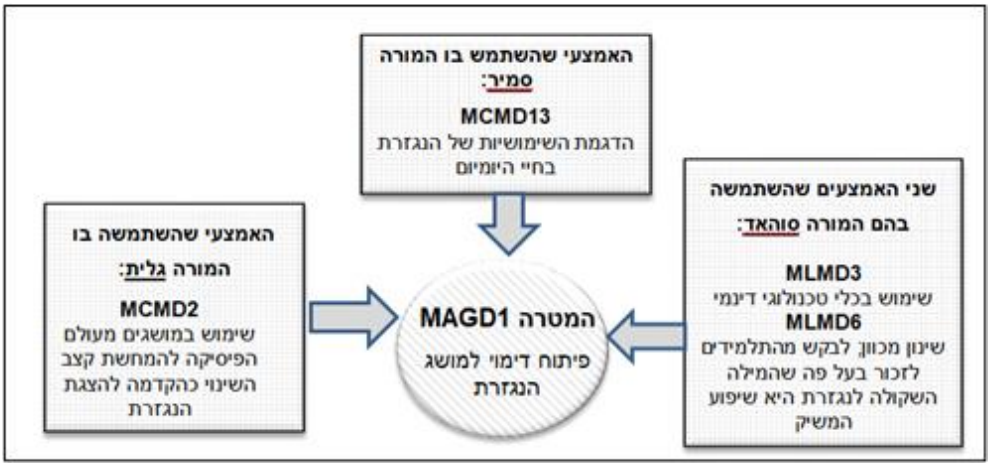
סוהאד: כן, אני מתחילה ממושג השיפוע שהם מכירים מפונקציה קווית, על מנת להטמיע בהם שמשמעות הנגזרת היא השיפוע, והשיפוע הוא הנגזרת. ואני משתמשת הרבה בגיאוגברה על מנת לשכנע אותם שזהו השיפוע [1]. ובמיוחד כשמתחילים לדבר על תחומי עלייה וירידה של הפונקציה. הם יודעים שהקו הישר העולה הוא בעל שיפוע חיובי, אז אני מסתכלת על הפונקציה כשהיא עולה, ואני מדברת כמובן על המשיק, שהשיפוע שלו פה הוא חיובי. אני מראה את זה בגיאוגברה ומשכנעת אותם. ומכאן הם מתחילים להסיק מה קורה בנקודות הקיצון. מה מצב המשיק שם? מה שיפועו? ואז הם מסיקים שעל מנת לחשב את נקודות הקיצון אז הנגזרת חייבת להתאפס.

מראיינת: אז איך לדעתך התלמידים שלך יסבירו את הנגזרת? או איך תרצי שהתלמידים שלך יסבירו את הנגזרת?

סוהאד: התלמידים שלי יגידו ישירות "שיפוע", אני לא מלמדת דברים בעל פה, אבל דווקא בשיעור זה אני חייבת ללמד אותם בעל פה שנגזרת שווה למילה שיפוע. אני רוצה שהם יפנימו שנגזרת היא שיפוע [2]. התלמידים יגידו 'שיפוע הפונקציה'. הם יגידו שהפונקציה מתחילה משמאל לימין. כשהיא עולה אז השיפוע שלה חיובי. זה אומר ששיפוע המשיק בה הוא חיובי. כשהיא יורדת אז השיפוע שלילי. כך יגידו ולא יותר מזה. התלמידים שלי מרוכזים במילה שיפוע. כשאני שואלת אותם מהי נגזרת ישר אומרים לי שיפוע המשיק. אני אומרת להם כמו שבאנגלית כיסא זה chair, אז במתמטיקה שיפוע זה נגזרת.

להלן דוגמה שממחישה את השימוש במודל לצורך למידה על תפיסות של מורים שונים ביחס למטרות ולאמצעים הקשורים בהוראה ובלמידה של מושג הנגזרת. במקרה זה בחרנו במטרה 'פיתוח דימוי למושג הנגזרת'. איור 1 מציג תבנית המראה את האמצעים שבהם משתמשים שלושה מורים שונים להשגת מטרה זו, כפי שעלה בראיונות עימם. כפי שאפשר לראות באיור, מטרה זו מקבלת "צבע" שונה אצל כל מורה: סוהאד מבקשת לפתח בקרב תלמידיה דימוי של שיפוע לנגזרת, סמיר מבקש לפתח דימוי של פונקציה לנגזרת, ואילו גלית מבקשת לפתח בקרב תלמידיה דימוי של מהירות. בהתאם לדימויים השונים שהם מבקשים לפתח בקרב התלמידים בוחרים המורים את האמצעים לפיתוחם.

איור 1. תבנית המראה את האמצעים שבהם משתמשים שלושה מורים שונים להשגת המטרה 'פיתוח דימוי למושג הנגזרת' (השמות בדויים)



דיון

המודל שנבנה במחקר זה מספק כלים לאפיון של תפיסות מורים ביחס למטרות של הוראה ולמידה של מושג הנגזרת והאמצעים להשגתן. המטרות משפיעות על תכנון ההוראה של המורה, ולכן הגדרתן היא שלב ראשון והכרחי בתהליך ההוראה. גם האמצעים להשגת המטרות מרמזים על תפיסות המורה בנוגע להוראה. המודל שפותח והתבניות (מטרות-אמצעים) מציעים המשגה, שפה וכלים לדיון במטרות ובאמצעים של מורים שונים, לערוך השוואה בין שיטות הוראה של מורים ולהעלות השערות ביחס להזדמנויות הלמידה הניתנות לתלמידים בכל שיטה. למשל, הדימויים השונים למושג הנגזרת שהמורים מבקשים לפתח והאמצעים להשגתם (איור 1) מציעים לתלמידים דרכי הבנה והתמודדות שונות עם המושג (Witzke & Spies, 2016).

המודל נבנה על סמך תפיסות של 10 מורים בלבד. מחקר המשך עם מורים נוספים יוכל לפתח את המודל ולעשותו מדויק יותר. המודל יכול לשמש גם ככלי מתודולוגי לבחינת התפתחות מטרות ואמצעים של מורים לאורך זמן, ולשמש בסיס לבחינת ההוראה בפועל בכיתה. נוסף על כך אפשר ליישם כלי זה במסגרות הוראה שונות בהתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה. ממצאי המחקר והדוגמאות שבו עשויים לסייע למורי מורים בבניית השתלמויות בנושא ולספק למורים כלי להוראת מושג מורכב כמו מושג הנגזרת. כלי זה יעניק לתלמידים הזדמנויות למידה שונות, דבר שיכול להקל עליהם לתפוס ולהבין מושג מתמטי מורכב וחשוב כל כך כמו מושג הנגזרת.

רשימת מקורות

Artzt, A. F., Armour-Thomas, E., Curcio, F. R., & Gurl, T. J. (2015). *Becoming a reflective mathematics teacher: A guide for observations and self-assessment.* Routledge.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19-35.

Eichler, A., & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM*, *46*(4), 647-659.

Genc, M., & Erbas, A. K. (2019). Secondary mathematics teachers' conceptions of mathematical literacy. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 7*(3), 222-237.

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What Is It? *For the Learning of Mathematics, 12*(1), 8-14.

Leikin, R. (2019). Stepped Tasks: top-down structure of varying mathematical challenge. In P. Felmer, Koichu, B. and P. Liljedahl (Eds.) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*. (pp. 167- 184). Switzerland: Springer.

Sahin, Z., Yenmez, A. A., & Erbas, A. K. (2015). Relational understanding of the derivative concept through mathematical modeling: A case study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(1), 177-188.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Weissman. S., Leikin, R., & Ayalon, M. (submitted). Unravelling tutors' conceptions of teaching mathematics in Virtual school using a goal-action Model.

Witzke, I., & Spies, S. (2016). Domain-specific beliefs of school calculus. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 131-161.

היבטים אובייקטיביים וסובייקטיביים במתמטיקה - המקרה של קצב שינוי

דפנה אליאס, אוניברסיטת תל אביב
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב
אנטולי קורופטוב, מכללת לוינסקי
ליה נח סלע, אוניברסיטת תל אביב

מבוא

מתמטיקה נחשבת לעיתים כתחום בו אין לתלמידים מקום רב להבעת דעה וכמקצוע בו הם צריכים לפתור בטכניקה מוגדרת ולחשב תשובה נכונה. בעיות המבוססות על הקשרים חוץ מתמטיים (EMC – Extra Mathematical Context) מציעות הזדמנות בהיבט זה: פירוש הסיטואציה הלקוחה מ"העולם האמיתי" עשויה לתת מקום לפרשנות אישית. לשם המחשה, ניזכר בבעיית האוטובוס המפורסמת (Silver et al., 1993) - 540 אנשים צריכים לנסוע לתחרות ספורט באוטובוסים, כשבכל אוטובוס יכולים לנסוע 40 אנשים. השאלה היא: כמה אוטובוסים יצטרכו בשביל להגיע לתחרות? התשובה אשר נחשבת נכונה היא 14 (540 חלקי 40, ומעוגל כלפי מעלה). תלמידים שקדנים לומדים שזוהי התשובה אותה מבקש המורה, אך היות ומידע משמעותי לא נתון (כגון: האם כל אוטובוס יצא מלא לחלוטין, האם מישהו החליט לנסוע ברכב פרטי וכו') תלמידים יכולים לספק תשובות נכונות לא פחות, אליהן יגיעו בעזרת ניסיון החיים האישי שלהם (כמו: 13 אוטובוסים ומיניבוס).

מחשבות אישיות הן סובייקטיביות מטבען, אך יכולות להישען על שיקולים סובייקטיביים או אובייקטיביים. שיקולים אובייקטיביים כוללים הסתמכות על נתונים והסקות לוגיות, בעוד ששיקולים סובייקטיביים כוללים ניסיון חיים אישי או פרשנויות. הרושם הקיים הוא שתלמידי מתמטיקה למדו שרק שיקולים אובייקטיביים נחשבים כמקובלים ע"י מוריהם. ע"י שימוש בבעיות המבוססות על EMC, נוצרת הזדמנות לתלמידים לבטא גם שיקולים סובייקטיביים. למרות שהוראה בעזרת EMC עלולה ליצור אתגרים, התועלת הופכת את המאמץ לכדאי. בין התועלות הצפויות מציינים Rubel & McCloskey (2021) שזה מעורר מוטיבציה ללימוד מתמטיקה אצל תלמידים ותומך בלמידת המתמטיקה.

העוסקים בחינוך מתמטי משקיעים מאמץ רב בניסיון לצקת משמעות ברעיונות הבסיסיים של החדו"א, כדוגמת קצב שינוי, עבור התלמידים. משמעות המושג עבור התלמיד יכולה לכלול היבטים אובייקטיביים וסובייקטיביים. חקר היבטים אלה הינו ליבו של המחקר המדווח.

רקע

הצורה הדידקטית הנפוצה לשימוש בבעיות המבוססות על EMC הינה בעיות מילוליות. בעיות מילוליות טיפוסיות הן בעיות מוגדרות היטב, בהן כל המידע הנחוץ נתון, ולא נתון מידע מיותר. הסיבה לכך היא שהן מעוצבות במטרה לאפשר לתלמידים להתאמן על פרוצדורות מתמטיות אותן למדו. De Lange (1995) דיבר על "הקשר הסוואה" (camouflage context) – מקרה בו נעשה שימוש ב-EMC רק כ"תחפושת" לבעיה מתמטית. השימוש השכיח בבעיות "מחופשות" יצר אצל תלמידים אמונות מוגבלות לגבי בעיות מילוליות. בפרט, אמונות כאלה הן שכל המידע הרלוונטי בהכרח נתון ושלכל בעיה יש פתרון נומרי יחיד (Reusser & Stebler, 1997). לפיכך, בבעיות מסוג זה, תלמידים לרוב לא מפעילים דרכי מחשבה סובייקטיביות, ולעיתים אף משהים היגיון המעוגן במציאות, שכן הבעיה נתפסת כמתמטית גרידא. כתוצאה מכך עלולים תלמידים לספק תשובות לא מציאותיות (לדוגמה: עונים 13.5 לשאלת האוטובוס שהוצגה, כי זו שאלה בחילוק וזוהי תוצאת תרגיל החילוק).

מידע חסר בבעיה מפעיל אצל תלמידים דרכי חשיבה סובייקטיביות בהן תלמידים עושים שימוש על מנת למלא את החלל שנוצר. מורים יכולים לאפשר לתלמידים לבטא דרכי חשיבה אלה, לצד השיקולים המתמטיים. בעיות מסוג זה הן חלק חשוב בחינוך מתמטי, כמו גם בחיים עצמם (Blum, 2015).

מטרת המחקר

מהניתוח המתמטי-אפיסטומולוגי (Steiner, 1987) של המושג קצב שינוי, ניתן להסיק שמבין ההיבטים ההכרחיים לקיום קצב שינוי בסיטואציה חוץ מתמטית, ניתן למנות: (1) שתי כמויות מתוארות בסיטואציה (אחת אינה מספיקה); (2) הכמויות המתוארות משתנות; (3) השינוי הוא רציף (או נתפס אינטואיטיבית כרציף); (4) סוג הקשר בין המשתנים רלוונטי. המושג 'קצב שינוי' קשור מאוד למושג 'פונקציה'. בעוד שפונקציה מתארת קשר בין שתי כמויות, קצב שינוי מתאר כיצד כמות אחת משתנה ביחס לשנייה. לא כל שתי כמויות הינן בעלות קשר הניתן לתיאור ע"י פונקציה. הגדרת הקשר הנדרש בשביל שיתאים להיות מתואר ע"י פונקציה היא ברורה כשדנים במתמטיקה טהורה, אך פחות בהירה כשהעולם האמיתי נכנס לתמונה.

חלק מההיבטים הנ"ל נראים על פניו כאובייקטיביים (לדוגמה: בסיטואציה בה מתואר משתנה אחד, ניתן להסיק ללא הפעלת שיפוט אישי שאין בסיטואציה שני משתנים) וחלק מההיבטים הנ"ל נראים על פניו סובייקטיביים (כמו אופי הקשר בין המשתנים). חלקם יכולים להיות לעיתים אובייקטיביים ולעיתים סובייקטיביים, כתלות בהיכרות עבר עם הסיטואציה המתוארת (לדוגמה: האם משתנה מסוים הוא רציף או בדיד). מטרת המחקר הינה לבחון אילו היבטים של המושג קצב שינוי נוטים לעורר הנמקה סובייקטיבית, ואילו היבטים נוטים לעורר הנמקה אובייקטיבית במסגרת שיח המבוסס על EMC.

מתודולוגיה, ממצאים ודיון

המרואיינים במחקר הינם מורים, פרחי הוראה ותלמידים, אשר רואיינו ביחידות ונשאלו לגבי סיטואציות שונות האם, לדעתם, הגיוני לדבר על קצב שינוי בכל סיטואציה. הסיטואציות שנבחרו נבדלו במספר מאפיינים: מספר הכמויות המעורבות (1 או 2), סוג הכמויות המעורבות, האם הכמויות משתנות ואיך הן משתנות (רציף מול בדיד) והאם הן בעלות השתנות משותפת (covariation) או לא (לדעתנו) – ביטוי לסוג הקשר בין המשתנים.

להלן ההקדמה לראיון ושלוש מהסיטואציות שהוצגו. לכל סיטואציה, מצוטטות מספר תשובות מייצגות. על אף שהמרואיינים רואיינו ביחידות, הציטוטים מובאים בזה אחר זה, לשם הנוחות.

הקדמה - "התלמידים למדו בשיעור על קצב שינוי של גדלים בסיטואציות שונות. בשיעור הם דנו בשתי סיטואציות: (1) מכונית שנעה בכביש. בסיטואציה זו הם סיכמו שהמרחק שעברה המכונית משתנה עם זמן והגיוני לדבר על קצב שינוי המרחק ביחס לזמן. קצב שינוי זה הוא מהירות המכונית. (2) מים זורמים לתוך מיכל. בסיטואציה זו הם סיכמו שנפח המים במיכל משתנה עם הזמן והגיוני לדבר על קצב שינוי הנפח ביחס לזמן. אחרי השיעור מספר חברים המשיכו לדון בנושא זה בהקשר לכל מני מצבים מהחיים."

"בוריס אמר: אני חושב על שער הדולר ביחס לשקל ועל טמפרטורת הים התיכון."

טינה:	אין קשר בין המשתנים האלה. האחד לא משפיע על השני. אי אפשר להתייחס לאחד כפונקציה של השני.
רוב:	טמפרטורת הים התיכון לא משפיעה על שער הדולר, אז אין קצב שינוי.
אוליבר:	שואלים אותי איך השער משפיע על הטמפרטורה? [...] במקרה הזה לא הגיוני לדבר על קצב שינוי, כי קשה למצוא משהו שיקשר ביניהם. אולי יש חברת נפט שעובדת בים התיכון, ואם השער יעלה אז החברה תעבוד קשה יותר, אני לא יודע... [...] אולי בקיץ שער הדולר עולה ובחורף הוא יורד? אבל לא, לא נראה לי. [...] אתה יכול לדבר על קצב שינוי של כל דבר. השאלה אם יש טעם... אם יוצא לי מזה משהו.

בוריס מתאר שני משתנים הנתפסים באופן אינטואיטיבי כרציפים עם קשר לא ברור ביניהם. כל המרואיינים ציינו את היעדר הקשר בין המשתנים כקריטריון לחוסר האפשרות לדבר על קצב שינוי

בסיטואציה של בוריס. טינה ורוב ציינו שניהם שלמשתנה האחד אין השפעה על השני, אך כל אחד מהם הסיק מסקנה מעט שונה: רוב הסיק מיידית שאם אין השפעה אז אין קצב שינוי ואילו טינה ענתה בעקיפין, באומרה שהאחד אינו פונקציה של השני (ניתן להניח שבתפיסתה שלילת קיום פונקציה שוללת קיום קצב שינוי). טינה ורוב הניחו הנחה לגבי טיב הקשר בין המשתנים, אולי בלי להיות אפילו מודעים לכך. אוליבר, לעומתם, עשה רושם כחושש שחסר לו ידע כלשהו לגבי הקשר בין המשתנים. בהמשך הריאיון הגיע אוליבר למסקנה שבשביל שלסיטואציה יהיה קצב שינוי, צריכה להיות תועלת לדיון בקצב שינוי בסיטואציה הנתונה. מסקנה זאת היא תוצאה ישירה של הכנסת הקשר חוץ מתמטי לבעיה.

"ענת אמרה: בעודי נוסעת לים המלח, אני חושבת על המרחק עד ים המלח והגובה על פני הים."

טינה:	כן. קצב שינוי של יחס בין המרחק ביחס לגובה.
טלי:	אם המהירות היא קבועה אז המרחק והגובה ישתנו בהתאם. יש לי מהירות כפול זמן שווה לדרך. אז אם אני רוצה לדעת מה קצב השינוי אז אני אקח דרך ואחלק בזמן. הדרך משתנה פה וגם הזמן. הגדלים פה משתנים כל הזמן אבל אני לא יודעת אם אפשר לאמוד את קצב השינוי. השאלה היא איך אתה מגדיר קצב שינוי. לא, אני לא יכולה להעריך את קצב השינוי. ככל שעובר הזמן, המרחק משתנה וגם גובה מעל פני הים. יש קצב שינוי אבל אני לא יודעת איך למדוד אותו. אפשר לדבר על המהירות ביחס למרחק ולגובה. אולי הגובה משתנה ביחס למרחק שעברתי, או בהתאם לזמן שעברתי. אני חושבת שיש פה פרמטר של זמן, פרמטר של מרחק ופרמטר של גובה.

ענת מתארת סיטואציה של שתי כמויות משתנות הקשורות זו בזו, על אף שתוואי הכביש אינו נתון (מידע חסר) ולכן על התלמיד להניח הנחות בנושא זה. בסיטואציה זאת ניתן להניח שההיבטים החיוניים לקיומו של קצב שינוי נוכחים, עבור מומחה הבקיא בסיטואציה. עבור תלמיד ממוצע, ייתכן וההסקה תלויה בהיכרותו עם הסיטואציה (לדוגמה: העובדה שהמקום הנמוך בעולם הוא ים המלח נחשבת ידע נפוץ) ובהנחות אותן יעשה באשר לתוואי הדרך. טינה מציינת את תשובתה באופן מיידי, אך לטלי יש קושי לדבר על קצב שינוי של מרחק ביחס לגובה (או גובה ביחס למרחק). כתוצאה, על אף שמשתנה הזמן לא היה מעורב באופן מפורש, הכניסה טלי פרמטריזציה של הזמן. ניתן להניח שעשתה זאת מפני שחשה ש"שינוי ביחס לזמן" הוא קל יותר לדיון מאשר שני משתנים שאינם זמן אשר משתנים האחד ביחס לשני. זוהי נטייה שזוהתה ע"י Jones (2017) שציין כי עבור תלמידים מסוימים, הכנסת משתנה של זמן מסייעת להם לארגן את ההשתנות המשותפת בין שני משתנים.

"הדס אמרה: אני חושבת על כך שבטיפת חלב מודדים את משקלי התינוקות ולכל תינוק יש משקל משלו."

אוליבר:	אני רואה פה רק משתנה אחד. רק נתון אחד. אפשר לדבר על קצב שינוי אבל זה יהיה... אין קשר בין התינוקות. זה לא יהיה משהו שקל למדוד אותו וזה לא משהו שיעזור לי. קצב שינוי לא ייתן לי כלום. אני אמספר את התינוקות? אין פה עקביות. אפשר לדבר על קצב שינוי אבל זה יהיה מאוד מנוון כזה. אפשר לדבר על שינוי ולא על קצב שינוי כי הוא לא רציף. יש קפיצה במשקל. אם מודדים 10 תינוקות כל שעה אז אפשר בכוח להכניס פה את הקצב.

הדס מתארת גודל אחד בלבד ולכן, אובייקטיבית, זוהי סיטואציה בה קצב שינוי אינו רלוונטי. בעוד שמרבית המרואיינים ציינו שזוהי סיטואציה בה יש רק משתנה אחד ולכן לא ניתן לדבר על קצב שינוי, אוליבר הביע בלבול. למרות שציין מפורשות שהוא רואה רק משתנה אחד בסיטואציה, השתדל למצוא משתנה נוסף (מספור התינוקות). מבין ההיבטים שחיוניים לקיום קצב שינוי, ההיבט הרלוונטי הוא שחייבים שני משתנים כדי לדבר על קצב שינוי. היבט זה נחשב כאובייקטיבי ונצפה בפועל כאובייקטיבי - למרות מחשבות סובייקטיביות שמועלות, הקריטריון נשאר מרכזי ותקף.

מעניין לציין שאוליבר מדבר על מספר התינוקות הנמדדים בשעה, שכן אנו רואים פה את השפעת השפה. בעברית המילה קצב מבטאת גם rate וגם pace. אוליבר מדבר על ההספק של העובדים בטיפת חלב כאופציה להכנסת המונח קצב. לקצב עבודה אין קשר למונח המתמטי של קצב שינוי, למרות השימוש באותה המילה בשני המונחים.

מסקנות

באופן כללי, ממצאי מחקר זה כוללים היבטים אשר נחשבים חיוניים לקיומו של קצב שינוי, בעיני המרואיינים. חלקם הינם אובייקטיביים אשר להם שיפוט אחד שנחשב נכון (קיום 2 כמויות בסיטואציה, השתנות הכמויות). יצוין כי גם בהיבטים שנחשבו אובייקטיביים, מרואיינים הביאו לידי ביטוי את דרכי החשיבה הסובייקטיביות שלהם (פרמטריזציה של זמן, השלמת משתנה חסר ע"י מספור וכו').

היבטים סובייקטיביים שעלו במחקר הינם: (1) "קיום קשר של השפעה" –זהו שיפוט אישי ומרואיינים שונים מצאו רמות שונות של קשר באותו תיאור מצב. (2) "תועלת" –יש שטענו שבסיטואציות מחיי היומיום, צריך "לצאת לך משהו" מהדיון, אחרת - מה הטעם בלדבר על זה, גם אם זה אפשרי?

בנושא הקשר בין המשתנים, בסיטואציות מוכרות (כמו מרחק ביחס לזמן) השיפוט הוא יחסית ברור, אך אם סיטואציה לא מוכרת, טבעו של הקשר בין המשתנים יכול להיחשב כמידע חסר אשר תלמידים משלימים בעצמם, בהתאם לידע האישי ולניסיון החיים שלהם. התלמידים צריכים להכריע אם יש למשתנים השתנות משותפת או להניח הנחות מתאימות. נראה כי במקרה של קצב שינוי, ל-EMC יש השפעה מכרעת על הפרשנות שנותנים מרואיינים, ועל תהליך קבלת ההחלטות שלהם, המבוסס על ניסיון החיים האישי שלהם ועל דרכי החשיבה האישיות שלהם.

החשבת המתמטיקה כבסיס לתחומי המדע וההנדסה, הופכת את העבודה עם הקשרים חוץ מתמטיים לחיונית עבור חינוך מתמטי ראוי. מאידך, העבודה עם EMC מציפה דרכי חשיבה סובייקטיביות אשר קשה לחזות ולא פשוט לנתח. הבנת האובייקטיביות/סובייקטיביות של מרכיבי ידע שונים יכולה לסייע לעוסקים בחינוך מתמטי לשלב EMC בצורה מיטיבה. כתועלת נוספת, תלמידים לומדים שלפעמים יש צורך להניח הנחות, לפעמים יש מידע חסר בבעיה, ולפעמים יש יותר מתשובה אחת נכונה – מתמטיקה היא יותר מאשר למצוא תשובה אחת נכונה בפרוצדורות מוגדרות היטב שיש לשנן.

תודות

המחקר בוצע בתמיכת הקרן הישראלית למדע, מענק 1743/19.

רשימת מקורות

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In J. S. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73–96). New York, USA: Springer.

De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. In T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics* (pp. 87-172). Albany, NY, USA: SUNY Press.

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 9–28.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution - The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction, 7*, 309–327.

Rubel, L. H., & McCloskey, A. V. (2021). Contextualization of mathematics: which and whose world? *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 383-404.

Silver, E. A., Shapiro, L. J., & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 117-135.

Steiner, H. G. (1987). Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. *For the Learning of Mathematics. Vol.7(1),* 7–13.

פיתוח חשיבה הצטברותית כמבוא ללימוד חשבון אינטגרלי בתיכון

גילת פלאח, אוניברסיטת תל אביב, בית ספר תיכון עירוני מקיף גולדווטר
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב
אנטולי קורופטוב, מכללת לוינסקי

מבוא

הרעיון הבסיסי של הגישה הדידקטית לנושא האינטגרציה השתנה על ידי תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה ל-5 יחידות לימוד, אשר נמצאת בשלב פיילוט. מושג ההצטברות, מושג חשוב להבנת אינטגרציה, הינו מרכזי בתכנית. השינויים בתכנית הלימודים דורשים מחקר הבוחן את תהליכי הלמידה של התלמידים והבניית הידע על האינטגרל כהצטברות. מחקר זה מציע פעילות למידה של פונקציית הצטברות עבור תלמידי תיכון בכיתה יא הלומדים לבגרות של 5 יחידות לימוד מתמטיקה; ואשר טרם למדו אינטגרציה.

רקע תיאורטי

תמצית מתמטית

למושג האינטגרל ניתן לגשת באמצעות *גישת הפונקציה הקדומה* ובאמצעות *גישת ההצטברות*. *גישת הפונקציה הקדומה* משתמשת בהגדרת האינטגרציה כפעולה הפוכה לנגזרת, שמאפשרת למצוא משפחה של פונקציות קדומות, הנבדלות בקבוע; ומציאת אינטגרל מסוים באמצעות ערכי הפונקציה הקדומה בגבולות האינטגרל. *גישת ההצטברות* משתמשת בהגדרת רימן של האינטגרציה כגבול של סכומי מכפלות: על מנת למצוא אינטגרל מסוים בגבולות $[a,b]$, נחלק את $[a,b]$ ל-n תתי-אינטרוולים $[x_i,x_{i+1}]$ בעלי אורך זהה Δx ובכל אינטרוול נניח קצב שינוי קבוע, השווה לערך הפונקציה הנתונה בנקודה מתאימה $c_i \in [x_i,x_{i+1}]$, כלומר בונים פונקציית מדרגות $step(x)$ קבועה בכל אינטרוול. הכמות המצטברת אז שווה למכפלה $f(c_i)\cdot\Delta x$. אינטגרל מסוים הוא גבול סכום המכפלות $f(c_i)\cdot\Delta x$ כאשר $\Delta x \to 0$.

רקע מהמחקר

חוקרים מדווחים על קושי של סטודנטים בנושא האינטגרל (למשל Orton, 1983; Rösken & Rolka, 2007). Dreyfus-ו Kouropatov (2013) מצאו כי רק 9% מתלמידי כיתה י"ב הסכימו עם הטענה כי *אם פונקציה רציפה f(x) שלילית, אז האינטגרל המסוים הוא שלילי.*

Jones (2015) מתאר שלוש תפיסות לפירוש אינטגרל מסוים: (1) *השטח מתחת לגרף*; (2) *ערך של פונקציה קדומה*; (3) *סכום מכפלות*. הוא מצא כי בהקשר מתמטי טהור שלושת התפיסות יעילות ואילו בהקשר מתחום הפיזיקה התפיסה של האינטגרל *כסכום מכפלות* היא יעילה ביותר.

סטודנטים נתקלים לרוב בפונקציות המוגדרות באופן אלגברי וטריגונומטרי ובבואם ללמוד על פונקציית הצטברות, לראשונה נתקלים הלומדים בפונקציה אשר בנייתה תלויה בתהליך המתבצע בפונקציה אחרת. תהליך מורכב וחדש זה לסטודנטים מהווה אחת הסיבות בגינה סטודנטים מתקשים בהבנת פונקציית הצטברות (Thompson & Silverman,2008).

בבתי הספר התיכוניים נלמד נושא האינטגרציה דרך הגישה המשתמשת בהגדרת האינטגרל כפעולה הפוכה לנגזרת. ייתכן כי הסתמכות על האינטגרל כפונקציה קדומה היא הסיבה כי סטודנטים אינם תופסים את משמעות ההגדרה של האינטגרל המסוים (Bressoud, 2009).

מושג האינטגרל המבוסס על רעיון ההצטברות הוכח כמועיל במחקרים שונים. Kouropatov (2016) בנה יחידת הוראה למושג האינטגרל המבוססת על הצטברות לתלמידי כיתות י"ב. במחקר אחר (Carlson, Smith & Persson, 2003) פיתחו סטודנטים מושגים של כמויות מצטברות, פונקציית הצטברות והמשפט היסודי של החדו״א. גישה זו הביאה לשיעור הצלחה גבוה מבחינת תפיסות התלמידים לגבי פונקציות הצטברות והבנתם את המשפט היסודי של החדו״א.

מבחינת הפרספקטיבה הדידקטית לרעיון ההצטברות, חוקרים מתייחסים להצטברות בשני אופנים שונים: האחד, הצטברות הנובעת מקצב שינוי (למשל, Carlson et al., 2003; Kouropatov & Dreyfus, 2013; Thompson & Silverman, 2008); והשני, הצטברות הנובעת מהתווספות "חתיכות" (למשל, Jones, 2015).

הקשר חוץ מתמטי

בשאלות אינטגרציה ישנו שימוש נפוץ בהקשר של מהירות ודרך המשמש למציאת קירוב לכמות המצטברת (מרחק) מתוך פונקציית קצב השינוי (מהירות כפונקציה של זמן); הקשר של מילוי מיכל במים המשמש למציאת קירוב לכמות המצטברת (כמות המים) מתוך פונקציית קצב השינוי (קצב מילוי המים). הקשרים אלו מאפשרים לתלמיד לפתח אסטרטגיית פתרון בלתי פורמלית ותלוית הקשר אשר עשויה לסייע בהמשך לפתח הכללה של הנושא (Gravemeijer & Doorman, 1999). מאידך, מחקרים בחינוך מתמטי ומדעי מראים כי תלמידים מתקשים ליישם את הידע המתמטי שלהם בהקשרים שונים (למשל, Jones, 2015) מכיוון שהקשר חוץ-מתמטי דורש הבנה של המשתנים בביטוי המתמטי על מנת ליישמו בהקשר מדעי בכלל, ובפרט בבעיות אינטגרציה.

הפשטה בהקשר

הפשטה בהקשר (Abstraction in Context- AiC) (Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001) היא מסגרת תיאורטית המציעה כלי לניתוח תהליכי למידה והבניית ידע מתמטי חדש ללומד. ההקשר שבו מתרחשת חווית הלמידה (פעילות הלמידה, סביבת הלמידה, היסטוריית הלמידה וההקשר החברתי) משפיע על תהליך ההפשטה ומהווה מרכיב מרכזי ב-AiC. מודל RBC משמש ככלי תיאורטי-מתודולוגי ב-AiC. המודל מגדיר שלוש פעולות אפיסטמיות אשר רלוונטיות לתהליך למידה: (1) *זיהוי* – הלומד מזהה כי מבנה ידע קודם רלוונטי לבעיה או לסיטואציה. (2) *בניה-עם* – הלומד משתמש במבנה ידע קודם להשגת מטרה מקומית. (3) *בניה* – הלומד מייצר מבנה ידע חדש על ידי ארגון ושילוב של מבני ידע קודמים.

מרכיב ידע הוא מושג, פרוצדורה, אסטרטגיה או פיסת ידע מתמטית שיועד על ידי העיצוב מבחינת תחום התוכן המתמטי. מרכיבי הידע ומבניהם מוגדרים בניתוח המקדים באופן כללי ובאופן אופרטיבי. הבניית הידע אצל הלומד מנותחת באמצעות שלוש הפעולות האפיסטמיות.

רציונל המחקר

תכנית הלימודים בנושא האינטגרציה השתנתה באופן משמעותי; ותוצג בפני התלמיד באמצעות גישת ההצטברות (אתר המפמ״ר, 2021; Dreyfus et al., 2021). לכן בניית כלים דידקטיים, המאפשרים את הצעדים הראשונים של התלמידים בגישה זו, נחוצה. תלמידים מתקשים להבין את פונקציית הצטברות, בין היתר מכיוון שבנייתה כרוכה בתהליך (Thompson & Silverman, 2008). למידת האופן שבו התלמידים בונים ידע, לראשונה, על פונקציית ההצטברות כתלויה בתהליך (צבירה) הנעשה בפונקציה אחרת עשויה לסייע למורים לתכנן את השיעורים הראשונים המציגים את תהליך הצבירה הנדרש לבניית פונקציית ההצטברות ולסייע לתלמידים להתגבר על קושי זה.

במחקר זה, אני רוצה לתת לתלמידי תיכון, שטרם למדו נושא אינטגרציה, הזדמנות לפתח דרכי חשיבה שיהיו שימושיות בהמשך לימוד האינטגרציה באמצעות פעילות למידה. חשיבה כזו תיקרא *חשיבה הצטברותית*. היא מוגדרת כשילוב של ידע הכולל את ה"חתיכות" המצטברות, את הדינמיות של תהליך ההצטברות של ה"חתיכות" ויישום ידע זה לאחר בנייתו. על מנת להקטין את הסיכוי שתלמידים יזהו את הפונקציה המתארת את קצב השינוי כפונקציית נגזרת וינסו להשתמש בידע שצברו על הקשר בין

פונקציה לנגזרתה; ועל מנת לאפשר הבנה אינטואיטיבית של קצב השינוי ותפקידו במציאת ערך של פונקציית הצטברות, הבסיס הדידקטי לנושא ההצטברות שנבחר במחקר זה הוא *קצב שינוי* המאפשר הקשר חוץ-מתמטי המוכר ללומד.

מטרות המחקר הן: (1) לעצב פעילות למידה בעלת פוטנציאל לפתח *חשיבה הצטברותית* על ידי הבניה ויישום הידע המתאים אצל התלמידים; (2) לנתח את תהליכי הלמידה של התלמידים לאורך הפעילות.

מתודולוגיה

שאלות מחקר

1. מהם מרכיבי הידע של חשיבה הצטברותית?
2. אילו מרכיבי ידע של חשיבה הצטברותית תלמידים מבנים באמצעות פעילות הלמידה?
3. כיצד תלמידים מבנים את מרכיבי הידע של חשיבה הצטברותית דרך פעילות הלמידה?

משתתפים

3 זוגות תלמידים בכיתה יא הלומדים מתמטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד אשר טרם למדו אינטגרציה.

כלי מחקר

לצורך המחקר תעוצב פעילות למידה שמטרתה לפתח *חשיבה הצטברותית* אצל הלומדים. הפעילות המתוכננת תעסוק במושג ההצטברות באמצעות חקירה של סכימת המכפלות אשר בונה את פונקציית הצטברות ובהשפעה של פונקציית קצב השינוי על פונקציית ההצטברות.

בפעילות תוצג פונקציה המייצגת קצב מילוי מים בבריכה ריקה ותכלול שאלות אשר מובילות לבניית פונקציה המתארת את כמות המים הכוללת בבריכה כפונקציה של זמן. הפעילות תתחיל בחקירה של פונקציית קצב שינוי קבועה ותמשיך בחקירה של פונקציות קצב שינוי לינאריות.

ניתוח הנתונים

בשלב הראשון של ניתוח הראיונות, יחולק כל ראיון לאפיזודות אשר עשויות להצביע על הבניית ידע שהתרחשה. כל אפיזודה תנותח על פי ההגדרות האופרטיביות למרכיבי הידע השונים שנקבעו בניתוח המקדים, אשר באות להעריך האם אמירות התלמיד ו/או פעולותיו מעידות על הבניית הידע של מרכיב ידע מסוים. אמירות התלמיד ופעולותיו ינותחו דרך עדשת הפעולות האפיסטמיות של מודל ה-RBC. במידה ומתגלים מרכיבי ידע ו/או פעולות המעידות על הבניית ידע אשר לא עלו בניתוח המקדים, מרכיבי הידע ו/או הגדרותיהם יעודכנו.

סוגיות לדיון

פעילות הלמידה במחקר זה עוסקת במושג ההצטברות אשר מוצג בהקשר של מילוי מים בבריכה לכל אורך הפעילות. שימוש בהקשר חוץ-מתמטי במחקר מעלה את הסוגיות הבאות:

1. קצב שינוי כבסיס דידקטי מאפשר הבנה מסוימת של היווצרות ה"חתיכות" המצטברות שהן המכפלות המיוצגות על ידי המלבנים הכלואים בין הגרף לציר האופקי. האם רצוי שהפעילות תעסוק בהצטברות החתיכות במנותק מקצב השינוי ובנפרד תעסוק בקצב השינוי כיוצר את החתיכות ובאיזה סדר?
2. בפעילות הלמידה קיימים פריטים שמטרתם לקשור שטח מלבן לכמות מצטברת כאשר קצב השינוי קבוע. הבניית קשר זה על ידי התלמיד הכרחית להמשך הפעילות. האם נכון להציג קשר זו באופן מפורש לאחר סיום העיסוק של פעילות הבנייתו?

3. האם ישנם מחקרים אשר השוו בין יעילות הבניית ידע דרך הקשר מתמטי טהור ואז יישומו בהקשרים חוץ מתמטיים לבין הבניית ידע דרך הקשר חוץ מתמטי וממנו להצמיח את ההקשר המתמטי הטהור?

תודות

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק מספר 1743/19).

מקורות

Carlson, M. P., Smith, N., & Persson, J. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. In N.A. Pateman., B. J. Dougherty, J.T. Zilliox (Eds.), *Proceeding of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 165-172). Honolulu: PME.

Dreyfus, T., Kouropatov, A., & Ron, G. (2021). Research as a resource in a high-school calculus curriculum. *ZDM Mathematics Education, 53*(3), 679-693.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics, 39*(1), 111-129.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 195-222.

Jones, S. R. (2015). Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *38*, 9-28.

Kouropatov, A. (2016). The Integral concept in high school: Constructing knowledge about accumulation. Unpublished PhD thesis. Tel Aviv University.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 641-651.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Rösken, B., & Rolka, K. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*, 181-204.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

אתר המפמ״ר (2021). פיתוח תכניות לימודים חדשות – 5 יח״ל. אוחזר ביום 7 באוקטובר 2021 מהאתר https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika/chativa-elyona/teaching-mathematics/tohnit-limudim/

סדנאות

פוליומינואים

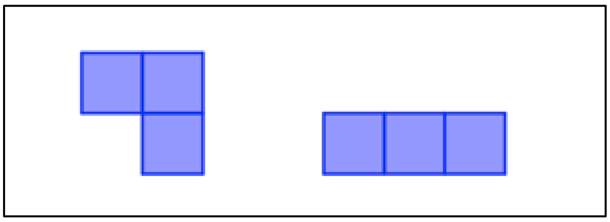
סבינה סגרה, המכללה האקדמית אחוה

מבוא

בין שעשועי המתמטיקה מוכרות הכללות של אבני דומינו שנקראות פוליומינואים. בעוד שאבני דומינו מורכבות משני ריבועים, פוליומינואים מורכבים משני ריבועים או יותר (Barequet, Golomb & Klarner, 2017). טרומינואים, לדוגמה, מורכבים משלושה ריבועים, ויש להם שתי אפשרויות חיבור (מלבד ההרכבים הסימטריים להרכבים המוצגים למטה): כל הריבועים מחוברים בשרשרת ארוכה, או בצורת ריש (**Error! Reference source not found.**).

איור 1

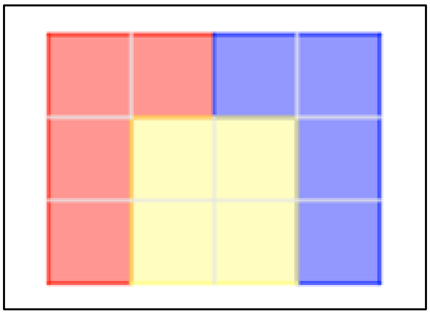
שני טרומינואים - פוליומינואים המורכבים משלושה ריבועים.



פוליומינואים רלוונטיים מאוד בהוראת המתמטיקה, מפני שניתן לראות בהם חלקי פאזל. בנוסף ניתן לבדוק את תכונות הסימטריה שלהם. באופן כללי, ניתן לנסח בעזרת פוליומינואים בעיות מתמטיות מעניינות שניתן לפתור בדרכים שונות. הם נושא מוכר בהעשרת המתמטיקה (recreational mathematics). כבר בגן הילדים קיימים פאזלים מעץ או פלסטיק שחלקיהם הם פוליומינואים (**Error! Reference source not found.**).

איור 2

פאזל שחלקיו הם שלושה טטרומינואים.



כאשר חוקרים פוליומינואים, אפשר ללמוד על תחומים שונים של המתמטיקה, בהם הם מופיעים: אריתמטיקה (ספירה שיטתית, חיבור וכפל), גאומטריה ובמיוחד ריצופים, קומבינטוריקה, תורת הגרפים ואלגברה לינארית (כפי שנראה בהמשך).

חלקי המשחק טטריס הם טטרומינואים - פוליומינואים המורכבים מארבע משבצות.

פוליומינואים משמשים במכניקת הזורמים כמודלים עבור רשתות חלחול (פרקולציה), כלומר כדי לתאר תהליכים של מעבר נוזלים בחומרים שדומים לחול (Stauffer, & Aharony, 1994).

ישנם חמישה טטרומינואים, הרכבים של ארבעה ריבועים, ו-12 פנטומינואים (כלומר 12 חיבורים אפשריים של חמישה ריבועים). אין נוסחה לחישוב מספר אפשרויות החיבור כאשר מספר הריבועים הוא גדול מאוד (Weisstein, n.d.). זוהי בעיה פתוחה בתחום הקומבינטוריקה ושפותרים בינתיים בדרך נומרית בעזרת מחשבים.

תיאור הסדנה

הסדנה מחולקת למספר נושאים שאפשר להרחיב לפי בקשת המשתתפים:

- הרכבת פוליומינואים ומנייתם,
- פאזלים והוכחות צביעה,
- סימטריה של פוליומינואים,
- תורת הגרפים הספקטרלית של פוליומינואים.

הרכבת פוליומינואים ומנייתם

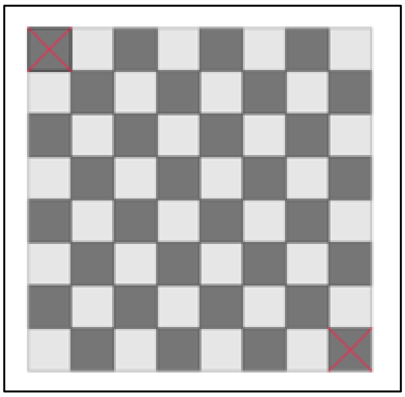
עבור מספרים קטנים של משבצות נבדוק כמה פוליומינואים שונים ניתן להרכיב מהם. נראה מהו ההבדל בין פוליומינואים קבועים לבין פוליומינואים חופשיים (פוליומינואים שונים הסימטריים אחד לשני נחשבים זהים). נבדוק מדוע מניית הפוליומינואים היא קשה כאשר מספר הריבועים המרכיבים את הפוליומינו הוא גדול.

פאזלים והוכחות צביעה

השאלה האם ניתן לכסות בעזרת 31 אבני דומינו לוח שחמט ממנו נגזרו שתי משבצות פינתיות הנמצאות על אותו האלכסון, היא בעיה מתמטית מפורסמת (ראו איור 3). ניתן לפתור אותה בעזרת צביעה: כל אבן דומינו תכסה משבצת שחורה ומשבצת לבנה, ו-31 אבני דומינו יכסו 31 משבצות שחורות ו-31 משבצות לבנות. ללוח שחמט ממנו נגזרו שתי משבצות פינתיות, נגזרו 2 משבצות מאותו הצבע. לכן יש לו 30 משבצות מצבע אחד ו-32 משבצות מהצבע השני, ולא ניתן יהיה לכסות אותו באבני דומינו. בסדנה נכיר בעיות דומות, כאשר האתגר הוא למצוא צביעה מתאימה (שרק במקרה של לוח שחמט נתונה מראש).

איור 3

האם ניתן לכסות באבני דומינו לוח שחמט ממנו נגזרו שתי משבצות פינתיות הנמצאות על אותו האלכסון?



סימטריה של פוליומינואים

ניתן לסווג פוליומינואים לפי תכונות הסימטריה שלהם. ממספר ריבועי של משבצות ניתן להרכיב פוליומינו בצורת ריבוע שניתן לסובב בכפולות של $90°$ והוא תמיד יחזור על עצמו. לפוליומינו ריבועי יש

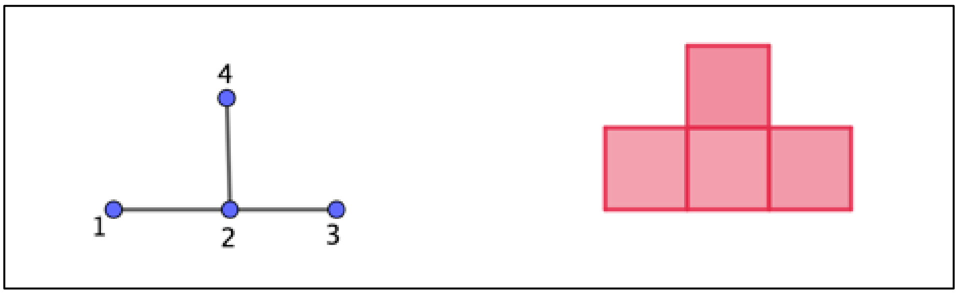
4 צירי השתקפות. פוליומינו בצורת מלבן ניתן לסובב בכפולות של $180°$ והוא יחזור על עצמו. יש לו 2 צירי השתקפות. אילו אפשרויות קיימות להרכבת פוליומינו מ-11 משבצות כך שהוא יהיה בעל סימטריה סיבובית (Ball, 2006)? נתעניין בשאלות מסוג זה.

תורת הגרפים הספקטרלית של פוליומינואים

ניתן לתאר פוליומינואים על-ידי גרפים ולחקור את המטריצות המושרות על-ידי הגרפים כפי שנראה בהמשך ובסדנה. אוסף הערכים העצמיים הללו נקרא "ספקטרום" של הפוליומינו (Spielmann, 2008).

בפירוט: גרף הוא מבנה המורכב מקדקודים וקשתות בין הקדקודים. ניתן ליצור גרף של פוליומינו, כאשר הופכים את משבצות הפוליומינו לקדקודים, וכאשר יוצרים קשתות בין כל שתי משבצות המחוברות על-ידי צלע משותפת (ראו איור 4).

איור 4
טטרומינו (פוליומינו המורכב מ-4 משבצות) והגרף המושרה על-ידיו. להבנה טובה יותר של יצירת מטריצת השכנות הוסף מספר לקדקודים.



כעת ניתן להגדיר את מטריצת השכנות של הגרף ושל הפוליומינו:

$$A_G = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

כאשר $a_{i,j} = 1$ אם יש קשת בין הקדקוד מספר i לבין הקדקוד מספר j , ו-$a_{i,j} = 0$ אם אין קשת.

כך, מטריצת השכנות עבור הדוגמה באיור 4 נראית כך (בהתייחסות למספור הקדקודים באיור):

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרונות עבור λ של המשוואה $det(A_G - \lambda I) = 0$ נקראים ערכים עצמיים, ואוסף הפתרונות נקרא ספקטרום של המטריצה A_G. במקרה שלנו זה יהיה הספקטרום של הפוליומינו. המטריצה I היא מטריצת היחידה (עם אחדות באלכסון ואפסים בשאר המקומות). נתעניין בשאלה האם קיימים פוליומינואים איזו-גרפיים, כלומר פוליומינואים שונים המתוארים על-ידי אותם הגרפים, והאם קיימים גרפים קו-ספקטרליים השייכים לפוליומינואים, כלומר גרפים שונים בעלי אותו הספקטרום. בנוסף נבדוק בסדנה האם קיימים קשרים בין תכונות גאומטריות של פוליומינואים לבין הספקטרום שלהם.

מחקרים קשורים

מבחינת המתמטיקה, שאלת מניית הפוליומינואים היא שאלה פתוחה. באופן נומרי ניתן לחשב את מספר הפוליומינואים שניתן להרכיב ממספר נתון של משבצות, אבל אין נוסחה לחישוב מספר הפוליומינואים.

מבחינת החינוך המתמטי, ניתן לארגן למידה מבוססת פרויקטים סביב פוליומינואים, כיוון שפוליומינואים קשורים לנושאים מתמטיים רבים, כפי שניתן לראות בסדנה. אנו מציעים לחקור את עמדת הסטודנטים כלפי למידה מבוססת פרויקטים סביב פוליומינואים. האם למידה זו מתאימה כדי להעמיק ולהזכיר נושאים שנלמדו בעבר, והאם היא מאתגרת ומשפרת את כישורי פתרון הבעיות של הסטודנטים?

ביבליוגרפיה

Ball, D. (2006). Symmetrical polyominoes. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, 196 (May), 48.

Barequet, G., Golomb, S. W., & Klarner, D. A. (2017). Polyominoes. In *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Third Edition (pp. 359–380). CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781315119601

Spielman, D. A. (2008). *Spectral Graph Theory and its Applications*. https://doi.org/10.1109/focs.2007.56

Stauffer, D., & Aharony, A. (1994). *Introduction to percolation theory* (2nd ed., pp. 1–5).

Weisstein, Eric W. (n.d.). "Polyomino." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html

סדנה בנושא: חקר דינמי של תכונות שימור מעניינות

משה סטופל, מכללת שאנן ומכללת גורדון, חיפה
ויקטור אוקסמן, מכללת הגליל המערבי

מבוא

בעידן הנוכחי שבו הטכנולוגיה הממוחשבת הולכת ומתרחבת לכל תחומי החיים ובהם למערכת החינוך אליה הוכנסו תוכנות שונות, זה רק טבעי לחקור תכונות שימור באופן דינמי. את הכלים המסורתיים, עפרון, סרגל ומחוגה, מחליף יישומון ג'אוג'ברה המאפשר גרירת קודקודים, שינוי או ניוון של הצורות הגיאומטריות, כשבכול מצב מופיעים על המסך: הצורה הגיאומטרית, ערכי קטעים, זוויות וגדלים נוספים בהתאם לצורך. היתרונות והשימושים הרבים בטכנולוגיה ממוחשבת לחקר מתמטיקה ובמיוחד בחקר גיאומטריה כבר נדונו רבות בספרות המקצועית (Ben-Chaim, Katz & Stupel, 2016; Leung, 2014; Wassie & Zergaw, 2018).

המטרה המרכזית של הסדנה זו לחשוף את המשתתפים ליופי של המתמטיקה באמצעות חקר דינמי של תכונות גיאומטריות מפתיעות של צורות שונות:

1. צורות המתקבלות במשפט ואן-האובל (Van Aubel) כאשר המרובע מתנוון עד לקטע;

2. מצבים מפתיעים של שימור שטחים ויחסי שטחים בפונקציות עם פרמטרים.

מטרות הסדנה

- לחשוף את המשתתפים להיבטים אסטטיים של המתמטיקה והגיאומטריה, הנגלים תוך חקר דינאמי באמצעות טכנולוגיה;
- לאפשר למשתתפי הסדנה את חווית הגילוי באמצעות התנסות ביישומונים המאפשרים חקר דינאמי, באופן המדגיש את הכלים הטכנולוגיים הממוחשבים כאמצעי לקידום הלמידה וההוראה;
- לקיים דיון מקצועי פדגוגי לגבי האופן בו ניתן לחשוף תלמידים לחוויה זו;
- לשתף בממצאים מתוך חוויות ההוראה לתלמידים במסלול ל-5 יח"ל על פי תכנית מיוחדת.

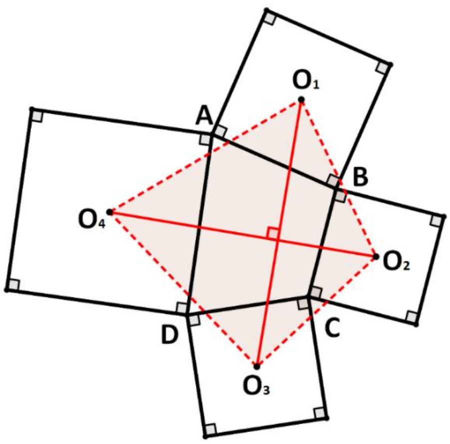
רקע מתמטי

1. משפט ואן אובל במרובע המתנוון עד לקטע

משפט ואן-האובל הידוע משנת 1878 (Coxeter, & Greitzer,1967), הוא משפט מעניין ומפתיע מהיבטים שונים. במשפט זה נשמרת תכונת שימור תוך כדי שינוי וגם במקרים פרטיים. לפי המשפט: כאשר בונים ריבועים כלפי חוץ (או כלפי פנים) על כל אחת מצלעותיו של מרובע כלשהו, ארבעת המרכזים שלהם יוצרים מרובע $O_1O_2O_3O_4$ – מרובע המרכזים – שהמאפיינים המרכזיים שלו הם : אלכסוניו שווים זה לזה ומאונכים זה לזה, כנראה באיור1.

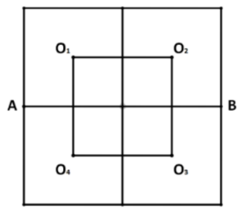
$O_1O_3 \perp O_2O_4$ ו- $O_1O_3 = O_2O_4$

היופי של התכונה מתבטא בתכונת השימור שבה – משנים את אורכי צלעות המרובע (וכמובן שזוויותיו משתנות) ומתקיים השימור של אורכי אלכסוני מרובע המרכזים והניצבות שלהם.

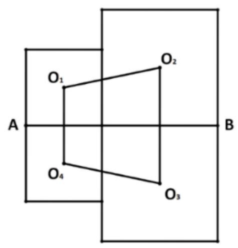


איור 1: משפט Van Aubel

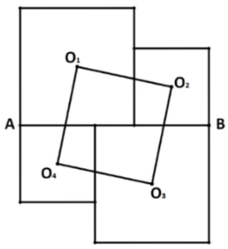
יופי נוסף של התכונה מתגלה, שעבור מרובעים מיוחדים מתקבלת צורה מיוחדת למרובע המרכזים. אותה צורה או צורות מיוחדות אחרות, אותן ניתן להוכיח בקלות. קיימות מספר הוכחות גיאומטריות של המשפט (De Villiers, 1998; Nishiyama, 2011), אמנם לא קשות להבנה אך ניתנות להשגה עצמית רק ע"י תלמידים מצטיינים או משתתפי אולימפיאדות. מתברר שמשפט ואן אובל מתקיים גם עבור מרובע שהתנוון למשולש, לשני קווים עם קדקוד משותף ואף לקו - ישר. איור 2 מציג דוגמאות ייחודיות שונות של משפט ואן-האובל למרובע שהתנוון לקטע AB.



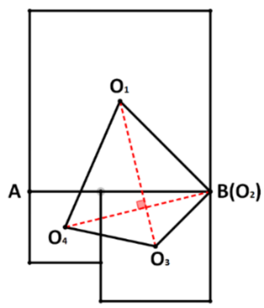
מרובע המרכזים ריבוע



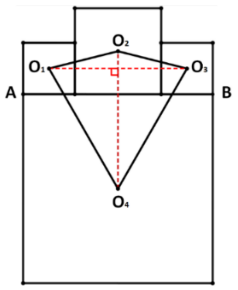
מרובע המרכזים טרפז



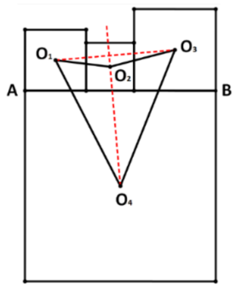
מרובע המרכזים ריבוע



הריבוע שמרכזו O_2 התנוון לנקודה, מרובע המרכזים - מרובע



3 ריבועים מעל הקטע מתוכם שניים זהים – מרובע המרכזים – דלתון קמור



3 ריבועים מעל הקטע וריבוע אחד מתחת – מרובע המרכזים – מרובע קעור

איור 2: דוגמאות ייחודיות שונות של משפט ואן-האובל למרובע שהתנוון לקטע

2. תכונות שימור של שטחים ושטחים יחסיים.

באופן מעשי כל משפט מתמטי מאפיין תכונת שימור מסוימת. היופי של המתמטיקה מתבטא בכך שבחלק רב של המקרים כאשר מפעילים שינוים מסוימים, כגון: הזזת קדקודים, שינוי זוויות בצורות גיאומטריות או שינוי פרמטרים בפונקציות שונות, תכונות מסוימות ממשיכות להישמר.

תכונות שימור גיאומטריות שונות שכללו גם שימור שטחים ויחסי שטחים הוצגו במאמרים שונים (ר', למשל: Leung,2014; ; Ben-Chaim, Katz,& Stupel, 2016 Marton, Runesson, & Tsui,2004; Libeskind, Stupel, Oxman, 2018; Sinitsky & Ilany,2016;).

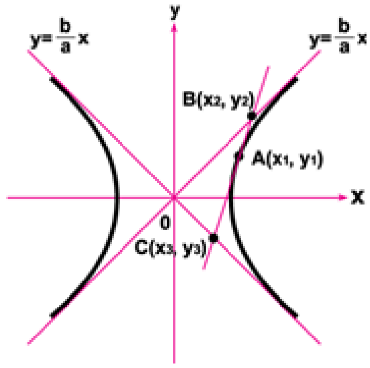
במסגרת כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי תוצגנה תכונות של שימור שטחים או שטחים יחסיים עבור צורות, המבוטאות ע"י פונקציות מתמטיות עם פרמטרים שניתן לשנות אותם

ולמרות השינוי שלהם נשמרות התכונות. ההוכחות המתמטיות מאשרות את תכונת השימור. פעילות החקר שתוצג היוותה חלק מקורס: "שילוב טכנולוגיה ממוחשבת בהוראת מתמטיקה" הניתן בסמסטר האחרון של לימודי ההכשרה של סטודנטים להוראת מתמטיקה בחינוך העל יסודי וכן למורים משתלמים.

את נושא שימור השטח ושימור יחסי שטחים ניתן לחקור באמצעות טכנולוגיה ממוחשבת - תוכנה גיאומטרית דינמית ג'אוג'ברה (ר' למשל: Wassie, & Zergaw, 2018), המאפשרת לערוך שינוי בערכם של הפרמטרים וכן גרירת נקודות או קדקודים וכך לראות מידית, על-גבי המסך את תכונות השימור. חלק מהיישומונים הוכנו ע"י הסטודנטים וחלקם ע"י מרצה הקורס. להמחשה תוצג במסגרת ההצגה בקצרה משימה (איור 3), ותינתנה 2-3 משימות נוספות במסגרת הסדנה.

המשימה

בוחרים נקודה כלשהי A על ההיפרבולה ומעבירים לה משיק דרך נקודה זו. המשיק להיפרבולה בנקודה זו חותך את האסימפטוטות בשתי נקודות B ו-C. יש להוכיח שהמשולש שנוצר ע"י שתי נקודות החיתוך וראשית הצירים הוא בעל שטח קבוע, שאינו תלוי במיקום בנקודת ההשקה כנראה באיור.



איור 3: משימה לדוגמא
השטח שנוצר ע"י משיק להיפרבולה נתונה ושתי האסימפטוטות שלה.

מבנה הסדנה

- הסדנה תיפתח בהצגת הנושא המתמטי באופן כללי ובהדגמתו דרך מספר בעיות (40 דקות).
- לאחר מכן יוכלו משתתפי הסדנה להתנסות באופן מעשי בחקר תכונות מתמטיות בהקשרים שהוצגו (20 דקות).
- הצגת מגוון אתגרים ויעדים מתודיים שליוו את הפעילויות האינטראקטיביות בנושאים אלו עם תלמידים מצטיינים, סטודנטים ומורים משתלמים (10 דקות).
- לסיכום הסדנה, נקיים דיון פדגוגי רפלקטיבי לגבי האופן בו נותנת הטכנולוגיה מענה לאתגרים הגיאומטריים אליהם נחשפו המשתתפים בתחילת הסדנה (20 דקות).

רשימת מקורות

Ben-Chaim, D., Katz, S., & Stupel, M. (2016). Variance and invariance-focused instruction in dynamic geometry environments to foster mathematics self-efficacy. Far East Journal of Mathematical Education, 16(4), 371–418.

Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). Geometry Revisited, page 52.

De Villiers, M. (1998). Dual Generalizations of Van Aubel's theorem. The Mathematical Gazette, Vol. 82, pp. 405-412.

Leung, A. (2014). Principles of acquiring invariant in mathematics task design: A dynamic geometry example. In Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36 (Vol. 4, pp. 89–96). PME.

Libeskind, S., Stupel, M., & Oxman, V. (2018). The concept of invariance in school mathematics. In the International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (U.K.), 49(1), 107–120.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (Eds.), Classroom discourse and the space of learning (pp. 3–40). Lawrence Erlbaum Associates. INC Publishers.

Nishiyama, Y. (2011). The beautiful geometry theorem of Van Aubel. International Journal of Pure and Applied Mathematics. (66), 71-80.

Sinitsky, I., & Ilany, B. (2016). Change and Invariance. A textbook on Algebraic insight into numbers and shapes. Sense Publishers. pp. 8-17, 286-294.

Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2018). Capabilities and contributions of the dynamic math software. GeoGebra: A Review. North American GeoGebra Journal, 7(1), 68–86.

כיצד משתמשים באירועים קריטיים בהכשרת מורים למתמטיקה? (קבוצת דיון)

סיגל רותם, אוניברסיטת חיפה
מיסא חאיין, אוניברסיטת חיפה
שולה וייסמן, אוניברסיטת חיפה, אקדמית גורדון
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

הכשרת מורים למתמטיקה מעסיקה חוקרים רבים בחינוך המתמטי. סוגיות מרכזיות המעסיקות חוקרים הינן אילו תכנים חשוב לכלול בהכשרת מורים וכיצד כדאי להנחות וללמד מורים כך שיוכלו לקשר בין התיאוריה הנלמדת בתכנית ההכשרה ובין הפרקטיקה בשדה (Leikin, 2008; Zeichner, 2012). המחקר מציע כי כדי לתמוך בקשר בין התיאוריה לפרקטיקה על המורים להיחשף לייצוגי הוראה המייצגים את ההוראה באופן אמיתי ככל האפשר, ועוסקים בפרקטיקות הוראה מרכזיות כמו שימת לב לחשיבה מתמטית של תלמידים (Grossman, Hammerness, & McDonald, 2009). שימת לב (noticing) לחשיבה של תלמידים (van Es & Sherin, 2008) כוללת שלוש מיומנויות: זיהוי אמירות מתמטיות של תלמידים, מתן פרשנות לדרכי החשיבה העומדות בבסיס אמירות אלה, ותגובה להן. שימת הלב נועדה לסייע למורים להבנות את הוראתם על סמך דרכי ההבנה המתמטית של תלמידיהם (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010). במהלך חמש השנים האחרונות, פיתחנו כלי לקידום פרקטיקת שימת הלב של מורים מסגרת פרויקט אקלי"ם (אירועים קריטיים להוראה ולמידה של מתמטיקה) בחוג לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה. הכלי מבוסס על שימוש באירועים קריטיים אותנטיים שמורים ומתכשרים להוראה מזהים בשיעורי מתמטיקה בכיתותיהם או בכיתות בהן הם צופים. בקבוצת הדיון נציג את הגדרתנו למושג 'אירוע קריטי' ונתנסה יחד בניתוח אירועים קריטיים. האירועים ינותחו משתי נקודות מבט שונות: זו של המורה המשתתפ/ת בהכשרת המורים, וזו של מורה/ת המורים המשתמש/ת באירועים קריטיים ככלי להכשרת המורים. בנוסף, נשתף בידע ובניסיון שהצטברו במהלך הפרויקט בפעילותינו עם מתכשרים להוראה ועם מורים בעזרת אירועים קריטיים. לבסוף, נדון באפשרויות שונות לשימוש באירועים קריטיים שיציעו משתתפי קבוצת הדיון ונזמין את המשתתפים לקחת חלק בשיתופי פעולה עתידיים.

רקע תיאורטי

שימוש באירועי הוראה קריטיים בהכשרת מורים

אחת הבעיות המרכזיות בהכשרת מורים קשורה בפער הקיים בין התיאוריה לפרקטיקה (Leikin, 2008; Zeichner, 2012). גרוסמן ושותפיה (Grossman, Hammerness, & McDonald, 2009) מציעים לעגן את הכשרת השדה בעזרת מסגרת הכוללת שלושה מרכיבים: ייצוג, פירוק וקירוב (*representation, decomposition, approximation*). המרכיב הראשון, ייצוג, מתייחס למגוון הייצוגים של ההוראה שזמינים עבור המורים, כגון שיעורים מצולמים ודיאלוגים כתובים של אינטראקציה כיתתית. המרכיב השני, פירוק, מתייחס לכך שבמסגרת ההכשרה יש ל"פרק' ולנתח, לבד או בקבוצה, את הייצוגים השונים של ההוראה לרכיבים שונים המרכיבים את ההוראה בכיתה. למשל לדון בצוותא בשיקולים שמנחים את המורים כאשר הם עונים לאמירה מתמטית מסוימת של תלמידים. המרכיב השלישי, קירוב, מתייחס להזדמנויות הניתנות למורים להתנסות ברכיבים השונים של ההוראה, למשל, בעזרת סימולציות וכתיבת דיאלוגים היפותטיים של תרחישים אפשריים שיכולים להתקיים בכיתה.

אחת הפרקטיקות המרכזיות בהוראת מתמטיקה היא שימת לב לחשיבה המתמטית של תלמידים (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010: *Professional Noticing of Children's Mathematical*

(*Thinking*), המכונה לעיתים גם 'נוטיסינג' (*noticing*). סקירות ספרות שיטתיות שנעשו לאחרונה זיהו את הפרקטיקה הזו כפרקטיקה מובילה במחקר בחינוך מתמטי (Amador, Bragelman & Superfine, 2021; Superfine, Fisher, Bragelman & Amador, 2017). ה'נוטיסינג' הינה פרקטיקה הכוללת שלושה רכיבים: 1) זיהוי האמירות המתמטיות של תלמידים כפי שבאות לידי ביטוי באינטראקציה מורה-תלמידים, 2) ניתוח ומתן פרשנות לאמירות המתמטיות של התלמידים, כדי לנסות להבין את דרכי החשיבה המתמטית העומדות בבסיס האמירות האלה, ו- 3) תגובה לאמירות התלמידים בהתאם לפרשנות שניתנה קודם לכן (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010). שימת לב לחשיבה מתמטית של תלמידים נחשבת כפרקטיקה חיונית בעבודת המורה המעוניין/ת להבנות את הידע המתמטי של התלמידים על בסיס ההבנה המתמטית הקיימת אצלם. פרקטיקה זו נמצאה כפרקטיקה התומכת בהעמקת הידע המתמטי שלהם (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010).

ישנן עבודות רבות העוסקות בקידום מיומנויות שימת הלב של מורים באמצעות עיגון ההכשרה בהתנסויות של המורים בשטח (סקירה עדכנית בנושא מופיעה ב- Amador, Bragelman & Superfine, 2021). אנו נסמכות על ניסיון עשיר של המחקר העוסק בהכשרה באמצעות אירועי הוראה כדי לתמוך בהתפתחות המקצועית ובקידום מיומנויות שימת הלב של מורים, תוך עיגון התפתחות זו בהתנסותם בפועל. למושג אירוע הוראה (מקורו ב-case שהוצע על-ידי שולמן (Shulman, 1986)) יש התייחסויות שונות, כאשר המשותף לכולן הוא בהתייחסות לאירוע הוראה כאל סיטואציה כיתתית משמעותית המזמנת למידה בתחומים שונים. הספרות מצביעה על כך שהכשרה מבוססת אירועי הוראה יכולה לתמוך בפיתוח ידע מתמטי להוראה בקרב מורים ומתכשרים להוראה (למשל, Putnam & Borko, 2000) ולספק מקור לרפלקציה, ובכך גם לתמוך בלמידה של המורים על הוראת מתמטיקה (למשל, Goodell, 2006). בעבודתנו, אנו משתמשות במונח אירוע הוראה 'קריטי' ומגדירות אותו כסיטואציית כיתה לא מתוכננת שיכולה לשנות את תכנית השיעור ומהווה הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים (Stockero & Van Zoest, 2013). מתוך התפיסה המייחסת חשיבות לעיגון התיאוריה בפרקטיקה בעזרת עיסוק בפרקטיקות הוראה מרכזיות בהוראת המתמטיקה, פיתחנו במסגרת פרויקט אקלי"ם תכנית להכשרת מורים ולהתפתחות מקצועית של מורים העושה שימוש עיקרי באירועים קריטיים כתובים.

בקבוצת הדיון נשתף בתוצרים שפותחו במסגרת הפרויקט ובמיוחד נעבוד עם החומרים המופיעים באתר הפרויקט (https://aklim.haifa.ac.il/) כאפשרות לתכנון מפגש למידה של מורים ומתכשרים להוראה. יחד נחשוב ונדון במודלים אפשריים לעבודה עם התוצרים שיוצגו.

הנחיה והוראה של מורים: שיטת עבודה סביב אירועים הוראה

במחקר בחינוך מתמטי מתפתח בשנים האחרונות ענף הבוחן את סוגיית ההנחיה וההוראה של מורי-מורים בתוכניות להכשרת מורים (Roesken-Winter, Stahnke, Prediger, & Gasteiger, 2021). הסוגיות בהן מחקרים אלה מתמקדים הן מגוונות, החל מהאופן בו מורי-המורים נאמנים לכוונות מפתחי תכנית כאשר הם מנחים מורים במסגרת תכנית הכשרה, ועד האתגרים הניצבים בפני מורי-מורים שמלמדים במסגרת הכשרת מורים בפעם הראשונה (Borko, Koellner & Jacobs, 2014). למיטב ידיעתנו, בחינוך המתמטי אין מחקר העוסק בסוגיה כיצד מורי-מורים משתמשים באירועים קריטיים כתובים בהכשרת מורים. לעומת זאת, ישנו מחקר, גם אם מועט, העוסק בהנחיה ובהוראה של מורים בעזרת וידאו. ניתן להתייחס לשיעור מצולם כאל סוג של אירוע הוראה, ולכן ניתן לאמץ מסגרת העוסקת בהכשרה מבוססת וידאו להנחיית מורים מבוססת אירועים קריטיים כתובים. ואן אס ושותפותיה (Van Es, Tunney, Goldsmith, & Seago, 2014) מציגות מסגרת להנחית השתלמות למורים שבה צפייה בשיעורים מצולמים וניתוח דרכי החשיבה של תלמידים מהווים מרכיב מרכזי בהכשרה. מסגרת זו כוללת ארבעה רכיבים: הכנה לקראת הצפייה בוידאו, ניהול דיון פרודוקטיבי סביב הוידאו עם המשתתפים, שמירה על התמקדות בוידאו הנצפה ובמתמטיקה, ותמיכה בשיתוף פעולה בין המשתתפים.

בקבוצת הדיון נציג את המסגרת של ואן אס ושותפותיה (Van Es, Tunney, Goldsmith, & Seago, 2014), נדבר על ההתאמות שנעשו למסגרת לשימוש בפרויקט אקלי"ם, נספר על העבודה עם אירועים קריטיים שנעשתה בפרויקט, ונדון באפשרויות נוספות לעבודה עם אירועים קריטיים.

פרויקט אקלי"ם: רקע

פרויקט אקלי"ם (אירועים קריטיים בהוראה ובלמידה של מתמטיקה) החל לפעול ב- 2016 בחוג לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה כתכנית ייחודית להכשרת מורים להוראת 4 ו- 5 יחידות לימוד במתמטיקה. אירועים קריטיים שימשו ככלי מרכזי בהכשרת המורים. בשנים הראשונות של הפרויקט עסקנו בהכשרת סטודנטים להוראה, שהתבקשו לזהות אירועים קריטיים שהתרחשו בשיעורים בהם צפו במהלך ההתנסות המעשית בכיתות. את האירועים שזיהו, ניתחו המשתתפים על פי מסגרת ייעודית המבוססת על המסגרת של ג'ייקובס (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010) שתוארה לעיל, ודנו באירועים אלה בקורס מלווה באוניברסיטה. בשנתו הרביעית של הפרויקט הופעלה התכנית בקרב מורים בפועל כ'קהילת מורים' במסגרת השתלמות בפסג"ה. בתכנית נעשה שימוש באירועים קריטיים שהצטברו במהלך שלוש השנים הקודמות וכן באירועים שזוהו על-ידי המורים בכיתות שבהם לימדו. לבסוף, כל האירועים הקריטיים שהצטברו מוינו ואוגדו באתר אינטרנטי המיועד למורי-מורים, שיוצג במסגרת קבוצת הדיון.

בתכניות שהפעלנו במסגרת הפרויקט, הן לסטודנטים להוראה והן למורים בפועל, השתמשנו באירועים קריטיים כמרכיב מרכזי כדי לסייע למשתתפים לקשר בין התיאוריה והפרקטיקה. אירועים כתובים אלה משמשים אותנו גם כיום, כבסיס לדיון ולניתוח שיתופי בהשתלמויות נוספות ובקורסים אקדמיים אותם אנו מובילות. בקבוצת הדיון נתעמק בעבודה עם האתר ונשתף במגוון החומרים הנוספים שפיתחנו ובניסיון המצטבר של התכנית.

תכנית קבוצת הדיון

בקבוצת הדיון נתמקד באירועים קריטיים שנבחרו ונותחו על ידי מתכשרים להוראה ומורים בפועל במסגרת פרויקט אקלי"ם ונדון בשיטות הוראה אפשריות סביב אירועים קריטיים. אירועים אלה יכולים לשמש כחומרי הוראה במסגרות שונות להכשרת מורים, במכללות ובהשתלמויות לפיתוח מקצועי של מורים.

א. נפתח בהגדרת המושג אירוע קריטי בכיתת המתמטיקה דרך עבודה סדנאית (כ-30 דקות). ננתח אירועים קריטיים אותנטיים שמורים ומתכשרים להוראה זיהו בשיעורי מתמטיקה. הניתוח ייעשה הן ב'כובע' של מורה משתתפ/ת בהכשרה והן ב'כובע' של מורה/ת-מורים. האירועים ינותחו בעזרת המסגרת שפותחה בפרויקט, מנקודות מבטם של התלמידים ושל המורה המשתתפים באירוע. נשאל, למשל: איזו הבנה מתמטית עומדת בבסיס אמירת התלמיד? מה היו השיקולים של המורה לפעול כפי שפעל/ה? מה יכולות להיות דרכי פעולה חלופיות?

ב. בעזרת אתר התכנית שיוצג בקבוצה נתנסה יחד בבניה של מפגש למידה של מורים סביב אירוע קריטי הלקוח מהאתר (כ- 40 דקות). נציג מודלים שונים להנחיה והוראה בעזרת אירועים קריטיים בהכשת מורים שאותם אנו מיישמות (בדומה למודל של ואן אס שהוצג לעיל). נבחן אילו מטרות נוספות של למידת מורים ניתן לקדם בעזרת השימוש באירועים קריטיים, למשל, למידה של מורים על ארגומנטציה בכיתת המתמטיקה והוראה המעודדת השתתפות של תלמידים בפעילות.

ג. ב-20 הדקות הנותרות של המפגש, נעלה לדיון את השאלות הבאות: אילו מודלים של הנחייה מתאימים לשימוש באירועים קריטיים? מהם היתרונות והחסרונות של השימוש באירועים קריטיים בהכשרת מורים? כמו כן, נקרא לשיתוף פעולה עתידי, מחקרי ופרקטי, עם חברי הקבוצה.

רשימת מקורות

Amador, J. M., Bragelman, J., & Superfine, A. C. (2021). Prospective teachers' noticing: A literature review of methodological approaches to support and analyze noticing. *Teaching and Teacher Education, 99*, 103256. https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103256.

Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders' facilitation of mathematics professional development. *The Journal of Mathematical Behavior, 33,* 149-167.

Goodell, J. E. (2006). Using critical incident reflections: A self-study as a mathematics teacher educator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(3), 221-248.

Grossman, P., Hammerness, K., & McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching: theory and practice, 15*(2), 273-289.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L & ,.Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking .*Journal for research in mathematics education, 41*(2),169-202 .

Leikin, R. (2008). Teams of prospective mathematics teachers: Multiple problems and multiple solutions. In T. Wood (Series Editor) & K. Krainer (Volume Editor). *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 3. Participants in mathematics teacher education: individuals, teams, communities, and networks* .(pp. 63-88). Sense Publishers.

Putnam, R. T & ,.Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational researcher, (1)*29. 4-15.

Roesken-Winter, B., Stahnke, R., Prediger, S., & Gasteiger, H. (2021). Towards a research base for implementation strategies addressing mathematics teachers and facilitators. *ZDM–Mathematics Education, 53,* 1007–1019.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Stockero, S. L & Van Zoest, L. R. (2013). Characterizing pivotal teaching moments in beginning mathematics teachers' practice .*Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(16), 125-147.

Superfine, A. C., Fisher, A., Bragelman, J., & Amador, J. M. (2017). Shifting perspectives on preservice teachers' noticing of children's mathematical thinking. In E. Schack, M. Fisher, J. Wilhelm (Eds.). *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 409-426). Springer, Cham.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*(2), 244-276.

Van Es, E. A., Tunney, J., Goldsmith, L. T., & Seago, N. (2014). A framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education, 65*(4), 340-356.

Zeichner, K. (2012). The turn once again toward practice-based teacher education .*Journal of Teacher Education, 5*(63), 376-382.

שילוב משימות מתמטיות מבוססות הקשר הנדסי-טכנולוגי: מצוינות מתמטית והמשך בחירה במקצועות STEM

ד"ר אורטל ניצן, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל
הדס הנדלמן, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל
ד"ר זהבית כהן, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

למרות דרישה מתמשכת ועולה בתעשייה לעובדים מוכשרים במקצועות ה- STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics), מחקרים בארץ ובעולם מצביעים על חוסר עקבי ומדאיג בלומדים הבוחרים בתחומים אלו כקריירה עתידית. קיימים גורמים שונים המשפיעים על בחירת קריירה במקצועות STEM, העיקריים שבהם הם מצוינות במתמטיקה וסוג המגמה המדעית שנלמדה בתיכון, בעיקר פיזיקה ומדעי המחשב. לכן, קידום המצוינות בחינוך המתמטי וחשיפה מוקדמת לתחומי STEM עשויים לקדם בחירה ב STEM כקריירה עתידית. שילוב של משימות אורייניות מבוססות הקשר הנדסי-טכנולוגי ברצף תוכנית הלימודים במתמטיקה יכולה לתת מענה לשני היבטים אלו. אוריינות מתמטית היא היכולת של הפרט לייצג מצבים ותופעות מהעולם האמיתי תוך ניסוח, יישום ופירוש הסיטואציה בשפה מתמטית ושימוש בכלים ופרוצדורות מתמטיות. פיתוח האוריינות המתמטית של תלמידים בהקשר הנדסי-טכנולוגי הינה מחד בעלת תרומה ללימודי המתמטיקה אשר מקבלים משמעות מעשית, כאשר התלמידים מבינים כיצד המתמטיקה אותה הם לומדים בתיכון משתלבת באפליקציות וטכנולוגיות הסובבות אותנו. מאידך, התלמידים נחשפים להיבטים פיזיקאליים ומונחים ממדעי המחשב גם בשיעורי המתמטיקה. מורים הם הגורם העיקרי אשר מניע את למידת התלמידים. עם זאת, על מנת לקדם יכולת אוריינות מתמטית גבוהה בקרב התלמידים, המורים עצמם נדרשים להיות בעלי כישורי אוריינות מתמטית גבוהה. מכך, עולה האתגר להכשיר מורים להוראה אוריינית, ראשית עבור עצמם כלומדים ולאחר מכן כמורים.

מטרת הסימפוזיון

הסימפוזיון יעסוק בקשר בין חשיפה למשימות אורייניות במתמטיקה מבוססות הקשר הנדסי-טכנולוגי לרמת האוריינות המתמטית והמוטיבציה ללמוד מתמטיקה ברמה גבוהה במטרה לעודד בחירה במקצועות STEM כקריירה עתידית.

קשר זה ייבחן בכמה רמות: מחקר אורך אשר בוחן את ההשפעה של מצוינות במתמטיקה וחשיפה למקצועות הפיזיקה ומדעי המחשב בתיכון על סיום תואר ראשון במקצועות STEM; ועידוד מצוינות במתמטיקה וחשיפה לתחומי STEM שונים באמצעות קידום רמת האוריינות המתמטית תוך שימוש במשימות אורייניות מבוססות הקשר הנדסי-טכנולוגי הן ברמת המורה והן ברמת התלמיד.

מידע אודות המציגים בסימפוזיון

ד"ר אורטל ניצן, מרצה נלווית בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, טכניון.

הדס הנדלמן, מסטרנטית בהנחייתה של ד"ר זהבית כהן בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, טכניון.

ד"ר זהבית כהן, מרצה בכירה בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, טכניון.

מסלולי בחירה במקצועות STEM כקריירה עתידית והקשר למצוינות במתמטיקה: מחקר אורך

אורטל ניצן וזהבית כהן

מבוא

קידום מצוינות במתמטיקה הנו מטרה מרכזית של מערכת החינוך בארץ ובעולם, אחת הסיבות לכך נעוצה בצורך לתת מענה לחוסר שנוצר בשוק העבודה בבוגרים מוכשרים במקצועות STEM. מחקרים רבים מציגים את מטפורת הברז הדולף (the Leaky Pipeline Metaphor: LPM) על מנת לתאר את תופעת הנשירה של סטודנטים ממקצועות STEM לאורך השנים, החל משלב התיכון בו מספר הלומדים STEM גבוה יחסית, וכאשר מגיעים להשכלה הגבוהה המספרים מתדלדלים בהתמדה, עד למספר מועט במידה מדאיגה של בוגרים הפונים לתעסוקה ב STEM (Witteveen & Attewell, 2020). עם זאת תופעת הנשירה איננה ייחודית לתחומי ה STEM, וניתן לראות נשירה גם בכיוון ההפוך. כאשר כ-35% מלומדי STEM בהשכלה הגבוהה עוברים למסלול non-STEM, וכ-29% עוברים ממסלולי non-STEM למסלולי STEM (Leu, 2017).

ההבחנה בין שני המסלולים חשובה כיוון שהיא נותנת כיוון נוסף להגדלת מספר הבוגרים במקצועות STEM. מעבר לצמצום הנשירה ממקצועות ה STEM יש לעשות מאמץ להגדיל את הנשירה בכיוון ההפוך. לפי מילר (Miller, 2018), הגדלה של אחוזים בודדים במעבר למקצועות ה STEM, יכולה להגדיל משמעותית את מספר הבוגרים במקצועות אלו בכל שנה. עם זאת, הנשירה איננה ליניארית ולומד יכול לעזוב מקצוע מסוים ולחזור אליו בהמשך. כלומר קיימים מסלולי בחירה נוספים, ועל מנת להגדיל את כמות הלומדים במקצועות ה STEM ישנו צורך למפות את המסלולים השונים ולבחון את מאפייני הלומדים בכל אחד מהמסלולים.

המחקר הנוכחי מציע למפות את מסלולי הבחירה על-פי תקופות חיים המאופיינות בצמתים של בחירת קריירה. לפי המודל האינטגרטיבי של ריינהולד ועמיתיו (Reinhold, Holzberger, & Seidel, 2018) ניתן לאפיין ארבעה צמתים עיקריים: בחירה שאיננה מחייבת בשלב חטיבת הביניים; בחירה עם מחויבות גדולה יותר לקריירה בשלב התיכון; בחירה פעילה במקצוע לקריירה בשלב הכניסה להשכלה הגבוהה; התמדה במקצוע הנבחר בשלב סיום התואר הראשון. כיוון ששלב חטיבת הביניים אינו מעיד על מחויבות כלפי המקצוע הנבחר, התמקדנו במחקר הנוכחי בשלושת השלבים האחרונים.

קיימים כמה גורמים עיקריים המשפיעים על בחירה בלימודי STEM בהשכלה הגבוהה, העיקרי שבהם הוא לימודי המתמטיקה בתיכון, כאשר לחשיפה לרמה מתמטית גבוהה והצטיינות במתמטיקה יש השפעה על בחירה עתידית במקצועות ה STEM (Kohen & Nitzan, 2021). גורמים נוספים בעלי השפעה על בחירה עתידית בתחומי STEM הם: חשיפה מוקדמת למקצועות מדעיים בתיכון (Kohen, Nitzan, & Gafni, 2019), המגדר והמגזר. כאשר נשים וסטודנטים מהמגזר הערבי נוטים פחות לבחור במקצועות STEM בהשכלה הגבוהה (Minefee et al., 2018).

הנתונים עבור המחקר הנוכחי נלקחו מהלשכה המרכזית לסטטיסטיקה בישראל, באמצעותם עקבנו אחר בחירת מסלול לימודים של 534,590 תלמידים, החל מבחירת המגמה בתיכון, ללימודי שנה א' בהשכלה גבוהה, וסיום תואר ראשון. מעקב זה אפשר למפות מסלולי בחירה שונים בהתאם לבחירה ב non-STEM/STEM בשלבים השונים. מעבר למיפוי מסלולי הבחירה, אפיינו את הלומדים השונים בכל אחד מהמסלולים. המאפיינים העיקריים אותם בדקנו היו: מגדר, מגזר, רמה במתמטיקה בתיכון וסוג מגמה מדעית בתיכון. בהתאם לכך שאלות המחקר הן: 1) מהם מסלולי הבחירה שניתן למפות החל משלב התיכון ועד לסיום תואר ראשון?; 2) מהם מאפייני הלומדים במסלולים השונים?

ממצאים עיקריים

בהתאם לשאלת המחקר הראשונה, מיפינו שמונה מסלולי בחירה, החל מלומד במסלול מס' 1 שהתמיד במקצועות non-STEM לאורך כל תקופות הבחירה, ועד ללומד במסלול מס' 8 שהתמיד במקצועות

STEM לאורך כל תקופות הבחירה. מסלולי הביניים קודדו לפי מידת ההתמדה בבחירה ב STEM, כאשר התמדה בשלב ההשכלה הגבוהה זיכתה בניקוד גבוה בהשוואה לבחירה בשלב התיכון.

מתוך שמונת המסלולים, זיהינו שלושה מסלולים עיקריים המהווים יחד כ-90.4% מכלל בוגרי תואר ראשון. המסלול הראשון, הנו מסלול מס' 1 שתואר לעיל (כ-35.4% מכלל הבוגרים), מסלול מס' 3 שמאפיין לומדים אשר בחרו בלימודי STEM בתיכון, אבל בהשכלה הגבוהה שינו מסלול לתחום לימודי non-STEM (כ-32.5% מכלל הבוגרים), ומסלול מס' 8 שתואר לעיל (כ-22.4% מכלל הבוגרים).

מיפוי זה הדגיש את הבדלי הבחירה בשלבים השונים, בשלב התיכון מעל 57% מהתלמידים בחרו במגמה מדעית, ובהשכלה הגבוהה רק 43% מאלו שלמדו במגמה מדעית התחילו לימודי STEM, ו-89% מהם גם סיימו תואר STEM. באופן כללי, מתוך בוגרי תואר ראשון STEM, 85% למדו במגמה מדעית, לעומת 15% שלמדו במגמה שאיננה מדעית. ממצא זה מצביע על ההשפעה המתמשכת של הבחירות הנעשות עוד בשלב התיכון.

במענה לשאלת המחקר השנייה, נמצא כי במסלול מס' 1 יש פי 2 יותר נשים מגברים, פי 2.4 יותר יהודים ביחס לערבים, ופי 7.4 פחות לומדים שלא למדו 5 יחידות מתמטיקה. לעומת זאת, במסלול מס' 8 נמצא כי יש פי 2.6 יותר גברים מנשים, יש פי 1.3 יותר יהודים ביחס לערבים, ופי 4.4 יותר לומדים שלמדו 5 יחידות במתמטיקה. לבסוף, במסלול מס' 3 יש פי 1.2 יותר נשים מגברים, פי 2 יותר ערבים מיהודים, ולא נמצאו הבדלים בשכיחות לפי מספר היחידות במתמטיקה. כמו כן, ניתן לראות הבדלים מהותיים בהשוואה בין מסלולים מס' 3 ומס' 8 (מסלול מס' 1 התחיל במגמה שאיננה מדעית ולכן לא רלוונטי), כאשר מסלול מס' 8 מאופיין בבחירה במגמות פיזיקה ומדעי המחשב, לעומת מסלול מס' 3 אשר מאופיין בבחירה במגמות כימיה וביולוגיה.

נקודות לדיון

1. מה ניתן ללמוד מריכוז הלומדים סביב שלושה מסלולים עיקריים? איך זה יכול להשפיע על המאמצים הלאומיים להגדיל את מספר בוגרי תואר ראשון בתחומי ה-STEM?
2. מה ניתן ללמוד מההבדלים בנתונים הדמוגרפיים בין המסלולים השונים?
3. היכן כדאי להשקיע את המאמצים כדי להגדיל את מספר בוגרי תואר ראשון STEM?

פיתוח מקצועי למורים מובילים, ממוקד אוריינות מתמטית בהקשר הנדסי-טכנולוגי

הדס הנדלמן וזהבית כהן

מבוא

על מנת לעודד מצוינות במתמטיקה בקרב תלמידי תיכון, עליהם לראות את הרלוונטיות של החומר הנלמד לחיי היומיום שלהם. אחת הדרכים לחשיפת תלמידים לבעיות מתמטיות במגוון הקשרים מחיי היומיום, בפרט בתחומי ה-STEM הוא דרך קידום האוריינות המתמטית של התלמידים. לפי המסגרת המושגית של פיזה (OECD, 2018) אוריינות מתמטית מוגדרת כיכולתו של הפרט לחשוב חשיבה מתמטית כדי לפתור בעיות במגוון הקשרים מהעולם האמיתי, בפרט הקשרים אישיים, תעסוקתיים, חברתיים ומדעיים. אוריינות מתמטית מתייחסת לתהליך מעגלי הכולל שלושה שלבים המשקפים את המעבר מהקשר העולם האמיתי לתחום המתמטי, ובחזרה: 1) ניסוח – תרגום הבעיה מהעולם האמיתי לבעיה מתמטית, 2) יישום – שימוש במושגים ופרוצדורות מתמטיים לפתרון הבעיה, 3) פירוש והערכה – פירוש הפתרון המתמטי, הנמקה וחזרה להקשר העולם האמיתי.

על מנת לפתח את רמת האוריינות המתמטית בקרב תלמידים, יש לדאוג תחילה שהמורים עצמם יהיו בעלי כישורי אוריינות מתמטית גבוהה. כלומר קיים צורך בפיתוח מקצועי מתאים של מורים על-ידי הכשרתם להטמעה של משימות אורייניות במתמטיקה בכיתה. הכשרה זו יכולה להתבצע במסגרת של קהילה מקצועית לומדת, אשר נמצאה כיעילה לקידום תהליך של פיתוח מקצועי (Desimone, 2009).

המפגשים במסגרת הקהילה מאפשרים הזדמנות לעזרה הדדית וליצירת קשרים בין המורים, ובכך מציעים מסגרת תומכת ללמידה המקצועית.

המחקר נערך במסגרת תוכנית i-MAT ‏(Integrated Math And Technology), שהינה תוכנית לפיתוח מקצועי למורים מובילים במתמטיקה לצורך הכשרת הוראה מבוססת אוריינות מתמטית מטעם הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. חומרי ההוראה המפותחים במסגרת תוכנית i-MAT כוללים משימות אורייניות מבוססות הקשר הנדסי-טכנולוגי. כ-40 מורים מרחבי הארץ השתתפו בקהילות המורים המובילים המתמשכת על פני שנה, ובהיקף של 60 שעות. במהלך ההשתלמות נחשפו המורים למשימות אורייניות של תוכנית i-MAT, ולמסגרת המושגית לאוריינות מתמטית של פיזה, תוך דיון והעמקה בדרכי הוראה התומכים בהוראה מבוססת אוריינות מתמטית.

אחת ממטרות המחקר הנה בחינת ההשפעה של תכנית לפיתוח מקצועי ייעודית על קידום רמת האוריינות המתמטית של מורים הן "כלומדים" והן "כמורים". מכאן שאלת המחקר היא: כיצד מאופיינת רמת האוריינות המתמטית של מורים – לפני ואחרי השתתפותם בתוכנית ייעודית לפיתוח מקצועי מקדמת אוריינות – הן ברמת האוריינית שלהם עצמם והן בתפיסתם כלפי הוראה אוריינית בכיתה?

נתוני המחקר התבססו על שאלונים ומשובים מקוונים אותם מלאו המורים במסגרת שעות ההשתלמות.

שאלון עמדות מקוון, כלל 15 היגדים בסולם ליקהרט בעל שש רמות (1, כלל לא נכון, ועד 6- נכון כמעט תמיד). השאלון הועבר בתחילת ההשתלמות ובסופה. השאלון שימוש להערכת עמדת המורים כלפי ההוראה אוריינית בכיתה, בהתאם לשלושת השלבים: ניסוח, יישום ופירוש. דוגמה להיגד המבטא את עמדת המורים את הוראתם בנוגע לשימוש וקישור בין ייצוגים מתמטיים שונים כחלק מתהליך הניסוח: "אני נעזר/ת בייצוגים ויזואליים כדי לתמוך בהבנת הליכים מתמטיים ונוסחאות בקרב תלמידיי".

משוב מקוון למשימה, בוחן את רמת האוריינות המתמטית של המורים בפועל. משוב זה הועבר למורים בכל מפגש לאורך ההשתלמות, לאחר שנחשפו למשימה אוריינית חדשה. המשוב כולל דוגמה לשאלה מתוך המשימה הבוחנת את רמת האוריינות המתמטית של המורים. המורים נדרשים להסביר את דרך פתרונם ולנמק ככל שניתן.

ממצאים עיקריים

על מנת לבחון את השפעת התוכנית לפיתוח מקצועי לאורך זמן על תפיסותיהם של המורים כלפי הוראתם כמעודדת אורייניות מתמטית נערכו מבחני T למדגמים בלתי תלויים. המשתנה הבלתי תלוי היה זמן המדידה – בתחילת ההשתלמות ובסופה. המשתנים התלויים היו שלוש הגורמים לבחינת הרמה האוריינית (ניסוח, יישום, ופירוש).

מניתוח הנתונים עולה מגמה חיובית בתפיסות המורים כלפי הוראה אוריינית בכל שלושת המדדים, הן ברמת הניסוח $t(35) = -2.032, p < 0.05$, הן ברמת היישום $t(35) = -2.384, p < 0.05$, והן ברמת הפירוש $t(35) = -2.46, p < 0.05$, מתחילת לסיום שנת ההשתלמות (ראה טבלה 1).

טבלה 1

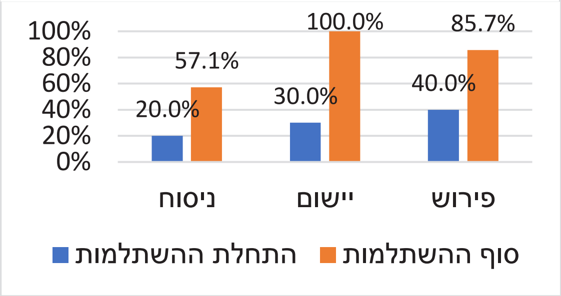
ממוצעים וסטיות תקן של כל אחד ממרכיבי האוריינות בתחילת ובסוף ההשתלמות

זמן מדידה	ניסוח		יישום		פירוש	
	M	SD	M	SD	M	SD
תחילת השתלמות (N=26)	4.36	0.63	4.67	0.54	4.53	0.61
סוף ההשתלמות (N=11)	4.80	0.51	5.13	0.54	5.09	0.70

בחינת הרמה האוריינית של המורים בפועל מתוארת להלן באמצעות שכיחויות. המשתנה הבלתי תלוי היה זמן המדידה – בתחילת ההשתלמות ולקראת סופה, והמשתנים התלויים היו שלוש הגורמים לבחינת הרמה האוריינית (ניסוח, יישום, ופירוש). התייחסות לגורם מסוים בתשובה של המורים לשאלה במשוב המקוון קודדה כ "1" וחוסר התייחסות לגורם מסוים קודד כ "0". כאשר לכל שאלה המורים נדרשו להתייחס לכל שלוש הקטגוריות. גרף 1 מציג מגמה חיובית ברמת האוריינות בפועל של המורים, כפי שהודגמו בפתרון שאלה אוריינית בשתי נקודות הזמן השונות, הגרף מציג את אחוז המשתתפים בתוכנית שהתייחסו בפתרונם לכל אחד מתהליכי המידול המתמטי.

גרף 1

שכיחויות באחוזים של הרמה האוריינית של המורים בתחילת ההשתלמות ובסופה



נקודות לדיון

1. האם פיתוח אוריינות מתמטית אצל מורים הינה מטרה העומדת בפני עצמה בהשתלמויות מקצועיות?
2. כיצד ניתן לקדם אוריינות מתמטית בקרב מורים בהיקף רחב, כך שההשפעה על למידת התלמידים תהיה מקיפה? באיזה שלב מקצועי של המורה יש להכשיר מורים להוראה אוריינית?

שילוב משימות מבוססות הקשר הנדסי-טכנולוגי בקייטנת קיץ מקוונת, במהלך מגפת הקורונה, לקידום היכולת האוריינית והמוטיבציה ללמוד מתמטיקה

זהבית כהן ואורטל ניצן

מבוא

קיים מאמץ לאומי להגדיל את מספר הלומדים מתמטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד. בבסיס מטרה זו עומד הצורך בהכשרה של בוגרי מערכת החינוך ללימודי מקצועות ה STEM בהשכלה הגבוהה והשתלבות בשוק העבודה בתחומי ההיי-טק, הטכנולוגיה והמדע. עם זאת, תלמידים רבים מגלים מוטיבציה נמוכה ללמוד מתמטיקה ברמה גבוהה, אחת הסיבות יכולה להיות חוסר היכולת שלהם להבין את הרלוונטיות של המתמטיקה אותה הם לומדים לחיי היומיום שלהם (Li & Schoenfeld, 2019).

אוריינות מתמטית עוזרת לזהות ולהבין את התפקיד של המתמטיקה בחיי היומיום. אוריינות מתמטית, לפי המסגרת המושגית של פיזה (OECD, 2018), מאופיינת בתהליך מחזורי הכולל שלושה שלבים: ניסוח, גיבוש מבנה מתמטי לפתרון בעיה; יישום, שימוש בכלים ופרוצדורות מתמטיות מתאימות לפתרון; ופירוש, פירוש והערכה של התוצאות לאור הבעיה מהעולם האמיתי. בעיה אוריינית מבוססת הקשר הנדסי-טכנולוגי מציגה ללומד את היישום של המתמטיקה אותה הוא לומד בתיכון בתעשייה.

אחת הפדגוגיות שיכולה לתרום ללמידה אוריינית הנה למידה מבוססת חקר. למידת חקר מאפשרת ללומד להיות אקטיבי, תוך קישור בין מקורות מידע שונים. בנוסף, למידת חקר חושפת את התלמיד לתהליך העבודה של מתמטיקאים ומהנדסים, כמו העלאת השערות, הכללה של תופעה, הוכחה ויישום של לוגיקה וחשיבה ביקורתית (Dorier & Maass, 2020). עם זאת, התרומה של למידת חקר לאוריינות מתמטית בפרט, איננה מבוססת דיה (Engeln, Euler, & Maass, 2013). המחקר יבחן את יחסי הגומלין בין למידה אוריינית מתמטית מבוססת הקשר הנדסי-טכנולוגי ולמידה מבוססת חקר.

771 בוגרי כיתות ט' מרחבי הארץ (44.5% בנות) השתתפו בקייטנת קיץ מקוונת שהועברה תוך כדי מגפת הקורונה באוגוסט 2020. מטרת הקייטנה הייתה להעלות את המוטיבציה של התלמידים ללמוד מתמטיקה ברמה גבוהה. הקייטנה התקיימה בשני סבבים, כל סבב בן חמישה ימים, בכל יום נערך

נקודות לדיון

1. מדוע דווקא תלמידי 3 ו 4 יחידות נתרמו יותר בהיבט האורייני והמוטיבציוני בקייטנה? והאם יש לכך השפעות יישומיות?
2. מה יכולה להיות הסיבה לכך ששתי הקטגוריות הראשונות של המוטיבציה, מוטיבציה פנימית ואתגר וכלי לחיים, עלו בהשוואה לשתי הקטגוריות האחרות, מקצוע חשוב וכלי לפתרון בעיות?

רשימת מקורות

Desimone, L. M. (2009). Improving Impact Studies of Teachers' Professional Development: Toward Better Conceptualizations and Measures. *Educational Researcher, 38*(3), 181–199.

Dorier, J. L., & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 384–388.

Engeln, K., Euler, M., & Maass, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: A comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM, 45*(6), 823–836.

Kohen, Z. & Nitzan, O. (2021). Excellence in mathematics in secondary school and choosing and excelling in STEM professions over significant periods in life. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-23.

Kohen, Z., Nitzan, O., & Gafni, N. (2019). Trends in education and professional career in science and technology: From choice of major in high school to career choice. *National Institute for Testing and Evaluation* (NITE), 104 pages.

Leu, K. (2017). Beginning college students who change their majors within 3 years of enrollment. Data Point. NCES 2018-434. *National Center for Education Statistics*.

Li, Y., & Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International Journal of STEM Education, 2*(1), 1–13.

Miller, D. I. (2018). *Characterizing pathways for joining STEM in college and beyond*. ProQuest Dissertations & Theses Global.

Minefee, I., Rabelo, V. C., Stewart IV, O. J. C., & Young, N. C. J. (2018). Repairing leaks in the pipeline: A social closure perspective on underrepresented racial/ethnic minority recruitment and retention in business schools. *Academy of Management Learning & Education, 17*(1), 79-95.

OECD, (2017). PISA 2015 results (volume V): *Collaborative problem solving*. Paris: OECD Publishing.

OECD., K. (2018). *OECD Science, Technology and Innovation Outlook 2018*. Paris: OECD Publishing.

Reinhold, S., Holzberger, D., & Seidel, T. (2018). Encouraging a career in science: A research review of secondary schools' effects on students' STEM orientation. *Studies in Science Education, 54*(1), 69-103.

Witteveen, D., & Attewell, P. (2020). Reconsidering the 'meritocratic power of a college degree'. *Research in social stratification and mobility, 66*, 100479.

הערכה בחינוך מתמטי לצורך קידום לומד המאה ה-21

ד"ר אורטל ניצן, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל
זהבית כהן, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
יסמין גרה-בדראן, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
חלימה שרקייה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
נלי קלר, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

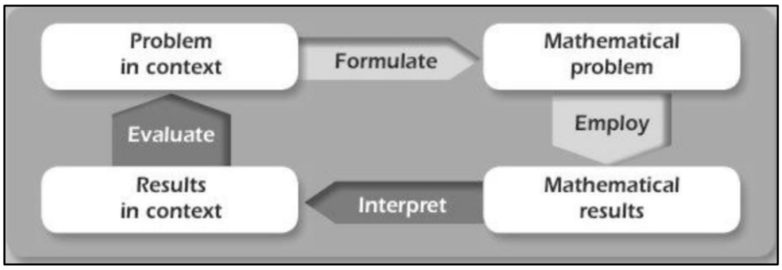
מבוא

הערכה משמשת חלק בלתי נפרד מתהליך ההוראה-למידה השוטף והיומיומי המתרחש בכיתות. תפקידה לספק למורים נתונים לצורך תכנון ומשוב, לשם בקרה על התהליכים המתרחשים בכיתה ולשם קידום הישגי הלומדים. בשנים האחרונות חלו שינויים משמעותיים בתחום הערכת הידע והמיומנויות של תלמידים בלימודי מתמטיקה. כפי שצוין במסמך שפורסם בשנת 2018 על ידי הארגון לשיתוף פעולה לפתוח כלכלי (OECD, 2018), המציאות המודרנית מציבה אתגרים חדשים לחינוך המתמטי, שמטרתם לפתח לומד עצמאי אשר מסוגל להתמודד עם אתגרי המאה ה-21. בהתאם לכך, הדגש בהערכה של פעילויות שונות של תלמידים הינו על תהליך הפתרון, תוך בחינת מאפייני חשיבה מתמטית כמו היכולת להבין, לנתח ולפתור בעיות, וכן לשתף פעולה בסיעור מוחות בדרך לפתרון. אנו מציגים שלושה מחקרים הקשורים להערכה של פעילות תלמידים תוך תהליך פתרון של בעיות מתמטיות. המחקר הראשון מבוסס על הערכה במסגרתה תלמידים מיישמים את הידע המתמטי שלהם כדי לפתור בעיות המבוססות על בעיות אוריינות בעלות הקשר מדעי-הנדסי. המחקר השני מתאר תהליך הוראה מבוססת חקר במסגרת של פרויקט לאומי ללמידה דיגיטלית אשר מתקיים במסגרת של למידה בכיתה הפוכה. המחקר השלישי מתאר שיטות הערכה של פעילות פתרון שיתופי של בעיות מתמטיות מאתגרות בפורומים מקוונים ברשתות חברתיות.

מחוון להערכת טיב בעיות אוריינות מתמטית בהקשר מדעי-הנדסי

רציונל ומסגרת תיאורטית

אוריינות מתמטית מוגדרת כיכולת לזהות ולהבין את התפקיד שממלאת המתמטיקה בעולם, לחשוב בצורה מתמטית ולהשתמש במושגים, הליכים, עובדות וכלים מתמטיים כדי לתאר, להסביר ולחזות תופעות שונות בהקשרים שונים (OECD, 2018). ניתן להבחין בשלושה מרכיבים עיקריים שקשורים לדרך בה מתבצעת ההעברה של בעיה אותנטית, שמקורה בעולם האמתי, לבעיה בעולם המתמטי. שלושת מרכיבים אלו הינם: ניסוח, יישום ופירוש, כפי שמתואר באיור 1. הניסוח מתייחס ליכולת של הפרט להכיר ולזהות הזדמנויות להשתמש במתמטיקה ואז לספק מבנה מתמטי לבעיה המוצגת בהקשר; תהליך היישום מתייחס ליכולת ליישם מושגים מתמטיים, עובדות ואלגוריתמים כדי לפתור בעיות מנוסחות מתמטית כדי להשיג מסקנות מתמטיות; תהליך הפירוש כרוך בחשיבה על פתרונות ופירוש של תוצאות מתמטיות (Stacey, 2011; 2015).



איור 1. מודל האוריינות המתמטית (OECD, 2018)

מטרת המחקר היא לפתח כלי הערכה מהימן ותקף, שמיועד להעריך את רמת האוריינות המתמטית הנדרשת לפתרון בעיות אותנטיות הנגזרות ממצבים בעולם האמתי, בפרט בהקשר מדעי-הנדסי. בנוסף,

המחקר בוחן האם כלי הערכה המאפשר זיהוי רמה אוריינית של בעיה מתמטית אותנטית יכול לשמש ככלי הערכה מעצבת בעת עיצוב ובניית תכנים, בעיות או משימות שמעודדות רמות גבוהות של אוריינות מתמטית.

ממצאים ראשוניים ודיון

המחוון התבסס על המסגרת המושגית של פיז"ה, ובפרט על בסיס סולם הבקיאות במתמטיקה אשר מהווים את הבסיס לשלושת התהליכים הבסיסיים בתהליך פתרון או מידול של בעיה מתמטית: ניסוח, יישום ופירוש (OECD, 2018; Stacy, 2015). מטרת המחוון הינה להעריך את רמת האוריינות של בעיה מתמטית על בסיס הערכת רמת כל תהליך בנפרד. בכך המחוון הוגדר כדו-מימדי, המאפשר הערכה משולבת של רמת האוריינות וסוג התהליך האורייני. כלומר השאלה מקבלת שלוש הערכות: הערכה של רמת הניסוח, הערכה של רמת היישום והערכה של רמת הפירוש. המחוון עבר תהליך תיקוף תוכן ומהימנות בין שופטים, ערכי kappa שהתקבלו נעו בין 0.601 עד 1 מה שמצביע על מהימנות בינונית עד גבוהה (fleiss, 1973). המחוון מגדיר ומאפיין קריטריונים ברורים עבור כל תהליך בכל רמה, הגדרה ואפיון הקריטריונים מסייעים להבנה יותר מעמיקה לאופי של הבעיות האורייניות. יתרה מזאת המחוון מאפשר למפתחים של בעיות אוריינות למנף ולשדרג את הבעיות הקיימות או בעיות שנמצאות בתהליך פיתוח, בכדי שתהיינה בעלות אופי אורייני ברמה גבוהה אשר באה לידי ביטוי בכך שלפחות אחד מתהליכי האוריינות הינו ברמה הגבוהה. הייחודיות של המחוון ככלי לעיצוב והערכה של בעיות אוריינות מתמטית היא התייחסותו והערכתו לכל מרכיב לחוד, ומתן רמות מוגדרות עבור כל רמה ורמה לכל תהליך מבין שלושת התהליכים.

מחקר זה יכול לתרום להבנה התיאורטית של הקשר בין בעיות מתמטיות אותנטיות, בהקשר מדעי – הנדסי, לרמת אוריינות מתמטית גבוהה. בנוסף המחקר מספק כלי הערכה והערכה מעצבת, שיכול לשמש בתהליך בנייה והערכה של בעיות מתמטיות אותנטיות ברמות אוריינות שונות.

הערכת יישום למידה מבוססת חקר בסביבת הכיתה ההפוכה

רציונל ומסגרת תיאורטית

התפשטות נגיף הקורונה והסגר שבא בעקבותיה הבהירו ללא ספק כי מודל ההוראה והלמידה הפרונטלי הנוכחי צריך לעבור שינוי. המחקר הנוכחי שופך אור על המרכיב המקוון של הכיתה ההפוכה במתמטיקה ומטרתו לחקור האם ובאיזו מידה ניתן ליישם ולהשתמש בגישת הלמידה המבוססת חקר בפלטפורמה מקוונת זו. ישראל דיגיטלית במשרד לשוויון חברתי בשיתוף עם המועצה להשכלה גבוהה יצרו ביחד יוזמה אסטרטגית משותפת שמטרתה לאפשר לכל אזרחי ישראל לרכוש השכלה ולהתפתח. כחלק מפרויקט של ישראל דיגיטלית ובשיתוף עם ד"ר אביב צנזור מהפקולטה למתמטיקה בטכניון, נוצר קורס מקוון באתר קמפוס IL המהווה ספר דיגיטלי לתלמידי תיכון. הקורס מיועד ללימודי מתמטיקה כהכנה לבגרות ברמת 5 יח"ל ומטרתו לספק תמיכה ללמידה עבור תלמידים בישראל אשר לומדים מתמטיקה ברמה גבוהה. תכני הקורס יכללו את רוב חומרי הלימוד לתלמידים מכיתה י' עד י"ב הלומדים ברמה של 5 יח"ל. החומר מוצג דרך סרטוני וידאו אשר מצולמים בסטודיו ייעודי ומועברים על ידי ד"ר אביב צנזור מהפקולטה למתמטיקה בטכניון, כאשר לכל סרטון נלווים תרגילים ומבדקי ידע שמטרתם לבדוק את הבנת התלמידים לתכנים המתמטיים המצולמים. לאורך תקופת המחקר, תלמידי תיכון מכלל מדינת ישראל ילמדו נושאים מתמטיים שונים באתר קמפוס IL על בסיס גישת הכיתה ההפוכה. התלמידים לומדים באופן עצמאי את הנושאים השונים באתר, כאשר המפגשים הכיתתיים ו/או מפגשי הזום המקוונים עם מורי המתמטיקה מוקדשים להעמקה בחומר ולתרגול (Bergmann & Sams, 2012).

ממצאים ראשוניים ודיון

המחקר מציג מחוון הערכה שפותח ותוקף במחקר שנערך על ידי Goldston ועמיתיו (2013). מחוון זה נועד להעריך מערכי שיעור המבוססים על למידה מבוססת חקר, כאשר הקריטריונים העומדים במחוונים באים

לידי ביטוי על ידי מודל ה- 5E (Bybee et al., 2006). המחוון מתייחס לכל אחד מחמשת השלבים של מודל ה- 5E אשר מתייחסים לתהליך חקר שמתקיים במספר שלבים: (i) מעורבות, (ii) חקר, (iii) הסבר, (iv) פירוט ו- (v) הערכה. המחוון נמצא גם כמסייע למורים ולמחנכים לשנות ולשפר את האסטרטגיות שלהם ולעצב שיעורי מתמטיקה מבוססי חקר. שיטת הכיתה הפוכה יכולה להיות מקום אידיאלי להפיכת הלמידה המסורתית לסביבת למידה מרתקת המבוססת על הוראת ולמידת חקר (Love et al., 2015). מחקרים קודמים בתחום בחנו את היישום של IBL במפגשים הפיזיים במהלך השיעור. עם זאת, מעט מחקר נעשה מוגבל על יישום למידה מבוססת חקר בהתייחס להערכת המרכיב המקוון של סביבת הכיתה ההפוכה. ומכאן, המחקר הנוכחי נועד לחקור את הפלטפורמה המקוונת של הכיתה ההפוכה. אנו שואפים לבדוק האם, כיצד ובאיזו מידה פלטפורמה מקוונת כזו משתמשת בלמידה מבוססת חקר.

הערכת בעיות מתמטיות מאתגרות בפורומים מקוונים

רציונל ומסגרת תיאורטית

פורומים מקוונים לצורך פתרון בעיות (Problem Solving Forum: PSF) מאפשרים לבצע פתרון שיתופי של בעיות מתמטיות מאתגרות בקבוצות קטנות, באמצעות שיח מתמטי סביב סוגיות שונות שמתוארות בבעיות. על פי מחקרים, היכולת להוביל דיון מועיל ולשתף פעולה בסיעור מוחי הינם גורמים משמעותיים להצלחת הלמידה. לכן, קיימת חשיבות רבה לשיטות הערכה של איכות הדיון בין התלמידים סביב פתרון בעיות מתמטיות. הדיונים בפורומים מתנהלים באמצעות אינטראקציות בין המשתתפים. הניתוח של האינטראקציות בין המשתתפים במחקר הנוכחי מתבסס על הטקסונומיה של קלארק ועמיתיו (Clark, James, & Montelle, 2014) המתארת את האינטראקציות בין תלמידים הפותרים בעיות מתמטיקה בצורה שיתופית בקבוצות קטנות. על פי טקסונומיה זו מבדילים בין שני סוגים של אינטראקציות בין התלמידים המשתתפים בפתרון של בעיה. הסוג הראשון כולל אינטרקציות בצורת השאלות איתן פונים המשתתפים זה לזה או לקבוצה על מנת לקבל עזרה, לאשר את רעיונותיהם או להבהיר את סטטוס ההתקדמות לקראת פתרון בעיה. הסוג השני נקרא סינרגיה קבוצתית ומוגדר כאינטראקציה מתמשכת בין שניים או יותר משתתפים, בה הם ממשיכים ומפתחים רעיונות זה של זה לגבי פתרון הבעיה. על פי טענת החוקרים, איכות העבודה הקבוצתית מתאפיינת בשיעור הסינרגיה הקבוצתית בין האינטראקציות בקבוצה. מטרת המחקר הינה להעריך את האינטרקציות המתקיימות במהלך פתרון בעיות מאתגרות בפורומים מקוונים.

ממצאים ראשוניים ודיון

ממצאים ראשוניים שנבחנו על פרוטוקולים של פורומים מקוונים בהם השתתפה קבוצה של כ-50 מורים למתמטיקה המשתתפים בתכנית לפיתוח מקצועי, העלו כי הסינרגיה הקבוצתית משתנה כאשר המשתתפים צוברים ניסיון בפתרון בעיות יחד. מכאן הסינרגיה מהווה מאפיין דינאמי בהערכת עבודת הקבוצה. על מנת להתחקות אחר הדינמיקה של הסינרגיה הקבוצתית, המחקר הנוכחי מגדיר את המושג "שרשרת סינרגטית" כרצף של טענות, שכל אחת מהן קשורה לטענות הקודמות לה, ממשיכה ומפתחת את הרעיונות של משתתפים שונים. להלן דוגמה לשרשרת סינרגית מאחד הפורומים המכילה 5 טענות של המשתתפים.

26/12/2018, 21:11 – תמי: BE = EC

26.12.2018, 21:11 – רון: אהה, נכון, בגלל זווית היקפית אלפא

26.12.2018, 21:12 – עדי: תראו, בנוסף משולש BHC הוא שו"ש

26/12/2018, 21:13 – תמי: למה? אהה, כן. כי הגובה מתלכד עם התיכון

26.12.2018, 21:13 – רון: בגלל מרובע DHCL שהוא דלתון

הערכנו את רמת הסינרגיה הקבוצתית בכל פורום בהתבסס על שני מאפיינים: האורך הממוצע של שרשרת הסינרגיה בפורום ואחוז האינטראקציות הכלולות ברשתות הסינרגיה ביחס למספר האינטראקציות הכולל

בפורום. בהתבסס על הספרות, אנו מאמינים כי המאפיינים הנבחרים משקפים במידה רבה את רמת הסינרגיה הקבוצתית בפורומים ויכולים לשמש בסיס להערכת רמת ההצלחה של עבודה משותפת בפורום לפתרון בעיות.

מפגשי עבודה בקבוצות הדיון

בקבוצות הדיון נדון בשלושת מחקרי ההערכה תוך התמקדות בדוגמאות. מיקוד מפגש העבודה הראשון הינו בחשיפה לתיאוריה העומדת מאחורי כל אחת משיטות ההערכה, הצגת המחוון ששימש להערכה, ודוגמא קונקרטית. מפגש העבודה השני יהיה במיקוד יישומי-מעשי, תוך התנסות בהערכה על פי המחוונים השונים על בסיס דוגמאות שמדגימות כל אחת מהשיטות המוצגות. במפגש זה יתקיים דיון מעמיק בקבוצות על כל אחת מהשיטות בנפרד, זאת במטרה להבין ולהתנסות בתהליכים אותם המורה עובר בעת תהליך הערכה.

שאלות לדיון – מפגש ראשון

1. מהי התרומה הייחודית של כל שיטת הערכה?
2. האם ניתן לשלב את השימוש בשלוש שיטות ההערכה בשיעור מתמטיקה?
3. מהם הגורמים המעכבים / המקדמים מורים להשתמש בשיטות הערכה שונות בהוראה?
4. כיצד שיטות ההערכה השונות מסייעות לקידום לומד המאה ה-21?

שאלות לדיון – מפגש שני

דיון בקבוצות, כאשר כל קבוצה מקיימת דיון על שיטת הערכה אחת:

1. מהן החוזקות / החולשות של כל אחת משיטות ההערכה?
2. האם, ובאיזה אופן, ניתן להתנסות בפועל בשיטות ההערכה השונות על ידי תלמידים?

דיון במליאה:

1. מהם האתגרים העומדים בפני מורים בבואם להשתמש בשיטות ההערכה השונות?

רשימת מקורות

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). Flip your classroom: Reach every student in every class every day. International society for technology in education.

Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness. Colorado Springs, Co: BSCS, 5, 88-98.

Clark, K., James, A., & Montelle, C. (2014). "We definitely wouldn't be able to solve it all by ourselves, but together…": group synergy in tertiary students' problem-solving practices. *Research in Mathematics Education, 16*(3), 306-323.

Fleiss, J. L., & Cohen, J. (1973). The equivalence of weighted kappa and the intraclass correlation coefficient as measures of reliability. *Educational and psychological measurement*, 33(3), 613-619.

Goldston, M. J., Dantzler, J., Day, J., & Webb, B. (2013). A psychometric approach to the development of a 5E lesson plan scoring instrument for inquiry-based teaching. Journal of Science Teacher Education, 24(3), 527–551. https://doi.org/10.1007/s10972-012-9327-7

Love, B., Hodge, A., Corritore, C., & Ernst, D. C. (2015). Inquiry-based learning and the flipped classroom model. Primus, 25(8), 745-762.

OECD (2018), *PISA 2021 mathematics framework (first draft)*. OECD. https://www.upc.smm.lt/naujienos/smm/penkiolikmeciu-matematinis-rastingumas/GB-2018-4-PISA-2021-Mathematics-Framework-First-Draft.pdf

Stacey, K. (2015). The real world and the mathematical world. In *Assessing mathematical literacy* (pp. 57-84). Springer, Cham.

Stacey, K. (2011). The PISA View of Mathematical Literacy in Indonesia. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 2(2), 95-126.

סדנה וקבוצת דיון בנושא: פרויקטים במתמטיקה שימושית בחטיבת הביניים

בועז בריגר, יזם חינוכי עצמאי, מורה למתמטיקה בחטיבת ביניים

ד"ר צבי לירז, המכללה האקדמית אחוה

פרופ' ניר גביש, המחלקה למתמטיקה שימושית בפקולטה למתמטיקה בטכניון, חבר ועדת מקצוע מתמטיקה

מבוא

על מנת להגדיל באמת את מעגל המצוינות במתמטיקה, ועל מנת להתאים את תכנית הלימודים לדרישות מבחן פיז"ה העדכניות (OECD, 2018), יש צורך לייסד מקצוע חדש בחטיבת הביניים: "פרויקטים במתמטיקה שימושית".

לימודי המתמטיקה בבית הספר, מיסודי ועד בגרות, ממוקדים רובם ככולם במתמטיקה טהורה. בשנתיים-שלוש האחרונות יש תזוזה בארץ ובעולם לכיוון תכנים במתמטיקה שימושית בחטיבת הביניים, בין היתר בעקבות חידוד הדרישה הזו במבחן פיז"ה. יחד עם זאת נראה שרוב רובם של התכנים החדשים במתמטיקה שימושית וההכשרות החדשות למורים עדיין מכוונים להעשרת מיעוט התלמידים החזקים ממילא במתמטיקה טהורה. ברור שבדרך זו לא ניתן להגדיל באופן משמעותי את מעגל המצוינות במתמטיקה.

ב-3 השנים האחרונות אנו (המציעים) מפתחים ומתנסים בשטח בפרויקטים במתמטיקה שימושית בגילאי חטיבת הביניים. לצד כישורי חשיבה מתמטית, אנו מפתחים אצל התלמידים כישורים הכוללים: פתרון בעיות שלא נתקלו בהן בעבר, חקירה, עבודה בצוות, יכולות הצגה ועוד. מחקרים עדכניים מראים ש-PBL היא אסטרטגיית למידה אפקטיבית לכל התלמידים, כולל החלשים יותר (Saavedra et al., 2021). בעבודתנו, אנו פונים בעיקר לתלמידי ההקבצות ה"בינוניות" – הם העתודה ל"הגדלת מעגלי המצוינות" – מתוך כוונה לפתח מוטיבציה עניין והתלהבות אצל תלמידים שהם חזקים בדרך כלל, שלא כל-כך אוהבים או לא כל-כך מצליחים במתמטיקה, בגישת Learning by doing.

על סמך עבודתנו זו, אנו טוענים שיש מקום לייסודו של המקצוע "פרויקטים במתמטיקה שימושית" בחטיבת הביניים, שיתקיים כמקצוע ליבה לצד מקצוע המתמטיקה וישלים אותו. כדי לעורר את הדיון ברעיון זה, אנו מציעים לכנס JCRME10 סדנה וקבוצת דיון שמיועדות להמחיש את הרעיון, לעורר דיון כאמור בנושא, ולבנות קבוצה של מורים וחוקרים המעוניינים להמשיך כקהילה לומדת לפיתוח ושיפור מתודולוגיות בפיתוח פרויקטים במתמטיקה שימושית, העברתם והערכתם.

מבנה הסדנה המוצעת

נפתח בסקירה (כ-20 דקות) של עקרונות למידה מבוססת פרויקטים (למ"פ, Project-Based Learning) ויישומה בפרויקטים במתמטיקה שימושית, דהיינו למידה מולטי-דיסציפלינארית הכוללת שיתוף פעולה של המורה למתמטיקה עם מומחה תוכן בדיסציפלינה אחרת (מורה מקצועי בבית הספר או מומחה מהקהילה). נסקור בקצרה את מתודולוגית הפיתוח של תכנים כאלה ומתודולוגיות העברה והערכה של פרויקטים כאלה.

נציג בקצרה 2-3 דוגמאות (כ-10 דקות) של פרויקטים שפותחו על ידינו ונוסו בהצלחה. דוגמאות אלה מוצגות כהשראה לחלק העיקרי של המפגש.

לב הסדנה (כ-50 דקות) יוקדש להתנסות מעשית. המשתתפים מוזמנים להתנסות בשלבים ההתחלתיים (כמוסבר להלן) של תהליך של פיתוח פרויקט כזה ולשתף את שאר המשתתפים.

לסיום הסדנא נשמע חוויות מהמשתתפים ונדון בקצרה (כ-10 דקות) על משמעות ונחיצות המקצוע "פרויקטים במתמטיקה שימושית" בחטיבת הביניים (לצד לימודי המתמטיקה המסורתיים).

בפסקאות הבאות נתאר בקצרה את חלקי הסדנה.

קהל היעד ללמידת מתמטיקה שימושית בלמידה מבוססת פרויקטים (למ"פ)

לצד מתן מענה לקריאת ההשכמה המגיעה מכיוון פיז"ה, מטרתנו העיקרית היא להגדיל את מעגל המצוינות בחט"ב, דהיינו, להביא הרבה יותר תלמידים להתקרב למתמטיקה, להצליח בה, ומשם לבחור ולהצליח במסלול מתמטיקה מורחבת לבגרות. המציאות היא שתלמידי חט"ב רבים עשויים להיות תלמידים מצטיינים במקצועות אחרים ועדיין לסלוד ואף לפחד מלימודי המתמטיקה בבית הספר, תופעה רחבה מאוד הפוגעת במיצוי הפוטנציאל של המוני תלמידים ובהכנתם לחיים בוגרים במאה ה-21 רוויית הטכנולוגיה והאלגוריתמים בכל תחום. מתמטיקה שימושית יכולה להיות הגשר לתלמידים אלה היות והיא קושרת באופן משמעותי ואותנטי תחומי דעת רבים למתמטיקה – וכל שנדרש הוא לאפשר לתלמיד.ה לחוות את המתמטיקה השימושית בתחום בו הוא\היא מתעניינ.ת (כלומר בהתאמה אישית). בכך תגדל המוטיבציה והעניין להתמודד עם המתמטיקה, ידע העולם בתחום העניין האישי אף יגדילו את האינטואיציה למודל המתמטי ויקלו על ה"טרנספר" – העתקת רעיון מתמטי מתחום אחד למשנהו.

עקרונות למ"פ במתמטיקה שימושית

בחירה: לאפשר לתלמידים לבחור את תחום העניין בו הם רוצים לפתור בעייה מתמטית-שימושית (ספורט, רפואה, מוזיקה, משחקי מחשב, וכן הלאה).

מולטי-דיסציפלינאריות: הבעיות הן אותנטיות, כלומר מתחקות אחרי הדרך בה נעזרים בעלי מקצוע בתחומי דעת שונים במתמטיקה שימושית. הידע הנלמד דרך הפרויקט כולל את תחום העניין הנוסף על המתמטיקה, ולכן מומחה בתחום הדעת <u>חייב</u> להיות שותף ליצירה, הנחייה והערכה של הפרויקט (מורה מקצועי בתחום ו\או מומחה מהקהילה).

עבודת צוות: אבן יסוד של חקירה ושל כישורי המאה ה-21 בכלל – הפריה הדדית, חלוקת משימות, תקשורת, אחריותיות.

חקירה: מדובר בבעיות שתבנית הפתרון שלהן לא נלמדה עדיין על ידי התלמידים. כחלק מהחקירה התלמידים מנסחים את הבעיה בהקשר האותנטי שלה, מזהים את הפערים שיש להם מהידע הנדרש לפתרון – הן בתחום הדעת והן במתמטיקה, מגלים את המודל המתמטי הרלוונטי, פותרים באופן המתאים לדיסציפלינה, בודקים את הפתרון בצורה ביקורתית ו"מחזירים" אותו לעולם התוכן המקורי.

הצגה: ביצוע הבנה משמעותי, חלק מכל פרויקט באשר הוא, ומפתח כישורים אישיים.

רפלקציה: תהליך מתמשך לאורך הפרויקט ובסופו, המעלה למודעות את הלמידה ומשמש להערכה מעצבת – עצמית, ועל-ידי מנחה הפרויקט.

תפקיד המורה למתמטיקה: המורה הופך ממקור ידע למנחה פרויקטים על כל המשתמע מכך. אין מתפקידו להיות "יודע כל" ובפרט לא בתחום הדעת הלא-מתמטי. כמורה למתמטיקה יהיה אמון על ההיבטים הפדגוגיים השונים בלמ"פ, על הנכונות המתמטית בפרויקט, ועל ההערכה.

פיתוח יחידות לימוד

למען הצלחת התהליך, הפרויקטים שהמורה מגיש לתלמידיו לבחירה צריכים להיות כאלה שהמורה מתחבר אליהם בעצמו. יש באפשרותו לבחור פרויקטים מן המוכן, אך אלה לא תמיד יתאימו לתחום העניין של התלמידים, לגילם או לרמתם היחסית. לכן חשובה היכולת לפיתוח פרויקט כזה – וכאמור, מדובר בשיתוף פעולה עם מומחה בתחום דעת אחר – זהו תהליך שגוזל זמן מחד, ומאידך הופך את

עבודת המורה למשמעותית יותר ומעשירה את קהילת ההוראה בפרויקטים. התהליך כולל התחקות אחרי בעיות אמיתיות בהן המתמטיקה מהווה כלי בידי המקצוען באופן אותנטי. לעיתים יש למצוא את המודל המתמטי בסיבוכיות המתאימה לגיל ויכולות התלמידים. יש לנסח "בקשה לעזרה מתמטית" בה המומחה פונה את התלמידים שיעזרו לו לפתור בעייה בעזרת המתמטיקה שלמדו. באופן זה התלמידים מבינים שמדובר ב"משחק כמו באמת" ונרתמים בחדוה.

מתודולוגית הנחיית פרויקט במתמטיקה שימושית

התלמידים מקבלים בתחילת התהליך מספר "בקשות לעזרה מתמטית" כנ"ל וכל תלמיד בוחר את הפרויקט המועדף עליו.ה. המורה בונה צוותי עבודה של 2-4 תלמידים. התלמידים עוברים דרך שלבי פתרון הבעייה: ניסוח הבעייה, זיהוי פערי הידע, חקירה וגישור על פערי הידע, מציאת המודל המתמטי המתאים, העמדת פתרון ובדיקתו, הכנה להצגת הפתרון למומחה וקבלת משוב, רפלקציה מסכמת.

דוגמאות

הדוגמאות הבאות אינן ניתנות במטרה לתרגל אותן כתלמידים או כמנחים, אלא כהשראה לחשיבה על דוגמאות נוספות בידי משתתפי הסדנא. אלה הן דוגמאות אותנטיות כלומר מייצגות בעיות מסדר היום המקצועי של המומחה בתחום הדעת הנעזר במתמטיקה שימושית בעבודתו. הדוגמאות לקוחות מפרויקטים שפותחו בעזרת מומחים בדיסציפלינות השונות ונוסו בפועל בכיתות בחטיבת ביניים בהקבצות בינוניות.

א) עזרה למהנדס "בראשית" בתכנון מכלי הדלק של חללית גשושית. הרוב המוחלט של המאסה של רכב החלל היא דלק, וככל שמוסיפים דלק, צריך עוד דלק מה שמגדיל שוב את המאסה... איך פותרים בעייה זו בעזרת מודל מתמטי? (כיתה ז' – ט')

ב) עזרה בבניית מודל כלכלי למסעדן השוקל לפתוח מסעדת אוכל מהיר – דוכן פלאפל. מסעדת מזון מהיר עובדת על מרווחים נמוכים ויעילות גבוהה – מינימום גודל פיזי, מינימום עובדים, מינימום הוצאות ומקסימום תפוקה. על מנת לבחון כדאיות כלכלית, יש לערוך חישובי הספק שונים (כיתה ח' – ט')

ג) עזרה לחוקר היסטוריה המבקש לבסס טענה היסטורית בעזרת חקירה כמותית. להיסטוריונים יש נרטיבים. הנרטיבים מתורגמים לטענות היסטוריות אותן מנסים ההיסטוריונים לבסס בעזרת מקורות. מבחינה מתמטית, ההיסטוריון צריך לעמוד על ההבדל בין סיבתיות ומיתאם. מקורות מידע כמותיים יכולים לחזק או להפריך טענות שונות (כיתה ח' – ט')

יש כמובן אינסוף דוגמאות נוספות והרעיון הוא למצוא את הדוגמאות האותנטיות שקרובות לליבו של המורה ושל התלמידים.

מהלך הסדנה – הפעלת המשתתפים

משתתפי הסדנה יתבקשו לזהות בעייה אותנטית שמעניינת אותם באופן אישי ולנסות לנסח את "בקשת העזרה המתמטית". תחילה יוצגו "בקשות עזרה" (כדוגמאות לעיל), ומנחי הסדנה יסתובבו בין המשתתפים ויעזרו להם בתהליך חיפוש הרעיון שלהם וניסוח הבעייה בצורה מתאימה לגיל חט"ב מבחינה מתמטית, ומלהיבה. לאחר 20-30 דק' יוזמנו המעוניינים להציג את הרעיון שלהם לשאר משתתפי הסדנא, לשמוע משוב ורעיונות לשיפור.

סשן סיכום הסדנה

ב-10 דקות האחרונות יוזמנו משתתפים לחלוק חוויות ותובנות, ונדון בקצרה בנחיצות ובהיתכנות של מקצוע חדש בחט"ב: "פרויקטים במתמטיקה שימושית".

רשימת מקורות

Board, OECD Governing. (2018). PISA 2021 Mathematics Framework (first draft).

Saavedra, A. R., Liu, Y., Haderlein, S. K., Rapaport, A., Garland, M., Hoepfner, D., ... & Hu, A. (2021). Knowledge in Action Efficacy Study Over Two Years.

סביבה מקוונת ללמידה ולהוראה של גאומטריה דדוקטיבית - ממצאים, אתגרים ודילמות

ניצן איזנשטרק, פולפרוף
חיים בלין, פולפרוף
רגינה אובודנקו, מכללת סמינר הקיבוצים, מכללת שנקר
אנטולי קורופטוב, מכללת לוינסקי

מבוא

אחד מהיעדים המרכזיים של מערכת החינוך בכלל ושל תחום המתמטיקה בפרט, הינו "פיתוח מיומנויות הלומד במאה ה-21". "למידה משולבת דיגיטל – למידה המותאמת למאה ה 21 , למידה מבוססת נתונים, מפתחת את מיומנויות הלומד העצמאי ומאפשרת למידה דיפרנציאלית ומותאמת אישית" (מתוך חוזר מפמ"ר מתמטיקה לשנה"ל תשפ"ב, אוגוסט 2021). יעד זה קיבל משנה תוקף ודחיפות לאור אתגרי מגפת הקורונה, אשר החל מחודש מרץ 2020 שיבשה את שיגרת ההוראה וחייבה את המורים והתלמידים לאמץ דרכי למידה הוראה היברידיות, המשלבות למידה מרחוק לצד למידה בכיתה. מציאות חדשה ומורכבת זו זימנה והאיצה תהליכים המשלבים סביבות למידה מקוונות בתהליכי הלמידה וההוראה במענה לאתגרי השעה.

מטרות הסדנה הינן:

להציג בפני המשתתפים סביבת למידה חדשנית המשלבת טכנולוגיה בהוראת הגאומטריה הדדוקטיבית.

לאפשר למשתתפים להתנסות באופן מעשי ביכולות הסביבה, לשתף בחוויות ובממצאי הטמעות שנערכו במהלך תשפ"א.

לקיים דיון פדגוגי - רפלקטיבי לגבי האופן בו הסביבה נותנת מענה ליעדי הלמידה משולבת הדיגיטל תוך התייחסות לתחום התוכן, לתהליכי הלמידה – הוראה ולמקומו של המורה במציאות המשתנה.

רקע

מזה מספר שנים, הגדיר משרד החינוך את שילוב מיומנויות המאה ה-21 כיעד מרכזי. יעד זה בא לידי ביטוי גם בתחום המתמטיקה והוא זוכה לאזכור רצוף בחוזרי מפמ"ר מתמטיקה בשנים האחרונות (חוזרי מפמ"ר תשע"ט-תשפ"ב). היישום של יעד זה בשטח, מחייב שינוי בתהליכי הלמידה וההוראה, שיפור תשתיות פיסיות (כגון אינטרנט, מחשבים, מקרנים), שילוב של כלים וסביבות למידה מקוונות, פיתוח מקצועי ותמיכה במורים ועוד. לאור זאת, לא מפתיע שהטמעת מיומנויות המאה ה-21 בפועל, נתקלה בחסמים רבים והתקדמה בעצלתיים. מגפת הקורונה, אשר פרצה לחיינו בשנת 2020, היוותה נקודת מפנה ביחס של כל הגורמים הנוגעים בדבר. המעבר המהיר והחד ללמידה מקוונת מרחוק,

ובהמשך ללמידה היברידית, חייב את כל השחקנים במגרש הפדגוגי להתאים את עצמם במהירות למציאות החדשה.

למידה והוראת גאומטריה בבתי הספר נחשבת לאתגר רציני הן במובן אפיסטמולוגי והן במובן קוגניטיבי (Jones & Tzekaki, 2016; Jones, 2002). למידה והוראה של גאומטריה דדוקטיבית נחשבת למאתגרת עוד יותר (Duval, 1998; Hartshorne, 2000) במשך עשרות שנים הקהילה המקצועית בוחנת כיצד להתמודד עם אתגר זה. בחינוך המודרני למתמטיקה נראה שהשימוש בטכנולוגיה דיגיטלית רלוונטי יותר מתמיד. הספרות המקצועית מצביעה על כך שלימוד מתמטיקה באמצעות כלים טכנולוגיים מסייע בתהליך בניית ידע מופשט של מתמטיקה, וגאומטריה בפרט (Lagrange et al., 2003).

FullProof היא סביבת למידה מבוססת מחשב המאפשרת לתלמידים לתרגל בעיות הוכחה בגאומטריה, בכיסוי מלא של כל נושאי הלימוד ורמות הלימוד בגאומטריה לחט״ב ולתיכון. התלמידים כותבים את כל שלבי ההוכחה בעצמם (סימונים, טענות, נימוקים, משוואות ובניות עזר), ומקבלים מהמערכת עזרה מותאמת אישית. המערכת בודקת את הפתרונות באופן אוטומטי ומיידי ומציגה משוב מפורט על כל שלב בפתרון. המערכת משקפת למורים את הפעילות של התלמידים ואת הקשיים הנפוצים בכיתה, ועושה זאת באופן שוטף ומיידי וללא צורך בבדיקת הוכחות באופן ידני. FullProof משתלבת בכל שלבי ההוראה (הקנייה, תרגול וההערכה) והיא מתאימה לכל סוגי הלמידה (פרונטלית, מקוונת או היברידית, באופן עצמי ובקבוצות).

המערכת נבחרה להשתתף ב"אתגר הלאומי לקידום למידה מותאמת אישית במתמטיקה" ע״י משרד החינוך וקרן טראמפ בשנים תשע״ט ותש״פ, וכן בתוכנית הלימודים המומלצת ללמידה מרחוק בכיתה ט' בתקופת הקורונה. המערכת קיבלה אישור טכנולוגי ואישור פדגוגי לשנה"ל תשפ"ב לכיתות ז'-יא'.

המערכת מכילה תמיכה מלאה בעברית, בערבית ובאנגלית.

במהלך שלוש השנים האחרונות, הוטמעה המערכת במאות כיתות בחטיבות ביניים, בבתי ספר תיכוניים ואף במכללות להכשרת מורים למתמטיקה.

מבנה הסדנה

הסדנה תפתח בדיון קצר שבמרכזו שיתוף והצפה של האתגרים הייחודיים לתהליך הלמידה וההוראה של תחום הגאומטריה הדדוקטיבית, מתוך חוויותיהם האישיות וניסיונם של המשתתפים.

לאחר הקדמה זו, תינתן למשתתפים הדגמה קצרה על אופן פעולת סביבת הלמידה.

במרכז הסדנה, יקבלו המשתתפים הזדמנות להתנסות באופן מעשי בעבודה בסביבת הלמידה .

בחלק המסכם של הסדנה, יוצגו עיקרי הממצאים של תהליכי הטמעה של סביבת הלמידה במקומות שונים. לאחר מכן, ייערך דיון פדגוגי רפלקטיבי לגבי האופן שבו נותנת הסביבה הטכנולוגית מענה לאתגרי תהליכי הלמידה וההוראה אותם הציפו המשתתפים בחלקו הראשון של הסדנה.

מהלך הסדנה

הנחיית הסדנה <אנטולי קורופטוב>

מילוי שאלון padlet – אתגרי הלמידה הוראה הייחודיים לתחום הגאומטריה (10 דקות) <ניצן, איזנשטרק>

הצגת רקע קצר על מערכת FullProof (5 דקות) <ניצן איזנשטרק >

הדגמה של אופן עבודת סביבת הלמידה (15 דקות) <חיים בלין>

התנסות מעשית בעבודה בסביבת הלמידה ופתרון משימת היכרות (20 דקות) <ניצן איזנשטרק +חיים בלין>

הצגת צד המורה (דוחות, פתרונות בדרכים שונות) ותוצאות הטמעה במקומות שונים (10 דקות) <רגינה אובודנקו>

דיון פדגוגי וסיכום – (30 דקות) <אנטולי קורופטוב>

סך הכל 90 דקות

שאלות לדיון

שאלות לדוגמה שיעלו לדיון במליאה במסגרת הדיון הפדגוגי בסיום הסדנה:

באיזה אופן נותנת לדעתכם הסביבה מענה לאתגרי הלמידה של הלומד העצמאי?

באיזה אופן נותנת לדעתכם הסביבה מענה לאתגרי המורה בהוראת הגאומטריה הדדוקטיבית?

אילו דילמות מציף השימוש בסביבת הלמידה המקוונת?

אילו שאלות מחקר היה לדעתכם מעניין לבחון באמצעות שימוש וניתוח נתונים מתוך סביבת הלמידה?

רשימת מקורות

חוזר מפמ"ר מתמטיקה - משרד החינוך (תשפ"ב אוגוסט 2021) המזכירות הפדגוגית, מפמ״ר מתמטיקה, אגף מדעים, הפיקוח על הוראת המתמטיקה

https://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/matematika/chozermafmar2022.pdf

חוזר מפמ"ר מתמטיקה - משרד החינוך (תשע"ט אוגוסט 2018) המזכירות הפדגוגית, מפמ״ר מתמטיקה, אגף מדעים, הפיקוח על הוראת המתמטיקה

https://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/PinatHamafmar/HozreyMafmar.htm

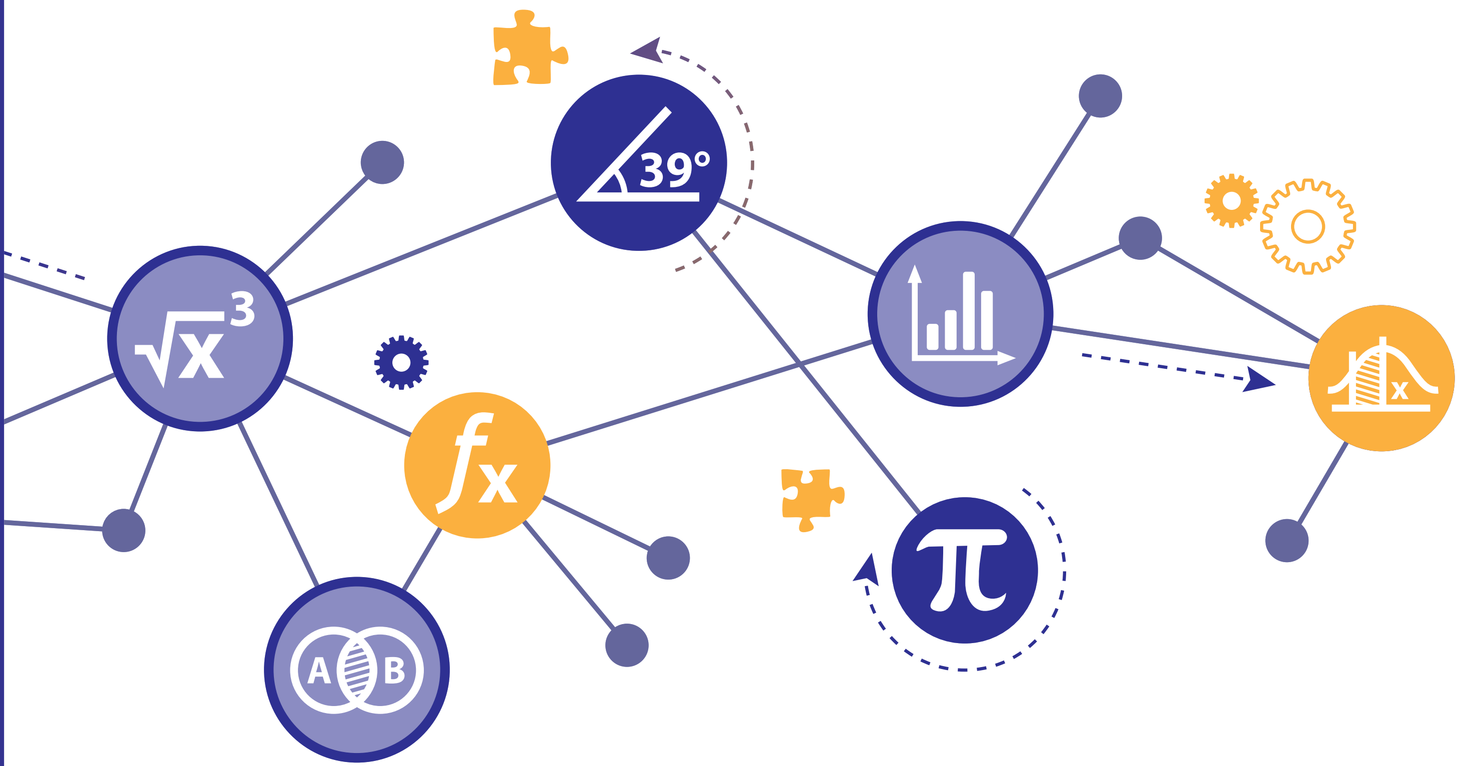
Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century (37–52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In L. Haggarty (Eds), Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice. (Chapter 8 pp. 121-139) London: Routledge Falmer.

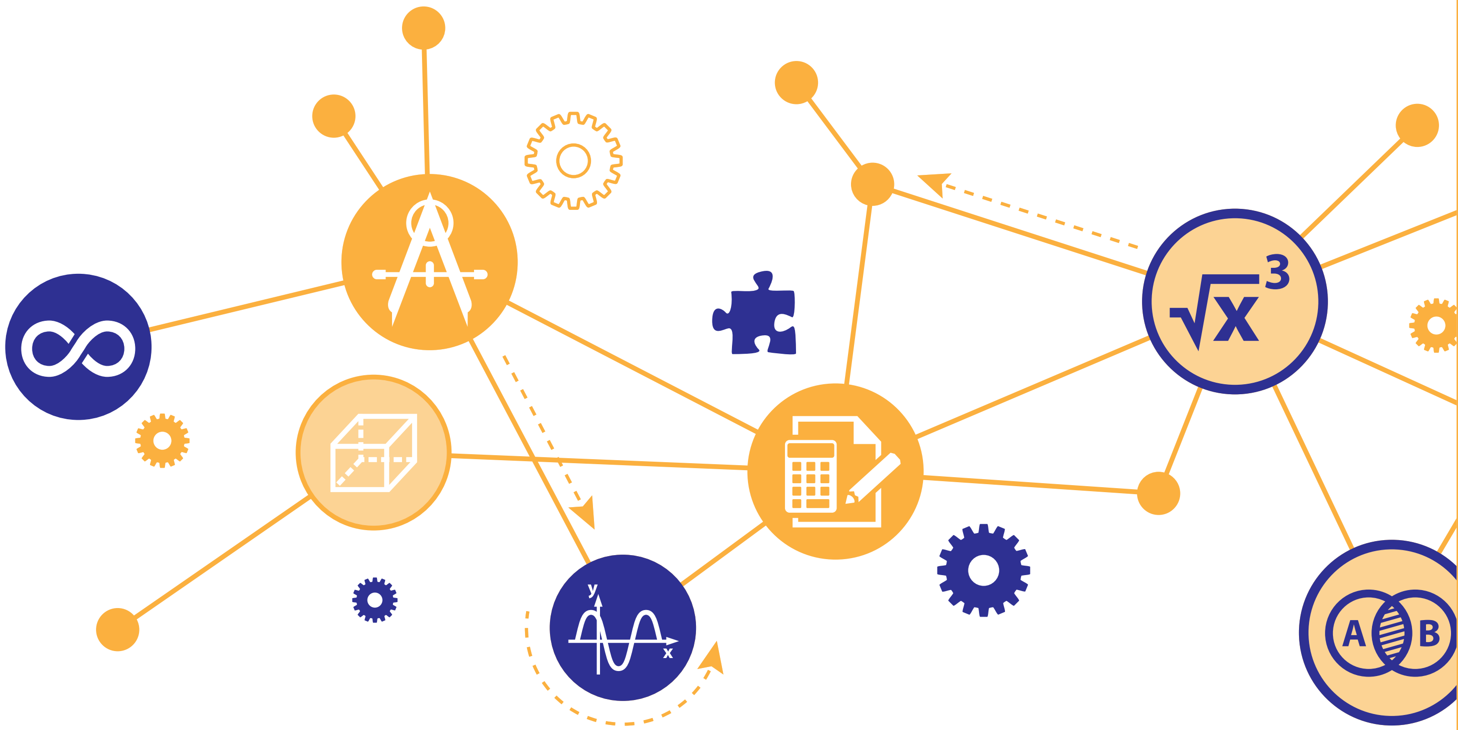
Hartshorne, R. (2000). Teaching geometry according to Euclid. Notices of the American Mathematical Society, 47(4), 460-465.

Jones, K., & Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The Journey Continues (pp. 109-149). Rotterdam: Sense

Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: a multidimensional study of the evolution of research and innovation, In A.J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), Second International Handbook of Mathematics Education, 239-271. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.



מיצגים



למידה מבוססת פרויקטים אודות פוליומינואים – חקר מקרה

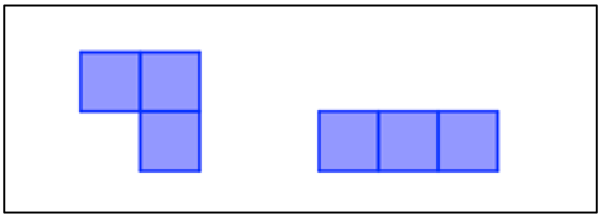
סבינה סגרה, המכללה האקדמית אחוה

מבוא

"פוליומינואים" הם הכללות של אבני דומינו. בעוד שאבני דומינו מורכבות משני ריבועים (או משבצות), פוליומינואים מורכבים משני ריבועים או יותר, כאשר כל ריבוע צריך להיות מחובר על-ידי צלע (Barequet, Golomb & Klarner, 2017). טרומינואים, לדוגמה, מורכבים משלושה ריבועים, ויש להם שתי אפשרויות חיבור (מלבד ההרכבים הסימטריים להרכבים המוצגים למטה): כל הריבועים מחוברים בשרשרת ארוכה, או בצורת ריש (איור 1).

איור 1

שני טרומינואים - פוליומינואים המורכבים משלושה ריבועים.



כאשר מספר המשבצות המרכיבות את הפוליומינו הוא גדול, ניתן לחשב באופן נומרי בעזרת מחשבים את מספר ההרכבים האפשריים. עד היום אין נוסחה לחישוב מספר הפוליומינואים, כאשר מספר הריבועים (n) הוא נתון. בעיית מניית הפוליומינואים היא בעיה פתוחה ונגישה, וניתן להסביר את הבעיה לתלמידים. באופן כללי, אפשר לנסח בעזרת פוליומינואים בעיות מתמטיות מעניינות שניתן לפתור בדרכים שונות. למרות שפוליומיניאים הם נושא מוכר בהעשרת המתמטיקה (recreational mathematics), ההתייחסות לפוליומינואים בספרות של הוראת המתמטיקה היא מצומצמת מאוד. מטרתנו היא לקדם נושא זה.

פוליומינואים מתאימים ללמידה מבוססת פרויקטים (project based learning, PBL) מפני שהם מופיעים בתחומים שונים של המתמטיקה, עליהם אפשר לחזור או ללמוד כאשר חוקרים פוליומינואים: אריתמטיקה (ספירה שיטתית, חיבור וכפל), גאומטריה ובמיוחד ריצופים, קומבינטוריקה, תורת הגרפים ואלגברה לינארית.

למידה מבוססת פרויקטים היא צורה של למידה שבה התלמידים מבינים את החומר בצורה עמוקה יותר, כאשר הם בונים באופן פעיל את ההבנה שלהם על ידי העלאת רעיונות ושימוש בהם (Krajcik & Blumenfeld, 2005). עקב האופן הפעיל של הלמידה, יש קשר הדוק בין למידה מבוססת פרויקטים לבין למידה חווייתית(Efstratia, 2014) .

בספרות קיימות דוגמאות רבות ושונות ללמידה מבוססת פרויקטים (באופן כללי, לא רק בתחום המתמטיקה). מאפיינים משותפים הם (Thomas, 2000):

- למידה מבוססת פרויקטים היא מרכזית, ולא רק תוספת לתכנית הלימודים. תלמידים לומדים את החומר הנדרש דרך הפרויקט.
- למידה מבוססת פרויקטים בנויה על שאלות או בעיות ש"דוחפות" את התלמידים להתעניין במושגים וללמוד את העקרונות המרכזיים של התחום.
- למידה מבוססת פרויקטים מעודדת את הלומדים לחקור ולהרחיב את הידע הקודם שלהם.

- לסטודנטים יש תפקיד משמעותי בקידום הפרויקטים.
- הפרויקטים הם ריאליים, ולא יצור "מלאכותי" למטרות בית ספר.

בתחום המתמטיקה עדיין אין מספיק דוגמאות כדי להגיע למסקנות לגבי היעילות של למידה מבוססת פרויקטים או לגבי נושאים מתאימים לצורת למידה זו (Jacques, 2017).

מתודולוגיה

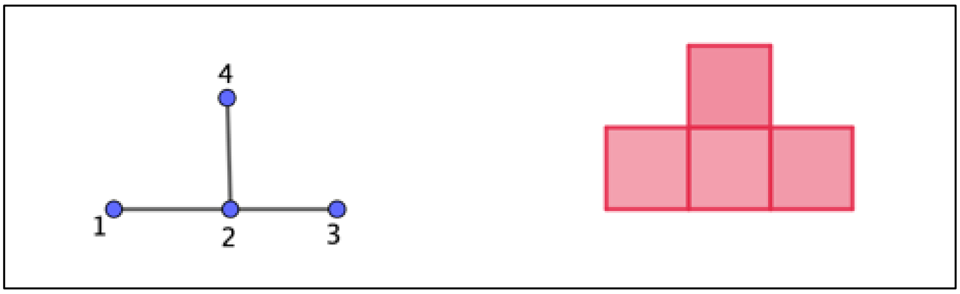
המחקר המוצג כאן הוא חלק ממחקר מקיף יותר שמטרתו היא לבחון את היעילות של למידה מבוססת פרויקטים בתחום המתמטיקה. פרויקט הלמידה אודות פוליומינואים הוצג בשתי קבוצות – סמינריון של פרחי הוראה שלומדים בשנה שלישית וקבוצת תיכוניסטים מצטיינים. לשתי הקבוצות היה ידע באריתמטיקה, אלגברה, גאומטריה וקומבינטוריקה בסיסית, אך לא היה להם ידע בתורת הגרפים. את הידע בגאומטריה וקומבינטוריקה הסטודנטים היו צריכים לזכור ולשחזר כדי להצליח בפרויקט. סטודנטים שהחליטו לחקור פוליומינואים גם עם הכלים שתורת הגרפים מספקת היו צריכים לרכוש ידע זה בלמידה עצמית. הפגישות התקיימו ב-Zoom והוקלטו.

בשיעור המבוא הוסבר לסטודנטים מהם פוליומינואים והסטודנטים התבקשו לפתור חידות הקשורות להם (Ball, 2006), וזאת מפני שפאזלים, חידות ושעשועי מתמטיקה באופן כללי מתאימים כדי לעורר עניין (Klymchuk, 2017). הסטודנטים למדו שבעיית מניית הפוליומינואים היא בעיה פתוחה. בהמשך הוצגה שאלת הפרויקט: "כיצד ניתן לסווג פוליומינואים?". שאלה זו אמורה להניע את הסטודנטים לבצע את הפרויקט. כיוון שלא ניתן לספור פוליומינואים, אולי קיימות אפשרויות לספור, לפחות, קבוצות של פוליומינואים עם תכונות משותפות או דומות?

תוצאות

תחילה נציג כאן חקר מקרה מעניין, שבו התיכוניסט המצטיין שביצע את הפרויקט הצליח לחבר בעבודתו בין תחומים מתמטיים שונים. התלמיד שייך גרפים לפוליומינואים וחקר פוליומינואים עם הכלים שתורת הגרפים והאלגברה הלינארית מספקים. למטרה זו הוא הפך ריבועים לקדקודים וצלעות משותפות לקשתות (ראו איור 2).

איור 2
טטרומינו (פוליומינו המורכב מ-4 משבצות) והגרף המושרה על-ידיו. להבנה טובה יותר של יצירת מטריצת השכנות הוסף מספור לקדקודים.



בהמשך הוא רשם מטריצות שכנות:

$$A_G = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

כאשר $a_{i,j} = 1$ אם יש קשת בין הקדקוד מספר i לבין הקדקוד מספר j , ו-$a_{i,j} = 0$ אם אין קשת.

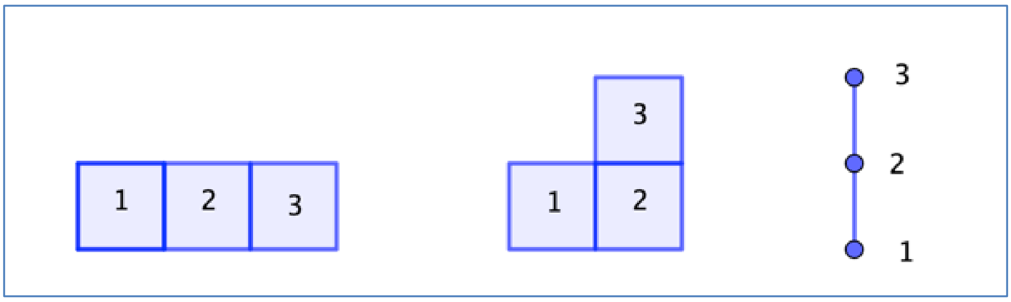
כך, מטריצת השכנות עבור הדוגמה באיור 2 נראית כך (בהתייחסות למספור הקדקודים באיור):

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בהמשך, הוא חישב את הספקטרום של מטריצות השכנות, כלומר את פתרונות המשוואה $det(A_G - \lambda I) = 0$, כאשר I מסמן את מטריצת היחידה (עם אחדות באלכסון ואפסים בשאר המקומות).

במהלך מחקר זה התברר שקיימים פוליומינואים איזו-גרפיים, כלומר פוליומינואים שונים אליהם שייכים גרפים זהים (ראו איור 3). לכן ניתן לסווג פוליומינואים לפי הגרפים שלהם.

איור 3
אותו הגרף (בצד ימין) מתאר שני פוליומינואים שונים.



בהמשך, הסטודנט שייך מטריצה נוספת לגרף, את מטריצת הלפלסיאן:

$$L_G = \mathrm{diag}\,(\deg v_1, \dots, \deg v_n) - A_G$$

כאשר A_G היא מטריצת השכנות של הגרף G (כמו קודם), ו-"deg" מציין את מעלה הקדקודים, כלומר, מספר הקשתות המחוברות לקדקוד. גם עבור הלפלסיאן ניתן לחשב את הספקטרום לפי הנוסחה $det(L_G - \lambda\, I) = 0$. מתברר שקיים קשר בין הספקטרום לבין תכונות גאומטריות של פוליומינואים.

לגבי הסטודנטים שהשתתפו בלמידה מבוססת פרויקטים אודות פוליומינואים במסגרת של סמינריונים אפשר לסכם:

- סטודנטים שמשיגים בדרך כלל תוצאות גבוהות התגלו כבעלי מוטיבציה רבה. כך הם סיווגו פוליומינואים לפי קבוצות הסימטריה שלהם.
- סטודנטים נהנים מלמידה מבוססת פרויקטים, מהעובדה שחוקרים ולומדים באופן עצמי ומכך שאפשר לבחור כיוון, כלומר במה להתעמק.
- חלק גדול מהסטודנטים צריכים הדרכה מהמנחה. הבעיה העיקרית היא שרוב הספרות בנושא "פוליומינואים" היא באנגלית.

תצפית

נדרשות דוגמאות רבות של למידה מבוססת פרויקטים בתחום המתמטיקה כדי לבחון עד כמה דרך למידה זו מגבירה מוטיבציה, גורמת ללמידה עמוקה יותר, משפרת כישורי פתרון בעיות מתמטיות ומשפרת את הזיכרון של תכנים מתמטיים. בנוסף לחקרי מקרה, מתוכנן לחקור את העמדה של פרחי הוראה כלפי למידה מבוססת פרויקטים אודות פוליומינואים: כיצד הם מעריכים למידה זו?

לשנת הלימודים תשפ״ב מתוכנן לבצע את הפרויקט בשלושה קורסים שונים של פתרון בעיות: בקורס אחד משתתפים מורים למתמטיקה שמלמדים בבתי ספר יסודיים או על-יסודיים ושלומדים לתואר השני, בשני הקורסים האחרים משתתפים סטודנטים שלומדים לתואר הראשון – קורס אחד מיועד לשנה ב׳ והקורס השני לשנה ג׳. הקורסים הללו נבחרו כי ״פתרון בעיות מתמטיות״ הוא תחום בו על הסטודנטים לגייס ידע קודם, להיות יצירתיים, ליצור קשרים בין תחומים מתמטיים שונים ולבחון אסטרטגיות פתרון חדשות. הקורסים הללו מתאימים כי ניתן לשאול אם, מבחינת הסטודנטים, למידה מבוססת פרויקטים משפרת את הכישורים של פתרון בעיות. הפרויקט יימשך חודש.

עם סיום הפרויקט יבדקו תוצאות הפרויקט (לפי היקף ונכונות התוכן). לסטודנטיות יועבר שאלון עם השאלות הבאות:

- עד כמה נהנית מהפרויקט (דירוג 1 - 5)?
- האם למדת תכנים חדשים דרך הפרויקט? אם כן, אילו?
- האם התעמקת בנושאים מתמטיים שהכרת קודם? אם כן, רשמי אותם.
- האם את יכולה להמליץ על ״למידה מבוססת פרויקטים״ בבית הספר (לא בהכרח על פוליומינואים)?
- האם נתקלת בקשיים במהלך הפרויקט? אם כן, באילו?

חלק מהסטודנטים יתראיינו.

רשימת מקורות

Ball, D. (2006). Symmetrical polyominoes. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, 196 (May), 48.

Barequet, G., Golomb, S. W., & Klarner, D. A. (2017). Polyominoes. In *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, Third Edition (pp. 359–380). CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781315119601

Efstratia, D. (2014). Experiential education through project based learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences,* 1256-1260.

Jacques, L. A. (2017). What does project-based learning (PBL) look like in the mathematics classroom? *American Journal of Educational Research*, *5*(4), 428–433. https://doi.org/10.12691/education-5-4-11

Klymchuk, S. (2017). Puzzle-based learning in engineering mathematics: students' attitudes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(7), 1106–1119. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1327088

Krajcik, J. S., & Blumenfeld, P. C. (2005). Project-based Learning. In R. K. Sawyer, *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 317-334). Cambridge: Cambridge University Press.

Thomas, J. W. (2000). *A review of research on project-based learning*. San Rafael, CA: Autodesk Foundation, 2000.

אקסל – מעולם ההנדסה אל הכתה - פוסטר

דורון אורנשטיין מדע-גדול-בקטנה

מבוא

"שוב פעם דנים על שימושי אקסל בכתה?" תגובה זו תקבלו כנראה מהרבה מורים, כשתציגו להם את הנושא. אכן, הרבה מילים נאמרו, ושלל מאמרים וספרים כבר נכתבו על יתרונותיו של הכלי שפותח לפני 34 שנה, ולמרות זאת, לא נעשה בו שימוש פורמלי בהוראה כיתתית. ברבות השנים שולבו בהוראה אפליקציות שונות, למשל גאוגברה, ודסמוס, וישומוני-רשת, המאפשרות להזין נתונים ולהציג גרפים בקלות ובנוחות. האפליקציות הללו דחקו את השימוש באקסל ככלי להצגת פונקציות ולציור גרפים.

אולם לאקסל ולכלים דומים לו יש יתרונות רבים: אנשים רבים, כולל מהנדסים, חוקרים ואנשי עסקים משתמשים בו בעבודתם, וניתן לעשות בו שימוש מאוד מתוחכם, כולל באלמנטים של תוכנה. במחקר שנעשה בטכניון (Doron. O, 2010), בו המרנו בעיות שמהנדסי הייטק סיפקו לנו לבעיות המתאימות ללימודי מתמטיקה, נמצא שחלקן הגדול נגזר ממודלים באקסל שפותחו על ידי המהנדסים. מכאן צץ הרעיון: אולי כדאי להרחיב את היריעה ולהציג לתלמידים בעיות מתמטית שנלקחו מהתעשייה גם דרך מידול מתמטי באמצעות פיתוח משוואות באקסל, ולעיתים אף לאפשר להם פיתוח עצמאי בכלי זה. השימוש באקסל יאפשר לחקור מספר פתרונות ולעיתים אף לפתור בעיות הרחבה שלא תמיד ניתן לפתור בדרך אלגברית. תהליך זה יאפשר לתלמידים להכיר את יכולות הכלי החשוב שישמש אותם בתחומים רבים בחיים, יקרב אותם לשיטות העבודה הנהוגות בעולם ההנדסי, ואולי גם ישפר את העניין והמוטיבציה שלהם ללימודי מדע והנדסה.

אחד הזיכרונות שלי מהראיונות הוא הערה של מהנדס בכיר שטען שלעיתים הוא היה יכול להיעזר גם בתלמידי תיכון שמכירים טוב אקסל, לצורך חקירת מודלים פשוטים שהוא בנה!. האם זה באמת מעשי?

בשנים האחרונות הצטרפו להוראת המתמטיקה מורים שעשו כברת דרך בהייטק, והם השתמשו ולעיתים אף אהבו את השימוש באקסל. אליהם הצטרפו גם מהנדסים המשמשים כתומכי הוראה בהתנדבות. המהנדסים הללו משלבים שימוש באקסל בהוראה כיתתית לצורך הדגמות. אנו מבקשים לנסות לברר, האם כדאי ואם כן כיצד ניתן לשלב את השימוש באקסל בהוראה כיתתית, להדגמה ולעיתים אפילו לתת לתלמידים לפתח מודלים בעצמם, תוך שימוש בבעיות אותנטיות מעולם ההייטק, כמו אלו שמצאנו במחקר הקודם. לקבלת משוב מקהילת החוקרים, נציג בפוסטר כמה דוגמאות לשימושיות של אקסל.

רקע

לצורך הדיון, נבדיל בין שלושה סוגי שימושים באקסל: (1) - הצגה: אקסל משמש להצגת נתונים מספריים (טבלאות, גרפים) וביצוע ניתוחים סטטיסטים בסיסיים. (2) - כלי מידול: אקסל משמש לבניית מודלים מתמטיים באמצעות בניית משוואות, למשל לחישוב איברי סידרה, ולמציאת שורשי פולינום באמצעות חישובים מקורבים. (3) - כלי תכנות: אקסל יכול לשמש ככלי תוכנה פשוט באמצעות התוספים שלו (VBA). השימוש המעניין אותנו לצורך המחקר העוסק בהוראה כיתתית הוא מידול (2), ולעיתים גם שילוב בין הצגה (1) ומידול (2), עבור דוגמאות בהן רוב התחכום הוא במידול, ולא בניתוח כמות גדולה של נתונים.

שימושי אקסל בהנדסה: הרבה מחקרים וספרים נכתבו ברבות השנים על שימושי אקסל בהנדסה, כמו גם במחקר ובעסקים. במחקרים שנעשו על שימושי מתמטיקה בהנדסה, למשל (van der Wal, Bakker, & Drijvers, 2017) נמצא שמהנדסים בימינו משתמשים בדרך כלל במדידות ובכלי תכנה

מורכבים, והשימוש שלהם במתמטיקה נעשה בעקיפין באמצעות אקסל או כלים דומים המשמשים להצגה, לוידוי ולניתוח התוצאות, כלומר, שילוב בין הצגה (1) למידול (2). מאמרים אחרים מביאים דוגמאות למצבים בהם המהנדסים מתחילים לפתור בעיה חדשה, ובשלב ראשון הם מבצעים מידול מתמטי ברמה בסיסית, ומשתמשים לשם כך בכלים פשוטים כמו אקסל.

שימושי אקסל בהוראת מתמטיקה: הרבה מאמרים וספרים נכתבו על שימוש אקסל בהוראת מתמטיקה (למשל: *Marley-Payne, 2019*) ומורים רבים פיתחו ושיתפו ברבות השנים שלל פעילויות באקסל, שחלקן נשמר ברשת (ראו אוסף במרכז הארצי למורים במתמטיקה בחינוך העל-יסודי). בסקירת המאמרים מצאתי שרובם מתארים פעילויות שהמורה פיתח בעצמו לצורך הדגמת החומר הנלמד כמו גם להעשרה, וחלקן פעילויות שהמורה פיתח והתלמידים השתמשו בהן בצורה מוגבלת, למשל באמצעות שינוי מספרים בתאים. מעט מאמרים דנים בפיתוח עצמאי של מודלים באקסל על ידי התלמידים.

בשנים האחרונות נעשו ניסיונות לחשוף תלמידים לבעיות מהעולם האמתי ולתת להם לפתור אותם בדרך מתמטית דרך מתודולוגיית "מידול-מתמטי". במאמרים על הפעילויות הללו, שחורגות מלמידה פורמלית, יש דוגמאות בהן התלמידים עשו שימוש עצמאי באקסל, אולם השימוש בכלי נעשה לרוב לצורך הצגה וניתוח של מידע (למשל: גידול אוכלוסייה), ופחות לשם פיתוח מודלים מתמטיים המתאימים להוראה. דוגמה יפה של הצלחה במידול תוך שימוש באקסל, הייתה בעיית קביעת מיקום ממטרות, שתלמידים פתרו בעצמם (Kaiser & Schwarz, 2010).

אכן, נראה שקיים פער בין עבודת המהנדסים שפותרים הרבה בעיות באמצעות אקסל, לבין תלמידים שכלל לא מכירים את הכלי. כדי לגשר על הפער, נרצה לחקור את האפשרות להביא להוראה בעיות מעולם ההנדסה, להדגים כיצד פותרים בעיות כאלו גם באקסל, ולתת לתלמידים להשתמש בעצמם בכלי זה לפתרון בעיות מגוונות

השאלה שהתענינו בה: באלו תחומים הנדסיים ניתן למצוא מבחר בעיות מעולם העבודה של מהנדסים הניתנות להמרה לבעיות המתאימות להוראה מתמטיקה בתיכון ובחטיבת הביניים, ושניתן להשתמש בהן גם לבניית מודלים באקסל הדומים למודלים המשמשים מהנדסים, ומה רמת הידע בכלי הנדרשת מהמורים והתלמידים לשם כך?

בדיקות ראשוניות

לצורך בחינה ראשונית, בחנתי את מאגר הבעיות שנמצאו במחקר הקודם (Doron. O, 2020) ואת סיכומי הראיונות שנעשו במהלכו, כדי לבחון את האפשרות להשתמש באקסל בצורה מעניינת ופשוטה כאשר משתמשים בכל אחת מהבעיות הללו בהוראה כיתתית. במחקר הקודם מצאנו באמצעות ראיונות עם 31 מהנדסים וחוקרים מאגר של מעל 200 בעיות אותנטיות מעולם ההנדסה הקשורות למתמטיקה, ומתוכן בחרנו 169 בעיות שכדאי לדעת מורות שהשתתפו במחקר לשלבן בהוראת מתמטיקה, וקטלגנו אותן ל-9 תחומים הנדסיים. במחקר זה הערכנו את היכולת לשלב את הבעיות הללו בהוראה כיתתית בשילוב עם אקסל. לצורך זה בדקתי גם מה רמת הידע באקסל הנדרשת עבור כל בעיה ,וחילקתי לשתי קטגוריות (1) ידע בסיסי הכולל כתיבת משוואות וגרירתן, שימוש בגרפים, ובפונקציות בסיסיות כמו ממוצע, וכן גם בפונקציית Solver (2) ידע מתקדם באקסל הכולל שימוש בסדרות רקורסיביות (נוסחאות נסיגה) לצורך סימולציה ושימוש במחולל מספרים אקראיים.

איור 1

כדי להמחיש את ההבדלים בין שתי הקטגוריות נשתמש בבעיה ידועה שהצגנו למורים ותלמידים. הבעיה עוסקת בשאלה: "כיצד ניתן למנוע תקיעת סרטון יוטיוב שנטען מהרשת באמצע הנגינה?". הצגת הסרטון על המסך חייבת להיות בקצב קבוע (למשל, 24 תמונות בשנייה). אם קצב הטעינה קטן מקצב התצוגה, הסרטון לבסוף יתקע. פתרון אפשרי הוא לשים השהייה מתאימה בין תחילת טעינת הסרטון לזיכרון המחשב לבין תחילת ההצגה שלו על המסך. אפשר להשתמש כאן באנלוגיה למכונית שנוסעת קדימה בקצב קבוע ומכונית שמתחילה באיחור לנסוע אחריה, ואסור ששניהן יתנגשו בפרק זמן נתון (איור 1). ניתן לפתור את הבעיה כמו

בעיית דרכים, אולם הבעיה כפי שהוצגה בפני לראשונה על ידי מהנדסי תקשורת, מורכבת יותר: למשל אסור שהשהייה תהייה ארוכה מידי, כי אז תהייה גלישת זיכרון. לפיכך, המידול באקסל נעשה עשיר יותר בפרטים וכולל מספר משוואות, ופרמטרים הניתנים לשינוי (למשל גודל הזיכרון, אורך הסרט, זמן השהייה, קצבי הטעינה וההצגה). אקסל מאפשר לחקור, לצייר גרפים כתלות בפרמטרים, ולעיתים אפילו למצוא פתרונות בצורה אוטומטית על ידי פונקציית SOLVER. חקירה כזאת המצריכה ידע בסיסי בשימוש באקסל, הופכת את הבעיה לבעיית חקר מעניינת.

אולם לעיתים המידול נהייה מורכב מידי ולא אינטואיטיבי. קיימת דרך אחרת שאותה קטלגנו כ"ידע מתקדם", והיא לעשות סימולציה באמצעות אקסל באמצעות סידרה רקורסיבית: הרעיון הוא לבנות שורה באקסל המכילה שתי משוואות, המייצגות את מצב הטעינה ומצב הצגה של הסרט בזמן מסוים, בתלות במצבן בזמן הקודם (=שורה קודמת באקסל). ו"לגרור" את השורה באקסל, כדי לקבל סידרת מספרים המראה את השינוי בזמן. בכך יצרנו מודל סימולציה פשוט. בנוסף, אם קצב הטעינה לא קבוע, ניתן למדל זאת באמצעות מחולל ערכים אקראיים באקסל. היכולות המתקדמות הללו, שימוש בסדרה רקורסיבית ובמספרים אקראיים, הם נושאים הנלמדים רק בכתות גבוהות בתיכון, לכן החשבתי אותם כנושאים מתקדמים באקסל.

תוצאות בדיקה ראשונית

טבלה-1 מסכמת את הניתוח שנעשה. עבור כל תחום הנדסי, הציון משקף כמה להערכתי, הבעיות בתחום ניתנות להדגמה באקסל בסיסי, וכמה מצריכות שימוש בתכונות המתקדמות

טבלה 1

שימושיות אקסל בבעיות ההנדסיות שהוסבו להוראה

תחום הנדסי	התאמה להוראה כיתתית (תוצאה מהמחקר הקודם)	שימושיות מידול באמצעות אקסל בסיסי, ציון (1-4)	שימושים מתקדמים: סימולציות, ומספרים אקראיים. ציון (1-4)
מדידות	טוב-מאוד	3	4
רכיבים ומחשבים	טוב-מאוד	4	4
גרפיקה	טוב-מאוד	2-3	3
עיבוד אותות	בינוני	3	4
תקשורת דיגיטלית	טוב	3	4
בעיות כלליות	טוב	3	3
למידת מכונה	בינוני	3-4	4
מכונות ורובוטים	בינוני	2-3	3
חישובים נומריים	נמוך-בינוני	3	4

כמה תובנות מהאנליזה שנעשתה: (1) הבעיות בתחום " רכיבים ומחשבים" שנחשב לתחום מתאים מאוד להנגשה להוראה, ניתנות למידול גם באמצעות אקסל בסיסי. (2) לעומת זאת, שימוש באקסל בתחום הגרפיקה נמצא פחות מוצלח, שכן כלים אחרים (למשל: גאוגברה ואפליקציות רשת) מדגימות בעיות גרפיקה (למשל צביעת תמונות, אנימציה בתנועה) בצורה טובה יותר. (3) שני תחומים הנדסיים שנראו במחקר הקודם קשים להנגשה, "חישובים נומריים", ו"למידת מכונה", נראים יותר מעניינים כשמשלבים אותם עם הדגמות של מידול מתקדם באקסל. (4) גם בעיות בתחום עיבוד אותות ותקשורת דיגיטלית מצריכים שימוש בתכונות מתקדמות באקסל, בעיקר שימוש בסדרות רקורסיביות.

סיכום

לסיכום הבחינה הראשונית, נראה ששילוב אקסל תוך שימוש בתכונות מתקדמות, יכול להיות מוצלח עבור רוב הבעיות שנחקרו. אולם, לשם כך צריך לפתח הדרכה מתאימה באקסל, ולהסביר לתלמידים את השימוש במספרים אקראיים ומשוואות רקורסיביות, עוד לפני הלימוד הפורמלי שלהם בתיכון

בדיון עם המהנדסים עלתה נקודה מעניינת: השימוש באקסל יכול לסייע גם בכניסה לעולם התוכנה . בימינו מתקיימים דיונים רבים על החשיבות של לימודי תוכנה בגיל צעיר, ונעשים ניסיונות לפתוח כלים ייעודיים לשם כך. פיתוח תכנים באקסל יכול לשמש כהכנה טובה ללימוד תוכנה, כיוון שעקרונות רבים של תוכנה חבויים בכלי זה. זהו נושא אפשרי למחקרים עתידיים.

בפוסטר נציג מספר דוגמאות מעיינות לשימושיות של כלי זה.

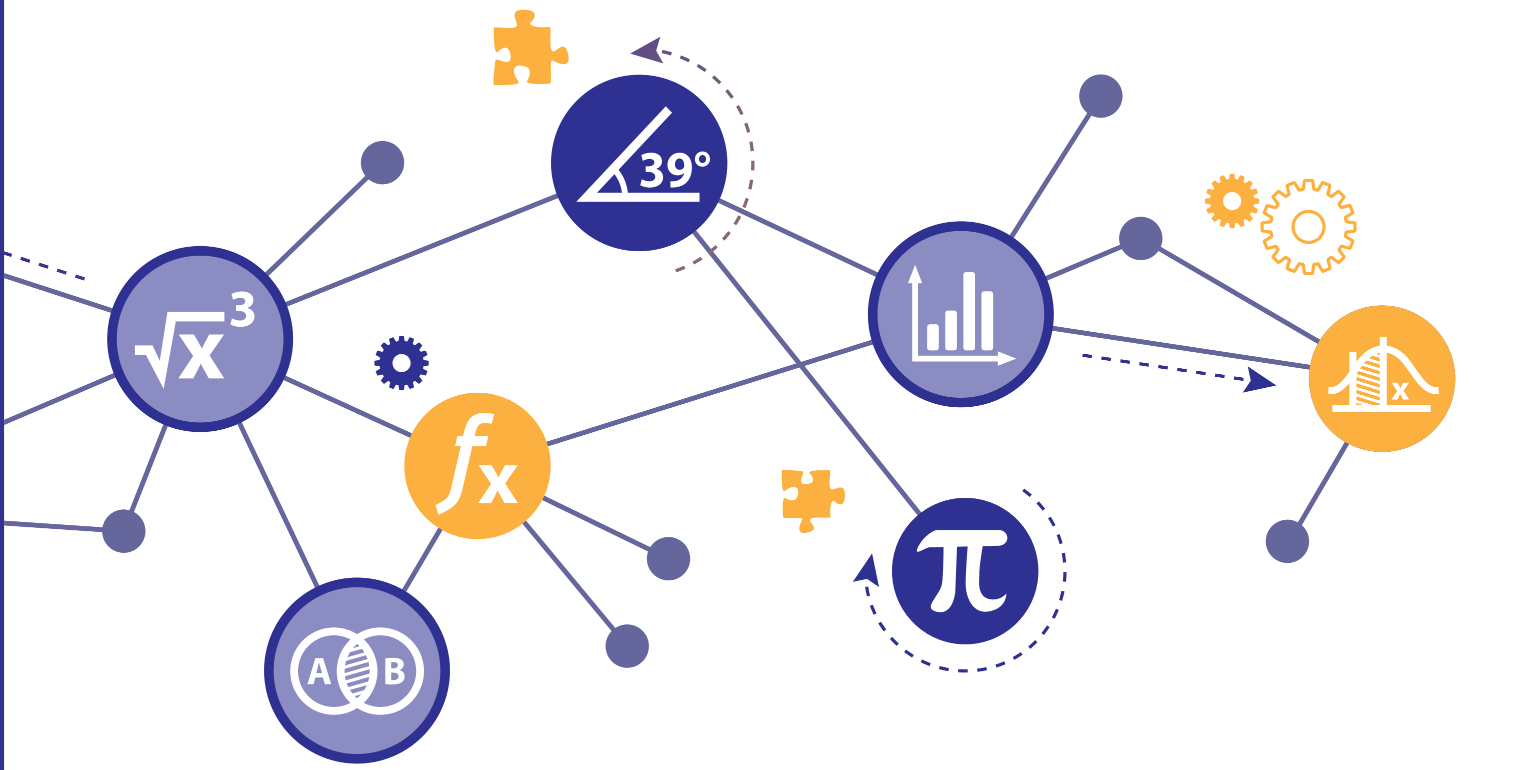
רשימת מקורות

Marley-Payne, J., Dituri, P., & Davidson, A. (2019). Spreadsheets as an Effective Use of Technology in Mathematics Education. Spreadsheets in Education, 10138.

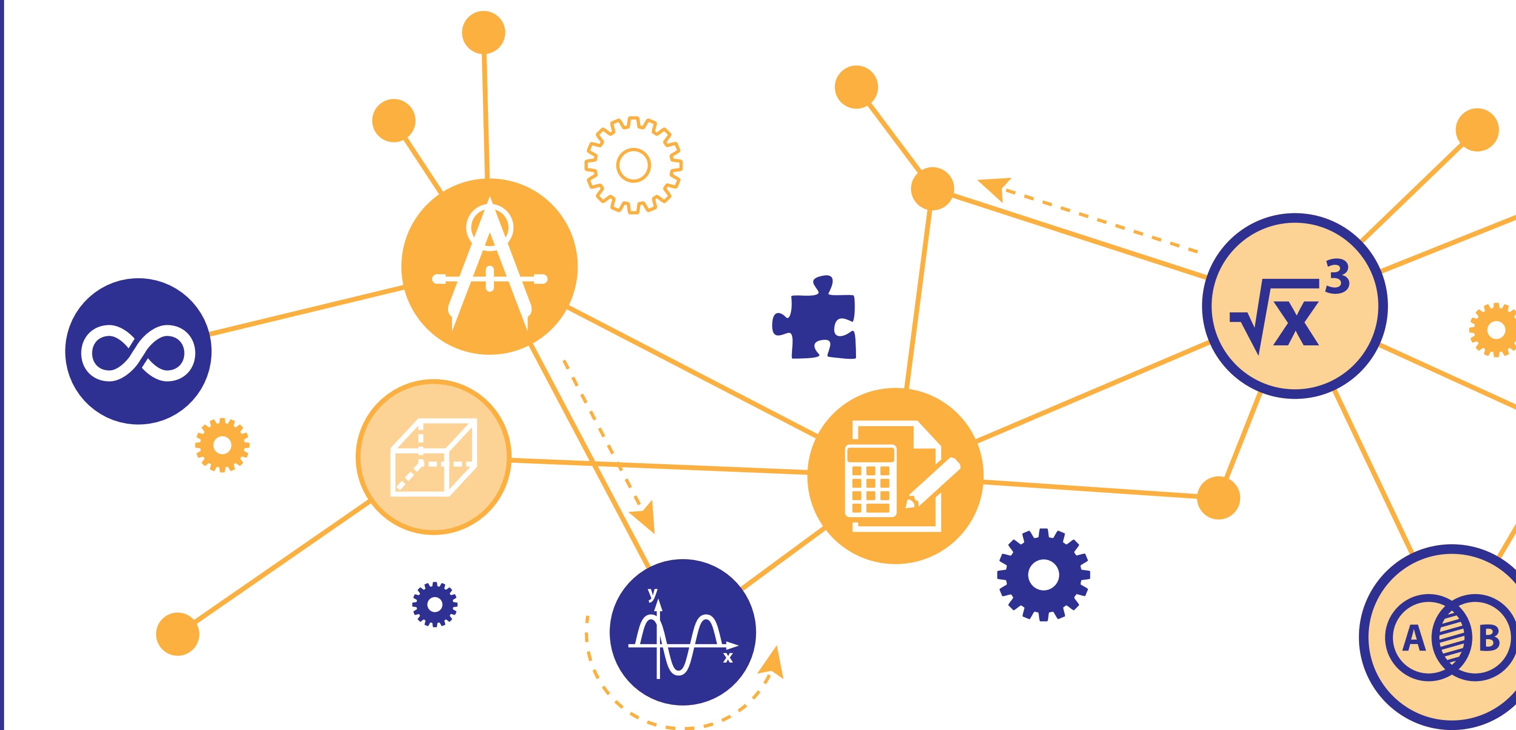
Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education—examples and experiences. Journal Für Mathematik-Didaktik, 31(1), 51–76.

Van der Wal, N. J., Bakker, A., & Drijvers, P. (2017). Which techno-mathematical literacies are essential for future engineers? International Journal of Science and Mathematics Education, 15(1), 87–104.

Doron, O. 2020 https://bit.ly/3oLLK0R



סמינר חוקרים צעירים



שקט, כאן מציגים! חוקרים צעירים מציגים בכנסים

לירון שוורץ אביעד, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
גיל שורץ, מכון ויצמן למדע
מרב וינגרדן, University of New Hampshire
בועז זילברמן, המרכז לטכנולוגיה חינוכית

מבוא

בשנים האחרונות מתגבשת קהילת חוקרים צעירים בתחום החינוך המתמטי בארץ – YIRME (Young Israeli Researchers in Mathematics Education). חוקרות וחוקרים המשתייכים לקהילה זו נמצאים במגוון שלבים בקריירה המחקרית, בספקטרום הנע מלימודים לתואר שני, דרך השלבים השונים הכרוכים בכתיבת עבודת דוקטורט ועד להשתלמויות בתר־דוקטורט, בארץ ובחו"ל. חוקרים אלו מנסים לסלול, כל אחד בדרכו הוא, את דרכם המחקרית בתוך העולם האקדמי הגדול והמורכב. דרך זו רצופה באתגרים רבים, בדילמות ובהתמודדויות המשותפות לרבים מהם (Boaler, Ball, & Even, 2003). כדי לתת מענה לאתגרים אלו, הוקמה קהילת YIRME המתכנסת פעמיים בשנה, בסמוך למועדי כנסים לאומיים ובינלאומיים בחינוך המתמטי (כנס ירושלים וכנס ה-Psychology of Mathematics Education (PME)). מפגשי הקהילה נסובים סביב נושאים ייעודיים שנבחרים מראש על ידי הצוות המוביל של הקהילה תוך שיתוף והקשבה לצרכים העולים מהשטח. כמו כן, הקהילה מקיימת שיח וירטואלי שוטף לאורך השנה בקבוצת הווטסאפ. במסגרת זו חברי הקהילה דנים, מתכתבים, יוצרים שיתופי פעולה, נעזרים אחד בשני ומשתפים בקשייהם, הצלחותיהם, תובנותיהם וחוויותיהם, בדומה לפורומים וירטואליים אחרים (Zion, 2008).

ביולי 2021, למשל, לקראת כנס PME44, חלק ניכר מהשיח השוטף של הקהילה התמקד במתכונתו הוירטואלית של הכנס. החוקרים שמאמריהם התקבלו לכנס התבקשו לשלוח מראש הקלטות של הצגותיהם, שישודרו במהלך הכנס עצמו. חברי קהילת YIRME שוחחו והתייעצו לגבי האתגרים הכרוכים בהכנה לכנס, כגון: אופן הכנת המצגת, היבטים טכניים הקשורים להקלטה מיטבית של המצגת, היבטים מנהליים הקשורים להרשמה לכנס ולהעלאת ההקלטה למערכת, דרכים יעילות להצגה בכנס, ועוד. אחד הנושאים לדיון שעלה פעמים רבות הוא הקושי הגלום בכתיבה, הצגה, ושיחה באנגלית. חלק מהמשתתפים העלו תחושת חוסר ביטחון בדיבור שוטף בשפה האנגלית וחוסר ביטחון בהצגת המחקר שלהם בשפה זרה. פתילי דיון רבים בקבוצת הווטסאפ עסקו בסוגיות הקשורות לתרגום ולדיבור – הן בנוגע למושגים מדעיים בחינוך המתמטי והן בביטויים בשפה דבורה (סלנג).

במסגרת הסדנה המוצעת לחברי קהילת ה- YIRME נעסוק בסוגיות העוסקות בהכנה לכנסים – ובפרט לכנסים בינלאומיים. הסדנה תכלול שני מושבים. במושב הראשון פרופ' מיכל טבח מאוניברסיטת תל-אביב תספר כיצד לצלוח כנס בינלאומי בהצלחה – החל משלב כתיבת ההצעה אל שלב ההצגה, ובמושב השני יתקיים דיון בין חברי הקהילה על אתגרי השפה והכתיבה באנגלית.

על מנת לאפשר לכל חברי וחברות הקהילה להשתתף בסדנה, מבלי שיצטרכו להיעדר משאר המושבים בכנס, היא תתקיים באופן מקוון. אנו מקווים כי סדנה זו תועיל ותהווה סביבה תומכת ובטוחה עבור הקהילה.

מושב ראשון: הצגה בכנס – כל אחד יכול! החל מכתיבת ההצעה אל ההצגה

במושב זה תשתף פרופ' מיכל טבח מאוניברסיטת ת"א בתחנות השונות שחוקרות וחוקרים עוברים בדרכם להציג בכנס: החל מכתיבת ההצעה, דרך בניית המצגת וההרצאה ועד להצגה בכנס. פרופ' טבח תשתף בטיפים רלוונטים ושימושיים לגבי כתיבת הצעה איכותית העומדת בסטנדטים הדרושים, בניית מצגת ממוקדת ומאורגנת לכנס, ארגון חלוקת זמנים בהרצאה, הכנה לכנס והצגה מוצלחת.

משך המושב: 30 דקות, כולל דיון פתוח בו המשתתפים יוזמנו להשתתף ולשאול שאלות.

מושב שני: Let's talk about it – אתגרי הכתיבה והדיבור באנגלית

במושב השני, יתקיים דיון פתוח אודות אתגרי הכתיבה והדיבור באנגלית וכיצד אפשר להתגבר על אתגרים אלו.

המושב יתבצע בדיון בקבוצות עבודה בחדרים ובמליאה. בכל חדר 2-3 חוקרים ישתפו מניסיונם האישי את אתגרי השפה שלהם וכיצד הם מתמודדים באופן מעשי עם אתגרי הכתיבה באנגלית (למשל במהלך כתיבת מאמר, פוסטר, עבודת מחקר או אימייל), והדיבור בשפה האנגלית (למשל בשיחה עם חוקרת מחו"ל או בהצגה בכנס בינלאומי). הדיון באתגרים אלו והשיח הפתוח שאנו מקווים ליצור בקבוצות אלו יעזרו לחוקרים צעירים הן בקבלת טיפים מעשיים להתמודדות עם אתגרים אלו והן בהפגת תחושת הבדידות האקדמית. לאחר מכן יתקיים דיון בחדר אודות הנושאים הבאים:

- כיצד ניגשים לכתוב מאמר באנגלית? האם כדאי להתחיל בעברית ואז לתרגם? האם כדאי להתחיל "לחשוב" באנגלית כבר מהשלבים הראשונים?
- האם ומתי כדאי להשתמש בעורך לשוני? אילו סוגי עריכה לשונית קיימים?
- אילו כלים נוספים יכולים לסייע בתהליך (למשל, תוכנות להגהה אוטומטית) ומה היתרונות והחסרונות שגלומים בהם?

לבסוף, נחזור למליאה, נשתף בתובנות ובטיפים השונים שהוצגו בחדרים ונעמיק את הדיון בנושאים אלו.

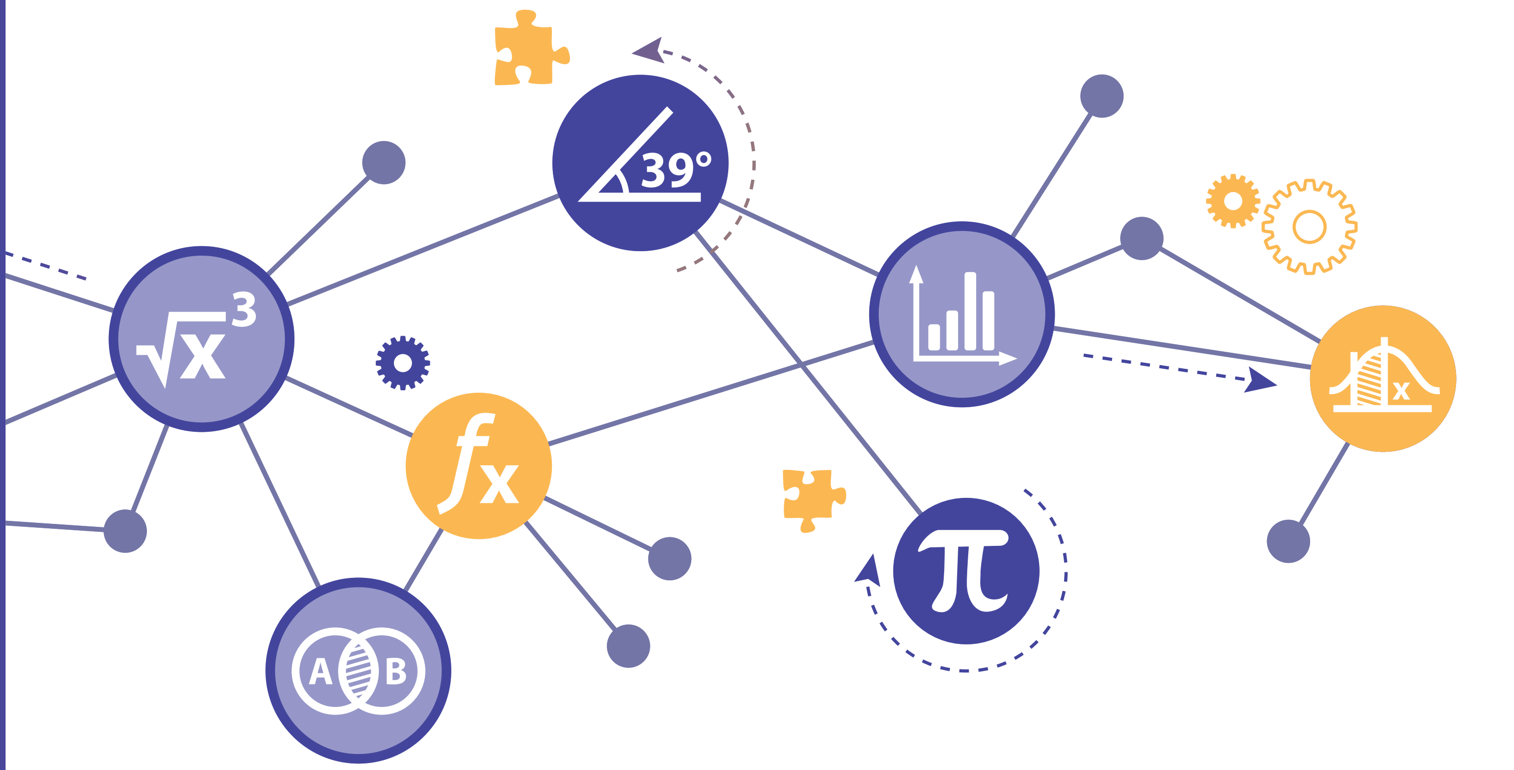
נסכם את הסדנה עם התובנות העיקריות ונקיים חשיבה משותפת סביב עתידה של הקהילה, המשך פעילותה וכיוונים לפעילויות המשך.

משך המושב: 60 דקות (30 דקות לעבודה בחדרים, 30 דקות לדיון וסיכום במליאה).

רשימת מקורות

Boaler, J., Ball, D. L., & Even, R. (2003). Preparing Mathematics Education Researchers for Disciplined Inquiry: Learning from, in, and for Practice. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), Second International Handbook of Mathematics Education (Springer, pp. 489–519). https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_17

Zion, M. (2008). Online Forums as a Rescue Net in an Open Inquiry Process. *International Journal of science and mathematics education, 6(2), 351-375.*



אינדקס

אינדקס

שם המרצה	פרטי התקשרות
אורן סמדר	smadaroren18@gmail.com
אורנשטיין דורון	doron.orenstein@gmail.com
אלוש קארין	karinal@cet.ac.il
אליאס דפנה	dafna.elias@gmail.com
באור רינת	rinatbaor@gmail.com
ביטון יניב	yanivb@cet.ac.il
בלין חיים	chaim@fullproof.io
בסן צינצינטוס רונית	ronit.bassan@smkb.ac.il
בריגר בועז	boaz.bryger@gmail.com
ברקאי רותי	ruthi11@netvision.net.il
גרה בדראן יסמין	yasmin.ghb@gmail.com
גור מרים	myriam.goor@alumni.weizmann.ac.il
דרייפוס טומי	TommyD@tauex.tau.ac.il
הד -מצויינים עינת	einat.metz@gmail.com
וולך מרים	miriamw@campus.technion.ac.il
וידר מירלה	mirelaw@walla.co.il
וייסמן שולה	shulawe@gmail.com
וינגרדן מירב	merav.weingarden@gmail.com
זקס רחל	rochiezaks@gmail.com
ח'לאילה כאותר	kawtharnakhash@gmail.com
טל כרמית	carmitt@cet.ac.il
כהן זהבית	zehavitk@technion.ac.il
מאירוביץ הילה	hila.mayerowicz@gmail.com
מרקו נדב	nadav.marco@mail.huji.ac.il
נח-סלע ליה	lianoahsella@gmail.com
ניצן אורטל	ortalt83@gmail.com
נעמן קני	kenyn1@gmail.com
סבאח סורינה	sorynas86@gmail.com
סגל רותי	rutisegal@gmail.com
סגרה סבינה	sabine.segre@live.achva.ac.il
סמאהר נעמה	Samaher.yassin@gmail.com
סנדיוק-כחלון סתיו	stavkach1@gmail.com

שם המרצה	פרטי התקשרות
עאבד אמירה	amira.m.abed@gmail.com
עואודה שחברי ג'והיינה	juhaina8@gmail.com
עובדיה תקוה	tikva_o@oranim.ac.il
ענאבוסי אחלאם	ahlamanabosy@gmail.com
פינטו אלון	alon.pinto@weizmann.ac.il
פלאח גילת	gilatf@gmail.com
פלטניק אליק	alik.palatnik@mail.huji.ac.il
קופר ג'ייסון	jason.cooper@weizmann.ac.il
קורופטוב אנטולי	anatoliko@gmail.com
שוורץ גיל	schwartz.gil@gmail.com
שוורץ - אביעד לירון	lirlir.sch@gmail.com
שחבארי ג'והיינה	juhaina8@gmail.com
שרייבר איריס	irisifi5@gmail.com
שריקי עטרה	atarashriki@gmail.com
תירוש דינה	dina@tauex.tau.ac.il
תנעמי יחיאל	tanamiy@gmail.com