Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

7 JCRME

כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי

כנס ירושלים השביעי
למחקר בחינוך מתמטי

ספר מאמרי הכנס

עורכים: **עינת הד-מצויינים, אלון פינטו, נעמה עדין**

תוכן העניינים

שולחנות עגולים

מייצגים

דבר יו"ר הכנס

יו"ר הכנס: ד"ר עינת הד-מצויינים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, ד"ר אלון פינטו, מכון ויצמן למדע

◆◆◆

שלום לחברי קהיליית החינוך המתמטי,

שוב אנו נפגשים במכון לב בירושלים, זו השנה השביעית, ליומיים מרתקים של שיתוף במחקר, במחשבות וברעיונות. בשנה שעברה, לאחר שהכנס התקיים מדי שנה במשך שש שנים רצופות היו שהתלבטו אם לא עדיף לקיימו אחת לשנתיים. התעורר חשש שמאגר המאמרים, המחקרים והאנרגיה ייבש אם נשאב מן הבאר אחת לשנה. אך הפלא ופלא - לא זו בלבד שהשנה לא התמעטו ההגשות, אלא שמספרן כמעט הוכפל. להלן הנתונים:

כ-69 הצעות הוגשו לכנס, מתוכן 56 הצעות לדיווחי מחקר, שעליהן חתומים כ-97 חוקרים מ-26 מוסדות אקדמיים שונים מרחבי הארץ. כל ההצעות עברו תהליך שיפוט עיוור על ידי שני שופטים, נוסף על השיפוט על ידי ועדת הכנס. 68 חברי קהילה נרתמו לשיפוט ההצעות.

במסגרת הכנס השנה יתקיימו 64 הצגות: 37 הצגות במתכונת של דיווח על ממצאי מחקר, 11 הצגות במסגרת שולחן עגול, 8 מיצגים, 4 הרצאות מליאה, 2 קבוצות דיון ו-2 סימפוזיונים.

הרצאות המליאה יתרכזו בסוגיות מרכזיות ורוחביות במחקר בחינוך מתמטי. בהרצאת הפתיחה, ד"ר רוני קרסנטי ממכון ויצמן למדע תבחן את התהליכים והאתגרים הטמונים בהרחבה (upscale) של תכניות קידום מקצועי למורים. פרופ' שירי ארטשטיין מאוניברסיטת תל אביב תפתח צוהר לתחום המחקר שלה - גיאומטריה קמורה בממד גבוה - תוך כדי רפלקציה על האתגרים הטמונים בהנגשת המתמטיקה, ובפרט המחקר המתמטי, לנשים. פרופ' עטרה שריקי מאורנים - המכללה האקדמית לחינוך תדון בהזדמנויות ובאתגרים שמציג שילוב תחומי המדעים והאומנויות עם הוראת המתמטיקה. ולקינוח, פרופ' מיכל טבח מאוניברסיטת תל אביב תבחן סוגיות מרכזיות בהכשרת מורים לשילוב מושכל של טכנולוגיה בהוראה, ותציג תובנות מהמחקר בתחום בארץ ובעולם.

במושבי דיווח המחקר יוצגו מחקרים כמותניים ואיכותניים מהשורה הראשונה, במגוון היבטים של ההוראה והלמידה של המתמטיקה: הכשרת פרחי הוראה, התפתחות מקצועית בבתי הספר ובגנים, גישות הוראה ותהליכי למידה של תכנים מתמטיים ומטא-מתמטיים שונים, מהגיל הרך ועד האוניברסיטה, עיצוב משאבים להוראה וסביבות למידה, פיתוח ובחינה של תכניות לימוד, שילוב כלים טכנולוגיים בהוראה, הערכה מעצבת, עיצוב והתפתחות הזהות המתמטית, יצירת קשרים בין מתמטיקה למדעים ולאומנות, הנגשת המתמטיקה והמחקר המתמטי, ועוד. ההרצאות במסגרת דיווח מחקר נועדו להציג ממצאי מחקר מגובשים. לכל דיווח מחקר ייוחדו 20 דקות להצגה ועוד 10 דקות לשאלות ולדיון ממוקד. את הדיונים הפתוחים ואת ההתעמקות בסוגיות רוחב בחינוך המתמטי נשמור למושבי קבוצות הדיון והסימפוזיונים, שם יוכלו באי הכנס לבחור בין בחינת הקשרים בין מתמטיקה, אומנות ותרבות דרך צלילה לתוך סדרות פיבונצ'י, בין הרהורים וערעורים על המחקר בחינוך מתמטי בישראל ובין דיון מעמיק בטקסט המתמטי כבסיס לשיח עמיתים, ובמקומן של בניות עזר בלמידה ובהוראה של הגאומטריה. מסגרת נוספת של הצגה - השולחן העגול - מתקיימת זו השנה השנייה, והפעם בהיקף נרחב יותר מבשנה שעברה. השולחנות העגולים נועדו להניע דיון ושיח על מחקרים בהתהוות, תוך התמקדות בסוגיות מחקריות. במסגרת זו, לכל אחד מן המציגים יינתנו 10 דקות להצגת המחקר והשאלות שבהן ירצו לדון. לאחר מכן, המליאה תתחלק לקבוצות - קבוצה לכל הצגה - על מנת לדון במשך 20 דקות בדרכים לפיתוח ולביסוס של המחקר. בסיכום המושב, נציג מכל קבוצה ידווח למליאה על תובנות שעלו במהלך הדיונים.

מסגרת המיצגים עשירה במיוחד השנה, וכוללת הן דיווח על מחקרים בהתהוות, הן תצוגה של מחקרים בעלי ממד ויזואלי מהותי והן הצגה של פרויקטים חינוכיים חדשניים בתחום הוראת המתמטיקה.

אנו סמוכים ובטוחים שכל אחד מבאי הכנס ימצא במגוון הנושאים הרחב המוצג בו את הנושאים הקרובים לליבו, ואולי אף עניין חדש או מחודש בנושאים קרובים פחות. בספר שלפניכם תוכלו למצוא תקצירים של כל אחת מההצגות שיתקיימו במסגרת הכנס.

ולסיום, התודות:

- תודה מקרב לב למרכז האקדמי לב על האירוח החם מיום היווסדו של הכנס, ובייחוד לפרופ' נח דנא-פיקארד, לפרופ' קנת הוכברג, ליעקב קולקטר ולדניאל ליטמנוביץ.תודה למוסדות אשר תמכו בכנס וסייעו להוציאו לפועל:
- סמינר הקיבוצים - המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאומנויות
- מט"ח - המרכז לטכנולוגיה חינוכית
- הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
- אוניברסיטת תל אביב
- מכון ויצמן למדע
- אוניברסיטת בר-אילן
- שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

אנו רוצים להודות לכל מי ששפט את ההצעות שהוגשו לכנס, למציגים בכנס, ולכולכם על ההשתתפות בו. תודה ענקית לנעמה עדין, המארגנת בהתנדבות ובמסירות את הכנס זו השנה השישית, ודואגת לכל פרט ופרט, מגדול ועד קטן. רבים ממשתתפי הכנס נעזרו בנעמה, אך רק מעטים מודעים להיקף המלא של תרומתה. לא נגזים אם נאמר שאלמלא נעמה לא היה הכנס מתקיים.
וכמובן, תודה מקרב לב לכל חברי ועדת התכנית - שרה, ברכה, רונית ורותי - שעשו לילות כימים עבור הצלחת הכנס.
אנו מאחלים לכולנו מפגש חווייתי, מהנה ומשכיל עם מחקר החינוך המתמטי.

בברכה,
אלון פינטו ועינת הד-מצויינים, יו"ר הכנס

חברי ועדת התכנית (לפי סדר הא"ב)

ד"ר רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים, המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאמנויות
פרופ' שרה הרשקוביץ, מט"ח – המרכז לטכנולוגיה חינוכית, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ד"ר רותי סגל, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
פרופ' ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר-אילן

חברי הוועדה המארגנת (לפי סדר הא"ב)

פרופ' נח דנא-פיקראד, המרכז האקדמי לב
פרופ' מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב
נעמה עדין, משרד החינוך
יעקב קולטקר, המרכז האקדמי לב

רשימת שופטי הכנס (לפי סדר הא"ב)

◆◆◆

חוה אביטל
רוחמה אבן
ענת אבן-זהב
נארימאן אגבאריה
רון אהרוני
גילה אוזרוסו-חג'ג'
שי אולשר
דורון אורנשטיין
טלי אילון
בת-שבע אילני
רונית בסן צינצינטוס
מריטה ברבש
אבי ברמן
רותי ברקאי
מיקה גבל
ראיסה גוברמן
נאוה גלבוע
אסף דביר
נח דנא-פיקארד
טומי דרייפוס
עינת הד-מצויינים
רחל הס גרין
רז הראל
ארנון הרשקוביץ
אילנה ווייסמן
מירלה וידר
שולה וייסמן
רחל זקס
דליה חן
דינה חסידוב
מיכל טבח
זהבית כהן
ירון להבי
אסתר לוינסון
רוזה לייקין
נדב מרקו
ליאורה נוטוב
טלי נחליאלי
סורינה סבאח
רותי סגל
סבינה סגרה
איליה סיניצקי
פיליפ סלובוצקי
רותם עבדו
ג'והיינה עואודה-שחברי
תקוה עובדיה
עפרה עפרי
פורת פופר
דורית פטקין
רחל פילו
תומר פלג
אירית פלד
אליק פלטניק
אנה פרוסק
פסיה צמיר
איבי קדרון
בוריס קויצ'ו
ענבל קולושי-מינסקר
ג'ייסון קופר
עינב קיסר
נלי קלר
ברכה קרמרסקי
רוני קרסנטי
גלית שבתאי
ענת שילה
איריס שרייבר
עטרה שריקי
דינה תירוש

תוכנית הכנס

יום שני, כ"ב בשבט תשע"ט, 28 בינואר 2019

9:30-9:00 **התכנסות והרשמה** | בניין לעוו בכניסה לאודיטוריום

11:00-9:30 **מושב פתיחה** | אודיטוריום

ברכות והרצאת מליאה:
פרופ' קנת הוכברג, רקטור המרכז האקדמי לב
יו"ר הכנס: עינת הד-מצויינים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, **אלון פינטו**, מכון ויצמן למדע

הרצאת מליאה: מרעיון מוצלח ליישום בקנה מידה רחב: מחשבות על Upscale **בפיתוח מקצועי של מורי מתמטיקה**
רוני קרסנטי, מכון ויצמן למדע

11:30-11:00 הפסקת קפה | בניין לעוו

12:30-11:30 **מושבים מקבילים - שולחנות עגולים**

מושב א1 | כיתה 440	**מושב א2** | כיתה 450	**מושב א3** | כיתה 460	**מושב א4** | כיתה 470
יו"ר: ברכה קרמרסקי	יו"ר: רותי סגל	יו"ר: רונית בסן צינצינטוס	יו"ר: שרה הרשקוביץ
בחינת הקשר בין פעילות במתמטיקה דינמית והבנה מושגית בקרב פרחי הוראה ומורים	**שיח תלמידים סביב הוכחות ללא מילים**	**קידום ופיתוח מיומנויות הוראה של מורים ליישם עקרונות תיאורטיים בכיתות (א'-יב') המאוכלסות בתלמידים חלשים**	**השפעת הוראת סוגיות מתמטיות בספרות הרבנית על עמדות סטודנטים חרדים כלפי מתמטיקה**
תומר פלג, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **זהבית כהן**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **רון אהרוני**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל	**נדב מרקו**, האוניברסיטה העברית בירושלים	**תקוה עובדיה**, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך ומכללת בית וגן ירושלים	**מאיר סנדיק**, מכללת אורות ישראל
האם מהנדסים משתמשים במתמטיקה תיכונית?	**תפקידי התרגול בשיעורי המתמטיקה**	**שימוש של מורים בבעיות לא שגרתיות בהוראת מתמטיקה**	**האם עבודות אומנות תורמות להבנת מושגים מתמטיים? המקרה של מתכשרים להוראה**
דורון אורנשטיין, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **זהבית כהן**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל	**רחל זקס**, מכון ויצמן למדע **בוריס קויצ'ו**, מכון ויצמן למדע	**נאדר חילף**, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי **אבי ברמן**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל	**ליאורה נוטוב**, המכללה האקדמית לחינוך גורדון
מורים פותרים בעיות אתגר בפורומים מקוונים: חקר תהליכים מטה קוגניטיביים		**כיצד מורים למתמטיקה בישראל תופסים את השימוש בגאוגברה בכתה?**	**הוראת חשבון ושברים בשילוב תרגול מתוקשב בשיטת משחוק טָבוּעַ (inherent gamification)**
נלי קלר, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **זהבית כהן**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **בוריס קויצ'ו**, מכון ויצמן למדע		**רותם עבדו**, מכללת לוינסקי לחינוך **מאיה ניב**, מכללת לוינסקי לחינוך	**ענת אבן-זהב**, מכללת תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך **פיליפ סלובוצקי**, מכללת תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך

13:30-12:30 ארוחת צהריים | חדר אוכל, בניין סוכצבסקי (קומה ראשונה)

15:00-13:30

מושבים מקבילים - דיווח על ממצאי מחקר

מושב ב1 | כיתה 440

יו"ר: רותי סגל

מהערכה שיפוטית לשיח פרודוקטיבי: שינוי בשיח של מורי מתמטיקה במסגרת מועדון וידאו

יוחאי פרץ, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
רוני קרסנטי, מכון ויצמן למדע
עינת הד-מצויינים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

שיח מבוסס צילום עצמי בווידאו ככלי להתפתחות מקצועית של מדריכים למתמטיקה

רותי סגל, מכון ויצמן למדע, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ירון להבי, מכון ויצמן למדע, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד-ילין
אבי מרזל, האוניברסיטה העברית בירושלים
עמי ברעם, מכון ויצמן למדע
בת שבע איילון, מכון ויצמן למדע

הזדמנויות למידה של שיח חקירתי בהשתלמות מחשב"ה

טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך
עינת הד-מצויינים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

מושב ב2 | כיתה 450

יו"ר: שרה הרשקוביץ

ארגונומיה בכיתת המתמטיקה בראשית לימודי האלגברה: השלכות לגבי היבט מיושם והיבט מושג של תכנית הלימודים

מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב
גילה אוזרוסו-חגג, אוניברסיטת תל אביב, מכללת לוינסקי לחינוך

השימוש בשיטת הייצוג הסינגפורית להתגברות על קשיים בפתרון בעיות מילוליות במבנה אלגברי בקרב תלמידים המתקשים במתמטיקה

ראודה זועבי אבו בכר, אקדמיית אלקאסמי
ג'והיינה עוואודה-שחברי, אקדמיית אלקאסמי , מכללת סכנין

סגנון חשיבה אנליטי-ויזואלי של תלמידים והשפעתו על מאפייני תהליכי המודלינג שלהם

ג'והיינה עוואודה-שחברי, אקדמיית אלקאסמי, מכללת סכנין
ראניה סלאמה, אקדמיית אלקאסמי

מושב ב3 | כיתה 460

יו"ר: רונית בסן צינצינטוס

כפל וחילוק במספרים טבעיים: ידע וחוללות עצמית של מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות חינוך מיוחד

איריס שרייבר, מכללת סמינר הקיבוצים, אוניברסיטת בר-אילן
רחל פילו, מכללת סמינר הקיבוצים

למידה המשלבת תפיסות שגויות טעויות ואסטרטגיות פתרון בנושא שברים פשוטים

אילנית איטון, בית ספר ע"ש יהודה בכר אבן-יהודה
רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות

פעילויות משברים פשוטים ועד שברים אלגבריים לפתוח מיומנות מטה קוגניטיבית במציאת מכנה משותף

רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות
דורית פטקין, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות

מושב ב4 | כיתה 470

יו"ר: ברכה קרמרסקי

ההבנה הפרוצדורלית וההבנה הרלציונית של מתכשרים להוראת מתמטיקה בפתרון בעיה העוסקת בזוויות בפירמידות

דורית פטקין, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות

טיפוח תחושת מסוגלות-עצמית מתמטית באמצעות יישום הכלי 'התכתבות עם הפרופסור'

אנה פרוסק, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך
עטרה שריקי, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך

התנסות של פרחי הוראה בלימוד קורס באלגוריתמים מתמטיים במתכונת של כיתה הפוכה

אילנה לביא, המכללה האקדמית, עמק יזרעאל
עטרה שריקי, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך

15:30-15:00

הפסקת קפה | בניין לעוו

17:00-15:30

מושבים מקבילים - קבוצות דיון וסימפוזיון

קבוצה א | כיתה 440

מתמטיקה, אומנות ותרבות: סדרת פיבונאצ'י -הוקרה לעבודתו של עופר ליבה ז"ל

נח דנא־פיקארד, המרכז האקדמי לב
שרה הרשקוביץ, המרכז לטכנולוגיה חינוכית, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך
בת שבע אילני, המכללה האקדמית לחינוך חמדת הדרום
אריה רוקח, הישיבה התיכונית תורה ומדע ליד המרכז האקדמי לב, מכללה ירושלים
אנטולי שטרקמן, מכללת תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך ומכללת לוינסקי לחינוך

קבוצה ב | כיתה 450

על מחקר בחינוך מתמטי בישראל - הרהורים וערעורים

עטרה שריקי, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך; הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
בועז זילברמן, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
רותי סגל, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
קרני שיר, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

סימפוזיון 1 | כיתה 460

טקסט מתמטי כבסיס לדיאלוג בין עמיתים

ברוך שוורץ, האוניברסיטה העברית בירושלים
אביטל כהן-אלבוים, מכון ויצמן למדע
בוריס קויצ'ו, מכון ויצמן למדע
רעות פרשה, מכון ויצמן למדע
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

18:15-17:15 **הרצאת מליאה:** **החינוך המתמטי שלי וגאומטריה קמורה במימד גבוה** | אודיטוריום
שירי ארטשטיין, אוניברסיטת תל אביב
יו"ר: רותי סגל, אורנים המכללה האקדמית לחינוך, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

19:00-18:15 **אסיפת מדיניות** | אודיטוריום
יו"ר: אלון פינטו, מכון ויצמן למדע, **עינת הד-מצויינים**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

20:00-19:00 ארוחת ערב | בניין לעוו

יום שלישי, כ"ג בשבט תשע"ט, 29 בינואר 2019

10:30-9:30 **התכנסות והרשמה** | בניין לעוו בכניסה לאודיטוריום

10:30-9:30 **הרצאת מליאה:** **חינוך ל-STEAM: חזון ראוי או אופנה חולפת?** | אודיטוריום
עטרה שריקי, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך
יו"ר: רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות

11:00-10:30 הפסקת קפה

12:30-11:00 מושבים מקבילים - **דיווח על ממצאי מחקר**

מושב ג1 | **כיתה 440**	**מושב ג2** | כיתה 450	**מושב ג3** | כיתה 460	**מושב ג4** | כיתה 470
יו"ר: ברכה קרמרסקי	יו"ר: רונית בסן צינצינטוס	יו"ר: עינת הד-מצויינים	יו"ר: רותי סגל
פיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה בתכנון וביצוע שיעור משולב טכנולוגיה והכוונה עצמית בגישה היפנית	**הבניית ידע מתמטי בניתוח תהליכים דינמיים**	**השיח הפדגוגי והשיח המתמטי - הילכו יחדיו?**	**תלמידים בוחרים נתונים במשימות תרגול בטכנולוגיה של הערכה מעצבת**
חוה אביטל, מכללת סמינר הקיבוצים **ברכה קרמרסקי**, אוניברסיטת בר-אילן	**אסף דביר**, אוניברסיטת תל אביב **טומי דרייפוס**, אוניברסיטת תל אביב **מיכל טבח**, אוניברסיטת תל אביב	**גלית שבתאי**, מכללת סמינר הקיבוצים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **עינת הד-מצויינים**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל	**יוליה בגדדי**, אוניברסיטת חיפה
מודל טיפוח הכוונה עצמית בלמידה בשילוב צרכים פסיכולוגיים (אוטונומיה, שייכות ויכולת), להעלאת הישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה	**הבניה של הגדרה מתמטית כמצע להבניה של מרכיבי ידע מטה-מתמטיים**	**התפתחות הזהות של סטודנטיות ערביות בכניסתן למקצועות המתמטיקה והטכנולוגיה ברמה האוניברסיטאית**	**סימבולי או טקסטואלי - איזה משוב יעיל יותר?**
ענבל קולושי-מינסקר, אוניברסיטת בר-אילן, שאנן- המכללה האקדמית הדתית לחינוך **ברכה קרמרסקי**, אוניברסיטת בר-אילן	**נאוה גלבוע**, מכללת אורות ישראל **טומי דרייפוס**, אוניברסיטת תל אביב **איבי קדרון**, המרכז האקדמי לב	**סורינה סבאח**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **עינת הד-מצויינים**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל	**תומר גל**, אוניברסיטת תל אביב **ארנון הרשקוביץ**, אוניברסיטת תל אביב
השפעת טיפוח מטה קוגניציה של מורים ותלמידיהם על תפיסת המסוגלות העצמית ועל תפקיד הלומד במרכז בעת השיח הכיתתי	**השפעת צורך התלמידים בהצדקה על תהליכי הבניית הצדקות**	**הזדמנויות ללמידה המאפשרות ריטואל בשיעורי המתמטיקה**	**יצירת דוגמאות כדרך לבחינה של הגדרות למושגים מתמטיים**
ענת שילה, אוניברסיטת בר-אילן **ברכה קרמרסקי**, אוניברסיטת בר-אילן	**רז הראל**, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד ילין **איבי קידרון**, המרכז האקדמי לב **טומי דרייפוס**, אוניברסיטת תל אביב	**טלי נחליאלי**, מכללת לוינסקי לחינוך **מיכל טבח**, אוניברסיטת תל אביב	**רחל הס גרין**, אוניברסיטת חיפה **שי אולשר**, אוניברסיטת חיפה

13:30-12:30 ארוחת צהריים | חדר האוכל, בניין סוכצבסקי (קומה ראשונה)

15:00-13:30 **מושבים מקבילים - קבוצות דיון וסימפוזיון**

קבוצה א | כיתה 440	**קבוצה ב** | כיתה 450	**סימפוזיון 2** | כיתה 460
מתמטיקה, אומנות ותרבות: סדרת פיבונאצ'י -הוקרה לעבודתו של עופר ליבה ז"ל	**על מחקר בחינוך מתמטי בישראל - הרהורים וערעורים**	**קווי עזר בלמידת גאומטריה והוראתה**
נח דנא־פיקארד, המרכז האקדמי לב **שרה הרשקוביץ**, המרכז לטכנולוגיה חינוכית, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך **בת שבע אילני**, המכללה האקדמית לחינוך חמדת הדרום **אריה רוקח**, הישיבה התיכונית תורה ומדע ליד המרכז האקדמי לב, מכללה ירושלים **אנטולי שטרקמן**, מכללת תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך ומכללת לוינסקי לחינוך	**עטרה שריקי**, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך; הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **בועז זילברמן**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **רותי סגל**, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **נצה מובשוביץ-הדר**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל **קרני שיר**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל	**טומי דרייפוס**, אוניברסיטת תל אביב **אליק פלטניק**, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך **איליה סיניצקי**, המכללה האקדמית לחינוך גורדון **אבי סיגלר**, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

16:40-15:10 **מושבים מקבילים - דיווח על ממצאי מחקר**

מושב ד1 | כיתה 440	**מושב ד2** | כיתה 450	**מושב ד3** | כיתה 460	**מושב ד4** | כיתה 470
יו"ר: ברכה קרמרסקי	יו"ר: רונית בסן צינצינטוס	יו"ר: רותי סגל	יו"ר: שרה הרשקוביץ
תפקידה של טכנולוגיה כתומכת הערכה מעצבת לקידום למידה והוראה (בדגש על משוב מעצב)	**הזהות המתמטית של ילד בעיני הגננת וההזדמנויות ללמידה שהיא יוצרת עבורו**	**התפשטות רעיונות מתמטיים במליאה וצמיחת פרקטיקות מתמטיות כיתתיות בשיח טיעוני ובניצוח המורה**	**הבניית ידע למושגים ביולוגיים בקרב תלמידי תיכון דרך חקר ייצוג מתמטי ביולוגי בסביבה לימודית עתירה טכנולוגית**
אמל קעדאן, אוניברסיטת חיפה	**טלי אילון**, אוניברסיטת חיפה	**עפרה עפרי**, אוניברסיטת תל אביב **מיכל טבח**, אוניברסיטת תל אביב	**נארימאן אגבאריה**, אוניברסיטת בן גוריון בנגב
שימוש בסביבה מקוונת ללימוד מתמטיקה כמקדם למידה: עדויות מבוססות לוגים ונתוני מיצ"ב	**בין שפה טבעית לתפיסת מושגי יחס מתמטיים (<,>,=) בהיבט מספרי בקרב גננות ופרחי הוראה לגיל הרך**	**רפלקציה של מורים על רצף הוראה - מה ניתן ללמוד מתיוג והצגה של מאפיינים דידקטיים**	**התפתחות המומחיות של מתרגלים בשיעורי מתמטיקה תוך כדי הוראה בבית ספר וירטואלי**
ארנון הרשקוביץ, אוניברסיטת תל אביב **בן יוסף לוי**, אוניברסיטת בן גוריון בנגב **מיכל טבח**, אוניברסיטת תל אביב	**דינה חסידוב**, מכללת תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך **בת-שבע אילני**, המכללה האקדמית לחינוך חמדת הדרום	**ג'ייסון קופר**, אוניברסיטת חיפה **שי אולשר**, אוניברסיטת חיפה **מיכל ירושלמי**, אוניברסיטת חיפה	**שולה וייסמן**, אוניברסיטת חיפה **רוזה לייקין**, אוניברסיטת חיפה **מיכל איילון**, אוניברסיטת חיפה
פיתוח מתודולוגיה לחקירת והערכת מידת האפקטיביות של מקבצי סרטוני תרגול מתמטיים, בנושא ייצוג הפונקציה הריבועית	**דגמים חוזרים בגני ילדים: העתקה והמללה**	**מה בין הזמן המוקצה לתפיסתן של משימות בגיאומטריה מרחבית לבין הקושי החזותי שלהן?**	**הילכו שניים יחדיו: בחינת קשרים בין מתמטיקה לפיזיקה הנעשים על ידי מורים למתמטיקה**
אלי נצר, אוניברסיטת תל אביב **מיכל טבח**, אוניברסיטת תל אביב	**דינה תירוש**, אוניברסיטת תל אביב **פסיה צמיר**, אוניברסיטת תל אביב **רותי ברקאי**, אוניברסיטת תל אביב, מכללת סמינר הקיבוצים **אסתר לוינסון**, אוניברסיטת תל אביב	**מירלה וידר**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך	**אילנה וויסמן**, שאנן - המכללה האקדמית דתית לחינוך, אוניברסיטת חיפה

17:30-16:40 **מושב מייצגים וקפה** | בניין לעוו בכניסה לאודיטוריום

להתאהב במתמטיקה דרך פייסבוק?
דורון אורנשטיין, הטכניון - המכון טכנולוגי לישראל, **זהבית כהן**, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, **צוות העמותה " מדע גדול בקטנה"**

קוביות או לא להיות
רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות, **עדי גלאון**, תיכון עירוני ה'

ייצוג גרפי דינמי להתרת בעיות תערובת
מריטה ברבש, המכללה האקדמית אחוה

"המתמטיקה של החיים שלי" - לימוד מתמטיקה בחט"ב בשימוש בדוגמאות אותנטיות מהחיים האמיתיים בתחום העניין של התלמיד ובשיטת PBL
בועז בריגר, Big Eyes for Math, **צבי לירז**, Big Eyes for Math

חיזוק הכשרתם של מורים למתמטיקה באמצעות שילוב זהותם התרבותית
סבינה סגרה, המכללה האקדמית אחוה

האם במבחן מקוון פתוח לקבל תמיד את התשובה השקולה אלגברית לתשובה הצפויה?
פיליפ סלובוצקי , "הלומדה" המכללה האקדמית לחינוך תלפיות, **מריאנה דורצ'בה**, "הלומדה" האוניברסיטה הטכנית, סופיה, בולגריה

הערכה מעצבת אוטומטית: מה ניתן ללמוד מדוגמאות של דיאגרמות דינמיות של מרובעים?
פורת פופר, אוניברסיטת חיפה

חידושים בגיאומטריה אוקלידית
דוד פרייברט, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

18:30-17:30 **הרצאת מליאה: על ידע ומיומנויות להוראת מתמטיקה בעידן הדיגיטאלי: סטנדרטים, תיאוריה ומעשה** | אודיטוריום
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב
יו"ר: ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר-אילן

19:00-18:30 **שיחת סיכום** | אודיטוריום
על הכנס שהיה ועל הכנס שיהיה
יו"ר: עינת הד-מצויינים, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל, **אלון פינטו**, מכון ויצמן למדע

הרצאות מליאה

החינוך המתמטי שלי וגאומטריה קמורה במימד גבוה

שירי ארטשטיין, אוניברסיטת תל אביב

◆◆◆

בהרצאה אציג את תחום המחקר המתמטי שלי, שהוא תכונות גיאומטריות של אובייקטים רב מימדיים, תוך תיאור הדרך בה הגעתי לעסוק בו, ושימת דגש על היבטים חינוכיים וחסמים אמיתיים ומדומיינים בהם נתקלתי בדרכי לקריירה אקדמית בתחום.

אנסה לתת ראיית עומק של מחקר מתמטי עכשווי יחד עם מחשבות על דרכים לאפשר השתתפות של אוכלוסייה מגוונת יותר בתחומי דעת טכנולוגיים ובפרט במחקר אקדמי.

על ידע ומיומנויות להוראת מתמטיקה בעידן הדיגיטאלי: סטנדרטים, תיאוריה ומעשה

מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

קיימת הסכמה רחבה בקרב קהיליית החוקרים בחינוך מתמטי כי המורה הוא הגורם המכריע לשילוב מוצלח של טכנולוגיה בכיתת המתמטיקה. לפיכך, קיים מגוון רחב של השתלמויות מורים שמטרתן לסייע למורה לכלול שילוב מושכל של טכנולוגיה במעשה ההוראה. אולם, הערכה של ההשתלמויות מראה כי בפועל מתרחש שינוי מועט בהוראה, אם בכלל. הסבר אפשרי לפער זה הוא כי ההשתלמויות אינן מכוונות לצרכים של המורים, ולכן אינן מייצרות שינוי. מהם, אם כן, הצרכים של המורה בהקשר שילוב טכנולוגיה בהוראה? האם קיימים סטנדרטים הנוגעים לידע ומיומנויות הדרושים למורה? אילו כלים תיאורטיים מאפשרים לבחון סטנדרטים אלו? מהן ההשלכות להכשרת מורים? בהצגה נתייחס לסוגיות מרכזיות אלו בהקשר עולמי וגם לגבי הנעשה בארצנו.

מרעיון מוצלח ליישום בקנה מידה רחב: מחשבות על upscale בפיתוח מקצועי של מורי מתמטיקה

רוני קרסנטי, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

רבות מן התכניות לפיתוח מקצועי של מורי מתמטיקה הן "תכניות בוטיק", כאלה המעוצבות בתשומת לב על ידי צוותים של חוקרים בחינוך מתמטי ומורים מובילים, תוך ניסוי ומחקר. כאשר תכנית מצליחה בקנה מידה קטן, יש לעיתים שאיפה להרחיב ולהטמיע אותה בקנה מידה גדול יותר (upscale). מחקרים רבים הצביעו על הקשיים והאתגרים הכרוכים במעבר זה. בהרצאה אסקור כמה מן התובנות שהצטברו בספרות המחקרית לגבי תהליכים של upscale, אציג דוגמאות של תכניות פיתוח מקצועי אותן הובלתי וחקרתי, אשר עברו תהליכים כאלה, ואשתף במחשבות על מהותה של "הצלחה" בהקשר זה.

חינוך ל-STEAM: חזון ראוי או אופנה חולפת?

עטרה שריקי, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך

מבין המטרות המוצהרות של החינוך הבית ספרי ניתן למנות את מיצוי הפוטנציאל האישי של כל תלמיד והכשרתו לקראת חייו הבוגרים. במקביל, בעשור האחרון גוברים הקולות הטוענים שבתי הספר מכשירים כיום תלמידים לעולם המחר, שטיבו כלל אינו ידוע. יתירה מכך, מחקרים מצביעים על חוסר הרלוונטיות של לימודים אקדמיים לשוק העבודה המשתנה ללא הרף, ורבים מהתאגידים הגדולים אינם דורשים השכלה אקדמאית כתנאי לקבלה לעבודה בחלק מהמשרות.

האמנם החינוך הבית ספרי והאקדמי מאבד כיום מהרלוונטיות שלו?

בקרן הלאומית למדע בארה"ב (NSF) שאלה זאת עלתה לדיון כבר בשנות ה-90. קברניטיה גרסו שלידע ולמיומנויות בתחום ההנדסה והטכנולוגיה תהיה חשיבות עליונה במאה ה-21, ולפיכך על מנת לשמר את הרלוונטיות של בתי הספר חיוני לחזק תחומי דעת אלה, תוך העמקת הידע בתחומי המתמטיקה והמדעים.

כך נולד רעיון ה-STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), השם דגש על שילוב ארבעת תחומי הדעת. אולם עד מהירה התברר שהחזון איננו עולה בקנה אחד עם המציאות הבית ספרית והאקדמית, ונכון להיום הפרשנות שניתנת לחינוך ל -STEM היא רחבה ומגוונת.

בד בבד עם עליית קרנו של רעיון החינוך ל-STEM, בשנות ה- 90 המאוחרות החלו להתפרסם מחקרים וספרים העוסקים בלמידה מתוך נקודת המבט של מדעי המוח. מחקרים אלה הצביעו על החשיבות של שילוב האמנויות במסגרות החינוכיות השונות, ובתוך כך התווסף ה-Art (A), וכיום מרבים להתייחס ל-STEAM במקום ל-STEM.

מכאן עולות שאלות הנוגעות לפדגוגית STE(A)M ולמימוש הרעיון והחזון במערכת החינוך כמו גם שאלות הנוגעות להשפעה שיש לכך על בוגרי תכניות STE(A)M. האמנם מדובר בחזון ראוי, או שמא באופנה חולפת? האמנם חינוך ל-STEAM יחזיר לבתי הספר ולאקדמיה את הרלוונטיות שלהם לעולם הדינמי של המאה ה-21?

בשאלות אלה נעסוק במסגרת ההרצאה.

סימפוזיונים

קווי עזר בלמידת גאומטריה והוראתה

יו"ר הסימפוזיון: טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

◆◆◆

תקציר

פתרון בעיות והוכחת משפטים תופסים מקום מרכזי בגאומטריה בית-ספרית. היעדר של אלגוריתמים לפתרון מקשה הוראה ולמידה של גאומטריה (ר. למשל Sharygin & Protasov, 2004). בנוסף לכך במשימות רבות קיים גורם קושי נוסף: על מנת להגיע לפתרון/ הוכחה תלמידים אמורים לא רק להשתמש באלמנטים הנתונים, אלא להכניס אלמנטים חדשים–קווי עזר (Senk, 1985; Hsu & Silver, 2014). הדבר מוביל לשאלות, אשר אנו מניחים כל מורה לגאומטריה נשאלה על ידי התלמידים שלה: "האם אני צריך לצייר קו עזר? איך אני אמור לדעת באיזה קו עזר להשתמש?"

הסמפוזיון המוצע יעסוק בהיבטים שונים של קווי עזר איתם מתמודדים תלמידים בעת לימוד הגאומטריה. נדון בתפקידן של בניות עזר בהוכחות הגאומטריות (Fan, Qi, Liu, Wang & Lin, 2017; Palatnik & Dreyfus, 2018). נציג ממצאים על הוראה של בניות עזר בסביבה של גאומטריה דינמית ובהקשר בעיות בניה (Cohen et al., 2017; Sinitsky, 2017). כמו כן נדון ביישומה של התיאוריה של שינויי תשומת הלב (Mason, 2010) בהקשר של פתרון בעיות גאומטריות הדורשות להשתמש בקווי עזר (Palatnik & Sigler, 2018).המסקנה המשותפת של המחקרים היא שהשימוש במשימות בהן התלמידים יוצרים אינטראקציה עם התרשים באמצעות קווי עזר צפוי לספק הקשר עשיר לפיתוח החשיבה הגאומטרית. נדון בכיווני מחקר חדשים הבוחנים שימוש בקווי עזר בפתרון בעיות, בהוכחות ובבניות גאומטריות.

נימוקים של תלמידים לקווי עזר בהוכחות גאומטריות

אליק פלטניק, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, אורנים—המכללה האקדמית לחינוך
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

◆◆◆

המחקר שנציג בדק מצבים בהוכחות גאומטריות בהן תלמידים משרטטים קווי עזר. בפרט בחנו את הנימוקים של התלמידים לשימוש בקווי עזר. העניין שלנו בתהליך זה נובע מכך שהשימוש בקווי עזר תורם באופן משמעותי לקושי של התלמידים עם הוכחות (למשל, Hsu, & Silver, 2014, Senk, 1985). ההתמקדות שלנו בנימוקים של התלמידים לשימוש בקווי עזר הובילה אותנו לקחת בחשבון את הפרספקטיבה ההאוריסטית של Pólya (1957), שהדגיש את תפקידם של אלמנטים מסייעים (במקרה שלנו–קווי עזר) בפתרון בעיות.

Pólya, מנקודת מבט של מתמטיקאי מקצועי, מפרט שלושה נימוקים עקריים להכנסת אלמנט מסייע: (1) ניסיון להשתמש בתוצאות ידועות; (2) חזרה להגדרות; (3) ציפיה להפוך את הבעיה המקורית לשלמה יותר, שקופה יותר, נגישה יותר.

התאמנו את הסיווג של Pólya למטרות שלנו על ידי הצגת מונחים להיזכר (Pólya 1, 2) ו-לצפות (Pólya 3). במחקר שלנו חיפשנו לקבל תיאור של מצבים בהם תלמידים משרטטים קווי עזר בעודם מתמודדים עם הוכחות גאומטריות, ולזהות את סוגי הנימוקים שהם מציגים לצורך זה. על רקע זה, רצינו לענות על השאלות הבאות:

א. מה הנימוקים שהתלמידים נותנים כאשר משרטטים קו עזר במהלך ההוכחה?

ב. לאיזה סוג שייכים נימוקים אלה, להיזכר או לצפות?המשתתפים במחקר שלנו היו תלמידי תיכון הלומדים גאומטריה בכיתה י'. עשרה תלמידים התנדבו למחקר ונקבצו לחמישה זוגות. הנושא המרכזי של המשימות המוצעות לתלמידים הוא השוואת שטחים של משולשים ו/או מקביליות (ר. מקור ב- De Villiers, 2014; Lockhart, 2002). נפגשנו עם כל זוג שלוש פעמים ובכל מפגש קיימנו ראיון מבוסס משימה (Goldin, 2000) בעל אופי שונה. בניתוח הקדשנו תשומת לב מיוחדת להקשר הכללי של ההוכחה, לאינטראקציות בין התלמידים לבין מבנים מתמטיים של המשימות ובמיוחד לשינוי בפעולותיהם של התלמידים והבעתם בעודם משרטטים קווי העזר.

חמשת זוגות התלמידים שהשתתפו במחקר הציגו סך של 26 קווי עזר: גבהים של משולשים ומקביליות, אלכסונים של מקבילית, קטעי אמצעים ותיכונים. אחדים מן הקווים האלה צויירו ממש, ואחרים היו דמיוניים. 14 מתוך קווי עזר צויירו כאשר התלמידים **נזכרו** בנוסחאות ידועות, הגדרות ופרוצדורות (למשל התלמידים שרטטו גבהים כחלק מאלגוריתם לפתרון משימות הקשורות לשטח, כי גובה מופיע במפורש בנוסחת השטח). 12 קווי עזר תלמידים נימקו **בציפייה** לקבל מידע נוסף מהמצב שישתנה.

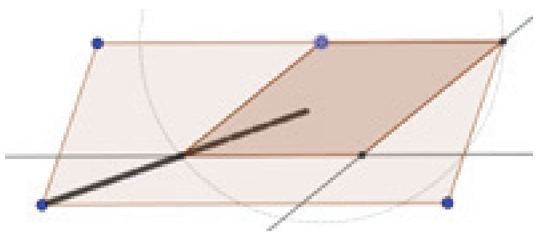
יש לציין כי התלמידים במחקר שלנו לא נרתעו מלהשתמש בקווי עזר בהוכחות, בניגוד לממצאים של Herbst and Brach (2006). בהתבסס על הממצאים שלנו, אנו מציעים כי שימוש במשימות שדורשות מתלמידים להשתמש בקווי עזר בהוכחות צפוי לספק הקשר עשיר לפיתוח חשיבה גאומטרית. על המורים לעודד חקר יזום הכולל שרטוט של קווי עזר ולהקפיד לדרוש נימוקים שחושפים מידע רב על חשיבה של התלמיד. על המורה לא רק ללמד קווי עזר סטנדרטיים אך גם ליצור לתלמידים חוויה של שינוי דינמי שבאה בעקבות השימוש בקווי עזר. מחקר נוסף נדרש כדי להבין טוב יותר את הדינמיקה המורכבת של שימוש בקווי עזר בפתרון בעיות גאומטריות בכלל ובהוכחות בפרט.

פתרון בעיות בנייה בסביבה דינמית: גילוי באמצעות קווי עזר

איליה סיניצקי, המכללה האקדמית לחינוך גורדון

בשנים האחרונות אנו עדים לחזרתן של בעיות בניה לתכנית לימודים בגיאומטירה בית-ספרית, ובהתאם גם להכשרת מורים למתמטיקה. תחום בעיות בנייה נחקר רבות בחינוך המתמטי, אך שימוש בכלים של גאומטריה דינמית משפיע על תהליכי ביצוע הבניות (Meskens and Tytgat, 2017) ועל דרכי חשיבה של הלומד (ר' למשל .Cohen et al., 2017) ובכך מזמן היבטים חדשים למחקר. המחקר שנציג בוחן גישה להוראה/ למידה של בעיות בנייה המבוססת על גילוי באמצעות קווי עזר בסביבה דינמית.

למחקר נבחרו משימות בנייה מורכבות, עבורן הפתרון היעיל מכיל בניית אובייקטים-עזר (סטופל וזיסקין, 2015). מאפיין נוסף של הבעיות הוא שילוב של עקרונות שימור ושינוי (סיניצקי, ואילני, 2014; -Leung, Baccaglini Frank and Mariotti, 2013) בתהליך של פתרון רב-שלבי. המשימות הותאמו לסביבה הדינמית, כך שהלומד חייב לשנות האובייקט הגאומטרי תוך שמירה של מספר תכונות ובמטרה להגיע לתכונות הנדרשות. הלומד אמור לגלות את השינוי המתאים של האובייקט בעזרת הכלים של הגאומטריה הדינמית ובפרט באמצעות פעולה של גרירה עם עקבות (drag-with-trace (Barabash, 2018; Sinitsky, 2017. האובייקט בונה קו עזר מסוים וכך נסללת דרך להשלמת הבנייה (ראה דוגמא באיור 1).



איור 1: בניית מעוין החסום במקבילית בעזרת "גרירה עם עקבות"

במסגרת הקורס "גאומטריה, אינטואיציה והוכחה" במכללה להכשרת מורים בוצע ניסוי בו נבדקו דרכי התמודדות של 18 סטודנטים עם בעיות בנייה מורכבות. בשלב הראשון, סטודנטים נחשפו לרעיון הכללי של גילוי השינוי הנדרש של אובייקט באמצעות קו עזר. הרעיון הודגם בפתרון של שתי בעיות בנייה בסביבת GeoGebra (ראה דוגמא לעיל). בהמשך, התבקשו סטודנטים ליישם את הרעיון בפתרון שלוש בעיות אחרות מהאוסף. מאחר ותהליך הבנייה המוצע מחקה את דרך החשיבה האינטואיטיבית של הלומד בפתרון בעיות בנייה, השערת המחקר הייתה כי סטודנטים ינסו להשתמש בדרך המוצעת.מניתוח הפתרונות שהגישו הסטודנטים עולה, כי הרעיון המוצע הופנם על-יד רוב הסטודנטים בפתרון של שתיים משלוש הבעיות. עם זאת, בבעיה השלישית של בניית המשיקים למעגל מנקודה מחוץ למעגל רק שניים מהמשתתפים השתמשו ברעיון גרירה עם עקבות. התגלו שתי סיבות לחוסר שימוש ברעיון המוזכר: לחלק מהנבדקים אובייקט העזר הנדרש לפתרון היה ידוע לפני התמודדות עם הבעיה, וחלק פענחו את המשימה כך שתהליך בניית העזר לא היה נחוץ.ניתן לשאר כי לגישה להוראה/ למידה של בעיות בנייה המבוססת על גילוי באמצעות קווי עזר בסביבה דינמית יש פוטנציאל דידקטי, אך תהליך יישומה דורש פיתוח אוספי המשימות המתאימות וביצוע ניסוי רחב היקף עם אוכלוסיות לומדים שונות.

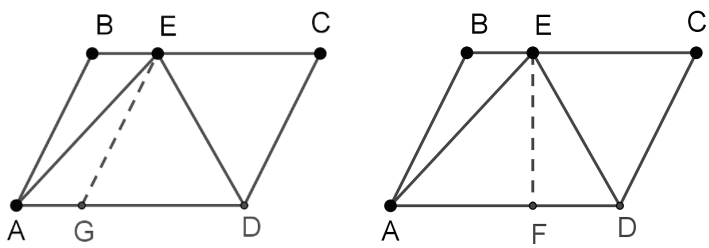
קו עזר כגורם פוטנציאלי לשינויים במוקדי תשומת לב של תלמיד במהלך פתרון בעיות גאומטריות

אבי סיגלר, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך
אליק פלטניק, שאנן — המכללה האקדמית הדתית לחינוך, אורנים — המכללה האקדמית לחינוך

◆◆◆

בהצגה זו נבחן שני היבטים של קווי עזר כגורם מסייע לפתרון בעיות בגאומטריה בתיכון: ראשית, כאמצעי להיזכר בתוצאה ידועה או להמחיש הגדרה, ושנית, כאמצעי לשינוי המיקוד והמבנה של תשומת לב של התלמיד.
השאלות: כיצד ללמד תלמידים להשתמש בקווי עזר בבעיות גאומטריות? באילו מצבים? ובאילו קווי עזר? הן שאלות פתוחות (ראה Fan, Qi, Liu, Wang and Lin, 2017). אחת מהשיטות היא בניית אוסף מתרחב של בעיות תומכות (Sharygin & Protasov, 2004). בעיות תומכות רבות מבוססות על קווי עזר, המוצגים כאופייניים ביחס לצורות גאומטריות מסוימות. אין אנו חולקים על התועלת של גישה שבה התלמידים מודעים לקשרים בין תצורות גאומטריות מסוימות לבין קווי עזר. עם זאת, אנו מאמינים כי ניתן לפתח דרך הוראה כללית יותר ומובנית של איך (ולמה) להשתמש בקווי עזר.
במחקר אנו מבקשים לקדם את הידע על קווי עזר על ידי השוואת השימוש בהם בבעיות שונות ובהוכחות שונות. ההכללה המוצעת מתייחסת למסורת של בפתרון בעיות (Pólya, 1957; Mason, Burton, & Stacey, 2010) ולתיאוריית שינויי תשומת לב של Mason (2010) הגישה של Mason, Burton, & Stacey (2010) לפתרון בעיות ופיתוח של חשיבה מתמטית טוענת שהכנסת אלמנטים חדשים למרחב הבעיה היא הכרחית (לא רק בגיאומטריה) ומטפחת 'גישה מנטלית של חופש' (עמ' 33). אנו תומכים בנקודת מבט זו, ובנוסף טוענים כי קווי עזר הם האלמנטים היחידים בבעיה שעליהם יש לפותר שליטה מוחלטת. יכולת להשתמש בקו עזר עם המאפיין הנבחר (ראה באיור 2 דוגמאות לקווי עזר עם מאפיינים של מקבילות, ניצבות) הופכת תלמיד ללומד אקטיבי.

תוכיח כי השטח של המשולש AED הוא חצי מהשטח של המקבילית ABCD



איור 2: קווי עזר עם מאפיינים שונים אשר גורמים לשינויים בתשומת לב של התלמיד

Mason (2010) מבחין בין חמישה מבנים שונים בצורת תשומת לב: התבוננות בשלם, הבחנה בפרטים, הכרה ביחסים, תפיסת תכונות, והסקת מסקנות על בסיס התכונות.
בהצגה זו נדגים כיצד התיאוריה של מייסון באה לידי ביטוי בבעיות גיאומטריות ובמצבים של שימוש בקווי עזר בפרט. כאשר אלמנט חדש מופיע בתרשים, זה משנה את הדרך שבה פותר מתבונן בתמונה כולה. קו עזר תופס את תשומת הלב, בהיותו, א-פריורי, פרט מובחן ששונה משאר חלקי התרשים. הלומד לא רק מכיר ביחסים בין מרכיבי הדיאגרמה לבין קו העזר: הוא יוצר אותם. לדוגמה, כאשר תלמיד מצייר קו מקביל לצד של מקבילית (איור 2א), הוא

מבחין בתכונה מסוימת של מקביליות החדשות. לבסוף תלמיד מסיק מסקנות על בסיס של התכונה זאת.
נציג דוגמאות מגוונות (בעיות הוכחה, משימות חקר ומשימות חישוביות) ונדגיש כיצד קווי עזר מאחדים רכיבים שאינם קשורים בתרשים המקורי או מחלקים ישות גאומטרית מורכבת לצורות חדשות, יותר נגישות. כמו כן, נציג דרכים לשילוב של מספר פרספקטיבות בניתוח פעולות התלמידים במצבים הדורשים הכנסת קווי עזר לבעיה. כמו כן נציע כיווני המשך למחקר עתידי אשר יכול לקחת מחקר תיאורטי זה כנקודת התחלה.

מקורות

סטופל, מ', וזיסקין, ק' (עורכים). (2015). בניות גאומטריות. בעיות קלאסיות, אתגריות וממוחשבות. חיפה: שאנן.

סיניצקי, א', ואילני ב' (2014). שימור ושינוי. תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות. מכון מופ"ת - מכון מחקר של מכללות להכשרת עובדי הוראה.

Barabash, M. (2018). GeoGebra as a Dynamic Geometry tool in mathematics and in mathematics teaching: a case of geometric constructions. In: *CADGME WEB proceedings*. https://www.uc.pt/en/congressos/cadgme2018/webProceedings

Cohen, D., Kouropatov, A., Ovodenko, R., Hoch, M. and Hershkovitz, S. (2017). Geometric constructions in a dynamic environment (GeoGebra): the case of in-service teachers in: Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.). (2017). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)*. Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME, p.580-587.

De Villiers, M. (2014). Slaying a geometrical monster: Finding the area of a crossed quadrilateral. *The Scottish Mathematical Council Journal, 44*, 71-74.

Fan, L., Qi, C., Liu, X., Wang, Y., & Lin, M. (2017). Does a transformation approach improve students' ability in constructing auxiliary lines for solving geometric problems? An intervention-based study with two Chinese classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 229-248.

Herbst, P. (2004). Interactions with diagrams and the making of reasoned conjectures in geometry. *ZDM*, *36*(5), 129-139.

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? *Cognition and Instruction, 24*(1), 73–122

Hsu, H. Y., & Silver, E. A. (2014). Cognitive complexity of mathematics instructional tasks in a Taiwanese classroom: An examination of task sources. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*, 460-496

Leung A., Baccaglini-Frank A., & Mariotti M.A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments, *Educational Studies in Mathematics*, 84, 439–460.

Lockhart, P. (2002). *A mathematician's lament*. Retrieved September 13, 2018 from https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf.

Mason, J. (2010). Attention and intention in learning about teaching through teaching. In R. Leikin & R. Zazkis (Eds.) *Learning through teaching mathematics, Mathematics Teacher Education.* (pp. 23-47). Netherlands: Springer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. *2nd edition.* Harlow, England: Pearson Education.

Meskens, A., & Tytgat, P. (2017). *Exploring Classical Greek Construction Problems with Interactive Geometry Software*. Springer, Switzerland,

Palatnik, A., & Dreyfus, T. (2018). Students' reasons for introducing auxiliary lines in proving situations. *Journal of Mathematical Behavior* (pending minor revisions).

Palatnik, A., & Sigler, A. (2018). Focusing attention on the introduction of auxiliary lines. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI:10.1080/0020739X.2018.1489076.

Polya, G. (1957). *How to solve it. 2nd edition*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher,78,* 448-456.

Sharygin, I., & Protasov, V. (2004). Does the school of the 21st century need geometry? *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematics Education.* Selected materials from Russia National Presentation (pp. 167-177). Institute of New Technology: Moscow, Russia.

Sinitsky, I. (2017). Geometric constructions problems in dynamic environment: new elegance and new dilemmas in teacher training. In: *Abstracts of 23rd Conference on Applications of Computer Algebra*, Jerusalem, p.24.

טקסט מתמטי כבסיס לדיאלוג בין עמיתים

ברוך שוורץ, האוניברסיטה העברית בירושלים – מרכז הסימפוזיון
אביטל כהן-אלבוים, מכון ויצמן למדע
בוריס קויצ'ו, מכון ויצמן למדע
רעות פרשה, מכון ויצמן למדע
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

◆◆◆

מבוא

השיח שמתפתח בכיתה בה לומדים מתמטיקה הוא נושא שמעסיק מזה שנים את קהילת החוקרים במדעי הלמידה. מהם מאפייניו של השיח שרצוי שיתפתח וכיצד מורים יכולים לטפח שיח זה, הן שאלות שנמצאות בחזית המחקר. לדוגמא, מושגים כגון דיבור חקרני (Mercer & Littleton, 2007) או דיבור מחויב (Michaels, O'Connor, & Resnick, 2007), הם מושגים שנוצרו כדי לתת מענה לשאלות הללו. דרכי דיבור כתתי אלו מאופיינות בכבוד הדדי, ביקורתיות בנוסף למחויבות לדיסציפלינה. במקביל, בהוראת תחומי דעת שאינם מתמטיקה, Anderson ושותפיו (2001) פיתחו את מודל החשיבה המשותפת (Collaborative Reasoning) - מודל דיון עמיתים פתוח, אשר נועד לשפר את איכות השיח הכיתתי באמצעות קריאת טקסטים ודיון בנושאים שנויים במחלוקת. על פניו, נראה כי מימוש המודל של Anderson ושותפיו בכתה מוביל לתוצאות מרשימות, החל בהתפתחות קוגניטיבית וכלה בהתפתחות מושגית, שיפור מעורבות התלמידים והמוטיבציה שלהם, כמו גם העברה לתחומי תוכן אחרים. בנוסף, מחקרים מראים כי תובנות של יחידים עוברות כ"כדור שלג" מהקבוצה הקטנה אל הכתה כולה (Schwarz & Baker 2016) טוענים כי, מעבר ליתרונות הללו, היישום עצמו של צורות הדיבור הארגומנטטיבי הללו מהווה מימוש של דמוקרטיה מתדיינת.

בהנחה שהתוצאות שהוזכרו לעיל הן רצויות, נשאלת השאלה, האם ניתן ליישם מודל פדגוגי כזה בכיתת המתמטיקה? או במילים אחרות, האם פעילויות מסוג של קריאת טקסטים מתמטיים ודיון בהם תוך נקיטת עמדה, אכן יכולות להוביל להתפתחות שיח מתמטי כיתתי רצוי? הסימפוזיון המוצע להלן כולל שלושה מחקרים שמציעים גישות שונות כדי לענות על השאלה. אביטל אלבוים-כהן בחנה את מאפייני השיח המתמטי שהתפתח בין מורה וקבוצה קטנה של תלמידים במהלך מספר מפגשים בהם הקבוצה עסקה בניסיון להבין באופן מיטבי את הטקסטים בהם עיינו. רעות פרשה בחנה עיצוב מטלות קריאה כמכשיר להעלאת נימוקים של תלמידים בכיתה. מיכל טבח ובוריס קויצ'ו מציעים ניתוח תיאורטי של תפקידם של ייצוגים פנימיים וחיצוניים בעת עיסוק במטלות מסוג מי-צודק סביב טקסטים. להלן תקצירים של שלושת המחקרים.

מאפייני השיח שמתפתח סביב קריאה של טקסטים מתמטיים בקבוצות קטנות של תלמידי תיכון

אביטל אלבוים-כהן

◆◆◆

המחקר שידווח להלן בוחן פעילות שבמרכזה התייחסותם של תלמידים לשיח מתמטי כתוב מסוג של "טקסט מתמטי". הצירוף "טקסט מתמטי" בהקשר הנוכחי מצביע על מאמר שמספר סיפור מתמטי יפה. כמו כן, טקסט שנבחר לפעילות הקריאה מספר סיפור שלתלמידי י"ב במסלול 5 יחידות לימוד יהיו כלים "להבינו" וההנחיה שניתנה לקבוצת התלמידים היא להפיק את המיטב מהקריאה. נשאלת השאלה, מהם מאפייני השיח שמתפתח לאורכם של תשעה מפגשים בני שעה וחצי בהם קבוצה קטנה של תלמידים עסוקה בקריאה של טקסטים כאלה, והאם השיח שמתפתח הוא שיח מסוג רצוי. להלן אענה בקצרה על חלקה הראשון של השאלה.

בשני הקורסים, אשר יצאו אל הפועל ונחקרו, התממש תהליך, שבראשיתו נפגשים מורה וקבוצה מצומצמת של תלמידים שהביעו נכונות ללמוד מתמטיקה באמצעות קריאה של טקסטים מתמטיים ובסופו אפשר לומר כי המשתתפים מהווים קהילה של קוראים שפועלת בתיאום על פי כללי שיח ברורים ויוצקת משמעות מוסכמת לטקסטים שנקראים בצוותא. התקשורת של כל אחד מהתלמידים המשתתפים מתנהלת בשלושה ערוצים: מול הטקסט, מול המורה ומול התלמידים העמיתים, כאשר בכל אחד מהם התקשורת מתנהלת לפי כללים שהוטבעו במהלך הקורס.

ההתנהלות מול הטקסט כוללת בדרך כלל העלאה של חלקים מהטקסט למרחב הציבורי על ידי קריאה בקול רם. הקריאה הזאת מופסקת כאשר מתעורר קושי. לאורך הקורס התלמידים למדו לזהות מצבים בהם מתעוררת אצלם תחושת אי-הבנה ביחס לטקסט, לתת ביטוי לתחושה זו וכן לפעול בדרכים שונות כדי לסלקה.

ההתנהלות התלמידים מול המורה כללה, בין השאר, אינטראקציות שמקובלת בכיתות מתמטיקה רגילות כגון: ביצוע הוראות המורה ברמה הניהולית והתייחסות את המורה כמשאב שיכול לסייע בביצוע מטלות. אך בנוסף ניתן לטעון כי במישור שמתייחס לתחום הדעת המתמטי, האינטראקציות של התלמידים עם המורה שונות באופן מהותי מהאינטראקציות המקובלות בכיתת המתמטיקה הבית ספרית. בעוד ששָם המורה מהווה סמכות מקצועית כמעט אבסולוטית, קובעת מה נכון ומה שגוי ומעניקה את "חותמת הכשרות" לכל עשייה מתמטית בגבולות הכיתה, כאן ההתייחסות אל המורה כאל סמכות מקצועית הולכת ומצטמצמת לאורכם של שני הקורסים. אפשר לומר שהשיח הסמכותי פינה את מקומו לשיח שבו הסיפור הדומיננטי נקבע על ידי כל המשתתפים בשיח לאורם של כללים שמקובלים בקהילה.

בהתנהלותם מול עמיתיהם למדו התלמידים להציג את טענותיהם הכלליות והמתמטיות באופן בהיר, מבוסס ומדויק שנועד לשכנע. בנוסף הם הרבו לאתגר את האמירות של עמיתיהם כאשר מטרתם היא ליצור פרשנות קוהרנטית ומוסכמת לטקסט אותו קראו בצוותא.

בחינה כוללת של כל ערוצי התקשורת חושפת שיח שמשקף מאמץ משותף של קבוצה של תלמידים שפועלים כדי להעניק משמעות לטקסט כתוב. המחקר טוען כי תלמיד יכול להעניק משמעות לטקסט כתוב כאשר הוא יכול לספר סיפור משכנע שהוא פרשנות של הטקסט הזה והפרשנות הזו מקובלת על השותפים בתהליך.

הזמנה לדיאלוג- גישוש בנוגע לעיצוב משימות המזמנות דיון בכיתת המתמטיקה

רעות פרשה

בהרצאה יוצגו שתי משימות בעלות מבנה דומה. בכל אחת מהן קיים אלמנט של השוואה בין פתרונות שונים של תלמידים או בין פרשנויות שונות לסיטואציה נתונה, כאשר לפחות אחד מהפתרונות המוצגים שגוי. מוקד ההשוואה הוא "מי מהתלמידים צודק? מדוע דרך פתרון מסוימת נכונה והאחרת לא?" (ראו איורים 1 ו- 2).

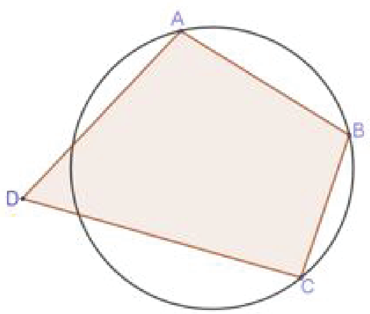
את המשימות ניסיתי בכיתה. עבור כל אחת מהמשימות אציג את השיקולים בפיתוח המשימה, ניתוח של מגוון הטיעונים שעלו בכיתה ומחשבות על התאמות ושינויים לאור ההתנסות בכיתה. אחת ההתאמות תהיה בהשראת האסטרטגיה "אם לא, מה כן?" (Koichu, 2008)

המטרה היא להיעזר בקריטריונים ידועים מהספרות (למשל, יצירת מצב של אי וודאות, יצירת סיטואציות שבהן תלמידים יכולים לשכנע אחד את השני וכדומה) על מנת לפתח פעילויות מבוססות טקסטים המזמנות דיון עשיר בכיתה. ובפרט, לבדוק עד כמה שתי המשימות המוצגות עשויות להיות "מוצלחות" לפי הקריטריונים האלו.

לדוגמה, יצירת מצב של אי וודאות: משימות המעוררות חוסר וודאות מסייעות בלמידת מתמטיקה (Zaslavsky, 2005). כמו כן, ישנן דוגמאות המראות שאי-וודאות בפתרון המשימה עשויה להגביר את הצורך בדיון (Kontorovich & Zazkis, 2017). משימה 1 יצרה מצב של אי וודאות בכך שאין כל מידע על גודל הזוויות במרובע ABCD, בעוד שהתלמידים היו רגילים לבדוק אם מרובע הוא בר חסימה באמצעות התכונה: "מרובע הוא בר חסימה במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180°". משימה 2 יצרה מצבים שונים של אי וודאות. אחד מהם היה דווקא אצל התלמידים החזקים יותר ש"הצליחו" להוכיח באופן "דדוקטיבי" שהמרובע AECF הוא ריבוע. האם אי הוודאות במשימות אלו מספיקה על מנת לעורר שיח ודיון בכיתה?

הבחירה במבנה משימה של "מי צודק?" הכולל דיאלוג כתוב בין תלמידים נועדה להזמין ולתת לגיטימציה לדיאלוג ושיח בין תלמידי הכיתה. יחד עם זאת, עשויים להיות לבחירה זו יתרונות נוספים. לפי הספרות, משימות מסוג זה הוכיחו את עצמן כמעוררות חוסר וודאות אצל הפותרים ויעילות בחשיפת תפיסות, תפיסות שגויות ודרכי חשיבה של תלמידים (Tabach & Koichu, submitted). ואכן, מתשובות התלמידים לשתי המשימות ניתן היה לגלות תפיסות שונות של תלמידים כמו למשל הסקת מסקנות על סמך השרטוט, חוסר עקביות ביחס לתשובות שקולות המנוסחות באופן שונה ועוד. כיצד ניתן להשתמש במידע הזה על מנת להעשיר את הדיון?

בהרצאה נבחן את שתי המשימות לאור האמור לעיל, ונבדוק האם וכיצד הן עשויות לזמן דיון עשיר בכיתת המתמטיקה.



נתון מרובע ABCD.

הנקודות A, B ו- C נמצאות על מעגל

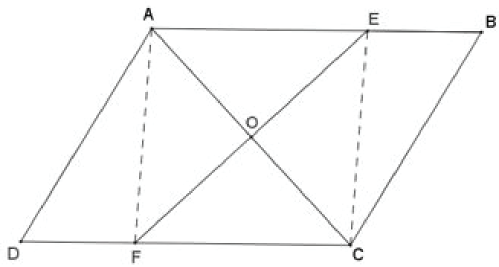
והנקודה D אינה על המעגל (ראו שרטוט).

יובל אמר: את המרובע ABCD אי אפשר לחסום במעגל!

חגי אמר: מי אמר? ברור שאי אפשר לחסום אותו במעגל **הזה**, אבל אולי אפשר לחסום אותו במעגל **אחר**?

מה דעתכם? מי מהתלמידים צודק? הסבירו.

איור 1: משימה 1



המרובע ABCD הוא מקבילית.
הנקודות E, ו- F מונחות על
הצלעות AB, ו- DC בהתאמה
כך ש: $EB = FD$, $EF \perp AC$.

א. הוכיחו: $CE = AE$.

ב. הוכיחו: $S_{AFC} = S_{EFC}$.

ג. גיל ויואב ענו על השאלה בדרכים שונות.

גיל אמר: לפי הנוסחה לחישוב שטח משולש- $S_{AFC} = \frac{AF \cdot FC}{2}$ ו- $S_{EFC} = \frac{EC \cdot FC}{2}$

ויודעים ש- AF=EC. לכן שטחי המשולשים שווים.

יואב אמר: השטחים שווים כי המרובע AECF הוא ריבוע ולכן $\Delta AFC \cong \Delta ECF$ ואם המשולשים חופפים אז השטחים שווים.

התייחסו לכל אחד מהפתרונות וכתבו האם, לדעתכם, הוא פתרון נכון או שגוי. נמקו את תשובתכם.

איור 2: משימה 2

מי צודק? ניתוח תיאורטי של פעילות יצוגית

מיכל טבח ובוריס קויצ'ו

◆◆◆

דיון תיאורטי בקשרים אפשריים בין ייצוגים חיצוניים שאינם שיגרתיים (למשל, טקסט בפורמט נתון) וייצוגים פנימיים הקשורים אליהם (למשל, תפישת המטלות על ידי תלמידים) תוצג בהרצאה. מטרתנו היא לנתח את המצב ההדדי שבין הייצוגים החיצוניים והפנימיים ביחס למטלות טקסטואליות לא שיגרתיות במבנה של "מי-צודק?". מטלות כאלו מערבות סיטואציה המיוצגת בעזרת טקסט ארוך יחסית, אשר יכולה להתפרש (לפחות) בשתי דרכים סותרות, אשר מוצגות באופן מפורש. הפותרים נדרשים לבחור איזו פרשנות נכונה ולתמוך את בחירתם בעזרת טיעונים אשר יכולים לשכנע את עמיתיהם. הניתוח אותו נציג באשר לייצוגים הפנימיים והחיצוניים יכול לשמש ככלי בידי מורים ומורי-מורים בתכנון מטלות המעוצבות באופן ייחודי לצרכי תלמידיהם. בהרצאה נדון ברצף של שלוש הבעיות המופיעות באיור 3.

כיצד לחשב את המחיר? נניח שלקראת תום עונת הטיולים, מזוודות נמכרות בחנות בהנחה של 30%. למחיר המזוודה יש להוסיף מע"מ של 17%. מה לחשב בהתחלה, הנחה או מע"מ?	
קונה: אני חושב שבהתחלה צריך לחשב את המחיר המלא כולל מע"מ. בשיטה זאת ההנחה תחשבנה ממחיר יותר גבוה, ולכן המחיר הסופי יהיה יותר נמוך.	גובה מיסים: אני חושב שבהתחלה צריך לחשב את המחיר המוזל. בשיטה זאת ההנחה לא תשפיע על גובה של מע"מ, ולכן המדינה תקבל יותר.
- מה דעתך? - כיצד היית משכנע את הזולת שחושב אחרת? - כיצד אפשר לבדוק מי צודק?	

פעילות המשך א שטחו של <u>כל</u> ריבוע שווה לשטח המלבן שיתקבל אם נגדיל את אורך צלעו האחת בעשרה אחוז ונקטין את אורך צלעו הניצבת בעשרה אחוז. האמנם?	
משה: אני חושב שכן. צלעות הריבוע שוות באורכן. לכן הוספה של 10% והקטנה של 10% מאורך צלע הריבוע - זה אומר שמה שמוסיפים ומה שמורידים שווים.	יוסף: אני חושב שלא. אם הצלע היא 10 ס"מ, השטח 100 סמ"ר. אחרי השינוי צלע אחת תהיה 9 והשנייה 11, והשטח 99 סמ"ר.
- מה דעתך? - כיצד היית משכנע את הזולת שחושב אחרת? - כיצד אפשר לבדוק מי צודק?	

פעילות המשך ב היקפו של <u>כל</u> ריבוע שווה להיקף המלבן שיתקבל אם נגדיל את אורך צלעו האחת בעשרה אחוז ונקטין את אורך צלעו הניצבת בעשרה אחוז. האמנם?	
דן: אני חושב שלא. הרגע חשבנו על השאלה הזו וראינו שזה יוצא לא אותו דבר.	גור: אני חושב שכן. שתי צלעות נהיו ארוכות יותר ושתיים קצרות יותר. התוספות בדיוק באותו גודל של ההורדות. ההיקף נשאר כמו שהוא.
- מה דעתך? - כיצד היית משכנע את הזולת שחושב אחרת? - כיצד אפשר לבדוק מי צודק?	

איור 3: רצף שלוש פעילויות מסוג מי-צודק?

תודות

המחקרים נערכו במימון חלקי של הקרן הישראלית למדעים, מענק מספר 2699/2017.

מקורות

Anderson, R. C., Nguyen-Jahiel, K., McNurlen, B., Archodidou, A., Kim, S.-Y., Reznitskaya, A., & Gilbert, L. (2001). The snowball phenomenon: Spread of ways of talking and ways of thinking across groups of children. Cognition and Instruction, 19, 1-46.

Koichu, B. (2008) 'If not, what yes?', International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39(4), 443–454.

Kontorovich, I., & Zazkis, R. (2017). Mathematical conventions: Revisiting arbitrary and necessary. For the Learning of Mathematics, 37(1), 29-34.

Mercer, N., & Littleton, K. (2007). Dialogue and the development of children's thinking: A sociocultural approach. New York, NY: Routledge.

Michaels, S., O'Connor, C., & Resnick, L. (2007). Deliberative discourse idealized and realized: Accountable talk in the classroom and in civic life. Studies in Philosophy of Education, 27, 283-297.

Schwarz, B. B., & Baker, M. J. (2016). Dialogue, Argumentation and Education: History, Theory and Practice. Cambridge: Cambridge University Press.

Tabach, M. & Koichu, B. Who is right? Theoretical analysis of representational activities. The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-11), TWG24, Utrecht, The Netherlands

Zaslavsky, O. (2005) Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. Educational Studies in Mathematics, 60(3), 297-321.

קבוצות דיון

מתמטיקה, אומנות ותרבות: סדרת פיבונאצ׳י - הוקרה לעבודתו של עופר ליבה ז״ל

נח דנא־פיקארד, המרכז האקדמי לב, ירושלים
שרה הרשקוביץ, המרכז לטכנולוגיה חינוכית, שאנן, המכללה האקדמית הדתית לחינוך
בת שבע אילני, המכללה האקדמית לחינוך חמדת הדרום
אריה רוקח, ישיבת תורה ומדע ליד המרכז האקדמי לב, ירושלים, ומכללה ירושלים
אנטולי שטרקמן, המכללה האקדמית לחינוך תלפיות ומכללת לוינסקי לחינוך

◆◆◆

זהו המפגש השלישי של קבוצת הדיון העוסקת **במתמטיקה, אמנות ותרבות**. פעילות זו החלה כחלק מתוך מהלך בינלאומי הכולל חוקרים העוסקים בתחום זה ברחבי העלם. המכנה המשותף לכולם הוא מתמטיקה ואומנות, כאשר חוקרים שונים מוסיפים אליה היבטים נוספים כמו: טכנולוגיה, מדעים, תרבות, ועוד...
מפגש זה ייוחד לסדרת פיבונאצ׳י ולסדרת לוקאס בהקשרים אומנותיים ותרבותיים, על בסיס עבודותיהם של מובילי הקבוצה יחד עם רעיונות מתוך ספרו של עופר ליבה ז״ל.
סדרת פיבונאצ׳י מוגדרת ע״י שני איבריה הראשונים ונוסחה רקורסיבית.

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

לכן תחילת הסדרה היא 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89....

מסתבר שהיחס בין שני איברים עוקבים בסדרה הזאת מתקרב ליחס הנקרא יחס הזהב:

$$\frac{1}{1}=1,\frac{2}{1}=2,\frac{3}{2}=1.5,\frac{5}{3}=1.666...,\frac{8}{5}=1.6,\frac{13}{8}=1.625,\frac{21}{13}=1.61538,\frac{34}{21}=1.61905,...$$

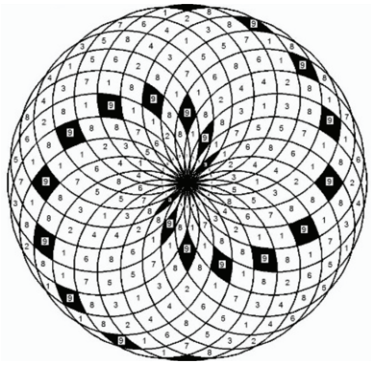
בסימונים מתמטיים כותבים $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$.

בספרות הכללית, מייחסים החלטות ראשוניות בנוגע לקריטריונים של אסתטיקה ליוונים הקדמונים ולשימושם במה שנקרא יחס הזהב. המספר הזה הוא:

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618033$$

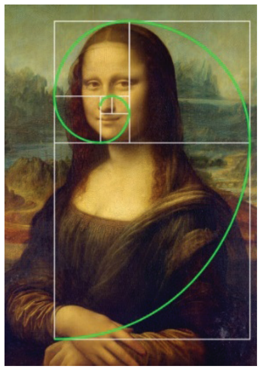
זהו היחס בין אורך ורוחב של מלבן הנחשב אסתטי. הוא מופיע בפרופורציות של בנינים מפורסמים בעולם, בתמונות ובמיצגים שונים. את מספרי פיבונאצ׳י, אפשר למצוא בהקשרים תרבותיים שונים כמו: בבית הכנסת של רחוב דוהאני בבודפשט (איור מס׳ 1), בחזית בית הכנסת נוכל לזהות את המספרים של תחילת סדר פיבונאצ׳י: רוזטה אחת, 2 מגדלים (ולכל אחד 8 פאות), 5 חלונות בסגנון Rundbogenstil (כמו החלונות המוסתרים חלקית ע״י העץ) ובכל אחד 3 חלונות מלבניים ו-3 עגולים. בכל אחד משני המגדלים יש 8 פאות, ועוד... , בטורוס פיבונאצ׳י (איור מס׳ 2)

איור מס' 1



איור מס' 2

את יחס הזהב אפשר לזהות במגוון אלמנטים מתרבויות שונות כמו בניינים כמו: הפרתנון באתונה, התאג' מהל בהודו, מגדל אייפל בפריז, בתמונות, למשל בציור המפורסם "המונה ליזה" של ליאונרדו דה-וינצ'י (איור מס' 3) , ועוד.



איור מס' 3

בנוסף לאלמנטים בבית הכנסת של בודפשט שאוזכר לעיל, מקורות יהודיים רבים ופרטי אומנות יהודית מראים מספרי פיבונאצ'י וקרובים של יחס הזהב: למשל: תיבת נח, כלי המשכן, ציציות ועוד.
מעבר לנ"ל, יש אלמנטים גרפיים או ארכיטקטוניים שמבטאים תכונות מורכבות יותר של מספרי פיבונאצ'י. היבט זה מופיע ברבים מהמקורות היהודיים.
בסדנה יציגו המארגנים מבחר דוגמאות ויפעילו את המשתתפים בפעילויות הנגזרות מסדרת פיבונאצ'י. חלק מהפעילויות יתבסס על שימוש בטכנולוגיות שונות כגון מערכות גיאומטריות דינמיות.
ייוחד זמן לספרו של עופר ליבה ז"ל שמציג באופן מרתק מתמטיקה הקשורה למלבן הזהב ולפיבונאצ' . הוא מדגיש את חשיבות היופי של התבניות המתמטיות ושל הרעיונות המתמטיים, כאשר לתפיסתו יופיים הוא מבחנם החשוב ביותר.
ספרו של עופר ליבה מצטיין בעושר המתבטא הן במגוון התחומים המתמטיים השזורים בו, הן בשפע הפעילויות (חלקן בפרקים וחלקן בתרגילים) והן בקשרים בין התחומים המתמטיים השונים כפי שהם מתבטאים באחד הנושאים המתמטיים היפים, הקסומים והמפתיעים ביותר.

הדיון בקבוצה יעסוק בהזדמנויות הפדגוגיות המצויות ברעיונות המבוססים על סדרת פיבונאצ' ובניגזרותיה.

מקורות נבחרים:

ליבה ע. (2019). ממלבן הזהב לסדרות של פיבונאצ'י. עורכים וכותבים: אילני ב. ושטרקמן א., הוצאת מכון מופ"ת: תל אביב.
רוקח א., יחסי אהבה שנאה בין מספרי לוקאס למספרי פיבונצי, על"ה 21, דצמבר 1997 , עמ 60

Borwein, J. (2007). Aesthetics for the working Mathematician, in N. Sinclair, D. Pimm, W. Higginson (edts), Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity, CMS Books in Mathematics, New York: Springer, pp 21-40.

Dana-Picard, Th. and Hershkovitz, S. (2018). A Glimpse at Mathematics in Jewish Traditional Artefacts, the Symmetry Journal 29 (2), 307-317.

Dana-Picard, Th. and Hershkovitz, S. (2018). Geometrical Features of a Jewish Monument: Study with a DGS, to appear in the Journal of the Mathematics and the Arts.

Dana-Picard, Th. and Hershkovitz, S (2017). Geometrical motives in Jewish traditional artifacts and their usage in STEM Education: One question – Three answers, STEM conference, STEM Education Centre, Johannes Kepler University, Linz, Austria. http://mintlinz.pbworks.com/w/file/118189212/Dana-Picard%20und%20Hershkovitz.pdf

Koshy, Th. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, New York: J. Wiley,

Rokach , A , Optimal Computation , By Computer , of Fibonacci Numbers , in The Fibonacci Quarterly , November 1996 , page 436

Washburn, D.K. and Crowe, D.W. (1988). Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis, Seattle, Washington: University of Washington Press,

קבוצת דיון בנושא: על מחקר בחינוך מתמטי בישראל – הרהורים וערעורים

עטרה שריקי, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך; הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
בועז זילברמן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
רותי סגל, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך; הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
נצה מובשוביץ-הדר, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
קרני שיר, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

במהלך השנים, תחום המחקר בחינוך מתמטי חווה תהפוכות ומחלוקות רבות כחלק מהחיפוש אחר דרכים יעילות ללכידת המורכבות של התחום. מטבע הדברים, העיסוק בכלל הסוגיות הנוגעות לכך הוא רחב ומקיף. במסגרת קבוצת הדיון נעסוק בחלק מהן ונדון בדרכים לתכנון מחקר בהתאם לסוגיות העומדות במוקד העניין של המחקר בחינוך מתמטי בישראל.

רקע: סוגיות כלליות הנוגעות לתכנון מחקר בחינוך מתמטי

לאחרונה, פרסמו אינגליס ופוסטר (Inglis & Foster, 2018) מאמר הסוקר נקודות ציון מרכזיות במחקר בתחום החינוך המתמטי בחמשת העשורים האחרונים, כפי שהן באות לידי ביטוי במאמרים שפורסמו בשניים מכתבי העת המרכזיים בתחום - Educational Studies in Mathematics ו - Journal for Research in Mathematics Education. מסגרת הניתוח של המאמרים הותאמה לתפיסתו של לקטוש (Lakatos, 1978) אודות 'תכנית מחקר', הכוללת שימוש במושגים 'ליבה' (hard core), 'חגורת הגנה' (protective belt) ו'הויריסטיקה' (heuristics). תוך שימוש במסגרת של לקטוש, התייחסו אינגליס ופוסטר (Inglis & Foster, 2018) למגמות בולטות במחקר בחינוך מתמטי:

ירידת קרנן של השיטות הניסוייות. בשנות ה-70, השיטות הניסוייות, שהן חלק משיטות מחקר כמותניות, בלטו באופן ניכר במחקרים שתוארו בשני כתבי העת שנסקרו. מאז, קיימת דעיכה משמעותית בפרסום מחקרים העושים שימוש בשיטות אלו, עד כדי היעלמותם כמעט. ראוי לציין שמצב זה קיים על אף שממשלות רבות מוכנות להקצות סכומי כסף ניכרים לצורך מחקרים כאלה. בד בבד, הולכות ותופסות את מקומן שיטות המחקר האיכותניות, מתוך אמונה שיש בכוחו של מחקר כזה להשפיע באופן משמעותי יותר על העשייה החינוכית. יחד עם זאת, אינגליס ופוסטר מצביעים על כך שבחינוך מתמטי עדיין מתבצע מחקר ניסויי רב, אלא שתוצאות המחקרים הללו אינן מתפרסמות בהכרח בכתבי העת שנסקרו.

"המפנה החברתי" בחינוך מתמטי. בשנות ה-80, תיאוריית המחקר השלטת בחינוך מתמטי הייתה הקונסטרוקטיביזם. בשנות ה-90 זוקקו העקרונות לקונסטרוקטיביזם רדיקאלי, תוך שימת דגש על בניית סכימות כמציאות סובייקטיבית, ולקונסטרוקטיביזם חברתי, השם דגש על ההקשר החברתי, ההיסטורי והתרבותי. כל תכניות המחקר הקשורות לקונסטרוקטיביזם התבססו על אותן הנחות היסוד אשר היוו את ה'ליבה' - בניית ידע היא תהליך פעיל אישי שנועד למצות את היכולת של הפרט להבין את העולם, תוך יצירה של סכימות או ארגונן מחדש. בתכניות מחקר אלו כלי המחקר המרכזי היה ראיון קליני אישי, שבמהלכו המשתתף ביצע רפלקציה מילולית על תהליכי החשיבה שלו.

הנחות היסוד של הקונסטרוקטיביזם כתיאוריית למידה העלו מחלוקות סביב השאלה: כיצד יתכן שידע הנבנה על-ידי פרטים שונים בתהליך פנימי ייחודי יכול להיות משותף לקבוצות חברתיות שונות? היו שקראו לחוקרים בתחום החינוך המתמטי לכלול בתכנית המחקר גם התייחסות לתיאורית למידה סוציו-תרבותית, הגורסת שחשיבה, הסקה וידע הם תוצרים של פעילות חברתית. הבחנה זאת דרשה בנוסף חלופה הויריסטית, שכן אם למידה נוצרת כתוצאה מאינטראקציה חברתית, כי אז יש להחליף את הריאיון הקליני בתצפיות הממוקדות בשיח כיתתי/קבוצתי. כך בהדרגה, החל משנות ה-90 חלה עלייה בתכניות מחקר המבוססות על תיאוריות סוציו-תרבותיות לעומת ירידה

בנושאים 'קונסטרוקטיביסטיים'.

שינויים בתכניות מחקר בשנות ה-2000. בשני העשורים האחרונים התווספו תיאוריות חדשות למחקר בחינוך מתמטי. לדוגמה, תיאוריות דידקטיות, תיאוריות העוסקות בסמיוטיקה ותיאוריות המתמקדות בזהות-עצמית. סקירה רחבה ניתן למצוא בספר שערכו סרירמן ואינגליש (Sriraman & English, 2010). במקביל, מועלות דילמות העוסקות ביסודות התיאורטיים, המושגיים והפילוסופיים של מחקר בחינוך מתמטי, כמו גם במטרות המחקר ובהשפעת העמדות של החוקר. בהקשר זה הציג לסטר (Lester, 2010) את המונח 'מסגרת המחקר' - המבנה הבסיסי של הרעיונות המשמשים תשתית לחקר תופעה מסוימת. מסגרת זאת מסייעת לקבוע את: אופיין של שאלות המחקר; הגדרת המושגים, המבנים והתהליכים של המחקר; עקרונות הגילוי וההצדקה; ועוד. מסגרת מחקר יכולה להיות תיאורטית, קונספטואלית או פרקטית. על החוקרים בתחום החינוך המתמטי להבין את המסגרות השונות, לבחור מביניהן ולעשות שימוש זהיר ומושכל במסגרת המתאימה לצורכי המחקר שלהם. לדעת לסטר, לא תמיד חוקרים מצליחים לעמוד בכך, הן משום שכחוקרים צעירים לא קיבלו הכנה מספקת והן משום שלעיתים עורכים של כתבי עת מחקריים מתעקשים על כך שהחוקרים יציגו הסברים מבוססי תיאוריה לממצאים שלהם.

לסיכום, כל האמור לעיל מצביע על כך שנכון להיום המחקר בחינוך מתמטי מצוי בשלב שבו קיים מגוון תיאוריות וכי תכניות מחקר רבות מתחרות על תשומת לבם של החוקרים. יש הרואים יתרונות לקיומן של פרספקטיבות מרובות ומאמינים ש'תחרות' בין תכניות מחקר מקדמת את התחום, ויש הרואים בכך סכנה להתגבשות הידע כתוצאה מפיזור היכולת של חוקרים להסיק מסקנות עקביות. כדי לאפשר הצטברות של הידע המחקרי יש לאחד גישות תיאורטיות שונות (יצירת 'רשת תיאוריות'), ולכן חיוני לזהות קשרים בין תיאוריות כמו גם ליצור אינטראקציה בין גישות ניסוייות לבין תכניות מחקר סוציו-תרבותיות.

מסגרת העבודה של קבוצת הדיון

בדברי הסיכום של הרצאת המליאה שחתמה את כנס ירושלים השישי, התייחסה מובשוביץ-הדר (2018) לשלוש הנחות יסוד על אודות מחקר בחינוך מתמטי:

- כל מחקר נועד להשיב על שאלה (אחת לפחות). שאלת מחקר טובה צריכה להצביע על אפשרות לתרום לקידום הפתרון של בעיה מורכבת יותר בחינוך מתמטי;
- מענה על שאלת המחקר מערב הסקת מסקנות הניתנות ליישום בשדה, תוך התייחסות מעמיקה לתועלת שעשויה לצמוח מיישומן;
- שילוב בין מחקר, פיתוח, ויישום הוא הכרחי על-מנת שמחקר אכן יתרום לשינויים בשדה (לדוגמה, שינוי במדיניות, בתוכניות הלימודים, בדרכי ההוראה, או ביכולת להכיל את כלל התלמידים).

בהינתן הנחות יסוד אלה (שניתן יהיה, כמובן, לערער עליהן) ועל בסיס הסוגיות הכלליות הנזכרות לעיל, נעסוק בשאלות הבאות:

- מפגש ראשון - מהן הסוגיות הבוערות בחינוך המתמטי בישראל, ומה דרוש כדי לענות עליהן?
- מפגש שני - אילו קשיים עומדים בפני חוקרים בחינוך מתמטי בעת תכנון מחקר שנועד לתת מענה לסוגיות הבוערות בחינוך המתמטי בישראל? מהם השיקולים ו/או המגבלות המנחים חוקרים בתחום החינוך המתמטי בישראל בבחירת סוגיות המחקר וביישום תכניות מחקר?

כהקדמה לדיון בשאלות שלעיל, תינתן סקירה תמציתית של ספרות המחקר הרלוונטית, יוצגו מודלים של חוקרים מתחום החינוך המתמטי שזכו בפרסים על מחקרים מעוגנים בשדה, ודוגמאות לדילמות מחקריות בפרויקטים ארוכי טווח. כחלק מהדיון בשאלות, משתתפי הקבוצה יחלקו מניסיונם המחקרי.

נחתום את שני המפגשים בבחינת האפשרות לקיים המשך לדיונים במתכונת של פורום שייפגש אחת לשנה בכנס ירושלים, ו/או יעסוק בחילופי רעיונות במסגרת מדור ייעודי בכתב העת 'מחקר ועיון בחינוך מתמטי' ו/או כל הצעה אחרת של משתתפי הקבוצה, כל זאת בניסיון להתוות כיווני מחקר התואמים את צרכי החינוך המתמטי בישראל.

רשימת מקורות

מובשוביץ-הדר, נ. (2018). **הרהורים וערעורים על מחקר בחינוך מתמטי בישראל החוגגת 70**. בתוך ע. שריקי ונ. עדין (עורכות). כנס ירושלים השישי למחקר בחינוך מתמטי - ספר מאמרי הכנס, 11.

Inglis ,M & ,.Foster ,C .(2018) .Five decades of mathematics education research .*Journal for Research in Mathematics Education 49*(4), 462-500.

Lakatos, I. (1978). *The methodology of scientific research programmes: Philosophical papers Volume 1*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lester, F. K. (2010). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. In B. Sriraman, & L. English, (eds.). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 67-85). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Sriraman, B., & English, L. (eds.) (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

צילומי שיעור וחקר מקרים לבחינת פרקטיקות הוראה של מורים למתמטיקה בתכנון שיעור וביצועו בגישה יפנית המשלבת הכוונה עצמית

חוה אביטל, סמינר הקיבוצים
ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר אילן

◆◆◆

רקע תיאורטי

מחקרים שנערכו בעשור האחרון הצביעו על המורה כגורם המשפיע ביותר על הישגי התלמידים. על מנת להוביל שינוי ושיפור נדרש תהליך איכותי של פיתוח מקצועי שבו צריכים המורים לרכוש ידע תיאורטי ופרקטי בהוראת המתמטיקה ולפתח אמונות פדגוגיות כלפי ההוראה והלמידה שיעודדו הוראה המתאימה למאה ה- 21 המכוונת את הלומד להיות פעיל ואחראי ללמידתו (Kramarski, 2018).

ביפן רווחת גישת הוראה ייחודית **להוראת מתמטיקה - הוראה דרך פתרון בעיות**. נמצא שגישה זו משפרת את הידע ואת ההישגים של התלמידים (Lewis, 2005; Stigler & Hiebert, 1999). מחקרים מעטים בדקו את הפיתוח המקצועי של מורים למתמטיקה שהשתתפו במסגרות של הוראה לפי הגישה היפנית והשפעתה על הישגי התלמידים מחוץ ליפן (Aravena & Caamaño, 2008; Fujii & Takahashi, 2015). הממצאים מצביעים שיעילות הגישה היפנית במדינות אחרות אינם חד-משמעיים, עובדה העשויה לרמז כי הישגי השיטה ביפן נובעים מהבדלי תרבות ולא מייחודה של השיטה. נראה כי הוראה דרך פתרון בעיות בגישה היפנית אינה קלה עבור המורים, הן ביפן והן במדינות אחרות שניסו לחקות שיטה זו. אי לכך יש צורך במציאת דרכים לפיתוח מקצועי בגישה היפנית כדי לרכוש ולהפעיל אותה בכלל, ובסביבות למידה מתקדמות המשלבות טכנולוגיה בפרט.

לפי הספרות המחקרית וה-[OECD, 2003], כדי לפתח למידה מבוססת חשיבה מסדר גבוה ויכולת פתרון בעיות במתמטיקה, מומלץ להשתמש **בהכוונה עצמית בלמידה** (Self-Regulated Learning - SRL) שהנו **תהליך מעגלי** (Zimmerman, 2008) שבו שלושה שלבים מרכזיים: **תכנון** (הבנת המשימה ובחירת אסטרטגיה), **ניטור** הפעולות **והערכת** התהליך בסיומו. המחקר מצביע ש- SRL חיוני לפיתוח המקצועי של מורים כלומדים וכמורים, וכן לקידום תהליכים אלו בקרב התלמידים (Kramarski & Revach, 2009; Paris & Winograd, 1999, מיכלסקי וקרמרסקי, 2008). כמו כן נמצא במחקרים כי מיומנויות של SRL אינן נרכשות באופן ספונטאני, ועל כן יש לעצב ולפתח אותן על-ידי השתתפות בסביבות למידה שמספקות הזדמנויות להתנסות פעילה בהן (Kramarski & Michalsky, 2009, 2015).

במחקר זה נבדקה תכנית לפיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים המכוונת לטיפוח הידע והפרקטיקה הנחוצים ל**תכנון שיעור וביצועו** בסביבה טכנולוגית על פי הגישה היפנית בסיוע- SRL. בוצע **מחקר מקיף** המשווה בין 3 קבוצות מחקר: קבוצת פתרון בעיות+SRL (הקבוצה המשולבת), קבוצת פתרון בעיות ללא SRL וקבוצת ביקורת, לבדיקת הידע של המורים כפי שעולה משאלונים הצהרתיים **ומחקר עומק על קבוצת מיקוד לבדיקת הפרקטיקה** שלהם **בתכנון ובביצוע** של שיעורים מצולמים משולבי טכנולוגיה. בכנס הנוכחי נתמקד בהצגת החלק השני של המחקר **ובשאלת המחקר: האם ימצאו הבדלים בקרב המורים בשלוש קבוצות המחקר בפיתוח הפרקטיקה (תכנון וביצוע השיעור) תוך התייחסות לשילוב טכנולוגיה ואמונות פדגוגיות של מרכוז הלומד/ המורה במרכז לצרכי הבניית ידע?**

מתודולוגיה

במחקר המקיף השתתפו 115 מורים המלמדים בבתי ספר יסודיים (כיתות ג-ו) באזור המרכז, שחולקו באופן אקראי לשתי קבוצות ניסוי ולקבוצת ביקורת (אביטל, 2017). ההשתלמויות נערכו מטעם הפיסגה (30ש') ועסקו בהוראת המתמטיקה. בקבוצות הניסוי עסקו בהשבחת שיעור המתמטיקה בשילוב טכנולוגיה בגישה היפנית דרך פתרון בעיות. הקבוצה המשולבת - פתרון בעיות + SRL עסקה גם **בטיפוח מפורש** של הכוונה עצמית בלמידה בדגש על **שאלות עצמיות** (מה, איך, מתי ולמה). המורים בקבוצת הביקורת נחשפו להוראת המתמטיקה בבית-הספר היסודי בהלימה לעקרונות תכנית הלימודים.

המחקר נבחן בגישת מחקר משולבת (Mixed methods), כמותית ואיכותנית, תוך שימוש בכלים הצהרתיים (שאלונים ומבחנים) של כלל המורים (n=115), ממצאי השאלונים הוצגו בכנס קודם (אביטל וקרמרסקי 2016).

בכנס הנוכחי נתמקד בממצאי הפרקטיקה בכיתה של קבוצת מיקוד של מורים שיבחרו באופן אקראי מכל קבוצה (6 מכל קבוצה, n=18) בתכנון ובביצוע של שיעור בשילוב טכנולוגיה מבוססת יישומונים כמו יישומטיקה.

לתכנון השיעורים וביצועם נבנו **מחוונים מותאמים** למחקר. **מטרת תכנון השיעור** הייתה לבחון את ההשפעה של תכניות ההתערבות על הקריטריונים: 1. מטרות השיעור, 2. בחירת הבעיה המובילה של השיעור, 3. העלאת מגוון אסטרטגיות לפתרון הבעיה, 4. חשיבה על הקשיים הצפויים, 5. תכנון הדיון שיוביל לרעיונות המתמטיים של השיעור ומטרותיו, 6. בחירת הטכנולוגיה לשיעור, 7. אמונות פדגוגיות - מרכוז מורה/לומד. **מטרת ניתוח השיעורים המצולמים** הייתה לבחון דרכי הוראה שהמורים רכשו בעקבות ההשתלמות בזמן אמת. כל השיעורים צולמו, תומללו ונותחו לפי הרכיבים הבאים: 1. הצגת המשימה (מטרות, חיבור לידע קודם ולאסטרטגיות), 2. זיהוי צומתי החלטה (התאמה לצרכים שעולים בשטח, מינוף הלמידה), 3. טיפול בקשיים (טיפול בשגיאות), 4. טיפוח לומד פעיל (מתן זמן לחשיבה ולדיון), 5. שילוב טכנולוגיה בשיעור (כציר מרכזי בשיעור), 6. אמונות פדגוגיות (מרכוז מורה/למידה). לכל קריטריון הוגדרו ארבע רמות (1 - אפיון נמוך, 2 - אפיון בינוני-נמוך, 3 - אפיון בינוני-גבוה, 4 - אפיון גבוה) מוגדרות היטב ומנומקות על-ידי דוגמאות.

ממצאים

באופן כללי, מדרג הממצאים על קבוצות המחקר נמצא תואם לאופי התמיכה המפורשת שניתנה לקבוצות. הממצאים הבולטים תומכים בחשיבות של הכוונה עצמית בהוראה תוך שילוב טכנולוגיה בגישה היפנית. נמצא כי המורים המשתייכים לקבוצה פתרון בעיות+SRL הפגינו שינויים מובהקים בהשוואה למורים בשתי הקבוצות האחרות (פתרון בעיות וביקורת) בתכנון ובביצוע של שיעור על פי הגישה היפנית, ברכיבים שנבדקו. באשר להבדלים בין הקבוצה פתרון בעיות ובין קבוצת הביקורת, בקרב הקבוצה פתרון בעיות בלט בעיקר ההיבט הפרקטי של ביצוע השיעור שבאופיו היה מורכב יותר. ממצא זה מצביע שהגישה היפנית טיפחה אלמנטים של הכוונה עצמית בלמידה גם בקבוצת פתרון בעיות, אם כי בעוצמה פחותה ולא מפורשת. באשר לקבוצת הביקורת, אף היא גילתה שיפורים במספר מדדים בתכנון השיעור, ובהם שימוש במגוון אסטרטגיות וטיפול בקשיים שאליהם הייתה חשופה במהלך האימון, אך בקרב המורים בקבוצה זו נמצא קושי בביצוע השיעור.

לעומת זאת, בביצוע השיעור, נמצא כי המורים בקבוצה פתרון בעיות+SRL הפגינו שינויים גבוהים במובהק מהמורים בשתי הקבוצות האחרות, בכל אחד מהמדדים שהוגדרו וביניהם מדד האמונות במרכוז למידה ע"י הלומד. הבדלים אילו בלטו אף בניתוח האיכותני של **חקר מקרה על 3 מורות**, אחת מכל קבוצת מחקר. על כך נרחיב בכנס.

דיון

המחקר מציע מודל פרקטי לפיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה המשלב בין תיאוריות וגישות קונסטרוקטיביסטיות בהוראה הנותנות דגש למרכוז הלמידה בלומד והבניית ידע, כפי שבא לידי ביטוי בגישה היפנית תוך שימוש בפדגוגיה מבוססת טכנולוגיה לעידוד לומד פעיל ועצמאי.

המחקר הבליט את הערך המוסף של תכנית ההתערבות המשלבת בין הוראה בגישה היפנית והכוונה עצמית בלמידה על ביצועי השיעורים של המורים בפועל. נמצא כי תכנית ההתערבות המשולבת בגישה היפנית עם הכוונה עצמית - SRL יעילה ביותר בקידום ביצוע השיעור בקרב המורים. המחקר ייחודי בכך שהוא מציע דרכים להערכת הפרקטיקה בתכנון שיעור ובביצועו. בכנס הנוכחי אנו מתמקדים בהערכת ההכוונה העצמית בתהליך הלמידה בזמן אמת (בתכנון וביצוע השיעור) ולא בכלים הצהרתיים כפי שהוצגו בעבר. לשם כך נבנו מחוונים ייחודיים לצורך המחקר. המחקר מחזק מגמות עדכניות בנוגע לחשיבות דרכי הערכה של תהליכי למידה והוראה גלויים וסמויים בו זמנית בזמן אמת אצל מורים במתמטיקה בביצוע שיעור (Kramerski & Revach, 2009).

מקורות:

אביטל, ח' (2017). פיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה בתכנון וביצוע שיעור משולב טכנולוגיה והכוונה עצמית בגישה היפנית. חיבור לשם קבלת תואר "דוקטור לפילוסופיה", אוניברסיטת בר-אילן.

אביטל, ח', קרמרסקי, ב' (פברואר, 2016). התפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה בתכנון וביצוע יחידת הוראה המשלבת טכנולוגיה והכוונה עצמית בלמידה בפתרון בעיות על-פי הגישה היפנית. הרצאה שהוצגה בכנס ירושלים הרביעי למחקר בחינוך מתמטי. ירושלים.

מיכלסקי, ט' וקרמרסקי, ב' (2008). טיפוח הכוונה עצמית בלמידה בקרב פרחי הוראה בסביבה מתוקשבת בזיקה לתפיסות של למידה והוראה. מגמות, מה(4). 765-798.

Aravena, D. M., & Caamaño, E. C. (2008). The method of problem solving based on the Japanese and Polya's models: A classroom experience in chilean schools. Paper presented at the IMCE 11th international congress on mathematical education, Mexico. Retrieved from http://tsg.icme11.org/document/get/454

Fujii, T., & Takahashi, A. (2015). Improving teacher professional development through lesson study. In S.J. Cho (ed.), The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges. New York: Springer.

Kramarski, B. (2018). Teachers as agents in promoting students' SRL and performance: Applications for teachers' dual-role training program. In D. H. Schunk, & J. A. Greene (Eds.). Handbook of Self-Regulation of Learning and Performance.

Kramarski, B., & Michalsky, T. (2009). Investigating pre-service teachers' professional growth in self-regulated learning environments. Journal of Educational Psychology, 101(1), 161-175.

Kramarski, B., & Michalsky, T. (2015). Effects of a TPCK-SRL model on teachers' pedagogical beliefs, self-efficacy and technology-based lesson design. In C. Angelie & N. Valanides (Eds.), Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK): Exploring, developing, and assessing TPCK (pp. 89-112). New York: Springer

Kramerski, B., & Revach, T. (2009). The challenge of self- regulated learning in mathematics teachers' professional training. Educational Studies in Mathematics, 72(3), 379-399.

Lewis, C. (2005). How do teachers learn during lesson study? In P. Wang-Iverson & M. Yoshida (Eds.), Building our understanding of lesson study. Philadelphia, PA: Research for Better Schools.

Organisation for Economic Co-Operation and Development [OECD] (2003). The PISA 2003 assessment framework - Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills. Paris: OECD. Retrieved from http://www.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf

Paris, S. G., & Winograd, P. (1999). The role of self-regulated learning in contextual teaching: Principles and practices for teacher preparation. Retrieved from http://www.ciera.org/library/archive/2001-04/0104parwin.htm

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best idea from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: Free.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. American Educational Research Journal, 45(1), 166-183. doi:10.3102/0002831207312909

הבניית ידע למושגים ביולוגיים בקרב תלמידי תיכון דרך חקר ייצוג מתמטי ביולוגי בסביבה לימודית עתירה טכנולוגית

נארימאן אגבאריה, אוניברסיטת בן גוריון בנגב

◆◆◆

רקע תיאורטי

המחקר המוצע כאן הינו ייחודי בכך שהוא בוחן תהליך למידת חקר באמצעות כלים דיגיטאליים - דינאמיים המשלבים מידול של תופעות ביולוגיות ומתמטיות. מטרת מחקר זה להבין, בהקשר היותר רחב, כיצד שילוב ייצוגים מתמטיים בתופעות מדעיות מסייע לתלמידים להבין את התופעה המדעית תוך כדי פירוש ומתן משמעויות של הייצוג המתמטי. למעשה, שילוב שני העולמות, המתמטי והמדעי, אינו חדש בתחום החינוך המתמטי. בעיקר, מרבית המחקרים התעניינו בשילוב תופעות פיזיקאליות וייצוגים מתמטיים (Testa, Monroy, & Sassi, 2002), ומעט מדי מחקרים בחנו שילוב תופעות ביולוגיות (כמו תהליך יצירת חלבון בתא) עם ייצוגים מתמטיים (Adams & Shrum, 1990; Seçken & Yörük, 2012). בעידן שבו החינוך המשלב מדעים, טכנולוגיה, הנדסאות, ומתמטיקה (STEM Education) מקבל תנופה במחקר הבינלאומי, מחקר בא כדי לתרום לשיח המדעי בתחום זה, על ידי הבנת תהליכי הלמידה של מושגים ביולוגיים עם ייצוגים מתמטיים.

חשיבות שילוב שני העולמות בא לידי ביטוי במה ש (Arzarello, 2016) קורא המעגל המוסרי (Virtuous cycle) (תמונה 1). ארזארלו טוען, כדי לחזק הבנת מתמטיקה בקרב תלמידים, המעגל המוסרי צריך להיות בבסיס העשייה הדידקטית בכיתת המתמטיקה בכל בית ספר.

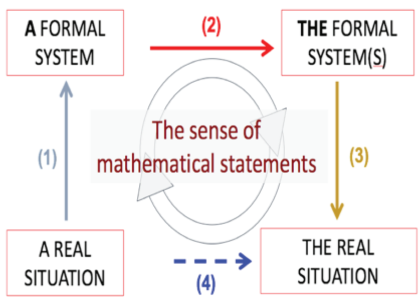


Figure 1. Virtuous Cycle (Adapted from Arzarello (2016a))

המעגל המוסרי, לפי ארזארלו, אמור להתחיל מחשיפת התלמידים לסיטואציה מציאותית (מחיי יומיום או כל סיטואציה אחרת), לדרבן את הסקרנות שלהם, לסייע להם להעלות שאלות ותהיות הנוגעות לסיטואציה עצמה. תוך כדי חקר מדעי ושילוב ייצוגים מתמטיים לסיטואציה המציאותית, התלמיד אמור לעסוק בפירוש הסיטואציה ומתן משמעויות לה. הייצוגים המתמטיים אמורים להינתן בהדרגתיות לתלמידים תוך כדי שמירה על עקרון עיסוק התלמידים בתהליכי חקר מדעי, קרי, שאלת אלות, ביצוע ניסויים, העלאת השערות, אישושן או הפרכתן, וסיפוק הסברים תיאורטיים. בהקשר זה, סוידאן (2018) סיפק עקרונות לתכנון משימות להפעלת המעגל המוסרי תוך כדי עיסוק התלמידים בתהליך למידה מבוססת חקר.

בבסיס מחקר זה עומדות שתי תיאוריות, היגיון הגילוי ותיאוריית ההשתנות. לפי תיאורית היגיון הגילוי שפותחה על ידי היינטיקה לשאילת השאלות יש תפקיד מרכזי בתהליך רכישת הידע. לפי מודל זה יש שני סוגי שאלות. הראשון שאלה ראשית שנקבעת על ידי המטרות הקוגניטיביות של החקר, השני הוא השאלות הקטנות שאליהן נדרשות תשובות כדי לגשת לשאלה העיקרית. במחקרי יש שאלה אחת גדולה והיא מהם הגורמים המשפיעים על תהליך

יצירת חלבונים, גם כך יש שאלות קטנות שמכוונות התלמידים לתת מענה על השאלה הגדולה, ובנוסף לזה שאלות אלה מזמנות גילוי ידע שטמון בסימולציה (Hakkarainen & Sintonen, 2002).
תיאוריית ההשתנות היא תיאוריה של למידה המסבירה כיצד הלומד יכול לחוות, להבין תופעה מסוימת בתנאים מסוימים. הנחת היסוד של תיאוריה זו שיש היבטים קריטיים לתופעה שעל הלומד להיות מודע להן ולהתמקד בהן כדי לחוות את התופעה (Orgill, 2012).
לפי מחקרו של (Arzarello, 2016) אפשר לומר כאשר התלמידים שמים לב להיבטים קריטיים ומשנים אותם ומתבקשים לבחון את השפעתם על התופעה כך אנחנו מעודדים תהליכי חקר בקרב התלמידים ויוצרים מצבים מאתגרים על ידי שינוי היבטים מסוימים תוך שמירה על אחרים קבועים. לכן המחקר הנוכחי השתמש בתיאוריה זו כבסיס לפיתוח משימת חקר, במשימה זו התלמידים התבקשו לשנות משתנים ולבחון ההשפעה שלהם על תופעת יצירת חלבונים. לכל משתנה יש כמה אפשרויות לשנות אותו כלומר לאותו משתנה יש יותר מהיבט אחד, דבר זה עולה בקנה אחת עם מה שנאמר בספרות על ידי (Orgill, 2012) שהבחנה בהיבטים קריטיים נובעת מחוויית שוני בממדים להיבט זה .
בהתבססות על סקירת ספרות ורקע תיאורטי **שאלת המחקר** היא כיצד שילוב ייצוג ביולוגי ומתמטי בסביבה לימודית מתוקשבת יסייע בתהליך הבניית ידע בקרב תלמידים באמצעות למידה מבוססת חקר.

משתתפי המחקר

5 זוגות תלמידי תיכון, ההתמחות שלהם היא ביולוגיה ויש להם רקע ביולוגי וידע קודם בנושא יצירת חלבונים, ממוצע הגילאים שלהם הוא 17 שנים.

ניתוח נתונים

צעד ראשון אחרי העברת ראיון מבוסס משימה פעולות התלמידים תומללו, תוצרי הלימוד שהיו לתלמידים נותחו וקודדו לפי קריטריונים מסוימים שמאפיינים למידה מבוססת חקר והם, אפיזודות החקר, התובנות הביולוגיות שהתלמידים הגיעו אליהן, סוג השאלה שנשאלה, ההתנסות, ההשערות, איסוף נתונים, אישוש או הפרכת ההשערה, מעבר מייצוג ביולוגי למתמטי וההפך.

ממצאים

מניתוח ראשוני עולה שהתלמידים שאלו סוגים שונים של שאלות למשל, מה הם, למה, האם, איך, מתי, מה. שאלות אלה עזרו לתלמידים לשים לב למושגים מדעיים חשובים מאוד למשל, פעילות האנזים, פקטורי שעתוק, גדילי דנ"א, רנ"א שליח, דגרדציה של חלבון, גדיל מתועתק, פירוק חלבון, חומצות אמינו...
תלמידים עושים מעבר מהצד הביולוגי לצד המתמטי בשלב שאילת שאלות והסקת מסקנות, לעומת זאת התלמידים עושים מעבר מהצד המתמטי לצד הביולוגי בכל שלבי החקר (שאילת שאלות, השערת השערות, בדיקת השערות, איסוף נתונים, הסקת מסקנות).
תלמידים משתמשים במושגים מתמטים כדי לפרש תופעות ביולוגית ולהסיק מסקנות, כמו, הגרף עולה, הגרף יורד, קצב אחיד, קשר הפוך, קו ישר, קצב לא אחיד, ירידה, קו אינו ישר, קצב שינוי, קבוע, שיווי, ירידה בקצב קבוע, ממוצע, קו ישאף לאיזון.

דיון

לפי (Manzano, 2018) תהליך שאילת שאלות עוזר לתלמידים להבין מה רלוונטי בהקשר חקירת התופעה, דבר זה עולה בקנה אחת עם תוצאות המחקר שלי, לפי הניתוח הראשוני ניתן לראות כי תלמידים בתהליך שאילת שאלות משתמשים במונחים מדעיים קשורים לתופעה הנחקרת. לפי (Cross, Charles, & Roelofsen, 2016: 1) שאלות כמו למה, מי הן שאלות שמבקשות הסבר לתופעה נדונה, נוסף לזה שאלות אלה חשובות בתהליך החקר.

רשימה ביבליוגרפית

Adams, D. D., & Shrum, J. W. (1990). The effects of microcomputer-based laboratory exercises on the acquisition of line graph construction and interpretation skills by high school biology students. Journal of Research in Science Teaching, 27(8), 777–787.

Arzarello, F. (2016). How to promote mathematical thinking in the classroom. Lecture delivered at the 3rd Italian Summer School in Math Education, UMI-CIIM, Bardonecchia, 2016.

Kai Hakkarainen., & Matti Sintonen. (2002). The Interrogative Model of Inquiry and Computer-Supported Collaborative Learning. Science & Education. 11: 25–43.

Orgill M. (2012) Variation Theory. In: Seel N.M. (eds) Encyclopedia of the Sciences of Learning. Springer, Boston, MA.

Seçken, N., & Yörük, N. Z. (2012). An analysis of relations between concerns about the use of graphs in chemistry classes and multiple intelligences in terms of different variables. International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education, 1(2), 142–156.

Swidan, O., & Naftaliev, E. (September 19, 2018). The role of the design of interactive diagrams in teaching???learning the indefinite integral concept. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1-22.

Testa, I., Monroy, G., & Sassi, E. (March 01, 2002). Students' reading images in kinematics: The case of real-time graphs. International Journal of Science Education, 24, 3, 235-256.

למידה המשלבת תפיסות שגויות טעויות ואסטרטגיות פתרון בנושא שברים פשוטים

אילנית איטון, בית ספר ע"ש יהודה בכר אבן-יהודה
רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאומנויות

◆◆◆

מחקרים רבים ברחבי העולם בנושא השברים מראים, שתלמידים מתקשים בתפיסת מושג השבר ובנימוקיהם מתגלות תפיסות שגויות (Stafylidou & Vosniado, 2004) תלמידים רבים לא מסוגלים כלל לבצע פעולות בשברים מפאת בלבול עם פעולות במספרים טבעיים. למשל, בבעיות הדורשות פעולות חיבור של שברים, תלמידים מתייחסים למכנה ולמונה של השבר כשתי ישויות נפרדות. הסיבות לכך הם קושי של התלמידים בפתרון בעיות המערבות שברים הכוללות חוסר בהבנה של יישום תהליכים מתאימים בפתרון בעיה ובמורכבות המשימה והכללת יתר של תהליכים ממספרים טבעיים לשברים. למשל, פעולת כפל מגדילה, אך אינה נכונה כשמדובר בכפל בשברים קטנים מ-1 (Ndalichako, 2013). המועצה הלאומית של מורי המתמטיקה בארה"ב הציעה לבצע שינוי בדרך בה מלמדים שברים פשוטים, על מנת לשפר הבנת תלמידים וביצועים בנושא. למשל, להתייחס לטעויות של תלמידים ולדון בהן כדי לשפר את תהליך ההוראה והלמידה (NCTM, 2000). הטענה היא, שלמידה והבנה מעמיקה במתמטיקה מתרחשת כאשר התלמידים מתבקשים לשפוט ולהצדיק מה מוטעה ושגוי בפתרון (Adams, McLaren, Durkin Mayer, Johnson, Isotani & Velsen, 2014). חקירת טעויות נחשבת כמקור פוטנציאלי לרכישת ידע ומיומנויות קוגניטיביות (Siegler, 2002 as sited at Adams at al., 2014). למידה מדוגמאות שגויות מעמיקה את הידע שכבר נרכש ומטפחת את ההישגים. כמו כן חקירה של דוגמאות שגויות מהווה אתגר לתלמידים, מעוררת בהם את הרצון לחקור ודורשת מהם זיכרון עבודה. כלומר, התלמידים לא נדרשים רק להצגת הצעדים לפתרון הנכון בזיכרון העבודה שלהם, אלא בנוסף, עליהם למצוא את הצעדים השגויים בפתרון ולהסביר אותם יחד עם תיקון אפשרי שיוביל את הפתרון השגוי לפתרון נכון (Grobe & Renkl, 2007; Borasi, 1994) הציגה מסגרת תיאורטית להוראת המתמטיקה המבוססת על לימוד מטעויות והדגישה כי, לדעתה, הוראה זו מעודדת תלמידים לחקור, מסייעת ללומדים לפתח שיח מתמטי וביטוי מילולי לרעיונותיהם, תורמת לקידום הבנת התוכן המתמטי בצורה מעמיקה וכמו כן יוצרת אצל הלומדים מודעות לחשיבותה של החשיבה וההנמקה ומפתחת בלומדים בטחון לגבי יכולתם ללמוד מתמטיקה.
מטרת מחקר זה הייתה לבחון את השפעתה של פעילות המבוססת על למידה מטעויות על הישגיהם של תלמידי כיתות ה' בנושא השוואה ופעולות בשברים פשוטים. המחקר התמקד בשלוש שאלות:

1. באלו אסטרטגיות משתמשים תלמידים בפתרון משימות השוואה ופעולות בשברים פשוטים?
2. אלו טעויות נפוצות או תפיסות שגויות קיימות אצל תלמידים בפתרון משימות בשברים פשוטים?
3. מהי ההשפעה של למידה מטעויות על קידום יכולות התלמידים בפתרון משימות בשברים פשוטים ותרומתה לתלמידים עצמם?

במחקר השתתפו 105 תלמידים הלומדים בשכבת כיתות ה'. בשלב הראשון, הועבר שאלון מקדים לכל התלמידים, שמטרתו הייתה לבחון באלו אסטרטגיות משתמשים התלמידים בפתרון משימות בהשוואת שברים ובפעולות חיבור וחיסור שברים ובנוסף לבדוק טעויות נפוצות ותפיסות שגויות בפתרון משימות אלו. בשלב השני למדו והתנסו 15 תלמידים בפעילות מבוססת טעויות בנושא השוואת שברים ופעולות חיבור וחיסור בשברים. בשלב השלישי הועבר שאלון ל- 15 תלמידים שהשתתפו בפעילות של למידה בדרך של חקר וגילוי טעויות ובשלב הרביעי נערכו ראיונות ל- 10 תלמידים מתוך 15 התלמידים שהשתתפו בפעילות וביצעו שאלון בעקבותיה. מתוך ממצאי המחקר ניתן לראות שפעילות המבוססת על למידה מטעויות שיושמה במחקר זה תרמה לקידום יכולות והישגים בקרב רוב הנחקרים שהשתתפו בפעילות.

בעקבות הפעילות, חלק ניכר מהנחקרים שהשתתפו בה, גילו שיפור ושינוי באסטרטגיות הפתרון בהשוואת שברים ובפעולות בשברים. כמו כן מעל מחצית המשתתפים בפעילות גילו שביעות רצון מהלמידה, שינוי בתחושת המסוגלות ללמוד ואף חל שינוי בתפיסתם לגבי שימוש בטעויות כמקדמות ותורמות להבנת התוכן הנלמד. ממצאי המחקר מחזקים ומדגישים את הפוטנציאל הגלום בפעילויות המבוססות על למידה מטעויות לקידום תהליכי הוראה ולמידה בנושא השברים. מהמחקר עולה כי שיטת הוראה כזו יכולה לסייע לתלמידים להתמודד עם חששות מפני טעויות. הוראה מסוג זה מעצימה את התלמיד ומשנה תפיסתו למושג טעות, ומביאה אותו להכרה כי טעות לעיתים הינה מקור ללמידה. למידה זו מאפשרת ללומדים לשנות גישה לאפשרות לטעות והופכת את הטעות מאקט שמעיד על חוסר הצלחה, חוסר ידע או קושי מסוים, למנוף ללמידה, לשיפור והתפתחות בתחום הידע ולמניעת טעויות בעתיד.

ביבליוגרפיה

Adams, D. M., McLaren, B. M., Durkin, K., Mayer, R. E., Rittle-Johnson, B., Isotani, S., & Van Velsen, M. (2014). Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. Computers in Human Behavior, 36, 401-411.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. Journal for Research in Mathematics Education, 25, 166-208.

Große, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes?. Learning and Instruction, 17, 612–634.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Virginia, NCTM.

Ndalichako, J. L. (2013). Analysis of pupils' difficulties in solving questions related to
Fractions: the case of primary school leaving examination in Tanzania. Creative Education, 4(9),69-73.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students understanding of the numerical value of fractions. Learning and Instruction, 14, 503-518.

הזהות המתמטית של ילד בעיני הגננת וההזדמנויות ללמידה שהיא יוצרת עבורו

טלי אילון, אוניברסיטת חיפה

◆◆◆

ילדים מתוייגים, מזוהים או מגדירים עצמם במונחים כמו "מתקשה", "לקוי" או "חלש" כבר בשלב מוקדם בחייהם ולתיוג הזה יש השלכות רגשיות ומעשיות. רבות נכתב על "נבואה המגשימה את עצמה", הרעיון שחיזוי העתיד לקרות למעשה משפיע על התפתחות המצב עצמו. ההבנה כי הציפיות של המורה משפיעות על התנהגות התלמידים, מכונה בספרות "אפקט פיגמליון", מושג שטבעו רוזנטל וג'ייקובסון (Rosenthal & Jacobson, 1968) כדי לתאר את התהליך שבו קולטים התלמידים את הציפיות הסמויות של המורים וממששים אותן. אפקט זה מהווה נקודת מוצא לעבודה זו, שמנסה לתרום להבנת המנגנונים המונחים ביסודו.

במחקר נעשה שימוש בגישה הקומוגניטיבית לבחינת ההזדמנויות ללמידה שהגננת יוצרת עבור לומדים שונים בהתאם לציפיות הקיימות שלה מהם. המונח קומוגניציה (commognition) מאחד את התיאוריות של תקשורת וחשיבה מתוך הנחה עקרונית שחשיבה היא תהליך של תקשורת של אדם עם עצמו ולכן חשיבה ותקשורת הן למעשה שני חלקים של אותו שלם. גישה זו מאפשרת לראות את תהליך ההוראה וההערכה בזווית אחרת כיוון שהיא מעבירה את הזרקור לאופן השתתפות התלמיד בשיח המתמטי.

שיח מוגדר כתקשורת המתנהלת על פי דפוסים ייחודיים, רוטינות מסוימות (Sfard, 2007, 2008). רוטינה דיסקורסיבית, היא דפוס שיח שחוזר על עצמו הנצפה בפעילות של תקשורת והיא יכולה להיות משני סוגים: רוטינה ריטואלית (ritual) ורוטינה חקירתית (exploration) (Sfard & Lavie, 2005; Nachlieli & Tabach, 2012). השתתפות ריטואלית בשיח מאופיינת בנוקשות ובהדגשה של השגת תוצאה סופית נכונה בזמן קצר ככל הניתן. לעומתה, השתתפות חקירתית יכולה להתבצע ביוזמתו של המבצע ומערבת קבלת אחריות של הלומד על הלמידה. ההבחנה בין רוטינה ריטואלית לחקירתית מובילה להזדמנויות ללמידה בעלות מאפיינים שונים. הזדמנות ללמידה ריטואלית כוללת ציפייה מהלומדים לעקוב אחרי חוקים באופן קנוני וחסר מודעות תוך שינון ותרגול הנלמד. לעומת זאת, הזדמנות ללמידה חקירתית מאופיינת, בין היתר, בכך שהיא מכוונת חקר, פיתוח תובנות, עידוד להשתתפות בשיח, הגברת החשיבה הרפלקטיבית, ופחות הסתמכות על סמכות חיצונית. בלמידה מסוג זה מסוגלות מוערכת על פי הנמקות ולכן ניתנות הזדמנויות לטעות תוך עידוד דרכים שונות לפתרון (Sfard, 2015).

טבעי ונחוץ שמורה תאפשר לילדים הזדמנויות למידה שונות, וודאי שצריך ללמד ילדים מתקשים באופן שונה מאלה שאין להם כל קושי. עם זאת, במחקר זה יש עניין בעיקר באותם מאפיינים של דרך ההוראה שלא ניתן להתייחס אליהם כנובעים מההנחה של המורה או הגננת שהם יעזרו לילד בלמידה. מחקרים שונים (,Heyd-Metzuyanim 2013; Sfard & Prusak, 2005; Solomon, 2007; Metzuyanim, 2013) מעידים על הדרך בה אנו עשויים, לרוב בלי שאנו מודעים לכך, לפתוח או לסגור הזדמנויות ללמידה רצויה, וזאת בשל הזהות שיש לילדים בעינינו.

זהות, על פי הגדרתן של ספרד ופרוסק (Sfard & Prusak, 2005), היא אוסף נרטיבים על פרט. זהות מתמטית כוללת תפיסה עצמית חיובית/שלילית לגבי למידת מתמטיקה, ולגבי היכולת להצליח במתמטיקה.

המחקר עוסק בגננות גן חובה והוא נועד להרחיב את הידע הקיים בנושא הקשר בין זהות לאופן ההוראה עבור גילאים צעירים יותר. השאלה שהמחקר עונה עליה היא: האם קיימת הבחנה בין ההזדמנויות ללמידה שיוצרת הגננת עבור ילדים בעלי זהות מתמטית שונה בעיני הגננת? ואם אכן קיימת אצל גננות נטייה לעצב את ההזדמנויות ללמידה באופן דיפרנציאלי, בהתאם לזהות הלומד בעיניהן- האם הן מודעות לנטייה זאת?

במחקר השתתפו (1) שתי גננות גן-חובה מישוב בצפון הארץ (2) שני ילדי מיקוד מכל גן: ילד שזוהה על ידי הגננת כבעל זהות מתמטית שלילית (דהיינו "מתקשה" או "חלש") וילד שזוהה על-ידה כבעל זהות מתמטית חיובית, שנבחר בכדי לאפשר מקור להשוואה של אינטראקציית הגננת עם כל אחד מהם.

המחקר בוצע בשלושה שלבים. בשלב הראשון נערך ראיון מקדים עם כל גננת במטרה ללמוד על הסיפורים המאומצים של הגננת בנושא מתמטיקה והוראת מתמטיקה ולהחליט על שני ילדים שיהיו רלוונטיים למחקר הנוכחי. בשלב השני נערכו תצפיות על האינטראקציה של הגננת עם קבוצות ילדים, תוך דגש על התבוננות ולאחר מכן ניתוח של האינטראקציות ההוראתיות של הגננת עם ילדי המיקוד. בשלב השלישי נערך ראיון מסכם עם כל גננת בו היא התבקשה להתייחס לקטעי תצפיות נבחרות שצולמו. הראיונות הוקלטו, תוכתבו ונותחו והתצפיות גם צולמו.
כל אחד משלושת השלבים נותח באופן מעמיק על פי סכמה אנליטית ספציפית מפורטת. הסכימות נכתבו באמצעות תהליך משולב של גישה דדוקטיבית (גזירת הסכמה מהתיאוריה) ואינדוקטיבית (גזירת הסכמה מן הנתונים). השאלות מנחות הניתוח היו: (1) מהי זהותו של הילד כלומד מתמטיקה בעיני הגננת? (2) מה טיב ההוראה של הגננת - האם היא ריטואלית או חקירתית? (3) אם אכן הגננת יוצרת הזדמנויות ללמידה שונות ללומדים המצטיירים בעינה כבעלי זהויות שונות כלומדי מתמטיקה, עד כמה היא מודעת לאבחנה זאת? (4) מהן הפעולות שאותן מבצעת הגננת לעיצוב זהותו הפומבית של הילד כלומד מתמטיקה?

ממצאי המחקר מאוששים את הנחת השפעת הזהות המתמטית של הלומד, כפי שבאה לידי ביטוי בנרטיב הגננת, לאופי הזדמנויות הלמידה שהיא יוצרת בשבילו.
הראיונות המקדימים מעידים על כך שלדעת הגננות במחקר, לילדים שונים יש צרכים שונים בכל הקשור לאופן למידה, ולכן הן פועלות באופן מודע להתאמת אופן ההוראה לצרכים וסגנון הלמידה של הילד. נמצא כי התאמת ההוראה מתבצעת בצורה שונה אצל גננות שונות, בהתאם לדעותיהן של הגננות על המתמטיקה, על הלמידה ועל הלומד, ובהתאם לתכונותיה האישיות של הגננת.
אופי ההוראה של הגננת, במובן של ריטואלית או חקירתית, שונה בין הגננות. התצפיות מלמדות שהאופן בו הגננת בוחרת תכני למידה, מארגנת את החומר ומציגה אותו - כל בחירה כזו מעצבת הזדמנות שונה ללמידה ולכל אחת השפעה אחרת על המעבר הרצוי מעשייה מתמטית ריטואלית לחקירתית. העובדה שזהות שלילית גורמת לצמצום הזדמנויות ללמידה ולכן לתופעה של נבואה המגשימה עצמה, מעידה שלא כל הילדים מקבלים הזדמנות שווה. אמנם הגננות בוחרות באופן מושכל ומודע באופן שבו הן מלמדות, אך השוני בהוראה מלווה לעיתים בצמצום במגוון הזדמנויות ללמידה ובהנצחת הזהות השלילית, ולכך הן לאו דווקא מודעות.
המחקר מרחיב את הידע הקיים בנושא הקשר בין זהות לאופן ההוראה עבור גילאים צעירים יותר. הוא מאיר את השפעת הגדרת הזהות של הילד על ידי הגננת על קידומו או כישלונו בתהליך הלמידה באמצעות מתן הזדמנויות שונות ללמידה. הטענה המרכזית היא שזהות שלילית של הילד בעיני הגננת עלולה להוביל לצמצום משמעותי של הזדמנויות ללמידה מסוג של זו שהינו רוצים לראות. דרכי הוראה מותאמות יכולות לענות על צרכיהם של ילדים מתקשים או לקויי למידה אבל במקביל עלולות לחסום את ההזדמנות להתנסות בהשתתפות עצמאית בשיח ובלמידה חקירתית. אם הגננת לא נותנת לילד "מתקשה" הזדמנות ללמידה חקירתית, הרי שיש כאן עניין של נבואה המגשימה מעצמה: הגננת יוצרת את אי-יכולתו של הילד, ולא רק פועלת על פיה.
הבנה זו אולי תוביל את הגננות לבקר את דרך הוראתן, במובן של הוראה ריטואלית מול חקירתית, ותהפוך אותן מודעות יותר להזדמנויות ללמידה שהן נותנות לכל ילד, במטרה לאפשר את המעבר המיוחל מלמידה רוטינית לחקירתית אצל כלל הילדים.

ביבליוגרפיה

Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics-Teacher-student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. Educational Studies in Mathematics, 83(3), 341-368.

Nachlieli, T., & Tabach, M. (2012). Combining theories to analyze classroom discourse: an example. Proceedings of the 12th International Congress of Mathematics Education (ICME). Seoul, Korea.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. Journal for Learning Sciences, 16(4), 567–615.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2015). Ritual for ritual, exploration for exploration or What the learners get is what you get from them in return. In J. Adler & A. Sfard (Eds.), Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning. London: Routledge.6-41.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. Educational Researcher 34(4), 14-22.

Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? Early numerical thinking revisited. Cognition and Instruction, 23(2), 237-309.

Solomon, Y. (2007). Experiencing mathematics classes: Ability grouping, gender and the selective development of participative identities. International Journal of Educational Research, 46(1-2), 8-19.

תלמידים בוחרים נתונים במשימות תרגול בטכנולוגיה של הערכה מעצבת

יוליה בגדדי, החממ"ה[1], אוניברסיטת חיפה

◆◆◆

מבוא

מחוללי תרגילים אלקטרוניים משמשים כבר שנים להכנת דפי תרגול דינמיים (למשל מטח-תוא"ם, קהן אקדמי וכ"ו). הערכים המספריים של תרגילים בדפים אלה הם פרמטרים המתקבלים באקראיות מוגבלת (ערכים מספריים השייכים לסוגי מספרים שהוגדרו ע"י מעצב המשימה). אולם מה יכולה להיות השפעת האקראיות כאשר ניתן לתלמיד לבחור את המספרים הפרמטריים כנתוני משימה? מה יהיו השיקולים לבחירה? ומה נוכל ללמוד לצורך שיפור ההוראה מניתוח הבחירות הללו? נענה על שאלות אילו תוך תיאור מחקר בו נחקרת סביבת הערכה אוטומטית שמטרתה הערכה מעצבת והיא מזמנת לתלמידים שליטה בבחירת ערכי הנתונים המיוצרים אקראית במשימה.

רציונל ורקע תאורטי

מעצבים של מחוללי תרגילים מתמקדים באסטרטגיות ומקרים מיוחדים, למשל, דרגת קושי, שגיאות נפוצות וכדומה. גם תלמידים מורגלים לפתור בד"כ את כל התרגילים הניתנים להם ולפי סדר הופעתם. כאשר עוסקים בהערכה, ההרגלים האלו, של עיצוב ושל פתרון, הם הנחת יסוד שיש בה טעם אבל גם בעייתיות ובמיוחד כאשר מטרה מרכזית של ההוראה היא למידה פעילה בה התלמיד נוטל אחריות לרעיונותיו ופעילותו המתימטית (Schoenfeld, 2010). אחת הדרכים לאחריות כזו המתרחשת בסביבה אינטראקטיבית היא שיתוף התלמיד בבחירת הנתונים (כגון: המקרה המסויים שנבחר בדיאגרמה אינטראקטיבית עם נתונים לפרמטרים). מאפיין מרכזי של דוגמאות נבחרות כאלו הוא שהן נבחרו מתוך מגוון של אפשרויות (Watson & Mason, 2005).

הנחתנו היא שהערכה במצב בו תלמידים בוחרים נתונים על מנת לפתור תרגילים, רלוונטית כהערכה מעצבת שעשויה לאפשר למורה לראות ולאפיין את הבחירות של תלמידים (למשל: רלוונטי למורה לתהות מדוע תלמיד שינה את נתוני התרגיל הראשוני ו"ייצר" בעזרת אלגוריתם של אקראיות מוגבלת תרגילים אחרים ומה היתה הבחירה). בהערכה מעצבת כזו מתקבל מידע רב יותר. במחקרי למידה שנעשו עם משימות דומות (Yerushalmy, Shubash, 2009) תלמידים בחרו לפתור תרגילים עם נתונים שהובילו לתרגילים מוכרים שקל היה להם לפתור. מטרתנו ללמוד ולנסח עקרונות עיצוב משימות הערכה המאפשרות לתלמידים לבחור את הנתונים עבור התרגיל אותו הם פותרים ולאפיין באמצעות הערכה מקוונת את הבחירות האלה. במחקר שאלנו:

- מה נוכל ללמוד על מיומנותם של התלמידים בכיתה לפי ערכים לתרגילים שהם בחרו בתחום הפונקציות הלינאריות?
- מה ניתן ללמוד על מרחב הדוגמאות של תלמיד לפי הבחירות שלו?

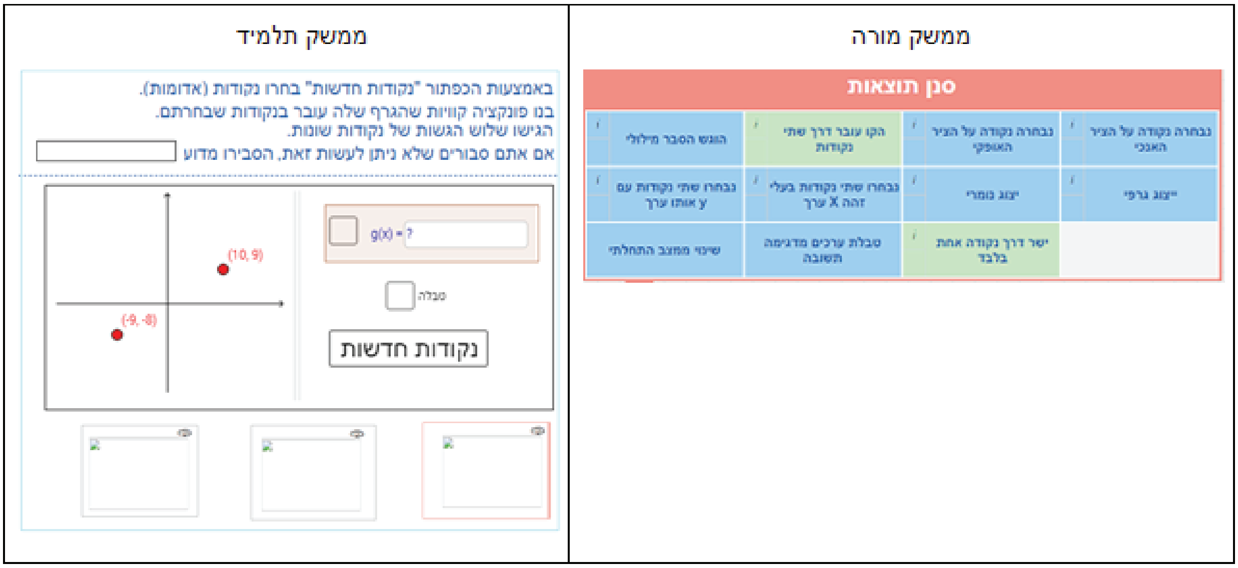
מתודולוגיה

מחקר זה הוא חלק ממחקר מתמשך העוסק בהבטים שונים של הערכה הממוחשבת. אנחנו התמקדנו במשימות ההערכה בהן תלמידים מתבקשים לפתור משימה (במקרה של איור 1 מדובר בכתיבת פונקציה קוית המקיימת 2 נקודות נתונות). אולם מוצע במשימה לבחור נתונים אחרים מהערכים הנתונים במשימה (ע"י הפעלת מחולל התרגילים האקראיים פעמים רבות כחפצם. כפתור "נקודות חדשות" באיור 1), לפתור ולהגיש להערכה שלושה תרגילים עם נתונים שנבחרו (3 חלונות בתחתית "ממשק תלמיד" באיור 1). מעצבת המשימה הגדירה טווח לערכי הפרמטר האפשריים, תוך ציון ההסתברות של כל "סוג" התרגיל שניתן ליצור. כמו כן הוגדרו מאפיינים לתיוג אוטומטי

---

1 המרכז לחדשנות ומחקר בחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה. הדיווח הוא על מחקר ופיתוח בהנחיית פרופ' מיכל ירושלמי.

של התרגילים שנבחרו והוגשו על ידי התלמידים (ממשק מורה באיור 1) לפי "סוג" הנתון שנבחר. למשל: שינוי הנתון התחלתי, נבחרה נקודה על הציר האנכי, נבחרו נקודות עם אותו ערך x, נבחרו נקודות עם אותו ערך y, שימוש בייצוג גרפי (שכן אפשר להתייחס רק לביטויים מבלי לשרטט ולהגיש גרף).



איור 1: ממשק מורה ותלמיד של המשימה במחקר

המחקר הנוכחי נערך בכיתה ט בבית ספר במרכז הארץ. במסגרת חזרה על החומר הנלמד וכהכנה למעבר לחטיבה העליונה תלמידים פתרו משימות במערכת להערכה מעצבת (המרא"ה[2]) (Olsher, Yerushalmy & Chazan, 2016) בנושאים פונקציה לינארית ופונקציה ריבועית. זאת היתה הפעם הראשונה שתלמידים פתרו משימות בהמרא"ה אך הם מורגלים בעבודה בגיאוגברה בלימוד הפונקציות. נתאר ממצאים ממשימה אחת (איור 1). בסיום הניסוי נערך דיון רפלקטיבי בכיתה. בדיון התלמידים נשאלו על ידי המורה: "האם בחרתם נתונים חדשים שונים מהנתונים ההתחלתיים במשימה ומה הסיבה לבחירתכם?"

ממצאים נבחרים

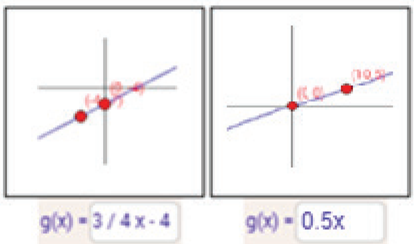
נותחו אוטומטית 42 תרגילים שהוגשו על ידי 14 תלמידים. הממצאים בטבלה (איור 2) מתחלקים לשני סוגי המאפיינים: נכונות (בדיקת תשובה נכונה) ומאפייני הגשות. כל התלמידים בניסוי הגישו פתרון נכון של השאלה במשימה לפי הנתונים שנבחרו על ידם. המאפיין בו הגרף עובר דרך נקודה אחת כאשר שתי נקודות מתלכדות, לא נכלל ברשימת המאפיינים שהוכנו לניתוח האוטומטי אלא זוהתה במהלך הניסוי.

2 מערכת המרא"ה (הערכה מעצבת לראות את התמונה) המפותחת בחממ"ה, משלבת פלטפורמה לפיתוח של משימות עשירות במתמטיקה, להן יותר מתשובה נכונה אחת בדרך כלל, וייצוגים רבים ושונים לכל בעיה, בדיקה של המשימות באופן אוטומטי. www.visfame.com

			מס' תלמידים	מס' הגשות
מאפייני נכונות – בדיקת תשובות נכונות		הגרף עובר דרך שתי הנקודות שנבחרו	14	42
		הגרף עובר דרך אחת מהנקודות בלבד	0	0
		הגרף עובר דרך נקודה אחת (שתי נקודות מתלכדות	6	10
מאפייני הגשות	שימוש ברב- ייצוג	שימוש בייצוג גרפי	12	36
		שימוש בייצוג נומרי	3	8
		הסבר מילולי	1	1
	מאפייני בחירת הנקודות	שינוי מהמצב ההתחלתי	14	36
		נבחרה נקודה על ציר y (לא כולל ראשית הצירים)	10	11
		נבחרה נקודה על ציר x (לא כולל ראשית הצירים)	6	6
		נבחרה נקודה בראשית הצירים	8	9
		נבחרו שתי נקודות עם אותו ערך x	2	4
		נבחרו שתי נקודות עם אותו ערך y	2	2

איור 2: טבלת ניתוח הממצאים

נתמקד כאן במאפיינים של בחירת נקודות. רוב התלמידים (12) בחרו נתונים לתרגילים שפתרו והגישו. ההוראה במשימה היתה "באמצעות הכפתור "נקודות חדשות" בחרו נקודות (אדומות)", אך תלמידים יכלו לפתור את התרגיל עם הנקודות ההתחלתיות ((10,9),(-9,-8)). מצאנו שאצל שבעה תלמידים היו הגשות שכללו ערכים רציונלים (איור 3) ולהשערתנו חיפוש נתונים שהם מספרים שלמים לא היה סיבה לשינוי. כאשר בחנו את התרגילים בהם הנתונים שונו גילינו ש 10 מ 14 כללו בהגשות שלהם בחירה באחת מהנקודות על ציר ה-y ו 8 מהם בחרו את נקודת ראשית הצירים. בחירת נקודה על ציר ה yאיפשרה להסתפק בחישוב השיפוע לפי שתי הנקודות והצבת ערך ה y בנקודה השניה כפרמטר החופשי בביטוי המוגש. בדיון הרפלקטיבי שנערך בכיתה תלמידים ציינו את הסיבה לבחירת הנתונים החדשים כתרגילים שקל ומהר יותר לפתור.



איור 3: דוגמאות של תרגילים עם נקודה אחת ציר-y עם פרמטרים רציונליים.

אחד הממצאים המעניינים הוא מקרה בו שתי נקודות שנבחרו מתלכדות (איור 4). בעיצוב של "סוגי" תרגילים לא מנענו את האפשרות הזו בבחירת הנתונים אך לא עיצבנו מאפיין מיוחד למקרה הזה. למעשה, תלמידים לא רק שינו את הנתונים אלא עסקו כאן במשימה שונה "פונקציה קוית דרך נקודה". תלמיד הסביר את בחירתו: "אני בוחר להגיש דוגמאות של תרגילים שאני בטוח יודע לענות עליהם".

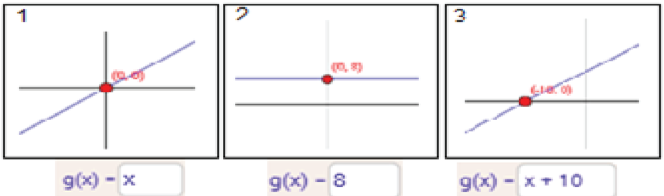


Figure 3: Submissions of Ido

איור 4: תרגילים עם שתי נקודות מתלכדות

דיון

בעקבות ניתוח אוטומטי של הגשות התלמידים, המורה בניסוי זיהתה את המאפיין של בחירת אחת מהנקודות על ציר y כנפוץ בכיתה. היא פירשה מאפיין זה כקושי במציאת פרמטר חופשי בביטוי אלגברי אצל התלמידים וחזרה על הנושא בכיתה. מרחב הדוגמאות של תלמידים במקרים בהם נבחרו שתי נקודות מתלכדות ונקודה בראשית הצירים היה שונה מהתרגיל המקורי ומצומצם (Mason, Watson, 2002). למשל, במקום מקרה כללי של $y = mx+b$, הם התייחסו ל-$y = mx$ (במקרה של ראשית הצירים).

משימות בהן תלמידים בוחרים נתונים הן בעלות תכונה חדשה ומעניינת. בפני מעצבת המשימות עומדים מספר אתגרים: מהו טווח הדוגמאות, מהי ההסתברות של נתונים "מיוחדים"? על בסיס מחקר זה נרצה לבנות משימות נוספות בהן תלמידים יבחרו נתונים לתרגילים, ונאפיין את הבחירות בעזרת המערכת להערכה המעצבת.

מקורות

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evolution and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education), 21(1), 5.

Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). How Might the Use of Technology in Formative Assessment Support Changes in Mathematics Teaching? For the Learning of Mathematics, 36(3), 11-18.

Schoenfeld, A. H. (2010). How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications. New York: Routledge.

Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. Canadian Journal of Science. Mathematics and Technology Education, 2(2), 237–249.

Yerushalmy, M., & Shubash, N. (2009). Experiencing examples with interactive diagrams: Two types of generalizations. In Proceedings of the 33rd annual conference of the international group for the psychology of mathematics education Thessaloniki, Greece.

פעילויות משברים פשוטים ועד שברים אלגבריים לפתוח מיומנות מטה קוגניטיבית במציאת מכנה משותף

רונית בסן צינצינטוס - סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאומנויות
דורית פטקין - סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאומנויות

◆◆◆

המחקר הנוכחי עוסק בתרומה של פעילות דו-שלבית המבוססת על פיתוח מיומנות מטה-קוגניטיבית על מציאת מכנה משותף, החל בשברים פשוטים ועד שברים אלגבריים, המיועדת להעצמת פרחי הוראה ומורים המלמדים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי ובחטיבות הביניים, ולתלמידים הלומדים בכיתות אלו. מטרת הפעילות להוביל מתכַּשרים להוראה לפתח בעצמם פעילויות למציאת מכנה משותף ולחשוף אותם לטעויות ולתפיסות מוטעות בהכנת הפעילויות. מהפעילות עולה כי המתכַּשרים להוראה מתקשים לעבור מפעילות של מציאת מכנה משותף בשברים פשוטים לפעילות דומה בשברים אלגבריים וחלקם אינם מבחינים בין תנאי מספיק לתנאי הכרחי.

בעשורים האחרונים אפשר להבחין בריבוי מחקרים שבוחנים את השפעת השימוש בשיטות מטה-קוגניטיביות על הצלחות של תלמידים במתמטיקה. מטה-קוגניציה היא פעולת הערכה ושיקוף של מה שאדם חושב. למושג מטה-קוגניציה הגדרות שונות, החל בידע של הפרט על דרכי החשיבה שלו, וכלה בשינוי דרכי החשיבה בעקבות משוב עצמי (Schoenfeld, 1992).

כיום גוברת ההשקפה בקרב מספר הולך וגדל של חוקרים שהתנסויות וחוויות מטה-קוגניטיביות הן חשובות ביותר לקידום תהליכים קוגניטיביים (Koriat and Levy-Sadot, 1999; Efklides, 2001; 2006; Carver, 2003). יעילות הגישה המטה-קוגניטיבית נבחנת במחקרים העוסקים בהוראת נושאים שונים, למשל פתרון בעיות כפל וחילוק בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים (Garofalo and Lester, 1985), הבנתו של מושג האין-סוף בחטיבה העליונה (Tirosh and Tsamir, 1997) ולימודי מתמטיקה של בוגרים במכללות ובאוניברסיטאות (Schoenfeld, 1987; 1992). על פי הספרות המחקרית, הוראה בשיטה זו יעילה ביותר להתפתחות חשיבת הלומדים ברמה המטה-קוגניטיבית. טיעון זה נתמך במחקרים מתחומי תוכן שונים, כגון הבנת הנקרא, פתרון בעיות במתמטיקה, לימודי שפה זרה, כתיבה והוראת המדעים (Zohar, 1994; 1996; Zohar and Ben-David, 2008). אפשר לומר כי רוב המחקרים מצאו כי שימוש בשיטות מטה-קוגניטיביות משפר את הישגי הלומדים.

הנושא שברים אלגבריים מופיע לראשונה בתכנית הלימודים של חטיבת הביניים כבר בכיתה ז'. בכיתה ח' "מעמיקים בטכניקה האלגברית, ולומדים לפתור גם משוואות המכילות שברים אלגבריים" (משרד החינוך, 2012). חשוב להדגיש כי שלב לימוד זה בא לאחר שתלמידים למדו ותרגלו את נושא השברים בבית הספר היסודי. הקושי העיקרי של תלמידי חטיבת הביניים המתקשים בשברים אלגבריים מתבטא במציאת המכנה המשותף, ונובע מהעברת העקרונות שנלמדו בתחום המספרי ויישומם על התחום האלגברי.

אוכלוסיית המחקר כללה נבדקים משתי קבוצות: האחת, מורים לבית הספר היסודי המלמדים בכיתות ג' - ו' המתמחים במתמטיקה, והשנייה, פרחי הוראה אשר הכשרתם הוראת מתמטיקה לחט"ב המלמדים בכיתות ז' - ט'.

שאלת המחקר המרכזית הייתה: האם רצף משימות הוראה יכול להוביל לשינוי ביכולת הפתרון של מורים ושל פרחי הוראה על פתרון משוואות?

במהלך לימודי המתמטיקה נחשפים התלמידים לצורך במציאת המכנה המשותף ולשימוש בו. תחילה כשלומדים את התחום המספרי בלבד, כאשר עליהם להשוות בין שברים או לחבר שברים ולחסר שברים, ובהמשך כאשר התחום מתרחב לשברים אלגבריים. תלמידי החטיבה אינם מוצאים בנקל את המכנה המשותף של שברים אלגבריים. כדי לתת מענה לקשיים בחרנו להתמקד במציאת מכנה משותף בלבד. תחילה באמצעות הצפת ידע קיים מהתחום המספרי - תרגילים פשוטים של חיבור וחיסור שברים - כדי להיזכר ו"לשבור" את הפחד והרתיעה מתחום השברים,

וכך לקשר בין התחום המספרי לתחום האלגברי. כדי לאפשר לתלמידים להתמקד במציאת מכנה משותף בלבד אפשר להציג משימות למציאתו בפעילות פחות "מאיימת" (Bassan-Cincinatus and Patkin, 2015). הפעילות אינה מצריכה את כל תהליך הרחבת השברים ועדיין משיגה את המטרה.

המחקר מציג משימות שבאמצעותן ניתן לשפר את התמודדות המורים ופרחי ההוראה עם מציאת כפולה משותפת קטנה ביותר בהינתן שברים אלגבריים, לתכנן וליצור משימות דומות ומכאן תרומתו היישומית להוראת המתמטיקה. ממצאי המחקר מראים כי חל שיפור בקרב פרחי הוראה ומורים בפתרון משוואות אלגבריות בהן נזקקו לבצע חישובי מכנה המשותף. שתי הקבוצות גילו קשיים במשימות הדורשות פתרון משוואות הכוללות שברים אלגבריים.

לסיכום, בתחילה, המשימות העלו את רמת הידיעות על דרכי החשיבה ובהמשך הובילו לשינוי דרכי החשיבה בעקבות משוב עצמי ואפשרו להבחין בין הקוגניציה ובין המטה-קוגניציה. תרומת המחקר הנוכחי היא בביסוס מושגים מתמטיים כמו פירוק לגורמים, התחלקות, כפולה משותפת ופעולות בשברים. בנוסף, ברכישת מיומנות בחישובים; בעידוד הלומדים לבצע חישובים מהירים ויעילים, באיתור טעויות, ובהכרת שיטות בקרה.

מומלץ, אפוא, ליישם את הפעילויות המוצעות בהשתלמויות מורים למתמטיקה, בהכשרת פרחי הוראה ובבתי הספר.

מקורות

משרד החינוך, 2013. תכנית הלימודים החדשה לכיתות ז', ח', ו-ט', המזכירות הפדגוגית, אגף מדעים, הפיקוח על הוראת המתמטיקה.

Bassan-Cincinatus, R. and Patkin, D., 2015. “Determining the Lowest Common Denominator,” Learning and Teaching Mathematics, Journal of AMESA 19: 10–12.

Carver, C. S., 2003. “Pleasure as a Sign You Can Attend to Something Else: Placing Positive Feelings within a General Model of Affect,” Cognition and Emotion 17, pp. 241–261.

Efklides, A., 2001. “Metacognitive Experiences in Problem Solving: Metacognition, Motivation, and Self-Regulation,” in: A. Efklides, J. Kuhl, and R. M. Sorrentino (eds.), Trends and Prospects in Motivation Research, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, pp. 297–323.

Efklides, A., 2006. “Metacognition and Affect: What Can Metacognitive Experiences Tell Us about the Learning Process?” Educational Research Review 1: 3–14.

Garofalo, J. and Lester, F. K., 1985. “Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance,” Journal for Research in Mathematics Education 16: 163–176.

Koriat, A. and Levy-Sadot, R., 1999. “Processes Underlying Metacognitive Judgments: Informationbased and Experience-Based Monitoring of One's Own Knowledge,” in: S. Chaiken and Y. Trope (eds.), Dual-Process Theories in Social Psychology, New York, NY: Guilford Press, pp. 483–502.

Schoenfeld, A. H., 1987. “What's All the Fuss about Metacognition?” in: A. H. Schoenfeld (ed.), Cognitive Science and Mathematics Education, Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 189–215.

Schoenfeld, A. H., 1992. “Learning to Think Mathematically,” in: D. A. Grouws (ed.), Handbook of Reserch in Mathematics Teaching and Learning, New York: Macmillan, pp. 334–370.

Tirosh, D. and Tsamir, P., 1997. “Metacognition and Consistency: The Case of Infinity,” Mathematics 33: 321–330.

Zohar, A., 1994. “Teaching a Thinking Strategy: Transfer Across Domains and Self Learning versus Classlike Setting,” Applied Cognitive Psychology 8 (6): 549–564.

Zohar, A., 1996. “Transfer and Retention of Reasoning Skills Taught in Biological Contexts,” Research in Science and Technological Education, 14 (2): 205–219.

Zohar, A. and Ben-David, A., 2008. “Explicit Teaching of Meta-Strategic Knowledge in Authentic Classroom Situations,” Metacognition and Learning 3 (1): 59–82.

סימבולי או טקסטואלי – איזה משוב יעיל יותר?

תומר גל, אוניברסיטת תל אביב
ארנון הרשקוביץ, אוניברסיטת תל אביב

◆◆◆

מבוא

משוב–היינו, מידע המסופק על ידי סוכן (למשל, מורה, עמית, או תוכנת מחשב) בנוגע להישגים או הבנה (Hattie & Timperley, 2007)–מהווה מרכיב חשוב בתהליך הלמידה, שכן הוא נותן ללומד הזדמנות לשפר את יכולותיו. בהתייחס ללמידה מבוססת-מחשב, משוב יכול להינתן בזמן אמת, במגוון אופנים, ובאופן שמתייחס ישירות לתשובתו של הלומד. מן הספרות הענפה בתחום, עולה כי היעילות של משובים בלמידה מבוססת-מחשב הינה בעלת שונות גבוהה מאוד, ותרומתם נצפתה לאורך כל הטווח שבין תועלת לנזק (Van der Kleij, Feskens, & Eggen, 2015).

מחקרים רבים בחנו סוגים שונים של משובים, אך ברוב מוחלט של המקרים מדובר על השוואה בין משוב פשוט, אינדיקטיבי–אשר מצביע על נכונות או אי-נכונות של התשובה שניתנה ותו לא–לבין משובים מורחבים יותר; לרוב, הסוג האחרון נמצא יעיל יותר מזה הראשון. למרות שישנה הסכמה על כך שמשוב מורחב מבוסס-תשובה מקדם את הלמידה יותר מאשר משוב פשוט (נכון/לא נכון) (Shute, 2008), אין כמעט בנמצא מחקרים אשר משווים בין סוגים שונים של משוב מורחב שכזה.

לאור זאת, אנו מעלים את השאלה הבאה, אשר מובילה את המחקר המקיף בו אנו עוסקים: איזו גישה למתן משוב מורחב ומבוסס-תשובה בהוראת המתמטיקה היא היעילה ביותר? במחקר הנוכחי אנו מתרכזים בהשוואה בין משוב סימבולי (אשר מערב סימנים מתמטיים) לבין משוב טקסטואלי. אנו נוקטים בגישת מחקר כמותנית ומשלבים ניתוח לוגים מניסוי אקראי שנערך על גבי פלטפורמת Khan Academy.

שאלת המחקר

שאלת המחקר, בגרסתה הקצרה, היא זו: איזה מבין שני סוגי המשוב–טקסטואלי או סימבולי–יעיל יותר? במעט יותר פירוט, אנו בוחנים את הקשר בין סוג המשוב אחרי מתן תשובה שגויה בניסיון הראשון על הסיכוי לתת תשובה נכונה בניסיון השני באותה השאלה ובניסיון הראשון בשאלה הבאה.

מתודולוגיה

שדה המחקר

הנתונים למחקר זה נאספו מאתר Khan Academy (https://www.khanacademy.org). אתר זה הינו פלטפורמה פופולרית ביותר ללימוד נושאים שונים בתחומים מגוונים, כולל מתמטיקה, לבני כל הגילאים. האתר מציע יחידות לימוד בווידאו ותרגילים רבים, המאפשרים למשתמש ללמוד ולתרגל באופן עצמאי.

אנו התרכזנו בארבעה נושאים שונים במתמטיקה: פונקציות זוגיות ואי-זוגיות, גרפים של גידול מעריכי, שיפוע באמצעות שתי נקודות ויחסים טריגונומטריים במשולשים ישרי-זווית.

אוכלוסיית המחקר

במחקר השתתפו כל המשתמשים באתר בשתי תקופות: 10.5.18-11.4.18, 17.6.18-18.5.18. בכל אחד מן הנושאים השונים, השתתפו במחקר לאורך שתי התקופות אלפים רבים של משתתפים (החל ב - 5,355 משתתפים בנושא הפונקציות וכלה ב - 55,868 משתתפים בנושא הטריגונומטריה).

המשתתפים במערכת אינם מחוייבים לספק נתונים אישיים. על פי הנתונים שסיפקו אלו שעשו זאת - הגיל הממוצע של המשתתפים ביחידות השונות נע בין 18-20, ושיעור הגברים ביחידות השונות נע בין 53%-61%.

על מנת לענות על שאלות המחקר, ביצענו סינון של המשתתפים, ואלו אשר נכללו במחקר הם מי שקיימו את כל התנאים הללו:

- לא השתמשו ברמזים לכל אורך ניסיון המענה על השאלה הראשונה;
- ענו תשובה שגויה בניסיון הראשון בשאלה הראשונה;
- ניסו לענות על השאלה הראשונה עוד פעם אחת לפחות;
- ניסו לענות על השאלה השנייה.

מהלך המחקר

המשתמשים אשר נכנסו למערכת בכל אחת מן התקופות האמורות פעלו בה באופן רגיל, ומהלך המחקר היה "שקוף" בעבורם. כל מי שנכנס לאחד התרגילים אשר נבחרו למחקר - הוקצה באופן אקראי לקבוצת המחקר או לקבוצת הביקורת. משתתפים בקבוצת המחקר קיבלו אחד משני סוגי משובים (סימבולי/טקסטואלי), בהתאם לתקופת המחקר; משתתפים בקבוצת הביקורת קיבלו משוב פשוט, אינדיקטיבי (נכון/לא נכון).

כיוון שהתרגילים מוצגים למשתתפים בסדר אקראי, אנו מתייחסים בכל הניתוחים שלנו לפעילות בתרגיל ה"ראשון" וה"שני", כאשר מדובר בסדר הופעתם ולא בסידור אבסולוטי שלהם.

משתני המחקר

שני משתני המחקר העיקריים חושבו בעבור כל משתתף ונועדו לבדוק את השפעת המשוב:

- התשובה שנתן בניסיון השני בשאלה הראשונה [0/1]
- התשובה שנתן בניסיון הראשון בשאלה השנייה [0/1]

ממצאים ודיון

ראשית, אנו משווים בין קבוצת המחקר וקבוצת הביקורת בכל אחד מן הנושאים ובכל אחת מתקופות המחקר בנפרד. הדבר מאפשר לנו לבחון האם המשוב המורחב היה יעיל יותר מזה הפשוט. בשלושה מקרים (מתוך שמונה), המשוב המורחב נמצא יעיל יותר מזה הפשוט בהתייחס לסיכוי לענות נכון בניסיון השני באותה השאלה: בשני סוגי המשוב בנושא השיפוע, כמו גם במקרה של המשוב הטקסטואלי בנושא טריגונומטריה. במקרה אחד (פונקציות, משוב טקסטואלי), נמצא כי המשוב המורחב יעיל יותר מזה הפשוט בהתייחס לסיכוי לענות נכון בניסיון הראשון לשאלה הבאה; במקרה נוסף (טריגונומטריה, משוב סימבולי), נמצא יתרון מובהק שולית למשוב הפשוט. הממצאים מסוכמים בטבלה 1.

נושא (סוג משוב)	**ערך t (גודל אפקט)**	
	נסיון שני בשאלה הראשונה	**נסיון ראשון בשאלה השנייה**
פונקציות (טקסטואלי)	0.66	-2.59* (d=0.16)
פונקציות (סימבולי)	0.45	-1.03
מעריכי (טקסטואלי)	1.13	-0.15
מעריכי (סימבולי)	-0.44	-0.54
שיפוע (טקסטואלי)	-2.26^{*} (d=0.05)	-1.35¥
שיפוע (סימבולי)	-2.19^{*} (d=0.07)	-1.30¥
טריגונומטריה (טקסטואלי)	-3.76^{***} (d=0.09)	-0.43
טריגונומטריה (סימבולי)	-0.90	**1.89, p=0.058 (d=0.06)**

† Cohen's d, * $p<0.05$, *** $p<0.001$

טבלה 1. השוואה בין קבוצות המחקר והביקורת (ממצא מובהק מודגש ברגע אפור; ממצע מובהק שולית - במודגש)

כאשר משווים, בכל אחד מן הנושאים בנפרד, את המשובים המורחבים זה לזה, אנו מבחינים כי בשלושה מקרים (מתוך ארבעה)–בנושאים של גרפים של פונקציה מעריכית, שיפוע משתי נקודות, יחסים טריגונומטריים–המשוב הסימבולי נמצא יעיל יותר בהשוואה למשוב הטקסטואלי בהתייחס לסיכוי לענות נכון בניסיון הבא בשאלה הנוכחית. במקרה אחד (טריגונומטריה), המשוב הסימבולי נמצא יעיל יותר מזה הטקסטואלי בהתייחס לסיכוי לענות נכון בניסיון הראשון בשאלה הבאה.

באופן כללי, ממצאים אלו מדגישים את עליונותו של המשוב הסימבולי על המשוב הטקסטואלי. מחקרים קודמים אשר בחנו סוגים לא-טקסטואליים של משובים, עסקו בעיקר במשוב פשוט, כלומר הוסיפו אלמנטים לא-טקסטואליים (ציור, אנימציה, קול) לאינדיקציה בדבר נכונות התשובה. במקרים אלו, לא נמצאו הבדלים בין סוגי המשוב להצלחה (Arif, Sylla, & Mazalek, 2017; Armour-Thomas, White, & Boehm, 1987; Tsai, 1992). עם זאת, כאשר האלמנט הלא-טקסטואלי במשוב היה קשור לבעיה, הוא נמצא עדיף על משוב טקסטואלי (Grivokostopoulou, Perikos, & Hatzilygeroudis, 2017), בהלימה עם ממצאינו.

הסבר אפשרי לממצאים הוא כי השפה הסימבולית בה נעשה שימוש במשוב נתפסה על ידי הלומדים כקרובה יותר לשפת הלימוד ולשפת התרגילים, ולכן נמצאה יעילה יותר. סברה זו נתמכת על ידי ממצאים מתחום הוראת שפה שנייה, בהם נמצא כי משוב בשפת הלימוד (כלומר, השפה השנייה) היה יעיל יותר מאשר משוב בשפת האם של הלומדים (Kregar, 2011). אנו רואים בממצאים חיזוק לחשיבותה של השפה המתמטית, אשר צריכה להוות חלק בלתי נפרד מתהליך הלמידה בתחום המתמטיקה (Simpson & Cole, 2015)

מקורות

Arif ,A .S, .Sylla, C &, .Mazalek ,A .(2017). Effects of different types of correctness feedback on children's performance with a mobile math app. In *2017 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics)SMC (*pp .2849–2844 .IEEE .https//:doi.org/10.1109/SMC2017.81230) Armour-Thomas ,E., White ,M. A. &, Boehm, A. (1987) The motivational effects of types of computer feedback on children's learning and retention of relational concepts. In *Proceedings of the Annual Meeting of the American Educational Research Association) April ,20-24 Washington, DC (*Retrieved from https//:eric.ed.gov?/id=ED287446).

Grivokostopoulou ,F ,.Perikos ,I & Hatzilygeroudis , I .(2017). Examining the efficiency of feedback types in a virtual reality educational environment for learning search algorithms. In *International Conference on Brain Function Assessment in Learning) September, 24-25 Patras ,Greece) (*pp .175–169) Springer, Cham .https//:doi.org15_10.1007/978-3-319-67615-9/

Hattie, J & ,.Timperley, H. (2007) The power of feedback. *Review of Educational Research*.112–81, (1)*77*, https//:doi.org10.3102/003465430298487/

Kregar, S. (2011) *Relative effectiveness of corrective feedback types in computer-assisted language learning*. Florida State University Tallahassee, FL. (Retrieved from https//:diginole.lib.fsu.edu/islandora/object/fsu/181099:datastream/PDF/view)

Shute, V.J. (2008). Focus on formative feedback. *Review of Educational Research*. 189–153 (1)*78* https//:doi.org10.3102/0034654307313795/

Simpson ,A , Cole &,.M .W. (2015). More than words: A literature review of language of mathematics research. *Educational Review* 384–369 (3)*67* https//:doi.org10.1080/00131911.2014.971714/

Tsai ,Y .M-.H. (1992). *The effects of different systems of positive reinforcement on computer-based learning Recommended Citation*. Iowa State University) Ames, IA. Retrieved from https//:lib.dr.iastate.edu/rtd Van der Kleij, F. M, Feskens.

C .W &,. Eggen, T.J.H.M. (2015). Effects of feedback in a computer-based learning environment on student's learning outcomes. *Review of Educational Research* .511–475 ,(4)*85* ,https//:doi.org10.3102/0034654314564881/

הבניה של הגדרה מתמטית כמצע להבניה של מרכיבי ידע מטה-מתמטיים

נאוה גלבוע, מכללת אורות ישראל
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל-אביב
איבי קדרון, המרכז האקדמי לב

רקע תיאורטי

הגדרות מתמטיות מהוות את הכלי היחיד באמצעותו ניתן לקבוע האם אובייקט מסוים הוא דוגמא למושג. הן מעשה ידי אדם ונקבעות בצורה מושכלת כך שלא תיווצר סתירה בתוך המערכת בה הן מוגדרות. למרות חשיבותה, המקום המוקדש להגדרה בהוראת המתמטיקה בבית הספר הוא שולי ונקודתי, בדרך כלל בהקשר של הוראת הגיאומטריה. כתוצאה מכך התלמידים אינם תופסים את המהות של הגדרה מתמטית, את תפקידיה ומאפייניה. הנתונים שנציג נבחנו במסגרת התיאורטית Abstraction in Context (AiC). באמצעות מסגרת זו עקבנו אחר תהליכי הבניה של הגדרות מתמטיות, כאשר מטרת המחקר היתה, לזהות הבניה של מבני ידע מטה-מתמטיים: מהות ההגדרה ושרירותיות ההגדרה, בתוך תהליך ההבניה של הגדרה מתמטית.

הממצאים שנציג הם חלק ממחקר (גלבוע 2015) שבחן דרכים לעורר צורך בהגדרה מתמטית בקרב תלמידי תיכון ואת תהליך ההבניה של ההגדרה שהתרחש בעקבות צורך זה. המסגרת התיאורטית AiC מציעה כלי לניתוח ברמת המיקרו (micro analysis) של תהליכי הבניית ידע, ובשל כך נבחרה לניתוח תהליך ההבניה של ההגדרה. על פי מסגרת תיאורטית זו לתהליך הפשטה שלושה שלבים: (1) התעוררות צורך במבנה חדש; (2) ההבניה של המבנה החדש; ו-(3) קונסולידציה של המבנה. (להרחבה על AiC בכלל ועל השלב השני - שלב ההבניה, בפרט, ראו Schwarz, Dreyfus, & Hershkowitz, 2009).

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר

הממצאים שנציג להלן לקוחים מתוך ראיון-מבוסס-פעילות (Goldin 2000) עם שתי לומדות, נופר ונעה, תלמידות י"א, הלומדות מתמטיקה בקבוצת 5 יח"ל. הריאיון נערך כמה חודשים לאחר שהמושג 'נקודת פיתול' נלמד בכיתתן. בכיתה לא נתנה הגדרה פורמאלית לנקודת פיתול, אלא נלמדה פרוצדורה למציאת נקודת פיתול באמצעות איפוס הנגזרת השניה של הפונקציה.

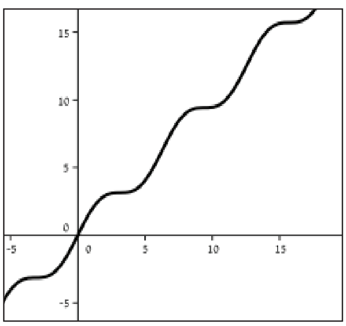
הפעילות

הפעילות בה השתתפו הלומדות כללה שתי שאלות:

בשאלה הראשונה הוצג גרף של פונקציה (ראו איור 1) והלומדות התבקשו למנות את מספר נקודות הפיתול על גבי הגרף. מטרתה של שאלה זו היתה לחשוף את מבני הידע הקודמים של הלומדות הקשורים בנקודת פיתול ולעורר צורך בהגדרה של המושג.

בשאלה השניה, התבקשו הלומדות לענות תחילה על השאלה: מהי נקודת פיתול? והמשכה של השאלה היה: לפניכם מספר גרפים. סמנו על גבי כל אחד מהם את כל נקודות הפיתול, אם יש כאלו. בכל שלב אתם יכולים לשנות את תשובתכם לשאלה: "מהי נקודת פיתול?" מטרתה של שאלה זו היה לאפשר ללומדות להבנות את ההגדרה של נקודת פיתול מתוך דוגמאות ואי-דוגמאות של המושג. חלק מהגרפים היו מלווים בביטוי האלגברי של הפונקציה.

כאמור לעיל, ניתוח הנתונים נעשה באמצעות המסגרת התיאורטית AiC.



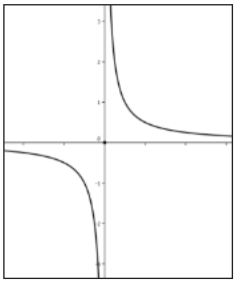
איור 1

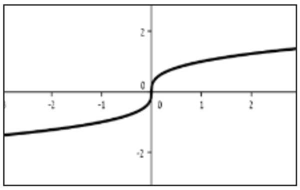
ממצאים

בתחילת הריאיון הלומדות מסתמכות על דימוי המושג שלהן כדי לזהות נקודות פיתול. דימוי מושג זה כולל מבני ידע שונים כגון נגזרות ראשונה ושניה ומניפולציות שיש לעשות עליהן וכן תמונה ויזואלית של כיפוף בגרף, כמו כביש מתפתל. הניסיון לזהות נקודת פיתול באמצעות דימוי המושג מעורר צורך בהגדרה:

נעה   זה יוצא כאילו מה זה בכלל ההגדרה של פיתול? קעירות וקמירות למעלה ולמטה או שזה ירידה ועליה?

נופר   השיפוע משתנה אבל בכל שנייה, אז זה לא נכון להגיד שיפוע משתנה... השיפוע חיובי אולי? לא משנה... מהי נקודת פיתול? נגזרת שניה שווה לאפס לא? א- שהשיפוע של המשיק, שווה אפס





איור 2

תוך כדי עיסוק בכמה מהדוגמאות שבשאלה השניה הלומדות מזהות שמרכיב-הידע שינוי קעירות משותף לכולן. הן בונות איתו הגדרה ראשונה: "הנקודה שלפניה הפונקציה קעורה ואחריה קמורה, או להיפך".
הדוגמא של הפונקציה (איור 2) מעוררת קונפליקט בין הידע הקודם של הלומדות, שאיפוס הנגזרת השניה הוא תנאי הכרחי לנקודת פיתול, לבין ההגדרה הראשונה שהיבנו, המסתמכת על שינוי קעירות.
בשלב הזה, ההכרעה באמצעות ההגדרה שלהן שזו כן נקודת פיתול, נעשית ביוזמת המראיינת.

בזמן העיסוק בפונקציה $g(x) = \frac{1}{x} \text{ if } x \neq 0; 0 \text{ if } x = 0$, המוצגת באיור 3, נעה אומרת: "בואי נראה, בוא נסתכל על ההגדרה שלנו".
בשלב זה היוזמה לבחון את הדוגמא לאור ההגדרה שלהן היא של הלומדות. הדבר מעיד על הבניה של מבנה הידע מהות ההגדרה המתמטית, שעל פיה יש לבחון את הדוגמא ולא רק על פי התרשמות מהגרף. מתעורר קונפליקט:

נעה   לכאורה זאת [הראשית] תהיה נקודת פיתול, אבל זה בכלל לא מתפתל כאן.

נופר   פה זה עובד [ההגדרה], אז זה כן! אז זה נקודת פיתול!

נעה   אבל... נכון, לפי ההגדרה שלנו זה נכון.
היא לא מחוברת, זה קשה לי להגיד את זה. היא כאילו לא, היא מחוברת אבל.
זה אפילו לא נוגע בזה. נקודת פיתול צריכה להיות על הגרף של הפונקציה. כאן זה לא נוגע

נעה מציעה: "אז אני רוצה להוסיף עוד הגדרה" (1059) "שזה יראה טוב" (1064). ביטוי זה מעיד על הבניית מבנה-הידע שרירותיות ההגדרה - הגדרות הן מעשי ידי אדם וביכולתנו לשנות אותן כך שלא תיצורנה סתירה במערכת בה הן מוגדרות.
הלומדות מחפשות מילים לדייק באמצעותן את ההגדרה:

נופר   שזה כאילו המשך של קו

נעה   ובאיזושהי נקודה על הגרף תהיה נקודת פיתול.

נראה שמרכיב הידע 'רציפות' אינו נכלל בידע הקודם של הלומדות (או שאיננו זמין מבחינתן). הן לא מצליחות לשנות את ההגדרה ונאלצות לקבל את הראשית של g כנקודת פיתול. הקבלה הזו, של הראשית כנקודת פיתול, על פי ההגדרה ונגד דימוי המושג שלהן, היא עדות לקונסולידציה של מרכיב הידע מהות ההגדרה המתמטית.

דיון

בבית הספר, בדרך כלל, תלמידים אינם עוסקים בשאלה 'מהי הגדרה מתמטית?' באופן ישיר, אלא תפיסתם את מושג ההגדרה נבנית באופן עקיף, לא מכוון, ותלוי התנסויות במהלך הלימודים. (ראו לדוגמא Zaslavsky & Shir, 2005.) התנהלות זו גוררת, לעיתים קרבות, תפיסות שגויות של מהות ההגדרה המתמטית, תפקידיה ואופיה. נחליאלי וטבח (2016) מציגות מחקר שעקב אחר תהליך למידה של סטודנטיות להוראת מתמטיקה בו הן דנו במושג הפונקציה. במחקרן הן התחקו, באמצעות הגישה התקשורתית, אחר תהליכי למידה שמאפשרים אימוץ ההגדרה כאבן הבוחן היחידה לזיהוי עצם נתון. אנו טוענים שהבניה של הגדרה מתמטית הינה תהליך למידה המאפשר, בנוסף להבנית ההגדרה עצמה, גם הבניה של מבני ידע מטה-מתמטיים, כגון מהות ההגדרה, תפקידיה ואופיה.

הממצאים שהוצגו בסעיף הקודם הם הצצה לתהליך הבניה של הגדרת המושג 'נקודת פיתול', במהלכו היבנו הלומדות, נופר ונעה, את מבני הידע המטה-מתמטיים מהות ההגדרה המתמטית ושרירותיות ההגדרה. המסגרת התיאורטית AiC באמצעותה ניתחנו את הנתונים אפשרה חשיפה של הבניית מבני הידע האלו.

במקרה שהיצגנו פה היבנו הלומדות הגדרה מתמטית מתוך דוגמאות ואי דוגמאות של המושג, דבר שאפשר תהליך הבניה של מבני ידע מטה-מתמטיים. מעניין יהיה לבחון האם הבניה של הגדרות מתמטיות בדרכים אחרות תאפשר אף היא תוצאות דומות.

ביבליוגרפיה

גלבוע, נ' (2015). צורך בהגדרה מתמטית והשפעתו על הבניית ההגדרה אצל תלמידי תיכון. חיבור לשם קבלת תואר "דוקטור לפילוסופיה", בית ספר לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב.

נחליאלי, ט' וטבח, מ' (2016). שימוש בהגדרה מתמטית בתהליכי זיהוי פונקציה על-ידי סטודנטים להוראה. מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 4, 171-194.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (pp. 517-545). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Schwarz, B. B., Dreyfus, T. & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), Transformation of Knowledge through Classroom Interaction (pp. 11-42). New York: Routledge.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. Journal for Research in Mathematics Education, 36, 317-346.

הבניית ידע מתמטי בניתוח תהליכים דינמיים

אסף דביר, אוניברסיטת תל-אביב
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל-אביב
מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

◆◆◆

מבוא

מחקר זה עוסק בהבניית ידע מתמטי בנושא תהליכים דינמיים. ההבנייה נבחנה במהלך ראיונות אישיים שנערכו עם אחד-עשר סטודנטים לתואר שני או לתעודת הוראה בהוראת מתמטיקה, בעלי רקע מתמטי ותארי הנדסה קודמים, שהשתתפו בקורס שעסק במערכות דינמיות, בכאוס ובפרקטלים. נושאים נבחרים במערכות דינמיות נלמדו במהלך הסמסטר הראשון. עם סיום הסמסטר, במחצית הקורס, בדקנו בראיון אישי את הבניית הידע החדש על בסיס הידע שנבנה במהלך העבודה הכיתתית, הקבוצתית והאישית. שאלות המחקר הן (1) כיצד סטודנטים מבינים מושגים בסיסיים של מערכות דינמיות כדוגמת תהליך דינמי, נקודת שבת ועוד? (2) כיצד סטודנטים מבנים ידע הנוגע ליישום המושגים הבסיסיים הנ"ל בשיטות שונות לאיתורם ולאיפיונם?

רקע תיאורטי

מחקרים בהבניית ידע מתמטי אימצו מודלים תיאורטיים שונים. מסגרת תיאורטית אחת, הפשטה בהקשר (Abstraction in context), בשילוב המודל הדינמי של הפעולות האפיסטמיות המקוננות RBC (Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz 2015) מגדירה כי תהליך הבניית ידע חדש מתבסס על ארגון אנכי מחדש של ידע קיים במטרה ליצור ידע חדש, תוך שימוש בשלוש פעולות אפיסטמיות הניתנות לצפייה: זיהוי, בנייה-עם והבנייה. פעולת הזיהוי מתרחשת כאשר הלומד מזהה ידע קיים הרלוונטי לסיטואציית הבעיה. בנייה-עם היא פעולה המתבססת על הידע אשר זוהה במטרה להשיג יעד מקומי כחלק מההתמודדות עם סיטואציית הבעיה. הבנייה, הפעולה העיקרית בתהליך ההפשטה, מתרחשת כאשר הלומד מחבר פיסות ידע מוכר ויוצר מבנה ידע מתמטי חדש עבורו. פעולות הזיהוי מקוננת בפעולת בנייה-עם, ופעולות בנייה-עם וזיהוי מקוננות בפעולת ההבנייה.

התחום המתמטי של כאוס עוסק בתהליכים דטרמיניסטים, שעל פניהם הם ברי-חיזוי, בהיותם נשלטים על ידי חוקים ידועים. אולם, תופעות כאוטיות הן תופעות שחיזויין אפשרי רק בטווח הקצר. מהר מאד המערכת, על אף היותה כפופה לחוקים ידועים, יוצאת משליטה ומתנהגת בצורה הנראית אקראית לחלוטין. התחום הוא בעל חשיבות יישומית כיון שתהליכים כאוטיים שכיחים במציאות (מזג-אוויר, מערכות כלכליות ועוד). הבסיס המתמטי לניתוח תופעות כאוטיות נקרא מערכות דינמיות (Dynamical systems), מערכות המתארות התנהגות גדלים לאורך זמן, וניתוחם מבוסס לרוב על פתרון משוואות דפרנציאליות ועל שיטות ניתוח גרפיות. תחום המחקר הנוכחי עוסק בניתוח תהליך דינמי שמיוצר על ידי הפעלה חוזרת של פונקציה נתונה (לדוגמה ריבועית), בעלת תנאי התחלה, ואשר תחומה הוא נקודות זמן דיסקרטיות (Feldman, 2012).

המרכיב המתמטי במחקר התמקד בזיהוי מושג מרכזי - נקודות שבת של תהליך דינמי. נקודת שבת היא נקודה בה התהליך מגיע לערך שאינו משתנה עוד. נקודות השבת של תהליך דינמי הנוצר על ידי הפונקציה $f(x)$ מתקבלות מפתרון המשוואה $f(x) = x$. עבור כל נקודת שבת מתעוררת השאלה אם היא נקודת שבת 'מושכת', כלומר קיימת סביבה פתוחה של נקודת השבת שמכל נקודה בסביבה התהליך הדינמי יתכנס לנקודת השבת, או ש- 'אינה מושכת'. זיהוי נקודות השבת ואיפיונן ניתן להיעשות על ידי ניתוח גרפי (דיאגרמת Cobweb) או ניתוח אנליטי תוך שימוש במשפט יציבות נקודת השבת, משפט המאפיין את נקודת השבת על פי הערך המוחלט של נגזרת הפונקציה.

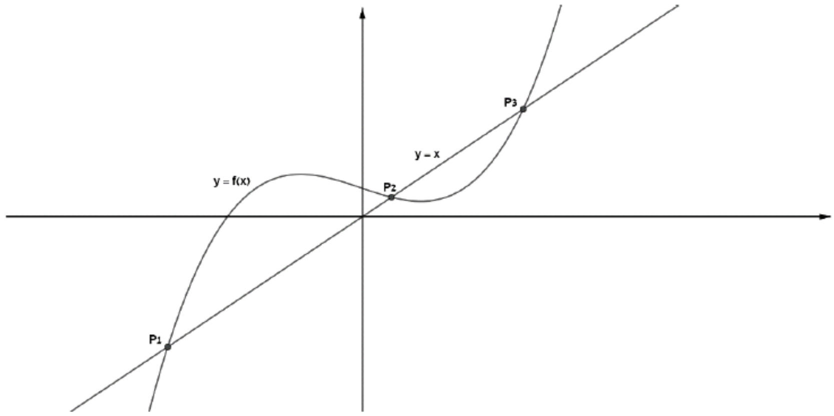
כאמור, ניתוח התהליך הדינמי מתבצע בשתי שיטות ובשני ייצוגים שונים. מחקרים קודמים הראו כי רב-ייצוגיות וריבוי שיטות בניתוח פונקציות, בדגש על ניתוחים גרפיים, עלולה לייצר קשיי הבנה מהותיים לתלמידים הלומדים אנליזה (Carlson, 1998; Monk & Nemirovsky, 1994).

מתודולוגיה

המחקר הנוכחי מתבסס על ניתוח של ראיונות-אמצע אישיים עם שלושה מהסטודנטים בקורס. הלמידה בקורס התרחשה לסירוגין בקבוצות עבודה ודיוני מליאה, ולוותה בתיעוד מלא כחלק ממחקר מקיף. מוקד המחקר הנוכחי הוא תגובות הסטודנטים לשאלות אודות תהליך דינמי הנוצר על ידי פונקציה המופיעה באיור 1, בצירוף הישר $y = x$. הסטודנט התבקש לנתח את הגרף בשני היבטים עיקריים:

א. מי הן נקודות השבת של התהליך, ומדוע הן נחשבות לנקודות שבת?

ב. מהו סוג נקודות השבת וכיצד ניתן לקבוע זאת באופן מנומק?



איור 1: גרף הפונקציה בראיון, והישר y=x

המראיין שם דגש על העובדה שלמושגים כמו נקודת שבת או נקודת שבת מושכת, יש משמעות מעבר להגדרה המתמטית. ציפינו מהסטודנט להגדיר משמעות זו ולקשור אותה לתהליך הזיהוי או האיפיון המתמטי. ביצוע פרוצדורה מתמטית גרידא לא ייצג מבחינתנו ידע שהובנה. שאלת הפתיחה של הראיון מיצתה ידע מיידי קודם ויצרה בסיס לשאלות הבאות (איור 2), אשר הציבו לסטודנט אתגרים שחייבו הבנה של המושג, שימוש/בנייה של שיטת ניתוח, והסבר על הזיקה בין השיטה למשמעות המושג.

2. על סמך הגרף הנתון, מה תוכל לומר על התהליך הדינמי שנוצר על ידי f(x)?

a. איך תוכל להצדיק זאת... ?

b. האם יש בגרף נקודות שבת? הסבר מדוע?

i. אם היתה בידך נוסחת f(x), איך היית מוצא את נקודות השבת?

ii. האם תוכל לומר אם נקודות השבת שמצאת על הגרף הן מושכות?

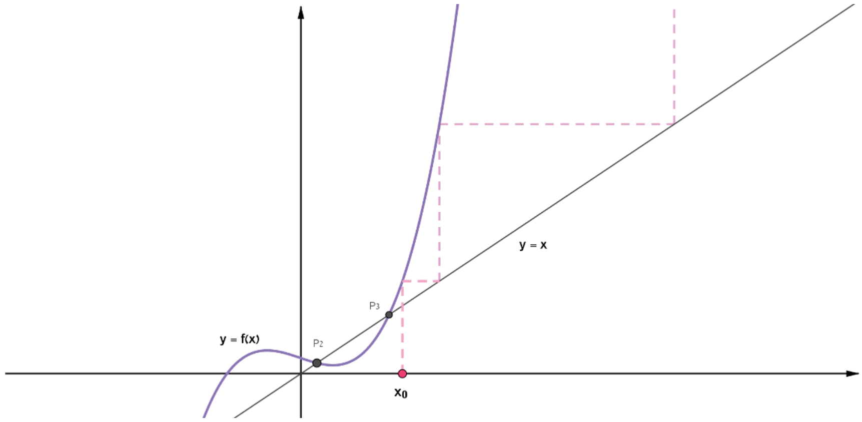
iii. אם היתה בידך נוסחת f(x), איך תיקבע אם נקודת שבת היא מושכת? איך אתה יודע?

c. קרן שהשתתפה בקורס בשנה שעברה טענה שעבור $x_0 > x_3$, התהליך הדינמי של $f(x)$ מתבדר ל- $+\infty$. האם אתה מסכים איתה? כיצד תסביר זאת?

איור 2: שאלות דוגמה מהראיון

בשאלה b.2 ניסינו לאתר אצל הסטודנט שימוש במיגוון שיטות. שאלה c.2, שהייתה שאלה מרכזית, הציגה טענה היפותטית של סטודנטית ביחס לאיפיון נקודות שבת P3, שאינה מושכת. הטענה הציבה בפני הסטודנט אתגר לא טריוויאלי לאימות ולהסבר, שאותו ניתן היה לבצע באמצעות דיאגרמת Cobweb (איור 3) ו/או באמצעות משפט יציבות נקודת השבת.

כל הראיונות תומללו ונותחו באמצעות מודל RBC.



איור 3: ניתוח גרפי של מאפיין נקודת שבת P3

ממצאים ודיון

במהלך הראיונות הסתבר שכל המרואיינים מכירים את כל המושגים שנדרשו ואת משמעותם. עובדה זו איפשרה לנו לבצע את הראיון על פי התכנית המקורית. מושג נקודת השבת היה מוכר היטב, והסטודנטים ידעו כיצד לאתרן ולהסביר את תהליך האיתור (שאלת מחקר 1). מאידך, איפיון נקודות השבת היה מורכב הרבה יותר. לאור דיוני הכיתה שנותחו במקביל, הופתענו לגלות כי אף אחד משלושת המרואיינים לא הצליח להבנות את הקשר שבין איפיון נקודת השבת לבין ערך הנגזרת של הפונקציה על פי משפט היציבות. אף סטודנט לא ביצע ניתוח אנליטי כלשהו, ולכן לא הגיע לדיון בסוגיית הנכונות של משפט היציבות. הבניית ידע חדש וגיבוש ידע קודם (consolidation) התבצעו בקונטקסט גרפי ולא בקונטקסט אנליטי. דוגמה לכך מופיעה באיור 4, חלק מתמליל ראיון העוסק בשאלת הסיכום. המרכיב האנליטי אוזכר באופן שנראה כאפיזודה (שורה 157), ולא הבשיל לשיטת ניתוח רלבנטית.

הבניית הידע הגרפי התבצעה ברמות שונות. בחלק ראשון הסטודנטים הבנו בהצלחה תהליך גרפי לאיתור נקודות השבת ולהצדקתו על פי המשמעות של מושג נקודת השבת. בחלק השני הם הבנו תהליך איפיון גרפי לנקודת השבת, אבל היכולת להצדיק את התהליך על בסיס המשמעות של נקודת שבת מושכת לא ניצפתה. נקודה מעניינת נוספת נוגעת לעובדה שהניתוח הגרפי הוא ניתוח מידגמי בלבד, ולא ניתוח ריגורוזי. אף על פי כן, אספקט זה לא הוזכר כסוגייה בעייתית על ידי הסטודנטים.

ניתן לומר כי הסטודנטים גילו מידה רבה של קיבעון וסוג של הטייה כלפי שימוש בשיטת הניתוח הגרפי, תוך זניחת האפשרות לניתוח אנליטי. מימצא זה תואם מחקרים קודמים העוסקים באינטגרציה בין מרכיבים ושיטות בלימוד נושא האנליזה (Thompson 1994). יתכן והעדפה או הטייה זו היא תולדה של העובדה שייצוג הנתונים שהובא בפניהם היה גרפי.

המחקר תורם הן להבנה של תהליכי חשיבה הנוגעים למושג התהליך האיטרטיבי וניתוחו, הן לקשר בין הבנייה וייצוג נתונים והן למתודות מחקריות.

היגד	חבר	שורה
עכשיו שאלה אחרונה בעניין של הגרף הזה. עכשיו יש לנו סטודנטית בשם קרן שהשתתפה בקורס שנה שעברה והיא טוענה שכל נקודה שה-X שלה גדול מה-X של נקודה 3, התהליך הדינמי מתבדר בפלוס אינסוף. את מסכימה או לא?	מר'	146
באינסטינקט אני רוצה להסכים כי זה מתיישב לי טוב עם האמונות הקיימות שלי. אבל בוא נחשוב – אוקיי, בגלל שהמקסימום פה הוא יותר נמוך מערכים פה, אז... לא, זה לא מה ש... אני מנסה לחשוב אם יש נקודות מתיישבות, אני מסבירה את תהליך המחשבה שלי.	סט'	151
כן בסדר גמור, זה מה שרצינו.	מר'	152
לא, אז, אני גם מסבירה את זה שאני מסבירה את תהליך המחשבה שלי. הגזמתי קצת, אני מתה. אממ, אז כאילו איפה שזה יכול אולי להישבר זה אם יש פה איזה נקודה שמתיישבת לאנשהו. אבל כל הערכים האלה, אם נחזור למחשבות שהיו לי קודם, אז אין פה ערכי Y שתואמים להם. אז אני חושבת שאין פה נקודה שמתיישבת לאנשהו ולכן אני חושבת שזה נכון. זה הרציונל שלי מאחורי זה.	סט'	153
אוקיי. עכשיו נניח זה היה מגיע לכאן... שהמקסימום הזה היה מגיע לכאן. אז לא היית מסכימה עם הטענה של קרן?	מר'	154
כן, אני כשאני מתחילה מ-X החלטתי שמה שאני זוכרת הוא שהולכים אנכית, כאילו מתחילים ב-X ומתקדמים ב-Y, זה נכון – זה מאוד הגיוני, אם אני חושבת על זה שחשבתי נכון, ואז... אני מגיעה לאיזשהו Y, ואז אני מתקדמת... אני חושבת שזה עדיין יתבדר. אני חושבת שמפה יהיו נקודות מתיישבות... אני די בטוחה ש... כאילו, פה יהיו נקודות מתיישבות שמתיישבות להתבדרות, אבל זה לא יחזור אחורה. ואולי יש לזה קשר לנגזרת, שבגללה זה לא יחזור אחורה.	סט'	157
מאה אחוז, בסדר גמור. טוב, סיימנו את הזה של התהליכים הדינמיים, החלק של התהליכים הדינמיים.	מר'	158

איור 4: קטע מתמליל ראיון העוסק בשאלת הסיכום C.2

מקורות

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept.In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education III, 114–162. AMS: CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 7.

Carlson, M. P. (1995). A cross-sectional investigation of the development of the function concept (Order No. 9609538). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (304213960). Retrieved from https://search.proquest.com/docview/304213960?accountid=14765

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context - theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods (pp. 185-217). Dordrecht: Springer, Advances in Mathematics Education series.link

Feldman, D. P. (2012). Chaos and fractals: An elementary introduction. Oxford: Oxford University Press.

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education, 4, 139–168.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. Educational Studies in Mathematics, 26, 229–274.

יצירת דוגמאות כדרך לבחינה של הגדרות למושגים מתמטיים

רחל הס גרין, אוניברסיטת חיפה
שי אולשר, אוניברסיטת חיפה

◆◆◆

תקציר

שימוש בדוגמאות תומך בבניית תמונת מושג ובחינת מערכות יחסים בין מושגים מתמטיים. המאמר מתמקד בשימוש שמורים עושים בהגדרות מושגים מתמטיים, המתבטא בעבודה עם משימות מקוונות הדורשות מהתלמידים ליצור דוגמאות המתאימות לאוסף תנאים. אינטראקציות אלה דרשו מהמורים לבחון מחדש הגדרות של מושגים מתמטיים ומגבלותיהן. נתאר כיצד פלטפורמת ההערכה המעצבת האוטומטית מאפשרת חזרה ודיוק של הגדרות, ומזמנת אפשרויות לשיפור תהליך הלמידה של מורים ותלמידים כאחד.

רקע תיאורטי

תאוריות רבות העוסקות בתהליכי למידה במתמטיקה מתארות שימוש בדוגמאות כחיוני. הקשר בין דוגמאות ומושגים תואר אצל וינר (1983) שאפיין תמונת מושג כדימוי מנטלי הקשור למושגים, ונקבע בהתאם לדוגמאות המקושרות למושג אצל התלמיד. דוגמאות משמשות כהמחשות ומאפשרות תקשורת ותובנות לגבי מושגים מתמטיים ויחסים ביניהם. דוגמאות מתאפיינות בבחירתן מתוך מגוון של אפשרויות (Watson & Mason 2005, עמ 238).

מתמטיקאים שונים תארו את חשיבות הדוגמאות להערכה ולהבנת רעיונות מתמטיים בתהליך פתרון בעיות מתמטיות (למשל Pólya, Hilbert, Halmos, Feynman). פעמים רבות כשמתמטיקאים נתקלים בהשערה, הם חושבים על דוגמה מסוימת, מחפשים דוגמה נגדית או משתמשים בדוגמה הנתפסת כגנרית כדי לראות כיצד ניתן להוכיח השערה זו.

הקשר בין הגדרות ודוגמאות במתמטיקה הוא מורכב. לפעמים ניתנת דוגמה כאשר נעשה שימוש במושג, ואילו במקרים מסוימים נדרשת הגדרה פורמלית ולאחר מכן הדוגמה ניתנת כהדגמה להגדרה. נראה שמגוון רחב של דוגמאות עבור מושג מאפשר הבנה טובה יותר של הגדרתו.

עם התפתחות הטכנולוגיה, נפתחות הזדמנויות ליצור מספר דוגמאות בעזרת גיאומטריה דינאמית וסביבות אחרות של כלים טכנולוגיים (Sweller, 2013). מחקרים מציעים ניתוח מתמטי ומאפיינים דידקטיים בהצגת דוגמאות של תלמידים (Olsher, Yerushalmy, & Chazan, 2016), דבר המאפשר לסייע למורים בהערכה מעצבת ובקבלת החלטות בזמן אמת בכיתה המבוססות על נתוני התלמידים. ניתוח אוטומטי של דוגמאות המוגשות על ידי התלמידים מאפשרות להעריך אם הדוגמה מתאימה לתנאי המשימה, וכן לבחון תכונות אחרות של הדוגמה שלא בהכרח קשורות לנכונות התשובה. שאלת המחקר היא כיצד השימוש במערכת הערכה מעצבת ממוחשבת מאפשר ומעודד שיח על הגדרות של מושגים מתמטיים?

מתודולוגיה

המחקר נעשה במסגרת תוכנית הטמעה של סביבת המרא"ה (הערכה מעצבת רואים את התמונה) בבתי הספר, במהלך השתלמויות מורים על הסביבה והשימוש בה. ההשתלמות כללה מפגשים פנים אל פנים (סה"כ 30 שעות), בהם נידונו תכנים תאורטיים ומחקריים לגבי הערכה מעצבת ממוחשבת, וכן התנסויות במערכת כתלמידים וכמורים. המשתתפים השתמשו במערכת המרא"ה בכיתותיהם. לאחר כל התנסות בכיתה המורים מלאו שאלון הפעלה, וחלקם רואינו טלפונית. במסגרת המפגשים, התקיים דיון אחרי ההפעלות הראשונות בכיתות על השימוש במערכת בקרב צוות מורים יחד עם מדריכת ההשתלמות (כותבת ראשונה). במחקר השתתפו 30 מורים למתמטיקה. ניסיון ההוראה של המורים נע בין שנתיים ל-25 שנים.

הנתונים שנותחו כוללים: (1) תשובות לשאלון שהמורים הגישו; (2) דוגמאות התלמידים שנאספו ונותחו אוטומטית על ידי המערכת; (3) הערות שנאספו בדיונים עם המורים שנעשו על ידי שני החוקרים במהלך המחקר; ו-(4) הקלטות וידאו של ההשתלמויות. כאשר ניתוח המשימות המתמטיות בכיתה התמקד בדיונים בנושא הגדרות מתמטיות. ראשית, זיהינו המשימות בהן המורים דיווחו על התייחסות להגדרות מתמטיות שהתרחשו או בכיתה או במהלך ההשתלמות. לאחר מכן, קודדנו את התייחסויות למושגים והגדרותיהן, וסיווגנו בעזרת המערכת המושגית של Trouche (2004). תהליך הניתוח היה איטרטיבי, בו התאמנו כל התייחסות למושג או הגדרה לקטגוריה מבין ארבע קטגוריות שזוהו ויתוארו בסעיף הבא.

ממצאים

זיהינו ארבע קטגוריות שונות להתמודדות עם הגדרות של מושגים מתמטיים: (1) התייחסות להגדרת מושג מתמטי במהלך הפעילות; (2) פתרון קונפליקטים בין הגדרות שונות של מושג מתמטי; (3) יצירת יחסי הכללה בין מושגים מתמטיים באמצעות הגדרות; ו (4) הבחנה בין הגדרות להגדרות משנה. נדגים את הקטגוריה הראשונה שנמצאה, והשאר יתואר בהרצאה.

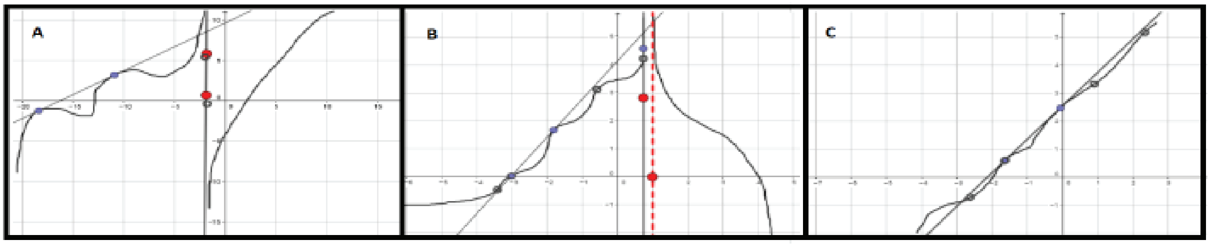
(1) התייחסות להגדרת מושג מתמטי במהלך הפעילות

הגדרות מושגים מתמטיים הן הליבה של משימות הדורשות יצירת דוגמה המתאימה לתנאים מסוימים. עם זאת, לפעמים ההגדרות אינן זמינות ללומדים. במקרים אלה, בהם הגדרה שנלמדה אינה מספיקה לקבוע אם הדוגמא מתאימות למגבלות, המורה חוזר להגדרת המושג המתמטי במהלך הפעילות. המורה בוחן מחדש את הגדרת המושג, שהוא חלק ממשימה זו. התלמידים המתמודדים עם המטלה מפגינים חוסר ודאות כלפי ההגדרה, המורה מטפל בחוסר הוודאות הזה בהתייחסות להגדרת המושג המתמטי הרלוונטי. לדוגמה, בשאלה מסוימת התלמידים התבקשו לתת דוגמה לפונקציה שבן היתר שיש לה משיק המקביל לציר Y (תרשים 1). ההגדרה של משיק מקביל לציר Y, אינה עקבית עם ההגדרה של משיק שנלמדה בכיתה שכן אין לפונקציה נגזרת בנקודה שבה המשיק מקביל לציר Y.

תרשים 1. משימה הדורשת דוגמה לפונקציה המקיימת תנאים, את הפונקציה ניתן לתאר בעזרת ייצוג סימבולי או גרפי (המשימה פותחה במסגרת עבודת הדוקטורט של גלית נגרי חדיף בהנחיית פרופ' מיכל ירושלמי)

המורה ספיר (שם בדוי) נתנה את המשימה (תרשים 1) לתלמידיה בכיתה יב כשיעורי בית. בזמן ההכנות לקראת השיעור העוקב, ספיר נתקלה במגוון רחב של תשובות שהוגשו על ידי תלמידיה, חלקן מופיעות בתרשים 2 אשר נותחו לאיתור מאפיינים שונים באופן אוטומטי. בין השאר נבדק אם קיים משיק מקביל לציר Y, אסימפטוטה, האם הייצוג סימבולי או גרפי, ועוד. זאת על מנת לאפשר איתור של מקרים של משיקים אשר אינם בהכרח מתאימים

להגדרה (למשל באיור 2A נעשה שימוש לקוי במשיק ואסימפטוטה כנראה). בשיעור ספיר הציגה את תשובות התלמידים וקיימה דיון עם התלמידים. אחד התלמידים שאל, "איך אנחנו יכולים לחשב את אם לא נוכל למצוא את הנגזרת של הפונקציה בנקודה זו?" תלמידים אחרים ניסו למצוא הגדרה קונקרטית למקרה זה. ספיר ביקשה מהתלמידים למצוא הגדרה מתאימה למשיק המקביל לציר Y. מאוחר יותר, במפגש ההשתלמות שהתרחש אמרה ספיר שהיא גם חשבה על זה כאשר היא הקצתה את המשימה לתלמידים, אבל היא לא יכלה למצוא הגדרה טובה, וביצעה חיפוש מקוון, כדי להיות מוכנה טוב יותר. דוגמה זו מציגה מצב בו השלימו התלמידים את המשימה, בעוד שכנראה לא התייחסו להגדרת המושג.



תרשים 2. דוגמאות להגשות תלמידים

דיון

בממצאים הוצגה דוגמה לשיח על הגדרת מושג תוך שימוש בסביבת הערכה מעצבת ממוחשבת. המשימות הקיימות במערכת המרא"ה מבוססות על דוגמאות מהוות הזדמנות לאינטראקציה, בין השאר, עם מקרי קיצון, דבר המאפשר להתמודד עם הגבולות של הגדרות המושגים המתמטיים, ובכך לשפר את תמונת המושג של התלמידים (וינר, 1983). הערכה אוטומטית של ההגשות והדרישה להגדיר אלגוריתם לזיהוי מאפיינים מתמטיים באופן מדויק מוסיף נקודה נוספת לאינטראקציה עם הגדרות, במיוחד כשקיימות מספר הגדרות שונות לאותו מושג (דוגמאות ינתנו במהלך ההרצאה). עיצוב המשימות כלל גם את המאפיינים שנותחו בצורה אוטומטית לסיווג ההגשות. סיווג זה היה הבסיס לדיונים מאתגרים בין השאר כל הגדרות מושגים מתמטיים.

ביבליוגרפיה

Black, P. J., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. Assessment in Education:Principles, Policy and Practice, 5 (1), 7–74.

Leung, A., & Lee, A. M. S. (2013). Students' geometrical perception on a task-based dynamic geometry platform. Educational Studies in Mathematics, 82(3), 361-377.

Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). How Might the Use of Technology in Formative Assessment Support Changes in Mathematics Teaching?. For the Learning of Mathematics, 36(3), 11-18.

Sweller, J. (1989). Cognitive technology: Some procedures for facilitating learning and problem solving in mathematics and science. J. of educational psychology, 81(4), 457.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. Int. J. of Computers for mathematical learning, 9(3), 281-307.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. Int. Jour. of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293-305.

Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 2(2), 237-249.

Yerushalmy, M., Nagari-Haddif, G., & Olsher, S. (2017). Design of tasks for online assessment that supports understanding of students' conceptions. ZDM, 49(5), 701-716.

השפעת צורך התלמידים בהצדקה על תהליכי הבניית הצדקות

רז הראל, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד ילין
איבי קידרון, המרכז האקדמי לב
טומי דרייפוס, אוניברסיטת תל אביב

רקע תאורטי

הנחה רווחת היא כי קיים קשר בין צורך הלומד בלמידה לבין איכות למידתו. ביטוי לכך ניתן למצוא בלימוד ההצדקות וההוכחות המתמטיות. המסגרת התיאורטית הפשטה בהקשר (Abstraction in Context: AiC), שהוצעה על ידי Hershkowitz, Schwarz, and Dreyfus (2001) כוללת בתוכה את מודל הפעולות האפיסטמיות המשוכנות: RBC+C. מודל ה RBC+C מאפשר חקר מיקרו אנליטי של תהליכי הבניית ידע, לרבות חקר תהליכי הבניית הצדקות (Kidron & Dreyfus, 2010). בכך מאפשרת המסגרת התיאורטית AiC לבחון את ההשפעה של צורך הלומד בלמידה ושל איכות למידתו. במחקר הנוכחי בחנו את השפעת צורך הלומד בהצדקה על תהליכי הבניית הצדקות.

עבור המחקר הנוכחי צורך הלומד בהצדקה הינו הצורך האישי של הלומד במענה על אחד (או יותר) מתפקידיה של ההצדקה. כך למשל, הצורך להסיר ספק בדבר נכונות השערה. תהליכי הבניית הצדקות הינם תהליכים בהם במהלך ניסיונות הצדקה להשערה נתונה, מבנים הלומדים מבני ידע החדשים להם, על ידי ארגון אנכי של מבני ידע קודמים שברשותם.

על מנת לבחון את תהליכי הבניית ההצדקות, בחנו גם את תהליכי גיבוש ההשערה (התהליכים המובילים את התלמידים אל ניסוח ההשערה), שכן על פי Boero, Garuti, and Lemut (2007) במהלך תהליכי גיבוש ההשערה עשויים התלמידים להבנות מבני ידע שיעזרו להם להצדיק את ההשערה שגובשה.

על פי ההפשטה בהקשר, בתהליכי הפשטה עוברים הלומדים דרך שלושת השלבים הבאים: צורך במבנה ידע חדש (Need), הפצעת מבנה הידע החדש (The emergence) וקונסולידציה (Consolidation). למרות שעל פי AiC תהליך ההבניה, לרבות הבניית הצדקות, מתחיל בצורך של הלומדים בהבניית מבנה ידע חדש, חקר צורך הלומדים נמצא עדיין בראשיתו. יחודו של המחקר הנוכחי הוא בכך שהוא משלב חקר של תהליכי הבניית הצדקות עם חקר צורך התלמידים בהצדקה. בדיווח נבקש להדגים את ההשפעות של צורך התלמידים בהצדקה על תהליכי הבניית הצדקות.

מידע מתודולוגי

המחקר הנוכחי הוא חלק ממחקר רחב יותר בו בחנו את ההשפעות ההדדיות של צורך התלמידים בהצדקה ושל תהליכי הבניית הצדקות, ואת מקומות הופעתו של הצורך בהצדקה על פני רצף תהליך הבניית ההצדקה. אוכלוסיית המחקר מנתה 20 תלמידי תיכון מכיתות יא'-יב' שלמדו ברמה של 5 יח"ל. כלי המחקר היו 9 פעילויות שנכתבו לצורך המחקר ובוצעו על ידי זוגות משתתפים בעזרת מראיין (task-based interviews). על כל פעילות נעשה ניתוח מקדים לפני ביצועה. בניתוח המקדים תוארו דרכי הצדקה אפשריות לטענות שהופיעו בפעילות והוצעו תהליכי הבניה פוטנציאלים.

על כל פעילות בוצעו ראיונות עם שלושה זוגות משתתפים בעזרת מראיין. על הראיונות שנבחרו למחקר בוצעו: 1) ניתוח תהליכי הבניית הצדקות; 2) ניתוח צורך התלמידים בהצדקה; 3) ניתוח המשלב את חקר צורך התלמידים בהצדקה עם חקר תהליכי הבניית ההצדקות.

ניתוחי תהליכי הבניית ההצדקות בוצעו בעזרת המסגרת התיאורטית AiC. ניתוח הצורך בוצע בעזרת הכלי המתודולוגי: הטיפולוגיה לביטויי צורך המשתתפים בהצדקה, שפותח במהלך המחקר הנוכחי. הטיפולוגיה הינה כלי זיהוי ומיון ביטויים של צורך התלמידים בהצדקה אל קטגוריות הצורך השונות. בדיווח נתמקד במקרה חקר של זוג המשתתפים רם ואיתי שלמדו בכיתה יב', 5 יח"ל.

פעילות החקר – סיפורה של בריכה

במרכזה של הפעילות אתה התמודדו רם ואיתי עמדה הסדרה הרקורסיבית:

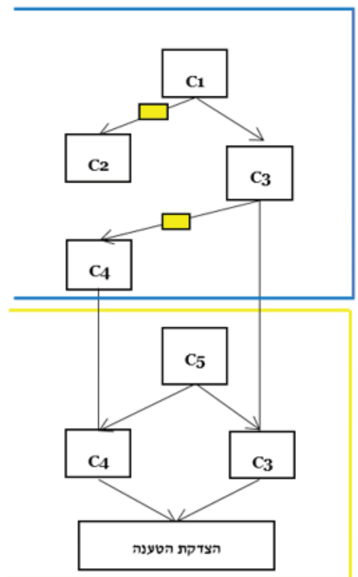
$$a_{N+1} = 0.95a_N + 2$$

אל הסדרה הגיעו המשתתפים בעקבות מידול סיפור המסגרת הבא:

בבריכתן של אלה ויערה, האחראיות על בריכת נולד לשחות, התגלתה פטרייה. בכדי למנוע את התפשטותה היה עליהן להכניס כמות התחלתית של 50 גר׳ כלור לבריכה. כיוון שידוע כי כמות הכלור המוכנסת לבריכה מתאדה בקצב של 5% ליום, בכל יום הן הכניסו כמות של 2 גר׳ כלור נוספים.

את סדרת הערכים בנינו כך שעבור ערכים הגדולים מ 40 שואפת הסדרה אל הגבול מלמעלה ואילו עבור ערכים הקטנים מ 40 שואפת הסדרה אל הגבול מלמטה. באופן זה צפוי היה כי יתעורר אצל המשתתפים הצורך להבין באיזה אופן שואפת סדרת הערכים אל הגבול.

ממצאים ודיון



תרשים 1. ניתוח משולב – רם ואיתי, סיפורה של בריכה.

ממצאי הניתוח המשולב של מקרה החקר של רם ואיתי מוצגים בתרשים מס׳ 1. מבני ידע מוצגים בתרשים בעזרת המלבנים השחורים. הקמת הקשרים בין מבני הידע מוצגים בעזרת חצים. הסוגריים הכחולים מייצגים צורך אותו כינינו ״הצורך בגיבוש השערה״. הסוגריים הצהובים מייצגים את הצורך בהסרת ספק. המלבנים הצהובים מייצגים מקומות בתהליך ההבניה בהם הביעו המשתתפים ספקות על תהליך ההבניה.

פרוט מבני הידע שהבנו רם ואיתי מוצג בטבלה מס' 2:

סימון	תיאור רכיב הידע תיאור רכיב הידע
C1	הבניית הביטוי הרקורסיבי: $a_{n+1} = 0.95a_n + 2$
C2	חישוב הערך *L=40* עבורו מגמת סדרת הערכים תתחלף מירידה לעליה ולהפך.
C3	סדרת ערכים המתחילה מערך גדול/קטן מ 40 תלך ותקטן/תגדל.
C4	לסדרת הערכים קיים חסם תחתון או עליון.
C5	פיתוח הביטוי הרקורסיבי לכדי ביטוי על פי מקום.

טבלה 2. מבני ידע – רם ואיתי. סיפורה של בריכה.

תהליך ההבניה של רם ואיתי החל בתהליך גיבוש להשערה הבאה: סידרת הערכים שואפת אל הגבול L=40 מלמעלה (תהליך גיבוש ההשערה תחום בסוגריים המלבניים הכחולים). לאחר תהליך גיבוש ההשערה פנו הנבדקים לתהליך הבניית הצדקה להשערה שגובשה (תחום בסוגריים הצהובים).

התבוננות בתהליך ההבניה העלתה מספר שאלות. הראשונה היא מדוע שבו והבנו המשתתפים את מבני הידע C3 ו- C4? השאלה השנייה הייתה מדוע המשיכו רם ואיתי את תהליך ההבניה לאחר סיום תהליך גיבוש ההשערה? שכן על פי הניתוח המקדים לפעילות סיפורה של בריכה, פעולותיהם של רם ואיתי במהלך גיבוש ההשערה, ומבני הידע שהובנו בו עשויים היו להיחשב כהצדקה מלאה. בכך היה עשוי תהליך הבניית ההצדקה להתלכד עם תהליך גיבוש ההשערה.

שאלות אלו קיבלו מענה כאשר שילבנו את ניתוח ביטויי צורך המשתתפים בהצדקה עם ניתוח תהליך הבניית ההצדקה. על פי הניתוח המשולב המשתתפים לא התייחסו לתהליך ההבניה שבוצע במהלך גיבוש ההשערה כהוכחה קבילה:

איתי	147	לא הוכחנו את זה.
מראיין	148	אוקיי. ואתם רוצים להוכיח את זה?
איתי	149	(מהנהן בראשו במרץ). כן. אנחנו רוצים להוכיח את זה. כן.... חשבנו שמה שאנחנו רוצים לעשות זה... כאן הרי מתואר כלל נסיגה של איי אן ועוד אחד תלוי ב איי אן. אנחנו רוצים להגיע לכלל שמביא לנו את איי אן כתלות באן. לא כתלות באיבר הקודם.
מראיין	150	ואם היה לכם את זה, אתה אומר יכולתם להתקדם משם?
איתי	151	כן.

אי קבלתם של רם ואיתי את פעולותיהם כהוכחה הובילה אותם לבצע תהליך הבניית הצדקה על מנת לענות על הספקות שהתעוררו בנוגע להשערה שגובשה. עדות נוספת לכך שתהליך הבניית ההצדקה נבע מצורך המשתתפים להסיר ספק ניתן למצוא בדבריו של איתי במקטע 149 בהם הוא אף מצביע על אופן הפעולה שיש לבצע בכדי להסיר את ספקותיו. במהלך הבניית ההצדקה אכן הבנו רם ואיתי את מבנה הידע C5 במהלכו הם תרגמו את סדרת הערכים הרקורסיבית להצגה על פי מקום:

$$a_n = 10\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1} + 40$$

הבניית מבנה הידע C5 אפשרה למשתתפים לשוב ולהבנות את מבני הידע C3 ו-C4 באופן שאפשר את הסרת ספקותיהם. לבסוף הקימו רם ואיתי קשרים לוגיים בין מבני הידע C3 ו-C4 ובכך סיימו את תהליך הבניית ההצדקה.

מסקנות

מטרת הדיווח היא להדגים השפעה של צורך התלמידים בהצדקה על תהליכי הבניית הצדקות. מכך שבמקרה החקר המוצג צורך התלמידים בהצדקה הוביל אותם לתהליך הבניית הצדקה, במהלכו הם הבנו מבנה ידע חדש והבנו פעם נוספת ובאופן שונה מבני ידע שהובנו זה מכבר בתהליך גיבוש ההשערה, ניתן להסיק כי הצורך בהסרת ספק הוביל את המשתתפים להעמקת תהליך ההבניה. באופן זה נבקש להדגים כיצד צורך הלומדים בלמידה השפיע על איכות למידתם.

מקורות

Boero, P., Garuti, R., & Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. In P. Boero (Ed.), Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice (pp. 249–264). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 195–222.

Kidron, I., & Dreyfus, T. (2010). Justification enlightenment and combining constructions of knowledge. Educational Studies in Mathematics, 74(1), 75–93.

שימוש בסביבה מקוונת ללימוד מתמטיקה כמקדם למידה: עדויות מבוססות לוגים ונתוני מיצ"ב

ארנון הרשקוביץ, אוניברסיטת תל אביב
בן יוסף לוי, אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

◆◆◆

מבוא

הקשרים בין שימוש במחשבים בהקשר הבית-ספרי לבין הישגי תלמידים הינם מורכבים מאוד. מחקרים השוואתיים בינלאומיים מצביעים על שיפור בהישגים–בפרט, בהישגים במתמטיקה–במדינות בהן בוצעה ההשקעה בטכנולוגיות מידע ותקשורת (ICT), אך לא נמצא יתרון למדינות בהן ההשקעה הזו הייתה גדולה מאוד (OECD, 2015). אחד ההסברים לכך, הוא שהשימוש במחשבים בפועל בכיתות הלימוד הוא ברמה נמוכה יחסית, בדרך כלל להדגמות, לסיוע בחישובים ולקריאה מספרים דיגיטליים. עם זאת, מחקרי מטה-אנליזה אשר בחנו את השימוש בטכנולוגיה בכיתת המתמטיקה לטובת העמקה בלמידת המתמטיקה, מצאו קשרים חיוביים בין שימוש זה לבין שיפור בהישגי התלמידים (Steenbergen-Hu & Cooper, 2013; Young, 2017). למרות זאת, ניכר שהשימוש בטכנולוגיות דיגיטליות בלימודי המתמטיקה בבתי הספר עדיין לא הפך לעניין שבשיגרה.
כלומר, אנו עדים לפער בין רמת התקשוב בהקשר הבית-ספרי (זמינותם של מחשבים בעבור התלמידים, הן בבית הספר והן בבית) לבין השימוש שנעשה בסביבות למידה דיגיטליות, בפרט בהוראת המתמטיקה. אחת הסיבות המרכזיות לכך נעוצה בגישתם של מורים כלפי מחשבים (Tondeur, van Braak, Ertmer, & Ottenbreit-Leftwich, 2017).
לכן, לא מפתיע שכאשר כבר נעשה שימוש במחשבים בהוראת המתמטיקה, הוא מבוסס בעיקרו (אם לצורכי הקנייה ואם לצורכי תרגול) על סביבות למידה בהן התלמיד פועל על פי רצף מוכתב מראש, ללא צורך אינהרנטי בליווי של המורה (למשל, "עשר אצבעות", "אופק", "סנונית"). במובן זה, השימוש בטכנולוגיה דומה לשימוש בספר הלימוד הקלאסי - המורה מקצה תרגילים לתלמידיו, ואלו עסוקים בפתרונם.
לכן, עולה ביתר שאת השאלה בדבר תרומתן של סביבות למידה מסוג זה ללמידת המתמטיקה, וזוהי השאלה שעומדת בלב המחקר הנוכחי.

שאלת המחקר

בליבו של המחקר הנוכחי עומדת שאלה מרכזית אחת: מהם הקשרים בין שימוש בסביבה מקוונת ללימוד מתמטיקה לבין רמת הידע המתמטי, בקרב תלמידים בבית הספר היסודי? חידושו העיקרי של המחקר הנוכחי הוא בהתבססות על נתונים אמפיריים אובייקטיביים הן במדידת השימוש באתר (נתונים מקובצי היומן של המערכת) והן במדידת ההישגים במתמטיקה (נתוני מיצ"ב).

מתודולוגיה

שדה המחקר

אתר "עשר אצבעות" מבית "מטיפיק" (http://www.matific.com) מכיל מאות יישומונים בתחומי המתמטיקה השונים. תוכן האתר מחולק לנושאים ולשכבות-גיל, בהתאם לתכנית הלימודים במדינה בה נעשה שימוש במערכת. במהלך הפעילות במערכת, התלמידים אוספים "כוכבים", המציינים את הישגיהם ביישומונים השונים; בסיום פעילות ביישומון (אשר מכיל בתוכו מספר שאלות/משימות), התלמיד מקבל בין כוכב אחד לחמישה כוכבים, ואלו נצברים לאורך פעילותו במערכת.

במהלך החודשים פברואר-מרץ 2017 נערכה, בחסות משרד החינוך, אליפות משחקי המתמטיקה. במהלך האליפות, התחרו ביניהם בתי ספר מרחבי ישראל על הישגים במתמטיקה, תוך שימוש באתר "עשר אצבעות". תקופת התחרות מהווה בעבורנו נקודת ייחוס מיוחדת, ולהלן תיקרא "האליפות".

אוכלוסיית המחקר

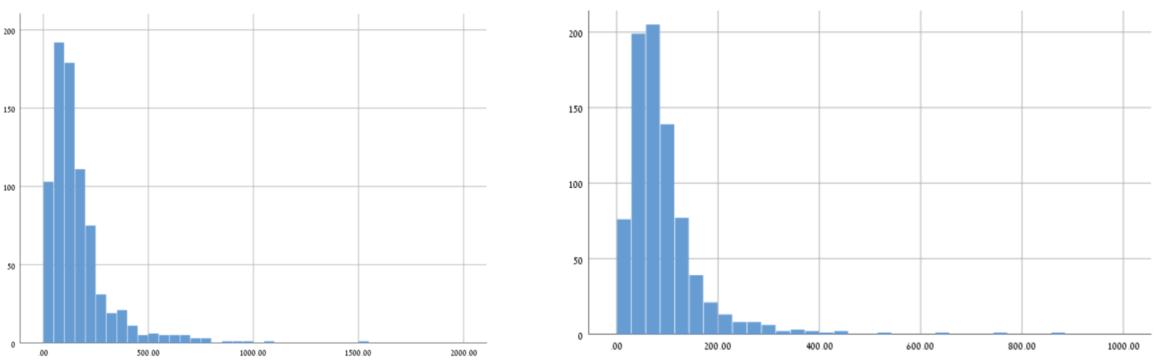
במחקר נכללו 805 בתי ספר מרחבי ישראל, אשר תלמידיהם פעלו באתר "עשר אצבעות" במהלך שנת הלימודים תשע"ז. מתוכם ל - 235 בתי ספר מתועדים ציוני מיצ"ב תשע"ז באתר "מיצ"ב ברשת" (http://meyda.education.gov.il/rama-mbareshet).

משתני המחקר

- לכל בית ספר חושבו המשתנים הבאים, המבוססים על קובצי היומן של אתר "עשר אצבעות":
- · מספר הכוכבים השנתי. משתנה זה מחושב באופן הבא: מספר הכוכבים הכולל שצברו תלמידי בית הספר במהלך שנת הלימודים תשע"ז, מחולק במספר התלמידים שפעלו במערכת במהלך שנת לימודים זו.
- · מספר הכוכבים באליפות. משתנה זה מחושב באופן הבא: מספר הכוכבים הכולל שצברו תלמידי בית הספר במהלך תקופת האליפות, מחולק במספר התלמידים שפעלו במערכת במהלך האליפות.
- בנוסף, בהתבסס על אתר "מיצ"ב ברשת", הגדרנו את המשתנים הבאים לכל בית ספר:
- · הישגים במיצ"ב תשע"ז במתמטיקה כיתה ה'
- · הישגים במיצ"ב תשע"ז בשפה כיתה ה' (עברית או ערבית, בהתאם למגזר אליו שייך בית הספר)
- · הישגים במיצ"ב תשע"ז באנגלית כיתה ה'

ממצאים ודיון

המשתנים מבוססי הלוגים (מספרי הכוכבים) מבוססים על פעילות במערכת. כידוע מזה שנים רבות, משתנים המכמתים התנהגות מכוונת מתפלגים בצורת "הזנב הארוך". כלומר, מעטים הם המשתמשים הפועלים רבות, ורבים הם המשתמשים הפועלים מעט. כצפוי, התפלגות זו באה לידי ביטוי גם אצלנו, כפי שניתן לראות באיור 1. לאור זאת, נשתמש במבחן ספירמן לבחינת מתאמים המערבים משתנים אלו, שכן זהו מבחן א-פרמטרי.



איור 1. התפלגות "הזנב הארוך" של המשתנים מספר כוכבים שנתי (מימין) ומספר כוכבים באליפות (שמאל)

בבדיקת מתאמים בעבור מספר הכוכבים השנתי, עולה מתאם חיובי מובהק עם ההישגים במיצ"ב מתמטיקה ($\rho=0.16$, במידת מובהקות $p<0.001$) ובמיצ"ב שפה ($\rho=0.19$, במידת מובהקות $p<0.01$). לא נמצא מתאם מובהק בין מספר

הכוכבים השנתי לבין ההישגים במיצ"ב אנגלית (ρ=0.11, במידת מובהקות p=0.09). במקרים אלו, N=235.

בבדיקת מתאמים בין מספר כוכבים באליפות, עולה תמונה דומה: מתאם חיובי מובהק עם ההישגים במיצ"ב מתמטיקה (ρ=0.16, במידת מובהקות p<0.05) ובמיצ"ב שפה (ρ=0.20, במידת מובהקות p<0.01). לא נמצא מתאם מובהק בין מספר כוכבים באליפות לבין ההישגים במיצ"ב אנגלית (ρ=0.07, במידת מובהקות p=0.31). במקרים אלו, N=229.

ממצאים אלו מעידים על קשר חיובי ברור בין השימוש בסביבה הלימודית בהוראת המתמטיקה לבין הישגים במיצ"ב מתמטיקה; עם זאת, יש להיזהר בפרשנותם. שתי הפרשנויות העיקריות לנתונים הם אלו: (1) שימוש ביישומונים מתמטיים משפר את ציוני מיצ"ב מתמטיקה; (2) בתי הספר ה"חזקים" במתמטיקה הם אלו אשר עושים שימוש נרחב במערכת, וממילא הציונים של תלמידים במיצ"ב מתמטיקה גבוהים. לדעתנו, ניתן להפריך את הגישה הפרשנית השנייה ולהשאיר על כנה (לעת עתה) את הפרשנות הראשונה.

כדי להפריך את הפרשנות השנייה, נשים לב לשתי נקודות חשובות. ראשית, נתוני המיצ"ב במתמטיקה, שפה ואנגלית, בקרב אוכלוסיית המחקר, מתואמים חיובים אלו עם אלו במידה גבוהה ומובהקת (מקדמי מתאם 0.560.64) - כלומר, בית ספר "חזק" יהיה, במקרים רבים, "חזק" בשלושת המקצועות. שנית, על פי הידוע מן הספרות המחקרית, הישגים במתמטיקה נמצאו מתואמים חיובית עם הישגים ברכישת שפה (ראשונה) (Grimm, 2008; Monroe, 1996; Sarama, Lange, Clements, & Wolfe, 2012). לאור זאת, העובדה כי נתוני השימוש נמצאו מתואמים חיובית עם הישגים במתמטיקה ובשפה, ולא נמצאו מתואמים עם הישגים באנגלית עשויה בהחלט להעיד על קשר אפשרי בכיוון שימוש ß הישגים.

חשוב לשים לב כי הקשרים שנמצאו הינם בעלי חשיבות רבה, בשל ההבדלים שבין רמות החשיבה המעורבות בדרך כלל ביישומונים המתמטיים לבין אלו הבאים לידי ביטוי במבחן המיצ"ב. בדרך כלל, היישומונים מתייחסים לשתי רמות החשיבה הנמוכות (ידע וזיהוי, חשיבה אלגוריתמית), בעוד מבחני המיצ"ב מתייחסים לשתי הרמות העליונות (חשיבה תהליכית, חיפוש פתוח והנמקה). הקשרים שנמצאו עשויים להעיד על תרומתו של תרגול ברמות הנמוכות להבנה ברמות הגבוהות.

תודות

מחקר זה נעשה במסגרת פרויקט רחב היקף לבחינת השימוש ביישומונים מתמטיים ברצף ההוראה (20202017). חוקרים ראשיים בפרויקט: פרופ' מיכל טבח, ד"ר ענת כהן, ד"ר ארנון הרשקוביץ (שלושתם מאוניברסיטת תל אביב) ופרופ' קובי גל (אוניברסיטת בן גוריון בנגב). הפרויקט ממומן על ידי לשכת המדען הראשי של משרד החינוך, ואנו מודים לאנשי המשרד על תמיכתם הנדיבה במחקר בתחום.

מקורות

Grimm, K. J. (2008). Longitudinal associations between reading and mathematics achievement. Developmental Neuropsychology, 33(3), 410–426. https://doi.org/10.1080/87565640801982486

Monroe, E. (1996). Language and mathematics: A natural connection for achieving literacy. Reading Horizons, 36(5), 368–379. Retrieved from https://scholarworks.wmich.edu/reading_horizons/vol36/iss5/1

OECD. (2015). Students, computers and learning: Making the connection. Paris, France. https://doi.org/10.1787/9789264239555-en

Sarama, J., Lange, A. A., Clements, D. H., & Wolfe, C. B. (2012). The impacts of an early mathematics curriculum on oral language and literacy. Early Childhood Research Quarterly, 27(3), 489–502. https://doi.org/10.1016/J.ECRESQ.2011.12.002

Steenbergen-Hu, S., & Cooper, H. (2013). A meta-analysis of the effectiveness of intelligent tutoring systems on K–12 students' mathematical learning. Journal of Educational Psychology, 105(4), 970–987. https://doi.org/10.1037/a0032447

Tondeur, J., van Braak, J., Ertmer, P. A., & Ottenbreit-Leftwich, A. (2017). Understanding the relationship between teachers' pedagogical beliefs and technology use in education: a systematic review of qualitative evidence. Educational Technology Research and Development, 65(3), 555–575. https://doi.org/10.1007/s11423-016-9481-2

Young, J. (2017). Technology-enhanced mathematics instruction: A second-order meta-analysis of 30 years of research. Educational Research Review, 22, 19–33. https://doi.org/10.1016/J.EDUREV.2017.07.001

הילכו שניים יחדיו: בחינת קשרים בין מתמטיקה לפיזיקה הנעשים על ידי מורים למתמטיקה

אילנה ווייסמן, שאנן - המכללה האקדמית דתית לחינוך, אוניברסיטת חיפה

◆◆◆

מבוא

בניית הקשרים בין רעיונות מתמטיים תורמת לפיתוח הבנה מתמטית עמוקה. סוג אחד של קשר הוא ידע ויישום הקישוריות בין מתמטיקה לבין תחומי דעת אחרים, כגון, פיזיקה (NCTM, 2000). על אף החשיבות בשילוב מתמטיקה ופיזיקה, לימודי מתמטיקה מתבצעים במנותק מלימודי פיזיקה (Blum & Niss, 1991). הסיבה העיקרית להפרדה זו היא שהוראת יישומי מתמטיקה דורשת הן ידע מתמטי והן ידע חוץ-מתמטי ולכן, מורים למתמטיקה אינם מיישמים מטלות של דוגמאות מתחום הפיזיקה (Blum & Niss, 1991). המחקר המוצג מתמקד בסוגי הקשרים בין בעיות במתמטיקה לבעיות בפיזיקה שנעשים על ידי מורים למתמטיקה. זאת כדי להבין טוב יותר את הסיבות להימנעותם של מורי המתמטיקה משימוש בדוגמאות פיזיקליות. הקישוריות בין שני תחומים אלה נבדקה על ידי פעילות מיון משימות (sorting tasks), הכוללת סדרה של בעיות מתחומי התוכן- מתמטיקה ופיזיקה. מיון משימות דורש סיווג של אובייקטים שונים על פי תבחיני קיבוץ שונים המוצעים על ידי המשתתפים, ויכול לחזק את המודעות לקשרים בין אובייקטים (Zaslavsky,2008).

רקע תיאורטי

NCTM (2000) קובע כי פעילויות מתמטיות צריכות לכלול בעיות הנובעות מתחומי דעת חוץ מתמטיים. מצד אחד, מחקרים מצביעים על כך שהבנת מושגים במתמטיקה תורמת להתמודדות בפתרון בעיות בפיזיקה (Bing & Redish, 2009). מצד שני, מחקרים מעטים בלבד מדגישים את התפקיד של הבנת מושגים בפיזיקה ללמידת מושגים במתמטיקה. למשל, חלק מהמחקרים מציעים לשלב לימודי אנליזה עם לימודי קינמטיקה בשיעורי המתמטיקה (Planinic et al., 2013). כמו כן, לימוד רעיונות מתמטיים באמצעות שימוש בדוגמאות מפיזיקה מקדם הבנה טובה יותר של המתמטיקה המופשטת. למשל, שילוב של רעיונות מפיזיקה בהוראת הגיאומטריה מקדם הבנה טובה יותר של משפטים בגיאומטריה (Hanna & Jahnke, 2002). בנוסף, הצגת מושגים מתמטיים עם דגש על הקשר בין מתמטיקה לפיזיקה יכולה לשפוך אור על אופן יצירת הידע המתמטי. למשל, שימוש בדוגמאות מפיזיקה יכול לעזור ללומדים להבין ייצוגים מתמטיים (Planinic et al., 2013). למרות החשיבות של שילוב מתמטיקה ופיזיקה לפיתוח הבנה של מקצועות אלה, הם נלמדים בנפרד. אחת הדרכים לקדם שילוב תחומי תוכן אלה ולטפח את הקשר הטבעי שביניהם היא להציע קורסים מיוחדים באוניברסיטאות שבהם מתמטיקה ופיזיקה נלמדות בו זמנית, ובכך לתרום להתפתחות מקצועית של מורי מתמטיקה (Ferri & Blum, 2010) .

במיון משימות, מציגים למשתתפים קבוצת גירויים, ומבקשים מהם למיין אותם לערימות לפי קריטריון מסוים. למיון משימות שימושים רבים בפסיכולוגיה וגם בהקשר חינוכי בפיזיקה ובמתמטיקה. משימות מיון מאפשרות לחקור את מגוון הקשרים בין מושגים שונים הנעשים על ידי הלומדים, לעמוד על הידע בתחום דעת מסוים, לזהות שיקולים פדגוגיים הנעשים במהלך ההוראה ולקדם התפתחות מקצועית של מורים (Zaslavsky, 2008).

מטרת המחקר ושאלותיו

מטרת מחקר זה הייתה לעמוד על קשרים בין מתמטיקה לפיזיקה הנעשים על ידי מורים למתמטיקה. לכן, שאלות המחקר היו: (1) כיצד מורים למתמטיקה ממיינים בעיות מתמטיות ופיזיקליות הניתנות לפתרון בעזרת עקרונות

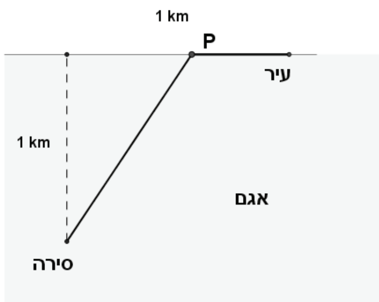
מתמטיים או פיזיקליים? איך הם מסבירים את תבחיני המיון שלהם? (2) כיצד מורים פותרים את הבעיות הללו? ההרצאה תיתן מענה לשאלה (1).

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 30 מורים למתמטיקה בבתי ספר על יסודיים (כיתות ז-יב), שהשתתפו בתוכנית מיוחדת לפיתוח מקצועי. המשתתפים חולקו ל- 8 קבוצות קטנות בנות 3-4 משתתפים. לכל המורים היה רקע בסיסי בפיזיקה. למשתתפים נתנו 22 בעיות, שכל אחת מהן הוצגה על גבי כרטיס נפרד. הבעיות נבנו בהתאם לאופן הצגת הבעיה והגישה לפתרונה, מתמטית - M או פיזיקלית - P (Waisman, 2016). לכן, כל בעיה השתייכה לאחת מארבע המחלקות PM, MP, MM, PP. איור 1 מתאר את הבעיה מסוג MM ו-PM.

אדם, היושב בסירה הנמצאת 1 ק"מ מהחוף, רוצה להגיע לעיר הנמצאת על גדת האגם במרחק 1 ק"מ במעלה האגם. האדם מתכוון לחתור בסירה בקו ישר לנקודה P על הגדה, ומשם לצעוד לאורך הנהר לעיר.

מצאו את נקודה P שאליה עליו לחתור, כדי להגיע ליעדו בזמן האפשרי הקצר ביותר, אם הוא צועד במהירות של 5 קמ"ש וחותר במהירות של 3 קמ"ש.



איור 1: דוגמא לבעיה מסוג MM ו-PM

כל קבוצת משתתפים נתבקשה למיין את אותן בעיות לפי מספר תבחיני מיון שונים המלווים בקטגוריות המשנה הכוללות את תיאור המאפיינים המשותפים לבעיות בכל קטגוריה, ולמלא עבור כל קריטריון דף מיון שבו הקטגוריות אינן בהכרח מכילות או זרות. לאחר מכן התקיים דיון רפלקטיבי במליאה, ובעקבותיו כל משתתף נתבקש לפתור את הבעיות. המחקר השתמש בשיטה איכותנית לניתוח נתונים ממקורות שונים, שביניהם הקלטות וידאו וקול וחומרים כתובים. מבין קטגוריות המיון שהציעו קבוצות המשתתפים, התקבלו מחלקות של קטגוריות שכל אחת מתמקדת בנושא אחר. הקטגוריות הושוו לפתרונות שהוצעו לבעיות.

ממצאים עיקריים ודיון

בשל מגבלת המקום, אתייחס לממצאים בצורה כללית.
מרבית המורים ציינו כי הבחירה בקריטריונים למיון הונחתה על ידי האופן שבו הם בוחרים משימות לתלמידים שלהם על פי שיקולים דידקטיים. בנוסף הם הדגישו שיש להתייחס הן לתחום המדעי של הבעיה והן לרמת החשיבה הנדרשת לפתרונה.
נמצא כי מורים למתמטיקה שהם בעלי ידע בסיסי בפיזיקה ממיינים את המשימות על סמך (1) אפיון גלוי של הפריט (2) אפיון הקשור לעיקרון המרכזי בפתרון הבעיה שבפריט (3) אפיון המבוסס על תחום דעת

מיון על פי אפיון גלוי של הפריט מבוסס על ההתייחסות לייצוגים, להנחיות ולמושגים הגלויים המופיעים בהצגת הבעיה. במיון על פי אפיון זה המשתתפים קישרו בעיות מהסוג MM ו MP עם הבעיות מהסוג PM ו- PP. ממצא זה תואם את מה שנמצא בספרות אודות תוצרי מיון של לא מומחים בתחום לעומת מומחים. מיון על פי אפיון גלוי אינו מצביע על יצירת קישוריות בין מתמטיקה לפיזיקה בקרב מורים למתמטיקה.

מיון על פי אפיון הקשור לעיקרון המרכזי בפתרון הבעיה שבפריט מבוסס על עיקרון מתמטי (הגדרה או משפט) או פיזיקלי (חוק פיזיקלי) העומד בבסיס הפתרון של הבעיה. במיון על פי אפיון זה המשתתפים קישרו בעיות מסוג MM לבעיות מסוג PM עם קטגוריות המבוססות על עיקרון מתמטי, בעוד בעיות מסוג MP נקשרו לבעיות מסוג PP עם קטגוריות המבוססות על עיקרון פיזיקלי. ממצא זה מצביע על הבנה מתמטית עמוקה.

מיון על פי אפיון תחום דעת שבבסיס הבעיה שבפריט מבוסס על תחום הדעת, שהידע בו נדרש לפתרון הבעיה (רק פיזיקה, רק מתמטיקה, פיזיקה-מתמטיקה). במיון על פי אפיון זה המשתתפים קישרו בעיות מסוג MP לבעיות מסוג PM.

לסיכום, הממצאים מעידים על חשיבות המודעות לקשר בין מתמטיקה לפיזיקה בקרב מורים למתמטיקה. שילוב הקשר בין שני תחומי דעת אלה במהלך שיעורי מתמטיקה יכול להפוך את המתמטיקה ממקצוע מופשט למקצוע יישומי. ולכן, חשוב לשלב פעילויות המקשרות בין מתמטיקה לפיזיקה בתוכניות התפתחות מקצועית של מורים וגם במהלך ההוראה בבתי הספר.

מקורות

Bing, T. J., & Redish, E. F. (2009). Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants. Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 5(2), 020108.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. Educational studies in mathematics, 22(1), 37-68.

Ferri, R. B., & Blum, W. (2010). Insights into teachers' unconscious behaviour in modeling contexts. In R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines & A. Hurford (Eds.), Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies (pp. 423-432). Springer US.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Planinic, M., Ivanjek, L., Susac, A., & Milin-Sipus, Z. (2013). Comparison of university students' understanding of graphs in different contexts. Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 9(2), 020103.

Waisman, I. (2016). Enlisting physics in the service of mathematics: Focusing on high school teachers. In the Proceedings of the 40th international conference for the psychology of mathematics education (Vol. 4, pp. 355–362). Szeged, Hungary.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and differences: A fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. Presented at the Topic Study Group on Task Design and Analysis (TSG34) at ICME-11. http://tsg.icme11.org/document/get/290. Retrieved 17 December 2016.

מה בין הזמן המוקצה לתפיסתן של משימות בגיאומטריה מרחבית לבין הקושי החזותי שלהן?

מירלה וידר, הטכניון, מכון טכנולוגי לישראל, חיפה, מכללת שאנן, מכללה אקדמית דתית לחינוך, חיפה

◆◆◆

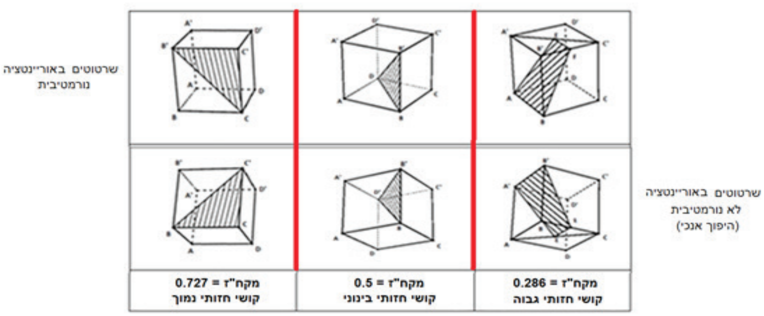
ברוח אמונה אינטואיטיבית רווחת כי קושי מאריך את זמן-הלמידה, כוללת הערכת הביצועים המתמטיים של תלמידים לא רק את הציונים שהם מקבלים עבור הבנה, אלא גם את הזמן שהם מקצים על מנת להגיע להבנה זו (Gredler, 1999). אולם, בעוד הציונים מודדים את האיכות היחסית של ביצועי התלמידים, הקצאת זמן-הלמידה משקפת תהליכים מטא-קוגניטיביים הנלווים ללמידה. בספרות המחקרית על מטא-קוגניציה מתוארים ממצאים סותרים לגבי אופן הקצאת זמן-הלמידה, המוסברים באמצעות שתי תיאוריות לגבי שיקולים סובייקטיביים הקשורים ביעילות הלמידה:

(1) מודל הפחתת הפערים ((Discrepancy Reduction model (DR), לפיו לומדים מציבים לעצמם נורמת-למידה סובייקטיבית פנימית, ומפסיקים ללמוד כאשר מידת הלמידה הנתפסת משיגה נורמה זו. בהתאם לכך, ככל שקושי הבעיה עולה, כן נחוץ זמן-למידה ארוך יותר להשגת נורמת-הלמידה (Nelson & Narens, 1990; Thiede & Dunlosky, 1999 Son & Metcalfe, 2000; Ackerman & Goldsmith, 2011;);

(2) תיאורית טווח הלמידה המקורב (Region of Proximal Learning (RPL) framework) . על פי תיאוריה זו, תוך כדי הלמידה הלומד מנטר את יעילותה ומפסיק ללמוד כאשר הוא מרגיש שאינו מתקדם יותר. לפיכך, זמן-הלמידה המוקצה לפריטים קשים מאד יכול להיות קצר יותק מזה המוקצה לפריטים הבינוניים, בהם הידע נוסף לאט ובהתמדה והלומד תופס עצמו כמתקדם לאורך זמן ממושך יותר (Ackerman, 2013; Metcalfe & Kornell, 2005).

חוקרים סבורים כי הקצאת זמן-הלמידה תלויה במורכבות הקוגניטיבית של המשימה, כאשר מודל DR תואם את הקצאת זמן-הלמידה למשימות קוגניטיביות פשוטות, כמו תפיסה חזותית או שינון, ואילו תיאוריית RPL מסבירה טוב יותר את הקצאת זמן-הלמידה במשימות קוגניטיביות מורכבות יותר, כגון פתרון בעיות או קבלת החלטות (Funke, 2010; Ackerman, 2013). תיאורטית, המורכבות הקוגניטיבית של משימות נמצאת על רצף שבין משימות קוגניטיביות פשוטות למורכבות (Funke, 2010). מתוך כך, קיים צורך בראיות אמפיריות לגבי זמן-הלמידה המוקצה למשימות שונות על פני רצף זה על מנת לקבוע היכן עובר הקו שבין משימות קוגניטיביות פשוטות למורכבות.

מחקר ראשוני זה מתמקד בהקצאת זמן-הלמידה עבור משימות תפיסה חזותית של מצבים גיאומטריים תלת-ממדיים מתרשימים דו-ממדיים. במחקר קודם נבנה ותוקף מדד לקושי חזותי (מקח"ז) של שרטוטים דו-ממדיים עבור קוביות עם מבני עזר, המאפשר לדרג את השרטוטים על פי הקושי החזותי שלהם. בנוסף, נמצא כי שינוי האוריינטציה של השרטוט באצעות היפוך אנכי, מקשה משמעותית על התפיסה החזותית, וזאת על אף שלא חל שינוי במקח"ז (Widder, Berman & Koichu, 2014). איור 1 מציג דוגמאות של שרטוטים תואמים של קוביות עם מבני עזר, באוריינטציה נורמטיבית ולא-נורמטיבית, וברמות קושי חזותי שונות.

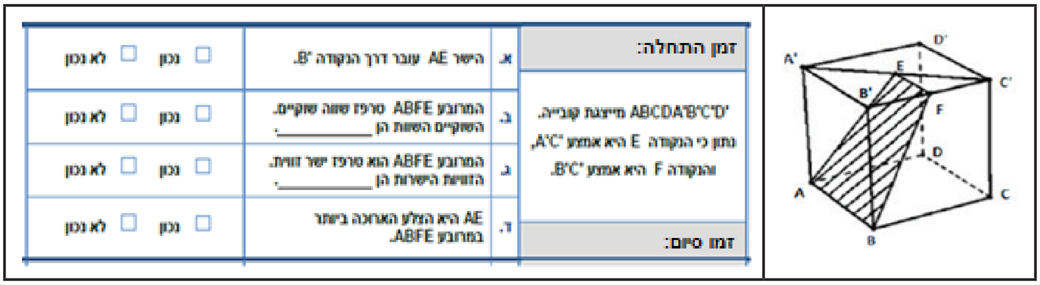


איור 1: ההיפוך האנכי משנה את האוריינטציה של השרטוט, אך לא את מקח"ז.

מטרת מחקר זה לבחון באופן אמפירי את זמן-הלמידה המוקצה לתפיסת מצבים גיאומטריים תלת-ממדיים מתוך שרטוטים דו-ממדיים באוריינטציה וברמות קושי חזותי שונות, בניסיון לתת מענה לשאלה: **האם וכיצד משקפת הקצאת זמן-הלמידה לתפיסת שרטוטים דו-ממדיים של קוביות עם מבני עזר, את הקושי החזותי של השרטוטים?**

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 174 תלמידי י"ב הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יח"ל. לתלמידים הועבר שאלון CRVDT (Widder, Berman & Koichu, 2014), הכולל 24 פריטים הקשורים לקוביות עם מבני עזר: 12 זוגות של פריטים תואמים (באוריינטציה נורמטיבית ולא-נורמטיבית) ברמות שונות של קושי חזותי. איור 2 מציג דוגמא של פריט CRVDT בו הקובייה היא בעלת אוריינטציה נורמטיבית. הפריט התואם הכיל שאלה זהה לגבי השרטוט הלא-נורמטיבי המתקבל מהיפוך אנכי.

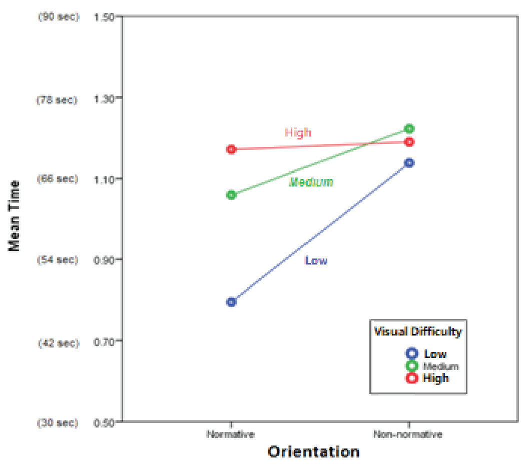


איור 2: דוגמא לפריט CRVDT בעל אוריינטציה נורמטיבית וקושי חזותי גבוה (מקח"ז 0.286).

המשיבים התבקשו לציין את זמן ההתחלה והסיום לפתרון כל פריט. מאחר שלחץ הזמן נמצא כגורם המכוון בבחירת אילו פריטים ללמוד ואילו לא (Dunlosky & Ariel, 2011; Son & Metcalfe, 2000), שאלון CRVDT הועבר ללא מגבלות זמן, בכדי עודד את המשתתפים לענות על כל הפריטים לאחר שיקול דעת יסודי. כל המשתתפים ענו על השאלון בטווח של 18-52 דקות. הממצאים נותחו באמצאות מודל Mixed Design ANOVA.

ממצאים

נמצא הבדל מובהק בפרופיל הקצאת זמן-למידה עבור רמות הקושי החזותי השונות בפריטים באוריינטציה נורמטיבית ולא-נורמטיבית (ראו איור 3).



איור 3: האפקט של האוריינטציה על זמן הלמידה הממוצע על פני הקושי החזותי של השרטוט.

עבור פריטים **באוריינטציה נורמטיבית**, ככל שרמת הקושי החזותי עלתה, זמן הלמידה היה ממושך יותר באופן מובהק. ממצאים אלו עולים בקנה אחד עם מודל DR.

כנגד זאת, עבור פריטים **באוריינטציה לא-נורמטיבית**, הממצאים אינם תואמים את מודל DR ואת הציפייה האינטואיטיבית כי העלייה בקושי החזותי כתוצאה מהיפוך אנכי תהייה מלווה בעלייה מקבילה בהקצאת הזמן ללמידה. אי ההתאמה באה לידי ביטוי בשלושה היבטים:

(1) נמצא הבדל קטן מאוד בין זמן הלמידה שהוקצה עבור פריטים באוריינטציה לא-נורמטיבית בכל רמות הקושי החזותי.

(2) בהשוואה בין הקצאת זמן-הלמידה לפריטים באוריינטציה נורמטיבית לעומת לא-נורמטיבית, העלייה בזמן-הלמידה בין רמות הקושי החזותי השונות אינה אחידה ואינה תואמת את הציפייה האינטואיטיבית שלנו: העלייה החדה ביותר בזמן-הלמידה הייתה דווקא עבור פריטים בקושי חזותי נמוך, ומיד אחריה באה עלייה מתונה יותר עבור פריטים בקושי חזותי בינוני. באופן מפתיע, עבור פריטים בקושי חזותי גבוה, זמן-הלמידה נותר כמעט ללא שינוי (הקו כמעט אופקי).

(3) הממצאים מראים כי פריטים בקושי חזותי בינוני ובאוריינטציה לא-נורמטיבית נלמדים במשך הזמן הרב ביותר, וזאת לא רק בהשוואה לפריטים בקושי חזותי נמוך, אלא גם בהשוואה לפריטים בקושי חזותי גבוה.

ממצאים מעניינים אלו ניתנים להסבר טוב יותר במסגרת תיאורית ה- RPL.

דיון ומסקנות

לחקר הקצאת זמן-הלמידה יש הפוטנציאל להנחות ולסייע בהמשך החיפוש אחר תובנות לגבי הקושי החזותי והמורכבות הקוגניטיבית של משימות תפיסה חזותית. שינוי האוריינטציה של השרטוטים מנורמטיבית ללא-נורמטיבית, הביא לשינוי מהותי במנגנונים המטא-קוגניטיביים המעורבים בהחלטות לגבי הקצאת זמן-הלמידה, ממנגנונים המוסברים באמצעות מודל DR, אל מנגנונים המוסברים במסגרת תיאוריית ה-RPL. שינוי זה עשוי להצביע על עלייה במורכבות הקוגניטיבית של השרטוטים בכל רמות הקושי כתוצאה מטרנספורמציית ההיפוך האנכי.

זמן-הלמידה הכמעט זהה שהושקע בפריטים בקושי חזותי גבוה מצביע על כך שללא קשר לאוריינטציה שלהם, פריטים בקושי חזותי גבוה היו מאתגרים באותה מידה. בנוסף, נראה כי קיים הבדל קטן מאוד בזמן-הלמידה שהוקצה עבור שרטוטים באוריינטציה לא-נורמטיבית על פני רמות הקושי החזותי השונות. מאחר שלא הייתה מגבלת זמן חיצונית לשאלון CRVDT, ממצאים אלו מפתיעים למדי, ועשויים לרמז על קיומו של גבול עליון לזמן שלומדים מוכנים להשקיע בהבנת שרטוט דו-ממדי. עם זאת, מחקר זה לא בדק את המניעים שמאחורי החלטות של לומדים להפסיק להשקיע זמן-לימידה בהבנת הפריטים השונים, וניתן להציע הסברים אפשריים רבים לממצאים אלו. להבנת המניעים שמאחורי הקצאת זמן הלמידה נחוץ מחקר נוסף.

ערכם המוסף של הממצאים במחקר זה הוא בכך שהם מקעקעים הן את הסיווג הפשטני האחיד של משימות תפיסה חזותית כמשימות קוגניטיביות פשוטות, והן את האמונה האינטואיטיבית הרווחת כי קושי בהכרח מגדיל את הזמן שמוקצה ללמידה. לכך עשויות להיות השלכות תיאורטיות ומעשיות חשובות בהקשרים של מחקר בתחום המטא-קוגניציה, כמו גם בתחום של הוראה והערכה.

רשימת מקורות

Ackerman, R., & Goldsmith, M. (2011). Metacognitive regulation of text learning: On screen versus on paper. Journal of Experimental Psychology: Applied, 17(1), 18-32.

Ackerman, R. (2013). A metacognitive stopping rule for problem solving. In M. Knauff, M. Pauen, N. Sebanz, & I. Wachsmuth (Eds.), Proceedings of the 35th Annual Conference of the Cognitive Science Society (pp. 121–126). Austin, TX: Cognitive Science Society.

Dunlosky, J., & Ariel, R. (2011). Self-regulated learning and the allocation of study time. In Psychology of

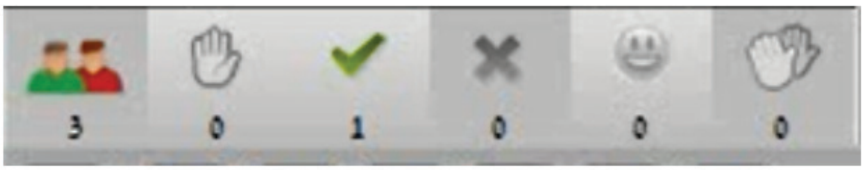
learning and motivation (Vol. 54, pp. 103-140). Academic Press.
Funke, J. (2010). Complex problem solving: a case for complex cognition? Cognitive processing, 11 (2), 133-142.
Gredler, M. E. (1999). Classroom assessment and learning. New York: Longman.
Metcalfe, J., & Kornell, N. (2005). A region of proximal learning model of study time allocation. Journal of Memory and Language, 52, 463-477.
Nelson, T. O., & Narens, L. (1990). Metamemory: A theoretical framework and new findings. In G. Bower (Ed.), The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory (Vol. 26, pp. 125–173). San Diego, CA: Academic Press.
Son, L. K., & Metcalfe, J. (2000). Metacognitive and control strategies in study-time allocation. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 26, 204-221. Doi: http://dx.doi.org.elib.openu.ac.il/10.1037/0278-7393.26.1.204
Thiede, K. W., & Dunlosky, J. (1999). Toward a general model of self- regulated study: An analysis of selection of items for study and self- paced study time. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 25, 1024–1037.
Widder, M., Berman, A., & Koichu, B. (2014). Dismantling Visual Obstacles to Comprehension of 2-D Sketches Depicting 3-D Objects. Proceedings of PME 38/ PME-NA 36 Conference: Mathematics Education at the Edge. Vancouver, Canada. Jul 15-20, 2014.

התפתחות המומחיות של מתרגלים בשיעורי מתמטיקה תוך כדי הוראה בבית ספר וירטואלי

שולה וייסמן, אוניברסיטת חיפה
רוזה לייקין, אוניברסיטת חיפה
מיכל איילון, אוניברסיטת חיפה

מבוא

במהלך שני העשורים האחרונים התרבו בתי הספר הווירטואליים בעולם. לבית ספר כזה יש פוטנציאל ליצירת הזדמנויות שוות עבור תלמידי הפריפריה, כמו לתלמידים העירוניים; ולצמצום ההבדלים באיכות המורים, בהיצע של המקצועות הנלמדים ובהכנת התלמידים ללימודים גבוהים (Barbour & Reeves, 2009; Cavanaugh, 2001).
בשנת 2012 הוקם בישראל בית ספר וירטואלי המנוהל על ידי המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח) המיועד לתלמידים מהפריפריה, בעלי פוטנציאל גבוה אשר בבית ספרם אין אפשרות ללמוד מתמטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד. צוות בית הספר כולל מפתחים של חומרי לימוד, מורים ומתרגלים. המתרגלים הינם סטודנטים מצטיינים שאין להם ידע או ניסיון בהוראה ובפדגוגיה.
המחקר התבצע בבית הספר הווירטואלי של מטח שבו תלמידים ממקומות שונים בארץ לומדים מתמטיקה ופיסיקה בסביבת למידה וירטואלית-סינכרונית. הפלטפורמה שבה משתמשים בשיעורי התרגול מאפשרת הקלטת שיעור, דפדוף בין השקופיות של המצגת, שליטה על המיקרופון ועריכת צ'ט. יש בה אפשרות להוספת קובץ, קישור וסרטון. המסך שנראה בשיעור הינו של המצגת שהמתרגל מקרין, שיתוף מסך שיכול להיות כל מה שמופיע על המסך שלו (גלישה באתר, שימוש בתוכנה וכדומה) או לוח לבן (white board) המאפשר למתרגל או לתלמידים לכתוב ולסרטט ביד חופשית. לרשות המשתמשים יש סרגל כלים (ראו איור 1) המכיל כלי ציור, סימנים וכן כלים בצורת אייקונים: סימון מספר התלמידים הנוכחים בשיעור, הצבעה, סימון V או X, חייכן ומחיאת כפיים.



איור 1: סרגל כלים בסביבת הלמידה הווירטואלית

המתרגלים נפגשים עם המורים אחת לשבועיים באופן וירטואלי ובאופן סינכרוני. במפגשים המורים מעדכנים את המתרגלים לגבי הספקם בחומר הלימוד ובתכניותיהם להמשך; וכמו כן, המורים מכוונים את המתרגלים על מה צריך לשים דגש. המתרגלים משתפים את המורים בלבטים שלהם ומבקשים עצות; למשל, עד כמה להתעכב על טכניקה אלגברית או כיצד לטפל בשיעורי הבית.
ההתמקדות הייתה בשיעורי התרגול, ובמסגרתם נבדקו הקונספציות של המתרגלים, דרכי ההוראה שלהם והשינויים שהתרחשו לאורך השנה בקונספציות שלהם ובשיעורים שלהם בסביבת הלמידה הווירטואלית. במחקר זה התייחסנו לתפיסות של המתרגלים כאל מבנים המאחדים את הידע שלהם ואת אמונותיהם (Thompson, 1992), הבאנו בחשבון את מורכבות היחסים בין התפיסות לבין הניסיון המעשי בהוראה וניתחנו את ההתפתחות של המתרגלים בתקופה שבה הם מלמדים (craft mode). הקונספציות במחקר הנוכחי נבחנו משני היבטים: מטרות ההוראה והאמצעים להשגת מטרות אלו כפי שהתבטאו בראיונות שנערכו עם המתרגלים.

המחקר הוא ייחודי מכיוון שהתבצעה בו התבוננות מעמיקה בעבודת המתרגלים הממלאים תפקיד שאינו קיים בדרך כלל בשיעורי המתמטיקה בבתי הספר, ושלא הוכשרו באופן פורמלי להוראת מתמטיקה.
המחקר תוכנן כדי לנסות למצוא מענה לסוגיה שלא נחקרה בעבר: התפתחות מקצועית של מתרגלים למתמטיקה בסביבה וירטואלית מההיבטים של שינוי בתפיסותיהם, שינוי בפרקטיקה בשיעורים שלהם והקשר בין תפיסותיהם המוצהרות לבין פרקטיקת ההוראה שלהם.

מטרת המחקר

מטרת המחקר היא לנתח את ההוראה בכיתה בבית ספר וירטואלי כסביבה להתפתחות המומחיות של מתרגלים למתמטיקה. המחקר התמקד בשינוי בקונספציות המוצהרות של מתרגלים ובקונספציות שלהם כפי שהן באו לידי ביטוי בפועל בשיעורים.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו שלושה מתרגלים המלמדים מתמטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד בכיתות י׳ וי״א בסביבה וירטואלית. המתרגלים הם סטודנטים מצטיינים במקצועות עתירי מתמטיקה שנבחרו בקפידה והם חסרי השכלה רשמית בהוראה.
המחקר התבצע בפרדיגמה איכותנית על פי התיאוריה המעוגנת בשדה (Glaser & Strauss, 1967). איסוף הנתונים נעשה על פי תוצרי הניתוח ותוצאותיו, ותוצרי הניתוח כיוונו את המשך איסוף הנתונים. ניתוח הנתונים כלל שילוב של ניתוח אינדוקטיבי וניתוח מכוון (Patton, 2002).
על מנת לאמת את הממצאים נעשה שימוש בשלושה כלי מחקר לפי שיטת הטריאנגולציה: (א) ראיונות אישיים עם המתרגלים; (ב) תצפיות בשיעורי המורים ובשיעורי המתרגלים; (ג) תצפיות במפגשי פנים אל פנים ובמפגשים וירטואליים בין המתרגלים לבין המורים ובמפגשי הצוות של בית הספר. הראיונות והשיעורים נותחו בעזרת מודלים שנבנו.
ניתחנו את הקונספציות של המתרגלים והשינויים שחלו בהן, השיעורים של המתרגלים והשינויים שחלו בהם והקשרים בין הקונספציות המוצהרות (בראיונות) לבין הקונספציות המופעלות (כפי שבאו לידי ביטוי בשיעורים).

ממצאים ודיון

שני הממצאים העיקריים של מחקר זה הם שני המודלים שפותחו על בסיס הניתוח: מודל לניתוח קונספציות ומודל לניתוח השיעורים.
הקונספציות נבחנו משני היבטים: מטרות הוראת המתמטיקה והאמצעים להשגת מטרות אלו. ניתוח השיעורים התבצע בשני היבטים - ניתוח מקרו שבחן את ארגון השיעור וניתוח מיקרו שהתמקד בסוגי שאלות שנשאלו בשיעור על ידי המתרגלים ועל ידי התלמידים.
מן הממצאים מסתמן כי אצל כל אחד מהמתרגלים חל שינוי המרמז על למידה תוך כדי הוראה.
השינויים התבטאו בשינוי בתפיסת התפקיד, בהוספת מטרות ובשימוש במגוון רחב יותר של אמצעים להשגתן.
מצאנו שיש קונספציה משותפת לשלושת המתרגלים, מוצהרת ומופעלת - התאמת ההוראה לקשיי התלמידים.
האמצעי המשותף שכל המתרגלים הצהירו כי הם משתמשים בו לאורך כל תהליך ההוראה הוא עידוד התלמידים לפתור בעיות באופן עצמאי. עוד נמצא כי במהלך כל השנה הקשר האישי של המתרגלים עם התלמידים נוכח הן בקונספציות המוצהרות והן בקונספציות המופעלות בשיעורים שלהם.
בשיעורים נמצא שבקרב שלושת המתרגלים השאלות הנפוצות ביותר היו, מצד אחד, שאלות ניהול שכוונו בעיקר לפיצוי על היעדר קשר העין עם התלמידים; ומצד שני, שאלות פיגומים שמטרתן לסייע לתלמידים להתקדם בפתרון. לעומת זאת, שאלות הבנה ושאלות הרחבה שיכולות להיחשב שאלות ״מסדר גבוה״ נשאלו בתדירות נמוכה. נמצא

כי בכל השיעורים של כל המתרגלים רוב השאלות ששאלו התלמידים היו מסוג שאלות אימות, ורק לעיתים נדירות התלמידים שאלו גם שאלות הבנה או שאלות הרחבה.

קשרים בין הקונספציות המוצהרות של המתרגלים לבין הפרקטיקה שלהם בשיעורי התרגול

מחקרים מראים כי לאמונות ולקונספציות של המורה תרומה רבת ערך להבנת הסיבות להתנהגותו בכיתה ולבחירות אותן הוא עושה (Thompson, 1992) וכי יש פער בין תיאוריה לבין פרקטיקה (Kagan, 1992; Raymond, 1997;Lev-Zamir & Leikin, 2013).

מניתוח הראיונות והשיעורים במחקר זה נראה כי למתרגלים יש קונספציות מוצהרות בתחומים נרחבים, אך נמצא כי בשיעורים הן מופעלות רק בתחומים מסוימים. על פי הממצאים נוכל לשער כי כאשר קונספציות הקשורות לניהול הלמידה - ML (Management of learning) נמצאות באופן מוצהר נוכל למצוא אותן גם בפועל בשיעורים. לעומת זאת, הימצאותן של קונספציות הקשורות לאתגר המתמטי - MC (Mathematical challenge) באופן מוצהר לא מבטיחה את הימצאותן בפועל. לגבי הקונספציות הקשורות לרגישות לתלמידים - SS (Sensitivity to student) נמצא כי רובן באו לידי ביטוי גם בשיעורים, אך היו כאלה שלא נמצאו בפועל בשיעורים וזאת ניתן לייחס אולי לאישיות המתרגל או להרכב האמצעים שלתפיסתו מאפשרים את השגת המטרה.

קונספציות בהקשר לסביבת ההוראה הווירטואלית

התייחסות המתרגלים להתמודדות עם הוראה בסביבה וירטואלית הייתה דואלית. מצד אחד הם ציינו את הסביבה כמיוחדת ומאתגרת ומנו את יתרונותיה (נגישות, גמישות, מתן הזדמנות, ייחודיות קבוצת התרגול); ומצד שני דיברו על הקשיים (בדידות התלמיד, היעדר קשר עין עם התלמידים).התייחסותם לסביבה הווירטואלית התבטאה בשיעורים בשימוש בכלים להתמודדות עם היעדר קשר עין עם התלמידים בעיקר בשאלות הניהול ששימשו עבורם בקר לנוכחות התלמידים בשיעור הן מבחינת הימצאותם ליד המחשב והן לווידוא שהם עוקבים אחר הנעשה בשיעור. השימוש בטכנולוגיה לא בא לידי מימוש בשימוש בתוכנות.

קונספציות מוצהרות שלא נמצאו בשיעורים בפועל

מצאנו שתי מטרות מוצהרות בקרב המתרגלים שלא באו לידי ביטוי בשיעורים שלהם - פיתוח הבנה מתמטית ועידוד חשיבה. העובדה שהם מדברים על מטרות אלו מעידה כי הן חשובות להם, למרות שהן לא נמצאו מופעלות. נוכל לשער כי תמיכה מתאימה אולי תסייע לכך שהן תהיינה מופעלות גם בשיעורים עצמם.

לסיכום

שיעורי התרגול מציבים בפני המתרגלים משימה מורכבת ומאתגרת. בשיעורים אלו המתרגלים נדרשים להביא לידי ביטוי מגוון רחב של מיומנויות, סוגי ידע ואמונות בנוגע להוראת המתמטיקה. תוצאות המחקר יכולות לשמש בסיס להכשרה מקצועית עתידית של מתרגלים לפני תחילת עבודתם שתוכל לגשר על הפער בין הכוונה ברמה המוצהרת לבין היישום הממשי בסביבת הלמידה.

כיום, עם התפתחות טכנולוגיות המידע והתקשוב, והכנסתם למערכת החינוך צפויה להיות למחקר תרומה רבה לתחום שמתרחב עם השנים.

מקורות

Barbour, M. K., & Reeves, T. C. (2009). The reality of virtual schools: A review of the literature. Computers and Education, 52(2), 402–416.

Cavanaugh, C. (2001). The effectiveness of interactive distance education technologies in K-12 learning: A meta-analysis. International Journal of Educational Telecommunications, 7(1), 73–88.

Glaser. B., & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory. Chicago, IL: Aldine.

Kagan, D. M. (1992). Implication of research on teacher belief. Educational psychologist, 27(1), 65-90.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2013). Saying versus doing: teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. ZDM, 45(2), 295-308.

Patton, M. Q. (2002). Qualitative research and evaluation methods. Thousand Oaks, CA: Sage.

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. Journal for research in mathematics education, 550-576.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In

D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 127–146). New York: Macmillan.

השימוש בשיטת הייצוג הסינגפורית להתגברות על קשיים בפתרון בעיות מילוליות במבנה אלגברי בקרב תלמידים המתקשים במתמטיקה

ראודה זועבי אבו בכר, אקדמיית אלקאסמי
ג'והיינה עואודה שחברי, אקדמיית אלקאסמי & מכללת סכנין

◆◆◆

הקדמה

פתרון בעיות מילוליות נחשב משימה קשה עבור תלמידים רבים, ובמיוחד עבור תלמידים המתקשים במתמטיקה. הסיבות לקושי שונות, ואחת מהן היא קושי בבניית מודל אלגברי מתאים ובפישוטו. אחת השיטות להתמודד עם פתרון בעיות מילוליות, שיעילותה הוכחה, היא שיטת הייצוג הסינגפורית. ממצאי מבחן פיזה האחרון מצביעים על כך שסינגפור דורגה במקום ראשון במתמטיקה. ממצאים אחרים מראים שהתלמידים הסינגפורים מצליחים יותר בהתמודדות עם פתרון בעיות מילוליות, ומפתח ההצלחה קשור לשיטת הייצוג המיושמת בסינגפור משנות השמונים, החל מכיתות היסוד הקטנות ועד כיתה י"ב. המחקר הנוכחי ניסה לבדוק אם אימוץ שיטת הייצוג בתהליך הוראה קצר יחסית תורם לתלמידים הנחשבים כמתקשים במתמטיקה בפישוט בעיות מילוליות ובפתרונן. נוסף על כך, המחקר בחן את שלבי ההתפתחות של מודל הייצוג הוויזואלי לבעיות המילוליות במהלך תהליך הלמידה.

רקע תיאורטי

שיטת הייצוג הסינגפורית מבוססת על ייצוג נתוני הבעיה באופן ויזואלי. בכיתות א'-ב', הייצוג נעשה באמצעות שימוש בתמונות, כמו דובים ובובות. בכיתות גבוהות יותר, הייצוג אבסטרקטי, באמצעות שימוש במלבנים (Foong, 2009). השימוש בציורים מאפשר לייצג את האלמנטים של הבעיה המילולית ואת הקשרים בין האלמנטים. כמו כן, הייצוג עוזר לתלמידים לעבור לייצוג מתמטי פורמלי, לבנות את הביטוי האלגברי ולפשטו (Ng & Lee, 2009). אפשר גם להשתמש בייצוג לפתרון בעיות מילוליות במבנה אלגברי ללא צורך באלגברה (Ng, 2002). לכן, תלמידים בבתי הספר היסודיים בסינגפור מצליחים לפתור בעיות במבנה אלגברי מורכב (Lee, Khng, Ng & Kong, 2013). בדרך כלל, מלמדים באמצעות שלושה סוגים של מודלים: המודל ראשון, מודל החלק השלם, מתאים לבעיות מסוג a+b=x; המודל השני, מודל ההשוואה, המתאים לבעיות גיל ולבעיות הכוללות יחסי גודל, כמו יותר מ... וקטן מ... במודל מסוג זה, נדרש יותר משלב אחד בבניית המלבנים. השינוי בכמויות ובקשרים ביניהן מתבטא בשינוי באורכי המלבנים; המודל השלישי, מודל הכפל והחילוק, מתאים לבעיות חילוק וכפל (Ng & Lee, 2009).

מטרת המחקר הנוכחי הייתה לבחון אם אימוץ שיטת הייצוג הסינגפורית עוזר לתלמידי כיתה י' המתקשים במתמטיקה להתגבר על קשייהם בפתרון בעיות מילוליות הדורשות מודל אלגברי. נוסף על כך, המחקר בחן את שלבי התפתחות הייצוג במודלים הוויזואליים לאורך תהליך הלמידה.

שיטה

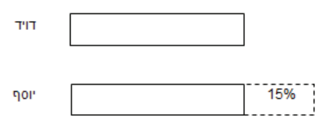
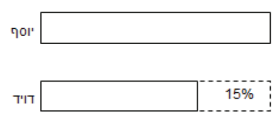
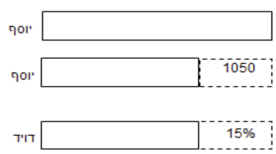
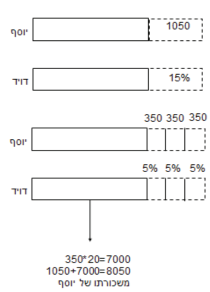
במחקר הנוכחי השתתפו 30 תלמידים מכיתה י' הלומדים לקראת 3 יחידות בגרות, ונחשבים תלמידים המתקשים במתמטיקה, ובמיוחד מתקשים בפתרון בעיות מילוליות במבנה אלגברי. לפני תהליך הלמידה, ענו התלמידים על מבחן א' שכלל בעיות מילוליות הדורשת פתרון אלגברי (הבעיות נלקחו ממאגר הבגרות 801). התלמידים למדו עם החוקרת הראשונה במשך שישה מפגשים (כל מפגש נמשך 90 דקות), באמצעות שיטת הייצוג הסינגפורית לפי שלושה מודלים, מודל החלק שלם, מודל ההשוואה ומודל הכפל והחילוק. בכל מפגש, החוקרת פתרה בעיות באמצעות שימוש בשיטת הייצוג. היא ביקשה מהתלמידים להתנסות בפתרון בעיות בעצמם, ושוב הם פתרו אותן עם החוקרת. כל פתרונות התלמידים בכל שלבי המפגש נאספו בפורטפוליו. בתום תהליך הלמידה, ענו התלמידים

על מבחן ב׳, שהיה מקביל במבנה שלו למבחן א׳. לניתוח הפורטפוליו השתמשנו בהשוואה המתמדת (Strauss & Corbin, 1990). פתרונות התלמידים קודדו לקטגוריות לפי תהליך הפתרון, תוך השוואה מתמדת לקטגוריות קיימות וחדשות בכל בעיה ובכל מפגש. לצורך ניתוח המבחנים א׳ ו־ב׳, נערך מבחן t מזווג.

ממצאים

הממצאים הנגזרים ממעקב אחר הנתונים שבפורטפוליו מצביעים על תהליך של התפתחות יכולת הייצוג באמצעות מודלים ויזואליים בקרב התלמידים. אפשר להצביע על ארבעה שלבים עיקריים בתהליך ההתפתחות: א. ייצוג ושימוש בדיאגרמות באופן שרירותי, ללא התאמה לנתוני הבעיה. בשלב זה, התלמידים לא הצליחו להבחין בין מספר הדיאגרמות הנדרשים לייצוג הבעיה או להתאים את גודל הדיאגרמות לנתונים; ב. ייצוג הנתונים בהתאמה לנתוני הבעיה, ללא המשך הפתרון. בשלב זה, התלמידים הצליחו לייצג יחסי גודל בין הכמויות שבבעיה באמצעות דיאגרמות; ג. ייצוג נכון של הנתונים, והמשך הפתרון באופן חלקי ללא הגעה לפתרון הסופי של הבעיה; ד. ייצוג נכון של הנתונים ופתרון נכון של הבעיה. בשלב זה, התלמידים הצליחו לייצג את היחסים שבין הכמויות, והשתמשו בדיאגרמות כדי להמחיש את הפעולות המתבצעות. בטבלה 1 מוצגים ארבעת השלבים ואחוז התלמידים שפתרו כל שלב, לאורך תהליך הלמידה. ממגבלת המקום, השלבים מודגמים תוך שימוש בבעיה ממאגר בעיות הבגרות 801 שנכללה בתהליך הלמידה: ״משכורתו של יוסף הייתה גדולה ב־1050 שקלים ממשכורתו של דוד. לאחר שמשכורתו של דוד הועלתה ב־15%, קיבלו יוסף ודוד משכורת זהה. חשבו את משכורתו של יוסף״.

טבלה 1: שלבי התפתחות המודלים הוויזואליים במהלך תהליך הלמידה

שלב	דוגמה לייצוג הוויזואלי	אחוז התלמידים שעבדו לפי שלב בכל מפגש					
		מפגש ראשון	מפגש שני	מפגש שלישי	מפגש רביעי	מפגש חמישי	מפגש שישי
שימוש בדיאגרמות לייצוג שגוי של הנתונים		50%	33%	23%	20%	21%	4%
שימוש בדיאגרמות לייצוג נכון של הנתונים, ללא פתרון הבעיה		26%	43%	23%	3%	13%	10%
שימוש בדיאגרמות לייצוג חלקי של הנתונים, ופתרון חלקי		23%	17%	17%	27%	13%	17%
שימוש בדיאגרמות לייצוג מלא של הנתונים, ופתרון מלא ונכון		-	7%	37%	50%	53%	60%

הממצאים מעידים על כך שלקראת סוף תהליך הלמידה, גדל משמעותית אחוז התלמידים שהצליחו לייצג את הבעיות המילוליות בצורה ויזואלית ולפתור אותן נכון.

השינוי שחל בקרב התלמידים בתהליך הלמידה התבטא בשיפור יכולתם לפתור בעיות באופן אלגברי. ניתוח הממצאים הנגזרים ממבחנים שנערכו לפני תהליך הלמידה ובתומו מצביע על אחוז גדול יותר של תלמידים שהצליחו בפתרון הבעיות המילוליות באופן חלקי ובאופן נכון. ממצאי מבחן t מזווג מראים שממוצע התלמידים במבחן שנערך בתום תהליך הלמידה ($M=0.48$, $SD=0.38$) גבוה יותר מממוצע התלמידים במבחן שנערך לפני תהליך הלמידה ($M=0.23$, $SD=0.31$), וההבדלים מובהקים ($t(30)=5.3$ $p<0.001$).

סיכום

הממצאים מעידים על כך שהשימוש בשיטת הייצוג לתקופת זמן מוגבלת יחסית תורם להצלחה של תלמידים המתקשים בפתרון בעיות מילוליות במבנה אלגברי. יכולת התלמידים לייצג את נתוני הבעיות ולפתור אותן מתפתחת בהדרגה לאורך תהליך הלמידה. אפשר לייחס את הצלחת התלמידים לכך שהשימוש בייצוג מסייע להם לראות הקשרים בין הכמויות שבבעיות המילוליות. ממצאי המחקר מעידים על כך שקיימת השפעה חיובית גם על היכולת לפתור בעיות מילוליות באופן אלגברי ללא שימוש בייצוג. ממצא זה מעיד על כך שתלמידים מצליחים לגשר בין הפתרון באמצעות מודל ויזואלי לפתרון אבסטרקטי. לאור הממצאים, יערך מחקר המשך שיבדוק את היעילות של הדגשת התהליכים המקבילים - ייצוג ויזואלי וייצוג אלגברי - במהלך פתרון כל בעיה.

מקורות

Foong, P. Y. (2009). Review of research on mathematical problem solving in Singapore. In K. Y. Wong, P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y. Foong & S. F. Ng (Eds), Mathematics education: The Singapore journey (pp. 263-300). Singapore: World Scientific.

Lee, K., Khng, K. H., Ng, S. F., & Kong, J. N. L. (2013). Longer bars for bigger numbers? children's usage and understanding of graphical representations of algebraic problems. Frontline Learning Research, 1(1), 81-96.

Ng, S.F., & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children’s tool for representing and solving algebraic word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 40 (3), 282-313.

Strauss, A., & Corbin, J. M. (1990). Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques. Sage Publications, Inc.

בין שפה טבעית לתפיסת מושגי יחס מתמטיים (=,<,>) בהיבט מספרי

בקרב גננות ופרחי הוראה לגיל הרך

דינה חסידוב, תלפיות המכללה האקדמית לחינוך

בת-שבע אילני, המכללה האקדמית לחינוך חמדת הדרום

◆◆◆

מבוא

בפעילויות רבות מופיעות משימות לילדים צעירים שבהן הילדים צריכים לשים סימנים מתמטיים בין אובייקטים לא מתמטיים. מאוחר יותר בבית הספר, פעילות זאת יכולה לעיתים להביא את הילדים להשתמש בסימנים מתמטיים בין מספרים, באופן שגוי. לדוגמה, ילד בכיתה א' כתב: 6>**4** כי "הגודל והעובי של ארבעה גדולים יותר מזה של שש". מקרים מסוג זה מעוררים שאלות וצורך לחקור את הנושא. מאמר זה עוסק במחקר המתייחס להבנת המושגים: < ,> , = המהווים חלק מהחשיבה סימבולית (סניצקי ואילני, 2014).

רקע

השפה המתמטית היא שפה מיוחדת, השונה מן השפה הטבעית. מדובר בשפה של: סמלים, מושגים, הגדרות ומשפטים . זו שפה שצריכה להילמד, שאינה מתפתחת בטבעיות כמו שפת האם של הילד . בשפה המתמטית הילד לומד להכיר את המספרים כאובייקטים אחד לאחד , על תכונותיהם הדומות והשונות. הילד תופס את המספרים כסמלים שבאמצעותם אפשר לחשב חישובים ולעשות מניפולציות שונות (מרגולין ואילני,2007).

התפתחות תהליך ההסמלה של סמלי המספרים מתרחש בשתי רמות הבנה: ראשונה, ההכרה כי מערכת הייצוג של המספרים היא מערכת של סמלים שתפקידה להביע משמעות מסוימת ושאינה יכולה להשתנות על ידי גורמים אחרים (כגון שינוי גודל או כל מימד אחר) אלא בשינוי הסמלים עצמם. הרמה השנייה היא הכרת מערכת החוקים באמצעותם המספרים המיוצגים (Bialystok, 2000).

המגמה העולמית כיום היא להציג באופן "פורמלי" מתמטיקה בגיל צעיר. כמו כן קיימת כיום ההבנה שעל הגננות להיות בעלות ידע פרופסיונאלי שיאפשר להן ללמד מתמטיקה בגנים. העיסוק במתמטיקה בגיל הרך מסייע בפיתוח החשיבה והיכולת הקוגניטיבית של הילד, בפיתוח חשיבה בכלל וחשיבה מתמטית בפרט. מחקרים מראים כי הכמות והאיכות של העיסוק במתמטיקה בגן, יכולים לנבא את הצלחת הילד במתמטיקה בבית הספר היסודי. מגמה זו דוגלת בהיכרות עם מושגים מתמטיים כבר בגן כדי לבנות הכנה מתמטית לקראת הלימודים הפורמליים בבית הספר.

מחקרים שנערכו בשנים האחרונות מצביעים על כך שהגננות בגן מוצאות עצמן עומדות בפני קשיים וחוסר הבנה כאשר הן מלמדות מושגים מתמטיים בגיל הרך. יתכן והדבר נובע, בין היתר, מחוויות אישיות לא חיוביות במתמטיקה שחוו הגננות בעבר ובשל חוסר בידע מקצועי שלא נרכש על ידן במהלך הכשרתן להוראת מתמטיקה לגיל הרך (Sarama et al., 2016; Hassidov & Ilany, 2018; Hassidov & Ilany, 2017).

מטרות המחקר

1. לבדוק כיצד ובאיזה אופן פרחי הוראה וגננות תופשים ומשתמשים בסימנים < ,>, =.
2. לבדוק מהם ההבדלים בין פרחי הוראה לגננות באופן בו הם תופשים ומשתמשים בסימנים < ,>, = .

מתודולוגיה

מאמר זה מציג חלק ממחקר רחב יותר הבודק תפיסות ביחס לסימנים מתמטיים. המחקר הרחב עוסק בארבע קטגוריות: מספרים; כמות; כמות ומספרים; נפח, שטח וכמות. במאמר זה נעסוק ב-4 שאלות מקטגורית המספרים. **אוכלוסיית** המחקר כללה 149 גננות, ו- 71 פרחי הוראה לחינוך שנה ב או ג המשתתפים בקורס שנתי העוסק בהוראה ולמידת מתמטיקה בגיל הרך. **שיטת** המחקר שילבה בין מתודה כמותית למתודה איכותנית.

כלי המחקר כוללים **שאלון** שמכיל 25 שאלות מתוכן נציג במאמר זה ארבע שאלות מהתחום המספרי. השאלות שנבחרו מתייחסות לתחומים הבאים: שאלה 7 לשברים, 9 למספרים זהים, שאלה 10 למספרים שונים ושאלה 16 מתייחסת לפעולה מול תוצאה. בכל השאלות היה שוני בגודל ובעובי של חלק מהמספרים. בשאלות נתבקשו הנבדקים להוסיף את אחד מסימני היחס הבאים: = , < , > ובמידה ולא נמצא סימן יחס מתאים, נתבקשו לסמן X. בנוסף נתבקשו לנמק את התשובה. באמצעות השאלון נאסף מידע כמותי ואיכותני ונתוני רקע. **הראיונות** היו מובנים למחצה, באמצעותם נאסף מידע איכותני.

ממצאים

במחקר נמצא כי חלק גדול מהנבדקים לא ענו נכון על השאלות. אחוז גבוה יותר של פרחי ההוראה בהשוואה לגננות, ענו על ארבעת השאלות תשובות נכונות (בשלוש שאלות (7, 10, 16). נמצאו הבדלים מובהקים בין הגננות לפרחי ההוראה במספר התשובות הנכונות ובפיזור התשובות (ראה גרף 1). בכל השאלות, נמצא שוני ביחס להנמקות בין פרחי ההוראה והגננות.

ניתן להניח ששוני זה נובע מכך שהגננות לא למדו נושא זה בהכשרתם, ויחד עם זאת הן מלמדות את הנושא בגן. חלקן מלמדות את הנושא באופן שגוי. בנוסף, התקבל מניתוח הנימוקים והראיונות שחלק גדול מהנבדקים חושבים שאפשר להשתמש ביותר מסימן מתמטי אחד בין המספרים.

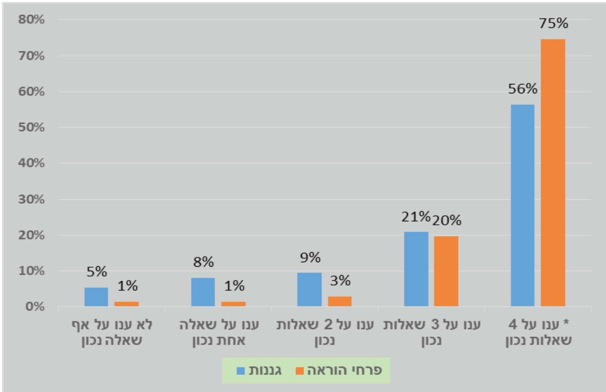
נמצאו שני סוגי הבנות שגויות בקרב הנבדקים:

1. חוסר הבנה שהסימנים המתמטיים מתייחסים אך ורק למשמעות המספר.
2. חוסר הבנה שלא ניתן להתייחס למספר כאובייקט גרפי. לדוגמה: כאשר מספר כתוב גדול, קטן או עבה, חלק מהנבדקים התייחסו אל הצורה הגרפית ולא אל המשמעות המתמטית שלו.

בחלק מהמקרים, גם כאשר הנבדקים ענו תשובה נכונה, ההנמקה לתשובה הנכונה הייתה שגויה. לדוגמה: כאשר היה על הנבדקים להשלים סימן מתמטי בין - חמש לחמש: 5 □ **5** הם כתבו שוויון ונימקו שבכל צד **יש פריט אחד** ולכן קיים שוויון. שגיאה זו יכולה לנבוע מחוסר הבנת משמעות המספר.

נמצא שנבדקים סימנו בין 5 □ **5** את סימני היחס הבאים: 5=**5** מהנימוק "כי זה אותו מספר". אותם נבדקים סימנו בנוסף גם 5<**5** מהנימוק "כי העובי והגודל של ה-5 השמאלי יותר גדול". הם סימנו כך, מכיוון שההתייחסות שלהם הייתה גרפית ולא מתמטית למספרים הכתובים. הנבדקים השתמשו בשני סימני יחס בו זמנית, סימן "=" וגם סימן "<", בין אותם מספרים ונימקו: "אנחנו מלמדים את הילדים 5<**5** כי במקרה כזה הגודל והעובי קובעים, במקרה אחר האורך קובע וגם הגובה יכול לקבוע זה, תלוי בהקשר".

גרף 1:השוואה בין מספר השאלות שעליהן ענו הנבדקים תשובה נכונה



p=0.028*

דיון ותרומת המחקר

מאחר ויכולה להיות סיטואציה בה אפקט סטרופ (Algom, Dekel and Pansky, 1996) המספרי משפיע על הילדים, חשוב מאד להקפיד שהילדים יבינו את משמעות המספר וסימני היחס המתמטיים. במיוחד, כאשר בתחילת דרכם המתמטית, ילדים כותבים את המספרים בגדלים ובצורות שונות. במידה וגננות תשגנה ותתייחסנה למספר כאובייקט גרפי ולא אל המשמעות המתמטית של המספר, הן יכולות להטעות את הילדים וכתוצאה מכך לגרום לילד לחשוב שגודל הספרה קובע את היחס המתאים ולא ערכו המספרי.

השגיאות יכולות לנבוע מהשימוש באותן מילים בחיי היום יום ובמתמטיקה במקביל. דוגמה לכך המילים גדול קטן שווה, משמשות גם בשפה הטבעית וגם בשפה המתמטית לסימני היחס <,>,=.

ניתן לאפשר לגננות ולפרחי ההוראה להבין את המשמעות של סימני היחס <,>,= והשימוש בהם בעזרת פעילות המובילה לקונפליקט קוגניטיבי ודיון פרופסיונאלי בנושא. חשוב להדגיש שכמו לכל שפה, גם לשפה המתמטית קיימים חוקים משלה וסימנים המאפשרים לשפה להתקיים, לדוגמה: מספרים, סימני פעולה, סימני יחס ועוד. לכן, יש לחזק הבנה זו בקרב העוסקים בהוראת המתמטיקה.

מקורות

מרגולין ב. ואילני ב.(2007). בין לשון ומתמטיקה - חינוך לחשיבה אוריינית בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. דפים מס' 45 עמ' 114-139, הוצאת מכון מופ"ת.

סיניצקי א. ואילני ב. (2014). שימור ושינוי - תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות. בהוצאת מכון מופ"ת .

Algom, D., Dekel A., Pansky A. (1996). The perception of number from the separability of the stimulus: The Stroop effect revisited. Memory and Cognition, 24 (5),557-572.

Bialystok, E. (2000). Symbolic representation across domain in preschool children. Journal of Experimental Child Psychology, 76, 173-189.

Hassidov, D., & Ilany, B. (2017). Between Natural Language and Mathematical Symbols (<, >, =): The Comprehension of Pre-Service and Preschool Teachers-Perspective of Numbers. Creative Education, 8, 1903-1911. https://doi.org/10.4236/ce.2017.812130

Hassidov, D., Ilany, B. (2018). Collaboration between Mathematics Facilitators and Preschool Teachers during the Innovative "Senso-Math" Preschool Program. Mathematics Teacher Education and Development (MTED), Australasia.

Sarama, J., Clements, D. H., Wolfe,C. B. & Spitler, M. E. (2016). Professional development in early mathematics: effects of an intervention based on learning trajectories on teachers' practices. Nordic Studies in Mathematics Education, 21(4), 29–55.

ארגונומיה בכיתת המתמטיקה בראשית לימודי האלגברה: השלכות לגבי היבט מיושם והיבט מושג של תכנית הלימודים

מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב
גילה אוזרוסו-חגג, אוניברסיטת תל אביב, מכללת לוינסקי לחינוך

◆◆◆

תקציר

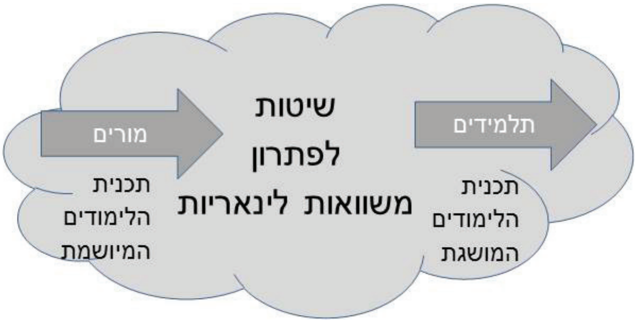
המחקר מתמקד בבחינת הקשרים בין תכנית הלימודים (תה"ל) המיושמת לבין תה"ל המושגת, כפי שהם משתקפים בתהליכי פתרון משוואות בכיתה ז לפי תה"ל החדשה במתמטיקה. נתמקד בשני היבטים: 1) שיעורים אשר מורים לימדו תוך התבססות על ספר לימוד מסוים, כדי ללמד אסטרטגיות לפתרון משוואות לינאריות; 2) המידה בה אסטרטגיות אלה משתקפות בתוצרי התלמידים. הממצאים מראים כי תה"ל המיושמת משפיעה ולמעשה מחליפה תה"ל המיועדת מנקודת מבט של התכנית המושגת. נראה כי רק חלק קטן מהתלמידים עושים שימוש במשאבים אשר עוצבו על ידי מוריהם.

רקע

בעשורים האחרונים חוקרים הביעו עניין מתגבר בת"ל במתמטיקה וביחסי הגומלין שלהם עם פרקטיקות הוראה. המאמר הנוכחי מבוסס על מחקר רחב יותר אשר מתמקד בתה"ל המיושמת והמושגת כפי שהוגדרו על ידי שמידט וחבריו (Schmidt et al. 2001), המתייחסים לשלושה היבטים של תכנית לימודים: כוונות, יישום, והישגים. שלושת השלבים של תה"ל הם: ת"ל מיועדת (Intended), ת"ל מיושמת (Implemented). ות"ל מושגת (Attained). מחקרים ספורים בלבד חקרו את הקשרים בין תה"ל המיושמת ובין תה"ל המושגת. הצגה זו תאיר קשרים אלו בהקשר של אסטרטגיות לפתרון משוואות לינאריות בראשית האלגברה. התייחסנו לספר הלימוד מתמטיקה משולבת לכיתה ז כאל תה"ל המיועדת.

תה"ל החדשה במתמטיקה בחטיבת הביניים (משרד החינוך, 2008) מדגישה צורך בחשיפת התלמידים לאסטרטגיות פתרון לא שגרתיות לפתרון משוואות לינאריות (כלומר, אסטרטגיות שונות מפתרון אלגוריתמי סטנדרטי), וכן שימוש בכלים טכנולוגיים בכיתת המתמטיקה. התכנית שמה דגש על הבנה של מושגים, שהמרכזיים שבהם בכיתה ז כוללים משוואה ופתרון משוואה.

המחקר בתחום ארגונומיה של תה"ל - curriculum ergonomics עוסק בחקירת יחסי הגומלין בין עיצוב חומרי למידה ובין השימוש בהם, ובמיוחד בדרך שבה נעשה שימוש בחומרי הלמידה (Choppin, McDuffie, Drake & Davis, in press). ניתן לתאר שרשרת ארגונומית, שבה משרד החינוך ממנה מעצבי תכנית מיועדת כדי להנגיש את תה"ל לכותבי ספרי הלימוד. כותבי ספרי הלימוד מעצבים פעילויות לשימושם של המורים. מורים פועלים במסגרת ספרי הלימוד כדי להנגיש את הנושא באמצעות שיעורים (במקרה שלנו, בנושא שיטות לפתרון משוואות) שישמשו את התלמידים שלהם. התלמידים פועלים במסגרת השיעורים במטרה ללמוד כיצד לפתור משוואות לינאריות וליישם את מה שלמדו בעת פתרון משימות. למעשה, ניתן לראות בתלמידים "משתמשי קצה" של שרשת הארגונומיה שתוארה, שכן הם אינם מעצבים שלב נוסף בתה"ל. במחקר הנוכחי, ניתחנו את שני השלבים האחרונים, בהקשר של שיטות פתרון למשוואות לינאריות. מסגרת הארגונומיה של תה"ל במחקרנו תשמש הן ללימוד על אינטראקציות בין מורים ובין חומרי למידה על-ידי ניתוח הדרך בה שלושה מורים המשתמשים באותו ספר לימוד מנגישים אסטרטגיות לפתרון משוואות לינאריות לתלמידיהם (תה"ל המיושמת), והן לתיאור ההתאמה בין תה"ל המיושמת ותה"ל המושגת על-ידי תלמידיהם של המורים הללו (איור 1).



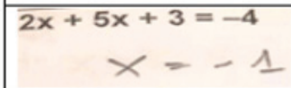
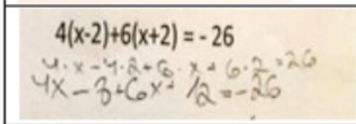
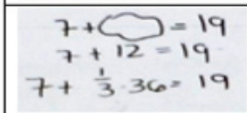
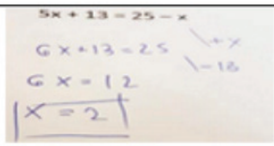
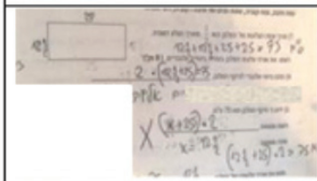
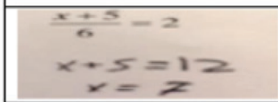
איור 1. נקודת המבט של ארגונומיה של תה"ל במחקרנו

שאלות המחקר

1) תה"ל המיושמת: באילו דרכים שלושה מורים מנגישים אסטרטגיות לפתרון משוואות לינאריות לתלמידיהם?
2) תה"ל המושגת: באיזו מידה תה"ל המושגת תואמת את תה"ל המיושמת, באופן שהיא משתקפת באסטרטגיות לפתרון משוואות לינאריות של התלמידים?

מתודולוגיה

המחקר התמקד בראשית הוראת היחידות בנושא פתרון משוואות בשליש השני בכיתה ז, בשלוש כיתות ממרכז הארץ. המורים לא קיבלו הנחייה כלשהי, וכל שיקול פדגוגי היה נתון בידיהם בלבד. תועד השיח הכיתתי בשיעורים במהלך דיוני מליאה, ונאספו תוצרי ההערכה של התלמידים. תועדו תוצרי הערכה של התלמידים בתחילת כיתה ח (לפני שנערכה חזרה בנושא).לצורך השוואה, נדגמו שלושה שיעורים אשר התבססו על אותם עמודים בספר הלימוד. במחקר אורך זה חקר הרובד המיושם של תכנית הלימודים נשא אופי איכותני, תוך שימוש בניתוח בעזרת מפות שיעור "lesson chart". הרובד המושג (הישגי התלמידים), נותח גם בכלים כמותיים. פתרונות התלמידים קוטלגו בתהליך איתרטיבי אשר הסתכם באיור 2.

קטגוריה	תיאור	הסבר	דוגמאות
C0	לא ענה		
C1	ניחוש / פתרון מיידי	הצגת תשובה מיידית (x=...) ללא הצגת דרך פתרון	
C2	פישוט / כינוס איברים דומים	ביצוע מניפולציות אלגבריות, ביצוע פילוג, ו/או כינוס איברים דומים	
C3	שיטת הכיסוי / הפעלת שיקולים אלגבריים	כאשר יש סימון של ריבוע ריק במקום המשתנה, אם כתב את הפתרון בתוך הביטוי שבאגף (בלי דרך נוספת)	
C4	פעולות על אגפים	ביצוע מניפולציות אלגבריות ארבע פעולות חשבון על שני אגפי המשוואה	
C9	פתרון מספרי – ללא משתנים	פתרון אריתמטי בעזרת חישובים ללא שימוש בביטויים אלגבריים. או הפעלת שיקולים מספריים.	
C100	אי אפשר לדעת	לא ניתן לקבוע בוודאות מהי האסטרטגיה שבה השתמש התלמיד במעבר משלב אחד לשלב הבא בפתרון.	

איור 2. כלים ושיטות לפתרון משוואות לינאריות

ממצאים ודיון

השאלה הראשונה עסקה בתה"ל המיושמת. הגוון בין המורים הוא ממצא בולט- הם לימדו אמנם בהתאם לאותם ספר לימוד ומדריך למורה, אבל הינגישו את המתמטיקה לתלמידיהם בדרכם הייחודית. אפילו כאשר לימדו את אותו הנושא באותו השיעור, כל מורה ארגן את השיעור באופן שונה, הן מבחינת הזמן שהוקדש לדיוני הכיתה ולעבודה עצמית (טבלה 1), והן מבחינת ההקשרים שהציגו ובדגשים שניתנו במהלך הוראת אותן שאלות כמו מהי משוואה? ומהו ההבדל בין משוואה לביטוי?

תוכן	פעולות על אגפים (C4)			שיטת הכיסוי (C3)			ניחוש (C1)		
	מאירה	בני	גלית	מאירה	בני	גלית	מאירה	בני	גלית
מהי משוואה?	2	4	19	61	20	--	2	21	--
פתרון בעזרת שיטת הכיסוי	--	8	1	39	67	33	--	7	19
מודל המאזניים- פתרון בעזרת פעולות על אגפים	98	79	80	--	19	--	--	--	3

טבלה 1: השוואה בין זמן המליאה (באחוזים) אשר הוקדש לכל אחת משיטת הפתרון

נצפו הבדלים בדרך שבה המורים הציגו את שיטות הפתרון השונות. שלושת המורים הביאו אביזרים וכלים טכנולוגיים

לשיעורים, אך השתמשו בהם בדרכים שונות. ממצאים אלה נמצאים בהלימה למחקרים קודמים (למשל, Eisenmann & Even, 2011). בנוגע לארגונומיה, הממצאים הללו יכולים להוביל למסקנות שונות: א. תה"ל, המשתקפת בספר הלימוד לא סיפקה משאבים מספיקים להוראת פתרון משוואות לינאריות, לכן המורים נאלצו למצוא משאבים משל עצמם; או, ב. ספר הלימוד היה גמיש דיו כדי לאפשר למורים להביע את ההעדפות, האמונות הפדגוגיות ושיקולים נוספים שלהם. לדעתנו שתי המסקנות תקפות.

בהתייחס לתכנית המושגת, כפי שהיא משתקפת בשיטות הפתרון של התלמידים בסיטואציות מבחן. מצאנו הבדלים ניכרים בין הכיתות (טבלאות 2 ו- 3).

כיתה ז	מבחן I	מבחן II	מבחן III	מבחן IV	מבחן V	כתה ח
גלית	56	22				0
מאירה	80	55	56	60	16	18
בני	65	13	5	5		68

טבלה 2. השכיחות (ב- %) של התלמידים אשר פתרו בעזרת שיקולים (שיטת הכיסוי) לפחות פעם אחת במבחן מסויים

כיתה ז	מבחן I	מבחן II	מבחן III	מבחן IV	מבחן V	כתה ח
גלית	75	83				78
מאירה	44	32	48	60	100	82
בני	59	94	94	95		95

טבלה 3. השכיחות (ב- %) של התלמידים אשר פתרו בעזרת פעולות על אגפי המשוואה לפחות פעם אחת במבחן מסויים

בחלק מן הכיתות, ניתן לזהות העדפה עקבית לפתרון משוואות בעזרת מניפולציות אלגבריות, בעוד שבאחרות התלמידים אמצו שיטה זאת רק לקראת סוף כיתה ז. יש תלמידים שהפגינו נטייה גבוהה לשימוש בשיטת הכיסוי, ואחרים ששקפו תמונה מאוזנת יותר תוך שילוב שתי השיטות הללו. הבדלים אלו נמצאים בהלימה לתכנית המיושמת בכל כיתה.

לכאורה, הממצאים טריוויאליים - תה"ל המושגת (תוצרי התלמידים) משקפת את תה"ל המיושמת. אולם, יש לזכור שבשלוש הכיתות למדו מאותם חומרי למידה. מצאנו כי תה"ל המיושמת מחליפה את תה"ל המיועדת מנקודת מבט של תה"ל המושגת. בהקשר של ארגונומיה בחינוך, לא זו בלבד שהמורים רואים את תה"ל כמשאב, ושוקלים איך ומתי להנגיש אותה לתלמידיהם בעודם מיישמים אותה בכיתה, אלא יש רמה נוספת, זו של תלמידים. עניין אותנו לחשוף איך ומתי תלמידים עושים שימוש במשאבים שהמורים זימנו להם בשלב תה"ל המיושמת, וכיצד הדבר משתקף בשלב תה"ל המושגת. לא מצאנו עדויות לשימוש כזה (כמו עקבות של שימוש בכלי טכנולוגי, וציור של מאזניים מוחשיים) למעט במשאב יחיד אצל אחת המורות. דרוש מחקר המשך אשר יאפשר מעקב אחרי תוצרי תלמידים בזיקה למשאבים שהונגשו להם בכיתה.

מקורות

משרד החינוך, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, מבוא לתכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לחטיבת הביניים (2008). אוחזר בספטמבר 2018 מתוך: http://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativatBeinayim

Choppin, J., McDuffie, A.R., Drake, C., & Davis, J. (in press). Preview: Curriculum Ergonomics. International Journal of Educational Research.

Eisenmann, T., & Even, R. (2011). Enacted types of algebraic activity in different classes taught by the same teacher. International Journal of Science and Mathematics Education, 9(4), 867–891.

Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Houang, R.T., Wang, H., Wiley, D.E., Cogan, L.S. & Wolfe, R.G. (2001). Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning (pp. 1 – 12). San Francisco: Jossey-Bass.

התנסות של פרחי-הוראה בלימוד קורס באלגוריתמים מתמטיים במתכונת של כיתה הפוכה

אילנה לביא, האקדמית, עמק יזרעאל
עטרה שריקי, אורנים, המכללה האקדמית לחינוך

מבוא

בשנים האחרונות הולך ורווח היישום של מודל הכיתה ההפוכה (flipped-class learning) בהוראה במוסדות החינוך השונים. בין השאר, מודל זה מיושם גם בלימודי מתמטיקה. לאור אילוצים מערכתיים, באחד מהקורסים המתמטיים במכללה לחינוך למדו פרחי-ההוראה במתכונת של כיתה הפוכה. הקורס עסק בתבניות ובאלגוריתמים מתמטיים, ועבור כל הסטודנטים הייתה זאת התנסות ראשונה בלמידה במתכונת זאת. במסגרת המחקר הנוכחי, נבחנו מגוון היבטים הנוגעים להתנסות הסטודנטים בלמידת מתמטיקה בכיתה הפוכה, ובמאמר זה נעסוק בסוגיה של תחושת מסוגלות-עצמית מתמטית.

רקע תאורטי

כיתה הפוכה. הרעיון העומד בבסיסו של מודל הכתה ההפוכה הוא שלימוד התכנים מתבצע בבית על ידי התלמידים ואילו השיעורים בכיתה מוקדשים לדיונים, ליישום של החומר הנלמד ולמתן סיוע פרטני. כך, ניתנת ללומדים שליטה על תהליך הלמידה שלהם והאחריות הכמעט בלעדית על הלמידה עוברת לידיהם, כאשר על המרצים מוטל לקדם שיתופי פעולה בין הלומדים, לפתח את מיומנויות הלומד עצמאי שלהם, לסייע להם להבין את הנושאים איתם התמודדו באופן עצמאי ולאתגר אותם במשימות חקר. נמצא שיש בכוחה של שיטת לימוד זו לעורר אצל הלומדים מוטיבציה לנסות ולהתנסות ולהיות פעילים (Love, Hodge, Grandgenett, & Swift, 2014). באופן ספציפי ללמידת מתמטיקה, מסקירת ספרות המחקר שבוצעה על-ידי ליי והונג (Lai & Hwang, 2016) עולה שלמידה במודל הכיתה ההפוכה מאפשרת למידה פעילה, מפתחת את יכולת הלומד להציב לעצמו מטרות לימודיות, מטפחת חשיבה מתמטית מסדר גבוה ותורמת לחיזוק תחושת המסוגלות-העצמית המתמטית. יחד עם זאת, תלמידים בעלי רמה נמוכה של מיומנויות לומד עצמאי אינם מפיקים תועלת מלמידה במודל כזה, ומתקשים להשתלב בשיעורים.
תחושת מסוגלות-עצמית מתמטית. את האופן שבו הפרט תופס את יכולתו להשלים משימה מסוימת כינה בנדורה (Bandura, 1982) בשם 'תחושת מסוגלות-עצמית'. נמצא שהצלחות עבר מחזקות את תחושת המסוגלות-העצמית, בעוד כישלונות מחלישים אותה וגורמים להימנעות מהתמודדות עם משימות דומות (Bandura, 1994). תחושת מסוגלות-עצמית מתמטית מתייחסת לתפיסה של הפרט את יכולתו להתמודד בהצלחה עם משימה מתמטית. לתחושה זאת יש קשר הדוק להישגים במתמטיקה, יותר מאשר למשתנים כגון - דימוי המתמטיקה, חרדת מתמטיקה, רקע כלכלי-חברתי ומגדר (OECD, 2013).

המחקר

הנבדקים וסביבת המחקר

במחקר השתתפו 26 סטודנטים אשר למדו בשנה השלישית להתמחותם בהוראת מתמטיקה לביה"ס היסודי בתכנית B.Ed במכללה אקדמית לחינוך. הסטודנטים למדו במתכונת של כיתה הפוכה במסגרת קורס סמסטריאלי שעסק בתבניות ובאלגוריתמים מתמטיים.
אחת לשבועיים הועלה לאתר הקורס שיעור שעסק בתבניות מתמטיות מסוגים שונים (לדוגמה- סדרות חשבוניות) או באלגוריתמים מתמטיים (לדוגמה- האלגוריתם של אוקלידס). כדי לנתב את הלמידה העצמאית, הסטודנטים

הונחו להעלות שאלות המתייחסות לתכנים ולהשיב עליהן, שכן העלאת שאלות במסגרת לימוד תכנים מתמטיים תומכת בפיתוח מיומנויות לומד עצמאי ומסייעת ללמידה (Lavy & Shriki, 2018). במסגרת הדיון כיתתי ניתנה לסטודנטים הזדמנות לקבל מהמרצה משוב על השאלות שהעלו ועל התשובות, ולהיחשף לשאלות שהועלו על-ידי עמיתיהם. בסיום הקורס התקיימה בחינה שבה התבקשו הסטודנטים לנתח וליישם תבניות ואלגוריתמים לא מוכרים.

מטרות המחקר

מטרת המחקר הייתה לבחון היבטים שונים, קוגניטיביים ורגשיים, הנוגעים להתנסות הסטודנטים בלמידת תבניות ואלגוריתמים מתמטיים במתכונת של כיתה הפוכה, כפי שהם נתפסים על-ידי הסטודנטים עצמם. במסגרת הנוכחית נעסוק באחת משאלות המחקר: כיצד תופסים פרחי-הוראה את ההשפעה של לימוד בשיטת הכיתה ההפוכה על תחושת המסוגלות-העצמית המתמטית שלהם?

כלי המחקר וניתוח המידע

לצורך המחקר נעשה שימוש בשלושה כלים:

א. יומן לומד שבו תיעדו הסטודנטים באופן רפלקטיבי את תהליך הלמידה שלהם. היומן כלל גם את השאלות שהעלו ואת התשובות שניתנו להן. בשימוש ביומן רפלקטיבי כחלק מהכשרת מורים גלומים יתרונות הן בהיבט של חיזוק הקשר בין המרצה לבין הסטודנטים והן בהיבט של העצמת תהליך הלמידה (O’Connell & Dyment, 2011).

א. הקלטות של המפגשים הכיתתיים.

א. תשובות הסטודנטים לשאלות המבחן המסכם.

המידע שהתקבל מכלי המחקר נותח באמצעות ניתוח תוכן (Neuendorf, 2002) וניתוח אינדוקטיבי לגילוי התימות המרכזיות (Taylor & Bogdan, 1998). במאמר הנוכחי נתייחס לחלק מהמידע שהתקבל מתוך היומנים הרפלקטיביים.

תוצאות

מהיומנים הרפלקטיביים עולה שבתחילת התהליך מרבית פרחי-ההוראה התנגדו לשיטת הכיתה ההפוכה בטענה ש"אין לי כלים לבצע עבודה של מרצה" ו"איך את מצפה ממני ללמוד לבד את המתמטיקה הזאת?", וסברו ש"השיטה לא תורמת להבנת הנושאים". לקראת מחצית הסמסטר, בעקבות חשיפה לשאלות שהועלו על ידי עמיתיהם והמשוב שקיבלו מהמרצה בדיון הכיתתי, השתנו התגובות, וברפלקציה הסופית סטודנטים כתבו: "בהתחלה, הייתי מגיעה לשיעורים מתוסכלת כי הרגשתי שהשאלות שהעליתי היו סתמיות, ולא ידעתי אם באמת הבנתי את האלגוריתם... כששמעתי שאלות של אחרים, הבנתי שאם הם מסוגלים ללמוד ככה את הנושאים, אז גם אני יכולה...לא ויתרתי לעצמי, וזה נתן לי הרגשה טובה שאני יכולה ללמוד לבד...נתן לי מוטיבציה להמשיך"; "ראיתי שהשאלות שלי ממש טובות, אז התחלתי להשתתף בדיונים. זה מאד שיפר לי את הביטחון העצמי שלי, כי הבנתי שאני מסוגלת להצליח בשיטה ההפוכה הזאת"; "הלימוד בשיטה של כיתה הפוכה היה לי קשה בהתחלה, כי בשיטה הזו אתה אחראי על הלמידה שלך. אבל עם הזמן התפתחה אצלי תחושה של גאווה שאני מסוגלת בעצמי להבין את האלגוריתמים המתמטיים שקיבלנו, וגם לדעת מה לא הצלחתי להבין עד הסוף".

יש לציין שלא כל פרחי-הוראה חוו את התחושות המתוארות לעיל. סטודנטים אשר ממוצע הציונים הקודמים שלהם היה גבוה מ-75 (19 סטודנטים מתוך ה-26) אכן הציגו עדויות חיוביות למאמצים ללמוד בכוחות עצמם תוך העלאת שאלות. חלק מהם דיווח על פנייה לעזרת חברים או לחיפוש מידע ברשת האינטרנט. בעלי ממוצע ציונים נמוך טענו במהלך כל הסמסטר ש"אני צריכה שהמרצה תסביר לי. לא יכולה ללמוד לבד", וכי "למידה בכיתה הפוכה לא מתאימה לי". סטודנטים אלה הודו ש"פשוט הרמתי ידיים, והגעתי לדיונים הכיתתיים לא מוכנה". יתירה מכך,

ברפלקציה הסופית היו שכתבו: "לא הצלחתי לחשוב על שאלות שיעזרו לי להבין את האלגוריתמים, וזה סתם גרם לי לחוסר אונים"; "לא כל שיטת לימוד מתאימה לכולם...ראיתי שאחרים הצליחו ואני לא מצליחה להבין, וזה היה ממש מתסכל לא להבין את הקורס הזה".

דיון ומסקנות

באופן כללי, ניתוח היומנים הרפלקטיביים מצביע על כך שהסטודנטים התייחסו בעיקר להיבטים רגשיים של הלמידה, ובפרט לממדים הקשורים לתחושת מסוגלות-עצמית מתמטית. בהלימה לבנדורה (Bandura, 1994), גם במקרה של למידת הקורס הנוכחי נמצא שהצלחות חיזקו את תחושת המסוגלות-העצמית המתמטית של הסטודנטים, בעוד שכישלונות גרמו לתחושה של תיסכול וחוסר אונים, עד כדי הימנעות מהתמודדות עם תכני הקורס. במחקר נוסף ראוי לבחון את ההשלכות האפשריות של התפתחות התחושות הללו על המשך הלמידה של קורסים מתמטיים.

בדומה לסקירת הספרות שבוצעה על-ידי ליי והונג (Lai & Hwang, 2016), מהמחקר הנוכחי עולה שהלמידה במודל הכיתה ההפוכה איפשרה למידה פעילה, ותרמה לחיזוק תחושת המסוגלות-העצמית המתמטית. אך, כאמור, יתרונות אלה באו לידי ביטוי רק בקרב סטודנטים שמלכתחילה היו בעלי הישגים גבוהים יותר במתמטיקה. יחד עם זאת, היומנים הרפלקטיביים לא איפשרו ללמוד על תרומת הלמידה במתכונת של כיתה הפוכה לטיפוח חשיבה מתמטית מסדר גבוה, ולצורך זה מומלץ לבצע מחקר מעקב.

לאור הקשר הישר שבין הישגים במתמטיקה לבין תחושת מסוגלות-עצמית מתמטיקה (OECD, 2013), נראה שההתנסות המתוארת לעיל חיזקה תחושה זאת בקרב מי שהיה מלכתחילה בעל תחושה גבוהה של מסוגלות-עצמית מתמטית, בעוד שבקרב האחרים ההתנסות החלישה תחושה זאת עוד יותר. לפיכך, ממצאי המחקר מעלים שאלות בנוגע לאופן שבו ניתן לתמוך בלמידה של סטודנטים בעלי הישגים נמוכים במתמטיקה הנדרשים ללמוד במסגרת כיתה הפוכה.

מקורות

Bandura, A. (1982). Self-efficacy mechanism in human agency. *American Psychologist, 37*(2), 122-147.

Bandura, A. (1994). Self-efficacy, in V. Ramachaudran (ed.), *Encyclopedia of human behavior*, Vol. 4 (pp. 71–81). New York, NY: Academic Press.

OECD (2013). PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. OECD Publishing. Available at: https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf

Lai, C-L., & Hwang, G-J. (2016). A self-regulated flipped classroom approach to improving students' learning performance in a mathematics course. *Computers and Education, 100*, 126-140.

Lavy, I., & Shriki, A. (2018). Promoting self-regulated learning of mathematical texts through questions-asking activities. *Proceedings of EDULEARN18 Conference, 10th annual International Conference on Education and New Learning Technologies*.

Love, B., Hodge, A., Grandgenett, N., & Swift, A.W. (2014). Student learning and perceptions in a flipped linear algebra course. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 45*(3), 317-324.

Neuendorf, K. A. (2002). *The Content Analysis Guidebook*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

O'Connell, T. S., & Dyment, J. E. (2011). The case of reflective journals: Is the jury still out? *Reflective Practice, 12,* 47–59.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1998). *Introduction to qualitative research methods: A guidebook and resource* (3rd ed.). Hoboken, NJ, US: John Wiley & Sons Inc.

הזדמנויות למידה של שיח חקירתי בהשתלמות מחשב"ה

טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך
עינת הד-מצויינים, הטכניון

◆◆◆

מאמצים לסייע למורים לסגל פרקטיקות הוראה המקדמות השתתפות חקירתית נפוצים ברחבי העולם, בעיקר באמצעות השתלמויות מורים (Sztajn, Borko, & Smith, 2017). בעבודה זו אנו בונות על המסגרת הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) ומגדירות הוראה חקירתית כהוראה אשר מאפשרת לתלמידים הזדמנויות ליצור נרטיבים על אובייקטים מתמטיים (Heyd-Metzuyanim, Tabach, & Nachlieli, 2016).

מחקרים מראים כי הבדלים בין פרקטיקות הוראה חקירתיות לבין פרקטיקות הוראה "מסורתיות" יותר (ממוקדות-מורה) מעוגנים בהבדלים בין מסגורים שונים של הוראה הנשענים על שיחים פדגוגיים שונים (Heyd-Metzuyanim, Munter, & Greeno, 2018; Heyd-Metzuyanim & Shabtay, in review). שיח פדגוגי חקירתי מחשיב פעולות הוראה ולמידה מסוימות, כגון עבודת תלמידים עצמאית או בקבוצות על בעיות מורכבות, דיונים כיתתיים, והתייחסות מקיפה ומעמיקה למושגים מתמטיים (Hiebert & Grouws, 2007). לעומת זאת, שיח פדגוגי זה ממעיט מהערך של פעולות אחרות, פעולות שאותן השיח ממוקד-המורה המסורתי מחשיב יותר, כמו: הסברים מדויקים (של המורה), תרגול מרובה (על ידי התלמידים), דירוג משימות ל"חתיכות קטנות" והימנעות מ"בלבול" תלמידים באמצעות חשיפתם למספר פתרונות שונים לאותה הבעיה.

מחקרים קודמים הראו כי המעבר משיח מסורתי לשיח חקירתי הנו מורכב ולא לינארי (Heyd-Metzuyanim, Smith, Bill, & Resnick, 2018) וכי תהליך זה כולל מסגורים שאינם בהלימה זה עם זה (Heyd-Metzuyanim, Munter, & Greeno, 2018). מסגור הוא אותו החלק בשיח הפדגוגי הקשור לפרשנות. הוא בדרך כלל סמוי, וניתן לאפיון דרך פעולות ותוצרים שאנשים מבחינים בהם ומדגישים כמשמעותיים. הד מצויינים ושותפיה (Heyd-Metzuyanim, Munter, & Greeno, 2018) מבחינים בין ההיבט החברתי (סובייקטיפיקציה - subjectifying) של מסגור, הכולל פרשנויות לגבי מי מדבר בכיתה, לבין ההיבט המתמטי הכולל את האובייקטים המתמטיים והרוטינות שעליהם מדברים בכיתה.

הפוריות של דיוני מורים במהלך השתלמויות נמצאת במוקד של מחקרים רבים בשנים האחרונות (e.g. Borko, Jacobs, Eiteljorg, & Pittman, 2008). רבים מהם מצביעים על שימוש בוידאו כמשפר את פוריות הדיונים. אולם מרבית המחקרים הללו אינם מגדירים במדויק מהם "דיונים פוריים". בהקשר של המחקר הנוכחי המתמקד בעידוד הוראה חקירתית, הנחת המוצא שלנו היא שהשיח הפדגוגי של המורים המשתתפים בהשתלמות מחשב"ה (מהלכים מעודדי חשיבה בהוראת המתמטיקה) הוא בעיקרו שיח מסורתי, בעוד שהשיח של מנחת ההשתלמות (ושאליו היא מעוניינת להוביל את המורים) הוא שיח פדגוגי חקירתי. מצב זה עשוי להביא למסגורים שונים שנשארים חבויים. בהקשר של מפגשים אלה, דיון פורה הוא דיון החושף אי-הלימה בין מסגורים ומאפשר למנחה להתמודד עמם.

בנוסף, בכדי לאפיין האם דיונים "מתפזרים" או מתמקדים, אנו מתבססות על הרעיון של לכידות-לשונית (Halliday & Hasan, 1976) ושל שרשראות לקסיקליות (Morris & Hirst, 1991). לכידות הוא מושג סמנטי המתייחס למשמעויות המתקיימות בטקסט. לכידות מתרחשת במקומות בהם הפרשנות של רכיב כלשהו בטקסט תלוי בזו של אחר. שרשרות לקסיקליות עוזרות לקבוע לכידות וכך לזהות את המשמעות הגדולה יותר בטקסט. אנו מאמצים רעיון זה ללמוד על הלכידות של הטקסט אשר נוצרה על ידי המורים ומנחת ההשתלמות וכך ללמוד על פוריות השיח הפדגוגי על ידי כך שנראה באופן ויזואלי את הנושאים שעליהם דיברו והמילים הספציפיות שהמשתתפים בחרו כדי לדבר על נושאים אלה.

מטרת המחקר הנוכחי היא לאפיין תהליכים של שיח-מורים פורה במסגרת השתלמות מורים שנועדה לעודד הוראת מתמטיקה חקירתית.

שיטה

השתלמות מחשב"ה כללה 16 מפגשים בני 4 שעות במהלך שנתיים (2016-2017). במהלך ההשתלמות המורים נחשפו לגישה של "5 פרקטיקות להובלת דיונים פוריים בשיעורי המתמטיקה" (Smith & Stein, 2011) וכן לכלים של "שיח מחוייב" Accountable Talk™ (Heyd-Metzuyanim et al., 2018) מהמורים המשתתפים לימדו מתמטיקה בחטיבת הביניים ושניים לימדו ביסודי. בסוף השנה הראשונה ניתחנו את השיעורים שהמורים לימדו וצילמו במהלך השנה הראשונה. הניתוח נעשה בעזרת סכמת "קידוד הרבעונים" המתייחסת בעיקר לשני מימדים: רמת ההתמודדות של תלמידים בשיעור, ורמת ההמשגה (Stein, Correnti, Moore, & Russell, 2017). הממצאים הכמותיים הראו שהמורים בשנה א' של ההשתלמות התקשו לשמור על רמת ההמשגה במקרים בהם הם העלו את הזדמנויות התלמידים להתמודד.

עבור המחקר הנוכחי, צפינו בצילומי הוידאו של כל המפגשים ותכתבנו באופן שטחי ("מרפרף") את כולם. על בסיס תכתובים חלקיים אלה בחרנו להתמקד במפגש הראשון של השנה השניה, שאותו זיהינו כמרכזי מבחינת פוריות השיח: כאן הצגנו לראשונה את סכמת הקידוד של "הרבעונים" וכן את תוצאות קידוד השיעורים של שנה א'. בפרט, התמקדנו בשתי הקטגוריות מתוך מחוון הקידוד: "המשגה-מפורשת" ו"הזדמנויות להתמודדות". לאחר הצגת המחוון הצגנו שיעור מצולם (לא מזוהה) שלדעתנו כלל היבטים רבים של הוראה חקירתית. תכתבנו באופן מלא את הדיון סביב הצגת הקטגוריות והשיעור המצולם ונתחנו את השרשראות הלקסיקאליות לפני ולאחר הצגת הוידאו.

ממצאים

על סמך זיהוי שרשרות-לקסיקליות בתכתוב של האפיזודות, זיהינו כי פוריות הדיון עלתה באופן משמעותי לאחר שהוצג הוידאו, בו צפו המורות יחד עם מחוון הקידוד. פוריות זו נצפתה על ידי כך שהשרשראות הלקסיקליות הנוגעות לנושא ההמשגה (אשר נדון באותו הקטע) התארכו ומספר מורות תרמו חוליות לשרשרת.

להלן קטע קצר מהדיון. שרשראות לקסיקליות הנוגעות להמשגה במחוון (אשר התייחסו לקריטריון, למשל: הצגת דרכים שונות לפתרון) מסומנות <u>בקו-תחתון</u>; שרשראות הנוגעות לוידאו ולמוצג בו מסומנות <u>בקו-תחתון כפול</u>, וכינויי-גוף או התייחסויות לפעולות המורה והתלמידים **מודגשים**.

> ולרי: <u>המשגה, לא היתה (בסרט) הרבה המשגה. בקושי מושגים רשמתי פה (בדף הרפלקציה).</u>
>
> טלי: <u>איזה מושגים?</u>
>
> לנה: <u>אבל המשגה צריכה להיות בתחילת השיעור?</u> כבר?
>
> ורוניקה: אבל אנחנו <u>לא צפינו בחלק של סוף השיעור</u> **שהמורה מסכמת** <u>את כל הדברים שמופיעים על הלוח</u>. **היא** <u>רצתה להראות כל מיני דרכים</u>. **היא** <u>קראה ללוח לכל מיני קבוצות תלמידים שהם יראו מה שהם [אירה: דרכים] בדיוק</u>. והיא רצתה בעצם על הלוח להראות כל מיני דרכים, כל מיני תשובות שונות, שגם **הילדים** מהקבוצות השונות יראו מה האחרים חשבו. אני חושבת שמה שאנחנו לא רואים (<u>בסרט</u>) זה בעצם **הסוף של המורה**, שהוא אמור להיות בסוף של השיעור, אחרי כל התשובות שיראו על הלוח.

קטע זה מדגים את המסגור של המורות, אשר היה אפייני גם לשאר הדיון. המורות אמנם התייחסו לסרט, לפעולות הספציפיות שנראו בו ולקשר שלהן למחוון (דבר שהדגים את הפוריות של הדיון), אך מיעטו להתייחס לדברי התלמידים. השיח שלהן (ראו למשל כינויי גוף מודגשים לעיל) הדגיש בעיקר את פעולות המורה.

ניתוח השרשראות הלקסיקליות בהמשך הקטע הצביע על עיסוק אינטנסיבי באובייקט ה"יחס", אותו הובילה המנחה. באמצעות שרשרת זו, נחשפו מימושים של אובייקט היחס שעלו מתוך רעיונות התלמידים בסרט, ואשר המורות לא ייחסו להם חשיבות מיוזמתן.

ניתוח זה אף הצביע על אי-ההלימה במסגור בין המנחה למורות. בעוד שהמנחה ייחסה חשיבות רבה לניצני הרעיונות המתמטיים שנבעו מדברי התלמידים, המורות התמקדו בדברי המורה ובתפקידה כמובילת השיח.
באופן מעניין, אי ההלימה בין המסגורים נחשפה בזמן אמת רק בהיבט המתמטי, דבר שאיפשר למנחה להתמקד ולהדגיש נושא זה. אי ההלימה בהיבט הסובייקטיפיקציה (מי מדבר ומי אחראי על ייצור נרטיבים מתמטיים) לא נחשפה בזמן אמת ונותרה סמויה מהמשתתפים עד לניתוח בדיעבד.

דיון ומסקנות

מטרתנו היתה לאפיין דיונים פוריים בהשתלמות המתמקדת בהוראה חקירתית. הניתוח הלקסיקלי הראה ששימוש בצילום וידאו של דיון במהלך שיעור מתמטיקה וסכמת "הרבעונים" איפשר חשיפה של ההיבט המתמטי של המסגורים של המנחה ושל המורים ולפיכך ניתן היה לדון באי הלימה זו במפורש. ממצאים אלה מחזקים ממצאים קודמים לגבי יעילות השימוש בוידאו לצד השימוש בסכמת הניתוח בהשתלמות (e.g. Schoenfeld, 2017). תרומה נוספת של מחקר זה היא מתודולוגית, הצגת השימוש בכלים בלשניים לניתוח יעילות של דיונים בהשתלמות.

מקורות

Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., & Pittman, M. E. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education, 24*(2), 417–436.

Halliday, M. A., & Hasan, R. (1976). *Cohesion in English*. Longman: London.

Heyd-Metzuyanim, E., Munter, C., & Greeno, J. G. (2018). Conflicting frames: a case of misalignment between professional development efforts and a teacher's practice in a high school mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 97*(1), 21-37.

Heyd-Metzuyanim, E., & Shabtay, G. (in review). Narratives of the "good" instruction: teachers' identities as drawing on exploration vs. acquisition pedagogical discourses. *ZDM*

Heyd-Metzuyanim, E., Smith, M., Bill, V., & Resnick, L. B. (2018). From ritual to explorative participation in discourse-rich instructional practices: a case study of teacher learning through professional development. *Educational Studies in Mathematics*, 1–17. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9849-9

Heyd-Metzuyanim, E., Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(6), 547-574.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*, 371-404.

Morris, J., & Hirst, G. (1991). Lexical cohesion computed by thesaural relations as an indicator of the structure of text. *Computational linguistics, 17*(1), 21-48.

Schoenfeld, A. H. (2017). Uses of video in understanding and improving mathematical thinking and teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(5), 415–432.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. New York: Cambridge University Press.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematic.

Stein, M. K., Correnti, R., Moore, D., Russell, J. L., & Kelly, K. (2017). Using Theory and Measurement to Sharpen Conceptualizations of Mathematics Teaching in the Common Core Era. *AERA Open, 3*(1), 233285841668056.

Sztajn, P., Borko, H., & Smith, T. M. (2017). Research in Mathematics Professional Development. In *Compedium for Research in Mathematics Education* (pp. 793–823). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematic.

הזדמנויות ללמידה המאפשרות ריטואל בשיעורי המתמטיקה

טלי נחליאלי, מכללת לוינסקי לחינוך
מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

◆◆◆

על אף הקריאה לשינויים בהוראת המתמטיקה, להוראה ממוקדת תלמיד, הוראה מסורתית עדיין נפוצה ברחבי העולם. הוראה מסורתית, מתייחסת להוראה כ"העברת ידע" או "מסירת ידע", ולכן מכונה "הוראה על ידי הרצאה"(Brown, 2003) או "פדגוגיה של שליטה" (Draper, 2002). בכיתות אלה השיח נשלט על ידי המורה, ולעיתים קרובות מתנהל על פי הדפוס של פת"מ (פתיחה-תגובה-משוב) (Cazden, 2001). עשיית מתמטיקה כרוכה בביצוע פרוצדורות שנלמדו בכיתה. המורה וספר הלימוד הם הסמכות המתמטית בכיתה. לעומתה, הוראה ממוקדת לומד מנסה לקחת בחשבון את צרכי הלומד וסגנון הלמידה שלו (Brown, 2003). הוראה כזו מבוססת על תפיסות קונסטרקטיביסטיות. הלומד מצופה לפתח ולתקשר את רעיונותיו המתמטיים לעמיתיו ולמורה. זה האחרון נתפש כמנחה המזמן הזדמנויות למידה לתלמידיו (Mascolo, 2009).

מחקרים מראים כי הגישה המסורתית-ממוקדת-מורה היא עדין הגישה הרווחת בשיעורי המתמטיקה. בהנחה שמורים מעוניינים בהצלחת תלמידיהם, נראה שקיים פער בהבנתנו המחקרית את פרקטיקות ההוראה שמורים בוחרים להפעיל בכיתה. אנו מציעות להתמקד ברוטינות הוראה כמקור אפשרי להבנת הפער. בעבודותנו הקודמות אימצנו את הגישה הקומוגניטיבית להגדרת הוראה כפעילות רוטינית (נחליאלי וטבח, 2016), וכן התייחסנו לרוטינות ריטואליות וחקירתיות בהקשר של הוראה (Heyd-Metzuyanim & Graven, 2016). במאמר זה נשאל: מהם הרווחים האפשריים מהפעלה של רוטינות הוראה ריטואליות?

רקע תאורטי

על פי הגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) רוטינות (routines) הם דפוסים טיפוסיים החוזרים על עצמם כתגובה לסיטואציה מוכרת. לביא וספרד (2016) מבחינות בין שני סוגים של רוטינות שיח: רוטינות-ריטואל (rituals) ורוטינות-חקירה (exploration). רוטינות שיח אלה נבדלות על פי מידת עצמאותו של המבצע: ריטואל מתאפיין בתלות כמעט מוחלטת של המבצע במומחה - היא מתבצעת ביוזמתו של אדם אחר ובמהלך ביצועה כמעט ולא נדרשת קבלת החלטות על ידי המבצע. לעומתה, רוטינת החקירה מתאפיינת במידה גבוהה של עצמאות מצד המבצע ובהעדר צורך בתיווך של מומחה.

המושג הזדמנויות-למידה מוגדר כנסיבות המאפשרות לתלמידים לעסוק במשימות אקדמיות (National Research Council). נגדיר הזדמנויות-למידה-המאפשרות-ריטואל כפעולות הוראה המזמנות לתלמידים משימות שיכולות להתבצע תוך הפעלת פרוצדורות שנלמדו בעבר. יש לשים לב כי תלמיד יכול, גם בהזדמנויות-למידה כאלו, לפעול באופן חקרני. בניגוד לכך, נגדיר הזדמנויות-למידה-המחייבות-חקירה כפעולות הוראה המזמנות משימות שביצוען מחייב השתתפות חקירתית של התלמידים, כמו למשל ניסוח נרטיבים מתמטיים (כמו השערות או משפטים).

על אף החשיבות הרבה שיש להזדמנויות-למידה-המחייבות-חקירה, אנו מניחות כי גם הזדמנויות-למידה-המאפשרות-ריטואל ממלאות תפקיד חשוב בשיעורי המתמטיקה. שאלת המחקר שלנו היא: האם הזדמנויות-למידה-המאפשרות-ריטואל נפוצות בשיעורי המתמטיקה? ואם כן, אילו מטרות הוראה מושגות בעזרתן?

שיטה

מקור הנתונים הוא כל 11 השיעורים בשפה האנגלית מתוך מאגר השיעורים המצולמים של מחקר הוידאו TIMSS 1999: 4 שיעורים מאוסטרליה (AU), 3 מהונג-קונג (HK) ו- 4 מארה"ב (US) (Hiebert et al., 2005). כל השיעורים

הם מכיתות ח. על מנת לאפיין את הזדמנויות-הלמידה בעזרת העדשה הריטואלית-חקירתית, נעזרנו בטבלה 1.

בשלב הראשון של הניתוח, זיהינו את רוטינות ההוראה בכל שיעור. לכל רוטינה, בעזרת השאלות בטבלה 1, זיהינו את ההזדמנויות-ללמידה המאפשרות-ריטואל ואלה המחייבות-חקירה. לא נוכל לתת כאן דוגמה מפורטת לניתוח זה.

בשלב השני של הניתוח, לאחר זיהוי כל הרוטינות, קטלגנו כל אחת לפי מטרות ההוראה האפשריות אותן הן משרתות. עשינו זאת על בסיס אמירות המורה במהלך השיעור וכן על בסיס הערות המורה כפי שהופיעו ברשימות הנלוות לשיעורים.

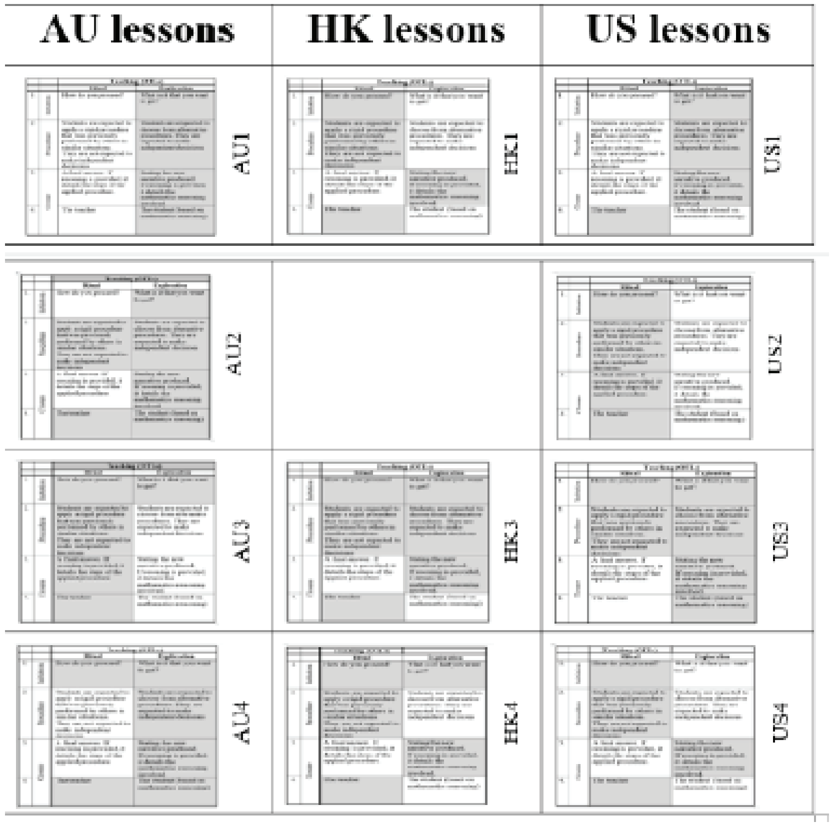
טבלה 1: עדשה מתודולוגית להבחנה בין הזדמנויות-למידה-ריטואליות-חקירתיות

		הזדמנויות למידה המאפשרות ריטואל	הזדמנויות למידה המחייבות חקירה
פתיח	מהי השאלה שהמורה מעלה?	כיצד לפעול?	מה אתה מעוניין להשיג?
הליך	כיצד נקבע ההליך של הרוטינה? (בפרט בהקשר הגמישות שהמורה מזמן לתלמידים)	תלמידים מצופים להפעיל פרוצדורה שבוצעה על ידי אחרים בעבר, באופן מסויים. אין ציפייה לקבלת החלטות באופן עצמאי.	תלמידים מצופים לבחור בין הליכים אפשריים שונים. הם מצופים לקבל החלטות באופן עצמאי.
סיום	מהו סוג התשובה המצופה?	תשובה סופית. אם מסופקות הנמקות, זה להצדיק את שלבי הפתרון שהופעל.	ניסוח הנרטיב החדש. אם מסופקות הנמקות, הן על בסיס שיקולים מתמטיים.
	מי קובע שהמשימה הסתיימה?	המורה	התלמידים (בהתבסס על שיקולים מתמטיים)

ממצאים

מהלך הניתוח הראשון, על בסיס טבלה 1, הוביל ליצירה של פרופיל ייחודי לכל אחד מ-11 השיעורים שנותחו. כל פרופיל מוצג באחד התאים באיור 1. בכל פרופיל, האזורים הכהים מציינים האם באותו שיעור זיהינו פתיח, הליך או סיום של הזדמנויות למידה שהן יותר מחייבות-חקירה - ואז החלק הימני בפרופיל השיעור כהה, או מאפשרות-ריטואל, ואז החלק השמאלי בפרופיל כהה.

אוסף הפרופילים באיור 1 מצביע על העובדה הידועה כי הוראה פנים רבות לה, ובמיוחד, מדגיש את הגיוון בהזדמנויות הלמידה שניתנות בכל שיעור ובשיעורים השונים: החל משיעורים מועטים הצבועים באופן אחד המייצגים הזדמנויות למידה מאותו הסוג באותו השיעור, אל שיעורים אשר המשלבים הזדמנויות ללמידה המאפשרות-ריטואלים וכאלה המחייבות-חקירה.



איור 1: פרופילים של שיעורים בהתאם להזדמנויות למידה בעדשה של ריטואל-חקירה

מהלך הניתוח השני הצביע על שתי מטרות הוראה של הזדמנויות למידה המאפשרות-ריטואל. המטרה הראשונה היא אימוץ של נרטיב מתמטי חדש, כלומר, פיתוח נרטיב מתמטי חדש בהקשר של עצמים מתמטיים שכבר מוכרים לתלמידים.

הדוגמה שנציג לקוחה משיעור US3 שהתמקד בנושא של חזקות. בשיעור זה התלמידים כבר הכירו את הרעיון של an כמייצג מכפלה של a בעצמו n פעמים. המורה ביקשה מהתלמידים שהם יעזרו בהגדרה זו של חזקה כדי לפתור תרגילים שונים וכדי להגיע להכללות. המורה רצתה שהתלמידים יזהו וינסחו את ההיגדים המתמטים הבאים: $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$. המורה הדגישה בפני התלמידים שכדי לפתור את התרגילים, היא מצפה מהם להפעיל את הכלל שהם למדו, כפי שהיא הראתה על הלוח. במובן זה, מדובר בהזדמנות-למידה המאפשרת-ריטואל. לאחריה, מציאת ההכללה וניסוח הנרטיב בהחלט דרש חקירה שכן התלמידים לא ראו כללים אלה בעבר והיה עליהם לזהות את ההכללה. כלומר, כמו במקרים אחרים שזיהינו בשיעורים שניתחנו, היתה כאן הזדמנות-למידה-מאפשרת-ריטואל שהיוותה בסיס לניסוח של נרטיבים חדשים (על עצמים מוכרים - חזקות).

מטרת ההזדמנות-למידה-המאפשרת-ריטואל השנייה שזיהינו היא בסיס להכרות עם שיח חדש. במקרים אלו, הלומדים צריכים לשנות את כללי השיח על פיהם פעלו עד כה, ולעבור לפעול על פי כללים חדשים. נדגים זאת, בעזרת דוגמה שבה תלמידים נתקלים לראשונה בביטוי כמו $a^0=1$. איור 2 מציג את שינוי כללי השיח המצופה במקרה זה.

בשיעור US3 אליו התייחסנו בדוגמה הקודמת, לאחר שהתלמידים ניסחו שלושה כללים לכפל ולהעלאה בחזקה של חזקות, המורה ביקשה מהלמידים להוכיח ש $a^0=1$ (למעשה מדובר בהצדקה של הגדרה, אך המורה ביקשה

מהתלמידים להוכיח את הטענה). ההצדקה להגדרה זו דורשת אימוץ של כללי שיח חזקות השונים מכללי שיח החזקות שבו התלמידים השתתפו עד כה (איור 2). מניתוח השיעור אפשר היה להסיק כי המורה אינה מודעת לשינוי זה בשיח שהתלמידים צריכים לעשות. המורה ניסתה ליצור הזדמנויות-למידה-מחייבות-חקירה, אבל התלמידים לא הצליחו כלל להתמודד עם המשימה. לאחר זמן מה, המורה החלה לפרק את המשימה לתת-משימות קטנות וממוקדות יותר ויותר, ולמעשה יצרה הזדמנויות-למידה-מאפשרות-ריטואל שאיתן התלמידים הצליחו להתמודד. במהלך ההרצאה נציג עדויות להזדמנויות הלמידה השונות ולהתמודדות של התלמידים עם הזדמנויות אלה. אנו מניחים שהקושי של התלמידים להתמודד עם המשימה המקורית, נבע מהמעבר ברמת-על שנדרש כאן: משימוש בחזקות על שיח על מספרים טבעיים (החזקות כמספרים טבעיים), לשימוש בחזקות על קבוצת מספרים הכוללת 0. כללי השיח שבהם השתמשו עד כה (כפל חוזר מספר פעמים הנקבע על ידי מעריך החזקה) כבר לא רלוונטים בשיח החדש. לתלמידים לא היו כללים לעבוד על פיהם. כעת היה עליהם להשתמש בכלל שיח חדש: הוכחה של טענה על ידי שימוש בנרטיבים שנלמדו בעבר באופן שישמר את כללי החזקות.

	שיח ישן	שיח חדש
קבוצת המספרים אליה שייך מעריך החזקה	a^n, $n \in N$	a^0, $0 \in Z$
מה מתאר a^n?	$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots$ (n פעמים)	ההגדרה של חזקה ככפל חוזר אינה רלונטית. יש להגדירה כדי לשמור על עיקביות בתוך המתמטיקה.
כיצד לאמץ נרטיב חדש?	הכללה על ידי רישום החזקה ככפל חוזר וחיפוש דפוס. למשל, $a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3}$	משמעות המעריך תיקבע באופן שישמור על נרטיבים קודמים

איור 2: חזקות – שני שיחים

דיון

מחקר זה מתמקד בהרחבת השיח על הוראה. לשם כך, הגדרנו שני מושגים: הזדמנות-למידה-המאפשרת-ריטואל, והזדמנות-למידה-המחייבת-חקירה. בשל השכיחות של הזדמנויות-למידה-מאפשרות-ריטואל נעזרנו במושגים אלה כדי לבחון מטרות אפשריות שאפשר להשיג בעזרת הזדמנויות-למידה אלה.

מקורות

נחליאלי, ט' וטבח, מ' (2016). שימוש בהגדרה מתמטית בתהליכי זיהוי פונקציה על-ידי סטודנטים להוראה. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 4**, 170 - 193.

לביא, ע' וספרד, א' (2016). עצמים מדיבורים: כיצד ילדים קטנים יוצרים מספרים בתוך שיח. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 4**, 22 - 68.

Brown, K. L. (2003). From teacher-centered to learner-centered curriculum: Improving learning in diverse classrooms. *Education, 124*(1), 49-55.

Cazden, C. (2001). *Classroom discourse: The language of learning and teaching*. Portsmouth, NH.

Draper, R. J. (2002). School mathematics reform, constructivism, and literacy: A case for literacy instruction in the reform-oriented math classroom. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 45*(6), 520-529.

Heyd-Metzuyanim, E., & Graven, M. (2016). Between people-pleasing and mathematizing: South African learners' struggle for numeracy. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 349-373.

Hiebert, J., Stigler, J. W., Jacobs, J. K., Givvin, K. B., Garnier, H., Smith, M., ... & Gallimore, R. (2005).

Mathematics teaching in the United States today (and tomorrow): Results from the TIMSS 1999 video study. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 27*(2), 111-132.
Mascolo, M. F. (2009). Beyond student-centered and teacher-centered pedagogy: Teaching and learning as guided participation. *Pedagogy and the Human Sciences, 1*(1), 3-27.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.
Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: prologue. *Educational Studies in Mathematics, 91*(3), 299-306.

פיתוח מתודולוגיה לחקירת והערכת מידת האפקטיביות של מקבצי סרטוני תרגול מתמטיים, בנושא ייצוג הפונקציה הריבועית

אלי נצר, אוניברסיטת תל אביב
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

תקציר

במחקרים שונים חוזרת ועולה השאלה מהו השילוב הנכון והאפקטיבי ביותר של סרטונים בהוראה (Geri, 2012). סוגיה זו אף מתחדדת לנוכח המגוון הרב - הקיים והפוטנציאלי - של סוגי סרטונים תומכי הוראה (Yousef, Chatti & Schroeder, 2014). מחקר זה בוחן סרטוני תרגול העוסקים בנושא מתמטי מסוים (ייצוגי הפונקציה הריבועית) והמיועדים לשכבת גיל מסוימת (תלמידי כיתות ט'). במסגרת המחקר פותחה ומוצגת מתודולוגיה לחקירת הסרטונים ולבחינת האפקטיביות שלהם. בנוסף, במחקר מוצג אופן הפעלת המתודולוגיה על שישה מקבצים של סרטונים, ומוצגות המסקנות העולות מניתוח זה.

רקע תיאורטי

כיצד ניתן למדוד אפקטיביות של סרטוני וידאו לימודיים? קיימת גישה הדוגלת בניתוח ההשפעות העקיפות על הלומדים. כך למשל, ניתן למדוד את השפעת השימוש בסרטונים על ציוני הלומדים באמצעות השוואת ציוני הלומדים בשני קורסים, האחד בו נעשה שימוש בסרטונים והאחר שאינו עושה שימוש בהם (Zhang, Zhou, Briggs, & Nunamaker, 2006; Wieling & Hofman, 2010; Brecht, 2012).
גישה אחרת למדידת אפקטיביות של סרטונים, הנתפסת כבחינה ישירה, היא ניתוח של אופן השימוש בפועל בסרטונים על ידי המשתמשים, וכן בחינת פעולות נוספות שביצעו המשתמשים מיד עם סיום הצפייה. דרך זו מבוססת על כך שהשימוש בסרטוני הלימוד מתבצע בסביבת לימוד מקוונת, המאפשרת תיעוד מדויק של נתוני הצפייה ושל פעולות המשתמשים. מדד שימושי מקובל במחקרים מעין אלו, לצורך הערכת אפקטיביות של סרטון, הוא מדידה אמפירית של משך הצפייה היחסי הממוצע לסרטון; זאת, מתוך ההנחה שמדובר בתנאי הכרחי להתפתחות למידה (Geri, Winer & Zaks, 2017; Guo, Kim & Rubin, 2014; Hibbert, 2014). בנוסף למדד זה, ניתן למדוד גם את נתוני הפעילות של המשתמשים בעקבות צפייתם בסרטון: האם המשתמשים עונים על השאלות הייעודיות בסיום הסרטון? האם המשתמשים משתתפים גם בפורום של אותו סרטון? וכן הלאה.
קים וחובריו (Kim, Guo, Seaton, Mitros et al, 2014) מציגים במאמרם שלושה אופנים לניתוח השימוש בסרטוני וידאו (video engagement analysis). המימד הראשון הוא חקירת נתוני השימוש הישירים (implicit user data) של המשתמשים, קרי נתוני כל הפעולות שביצעו המשתמשים במהלך הצפייה בסרטון. המימד השני הוא נתונים מפורשים שהמשתמשים התבקשו לתת (explicit user data), כלומר הפעולות אותן התבקשו המשתמשים לעשות באופן מפורש. המימד השלישי הוא ניתוח התוכן שהוצג בסרטון (content based video analysis), כלומר בחינת מעברים בסרטון, שינויים בתוכן המוצג, קטעי דממה וכן הלאה. במחקר זה, נבחנה האפקטיביות של הסרטונים בשניים מתוך שלושת המימדים שצוינו לעיל: המימד הראשון המתייחס לנתוני השימוש הישירים, וכן המימד האחרון המתייחס לניתוח תוכן הסרטון מהיבטים מתמטיים-דידקטיים.

שאלות המחקר

מה ניתן ללמוד מניתוח מגוון נתוני הצפייה של סדרת סרטונים, בשילוב עם ניתוח המבנה הדידקטי-מתמטי של אותם סרטונים, ביחס למידת האפקטיביות של הסרטונים? לשאלת מחקר זו, הוגדרו שתי שאלות משנה: מהי המתודה

הדרושה לניתוח הסרטונים, בהסתמך על נתוני צפייה שונים בשילוב עם ניתוח דידקטי-מתמטי של הסרטונים? והאם ניתן להסיק מהניתוח האמור מסקנות יישומיות בקשר להפקת ועריכת סרטונים להוראת מתמטיקה?

מתודולוגיה

המחקר בוצע באמצעות בחינת סדרה של 19 סרטוני לימוד קצרים, המהווים חלק מסדרה בת 121 סרטונים העוסקים בהוראת מתמטיקה, והמקיפים מגוון נושאים המצויים בתוכנית לימודי המתמטיקה של כיתות ט'. מחקר זה התמקד במקבצי סרטונים העוסקים בנושא הייצוג הגרפי של הפונקציה הריבועית, מאחר ונושא זה משלב הן מיומנויות אלגבריות והן מיומנויות אינטגרטיביות, כגון מעברים בין ייצוגים אלגבריים לייצוגים גרפיים וויזואליים. 19 הסרטונים מקושרים לשש שאלות אינטגרטיביות בנושא, כאשר לכל שאלה קיים מקבץ סרטונים נפרד המשוייך לה. במסגרת המחקר נבחנו מגוון נתוני הצפייה של הסרטונים במהלך שלוש שנים, בשילוב עם ניתוח המבנה הדידקטי-מתמטי של הסרטונים, וזאת לצורך מענה על שאלת המחקר.

ממצאים מרכזיים ותרומת המחקר

המסקנות העולות מממצאי המחקר חולקו לשתי קטגוריות, בהתבסס על שתי שאלות המשנה לשאלת המחקר.

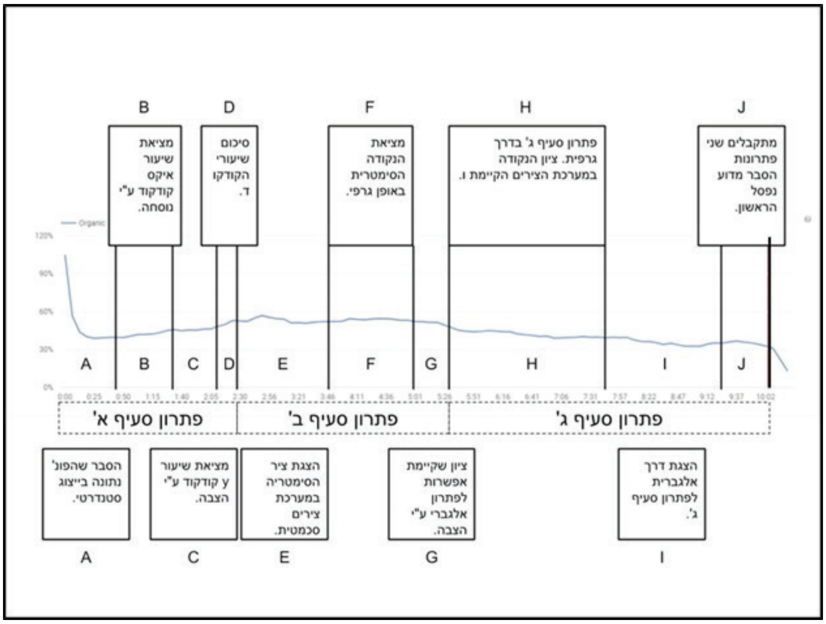
- מסקנות באשר למתודת הניתוח הנדרשת. אחד מתוצריו העיקריים של מחקר זה, הוא הגדרה ברורה של המתודולוגיה הנדרשת לצורך ניתוח מידת האפקטיביות של הסרטונים. מתודולוגיית הניתוח שפותחה במחקר כוללת בחינה של הסרטונים בשלושה מימדים עיקריים: המימד הראשון הוא ניתוח השאלה המתמטית נשוא מקבץ הסרטונים. המימד השני הוא ניתוח חיצוני של נתוני הצפייה הכוללים של הסרטונים במקבץ; הכלי המרכזי בו נעשה שימוש בניתוח זה הוא תרשים בועות, אשר מציג שלושה מדדי צפייה שונים (ראו כדוגמה את איור 1- תרשים בועות. כל בועה בתרשים מייצגת סרטון בודד, לכל מקבץ סרטונים צבע שונה ושלושת המדדים המוצגים הינם: משך הצפייה המנורמל בציר האופקי, ממוצע האחוז הנצפה בציר האנכי, ומדד זמן הצפייה הממוצע המיוצג באופן יחסי על ידי גודל הבועה).

המימד השלישי הוא ניתוח פנימי של תוכן הסרטון; ניתוח זה נערך באמצעות שילוב של חלוקת משך זמן

סרטון למקטעים בעלי מאפיינים עם הקשר מתמטי-דידקטי, יחד עם מדד שימור הצופים של הסרטון (ראו איור 2. התרשים מראה את חלוקת משך זמן הסרטון למקטעים בעלי מאפיינים עם הקשר מתמטי-דידקטי. כל מקטע זמן מכיל תיאור מילולי, ממוסגר, של המוטיב המתמטי-דידקטי של אותו מקטע. ייחודיות התרשים בכך שמעבר לחלוקה המדגישה את אופן הבניית ההסבר המתמטי בסרטון, משולב בו גם מדד שימור הצופים של הסרטון. שילוב מדד שימור הצופים בתרשים הנו מימד נוסף, המאפשר ראיה משולבת של אופן התקדמות ההסבר המתמטי בסרטון יחד עם מדד הצפייה נכון לאותו רגע).

- **מסקנות יישומיות בקשר להפקת סרטונים להוראת מתמטיקה.** מסקנות אלו, חולקו לשלושה תחומים עיקריים: מסקנות הקשורות למבנה הדידקטי-מתמטי של הסרטונים; מסקנות הקשורות למבנה של מקבץ סרטונים שנערכו ביחס לשאלה מסוימת; וכן מסקנות והבחנות בקשר למדדי הצפייה בסרטונים.

תרומתו העיקרית של המחקר בכך שממצאיו מובילים למסקנות הרלוונטיות לסרטוני לימוד תומכי הוראה, בכל תחום שהוא. בין מסקנות אלו נציין את חשיבות שילוב התזכורות הדידקטיות בתחילת הסרטון או במהלכו; חשיבות שילוב קטעי סיכום ומסקנות דידקטיים; וכן חשיבות שילוב נכון - בהיבט של מיקום ותוכן - של המחשות ויזואליות ודינמיות בסרטון.



איור 2 - דוגמא לתרשים ניתוח תוכן סרטון

בנוסף, מחקר זה ייחודי (ככל הידוע לכותבי המחקר) בכך שהוא מתמקד בחקר של מקבצי סרטונים. בספרות נכתב רבות על הצורך במיקוד וקיצור משך הסרטונים הלימודיים (Geri et al, 2017; Nicodemus et al, 2014), וכן על היתרון בחלוקת הנושאים הלימודיים למספר סרטונים קצרים במקום ריכוזם בסרטון אחד ארוך (Guo et al, 2014). חקירת מקבצי הסרטונים במחקר זה בחנה גם את היבט חלוקת נושא הלימוד עצמו למספר סרטונים נפרדים, ואת השלכת חלוקה זו על נתוני הצפייה של סרטוני המקבץ.

רשימת מקורות

Brecht, H. D. (2012). Learning from online video lectures. *Journal of Information Technology Education*, 11, 227-250.

Geri, N. (2012). The resonance factor: Probing the impact of video on student retention in distance learning. *Interdisciplinary Journal of E-Learning and Learning Objects*, 8(1), 1-13.

Geri, N., Winer A., and Zaks, B.)2017(. Probing the Effect of Interactivity in Online Video Lectures on the Attention Span of Students: A Learning Analytics Approach. In Y. Eshet-Alkalai, I. Blau, A. Caspi, N. Geri, Y. Kalman, V. Silber-Varod (Eds.), Proceedings of the 12th Chais Conference for the Study of Innovation and Learning Technologies: Learning in the Technological Era. Raanana: The Open University of Israel, pp. 38E-44E.

Guo, P. J., Kim, J., & Rubin, R. (2014, March). How video production affects student engagement: An empirical study of mooc videos. In *Proceedings of the first ACM conference on Learning@ scale conference* (pp. 41-50). ACM.

Hibbert, M. C. (2014). What Makes an Online Instructional Video Compelling? *Educause Review Online*.

Kim, J., Guo, P. J., Seaton, D. T., Mitros, P., Gajos, K. Z., & Miller, R. C. (2014, March). Understanding in-video dropouts and interaction peaks inonline lecture videos. *In Proceedings of the first ACM conference on Learning@ scale conference* (pp. 31-40). ACM.

Nicodemus, G., Falconer, J. L., Medlin, W., McDanel, K. P., de Grazia, J. L., Ferri, J. K., & Senra, M. (2014). Screencasts for enhancing chemical engineering education. ASEE Annual Conference and Exposition Proceedings.

Wieling, M. B., & Hofman, W. H. A. (2010). The impact of online video lecture recordings and automated feedback on student performance. *Computers & Education*, 54(4), 992

Yousef, A. M. F., Chatti, M. A., & Schroeder, U. (2014). The State of Video-Based Learning: A Review and Future Perspectives. *International Journal On Advances in Life Sciences*, 6(3/4), 122-135.998

Zhang, D., Zhou, L., Briggs, R. O., & Nunamaker, J. F. (2006). Instructional video in e-learning: Assessing the impact of interactive video on learning effectiveness. *Information & management*, 43(1), 15-27.

התפתחות הזהות של סטודנטיות ערביות בכניסתן למקצועות המתמטיקה והטכנולוגיה ברמה האוניברסיטאית

סורינה סבאח, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
עינת הד- מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

◆◆◆

למרות הקשיים והמכשולים הידועים בספרות, מעט ידוע על תהליכי השתלבותן של סטודנטיות ערביות במקצועות המתמטיים והמדעיים ברמה האוניברסיטאית (Arar & Haj-Yahia, 2016; Flum & Kaplan, 2016). מחקר זה מראה את תהליך שינוי הזהויות של שתי סטודנטיות ערביות בלימודי הנדסה בסמסטר הראשון שלהן בטכניון. סיפורן מהווה דוגמא לשני תהליכים שונים של השתלבות ראשונית בעולם האקדמיה.

רקע תיאורטי

לאור ההפרדה בין מערכות החינוך הערבית והיהודית, האוניברסיטה הינה לרב המקום הראשון שבו נפגשים ערבים ויהודים בפעם הראשונה. כתוצאה ממפגש זה, סטודנטים ערבים חווים קונפליקטים בין מעגלי זהות שונים (עראר, 2015). עבור נשים ערביות, לעתים קרובות לימודים אקדמיים הם הזדמנות ראשונה לעזוב את בית המשפחה ולהיחשף לתרבות המערבית החילונית, כתוצאה מכך, נשים ערביות נחשפות לערבוב אתני, לאומי ומגדרי אשר אינן רגילות לו בחברה שממנה באו, דבר שיכול להוות עבורן "הלם תרבותי" (Arar & Haj-Yahia, 2016).

במאמר זה נשתמש בעדשה תיאורטית סוציו-תרבותית על מנת להבין את הקשר בין המעברים התרבותיים של הסטודנטיות הערביות לבין התפתחות זהותן (Sfard & Prusak, 2005; Wenger, 1998). עדשה זו רואה בלמידה תהליך של כניסה והשתתפות בקהילת שיח מסוימת (Lave & Wenger, 1991; Sfard & Prusak, 2005) - קהילה אשר מאופיינת בערכים משותפים, צורות פעולה ותכונות מוסכמות. הולנד וחבריה (1998) הגדירו קהילות כאלו כ"עולמות דימויים" (figured worlds). עולמות בהם קיימים נרטיבים מוסכמים, פעולות ותוצאות מוערכות, ותפקידים מוגדרים. במקרה של סטודנטיות ערביות, עולם הדימויים של הבית (המשפחה והכפר) שונה מאוד מהעולם היהודי, הטכנולוגי והמערבי של האוניברסיטה.

הולנד ועמיתיה (1998) מצביעים על כך שהמרחב הסיפורי (Space of Authorship), שבו אנשים מעצבים את זהותם, הוא תמיד מרחב דיאלוגי, המכיל סיפורים שונים, לעתים קונפליקטואליים. אנו מקשרות את הרעיונות הללו עם הגדרת הזהות של ספרד ופרוסק (2005) כקבוצת סיפורים משמעותיים וניתנים לאימוץ על אדם מסוים. "המרחב הסיפורי", מבחינתנו, הוא תחום הסיפורים, הלקוח מתוך עולם דימויים מסוים, שממנו נוצרים סיפורי הזהות השונים. "פעלנות" (agency) הנה האפשרות הממומשת של אדם לפעול בעולמו (Holland et al., 1998, p.42) והיא נוצרת באמצעות תזמור של הקולות והפרקטיקות השונות לכדי מרחב סיפורי ייחודי לאדם. לאור זאת, במחקר הנוכחי אנו שואלות: כיצד זהותן של סטודנטיות ערביות מתפתחת בשלבים הראשונים של לימודי מתמטיקה באוניברסיטה, ובאיזה אופן סטודנטיות אלו מראות פעלנות ביחס לנרטיבים המצויים במרחב הסיפורי שלהן, הקשורים לאתניות ולמגדר?

מתודולוגיה

בדיווח זה נתמקד בשני חקרי-מקרה: מירה ולנא (שמות בדויים). מקרים אלו נלקחו ממחקר גדול יותר, שבו עקבנו אחר 13 סטודנטיות ערביות (גילאים 18-19.5 שנים) בסמסטר הראשון ללימודיהן בטכניון בפקולטות מדעי המחשב או הנדסת חשמל. פקולטות אלו נחשבות לפקולטות קשות יחסית ובעלות סף קבלה גבוה. הרציונל להתמקדות בפקולטות אלו נבע מנתונים פנים-מוסדיים המראים כי למרות שהסטודנטיות המתקבלות לפקולטות אלו הן בעלות

נתוני קבלה גבוהים (אין במוסד כל סוג של אפליה מתקנת), רבות מהן מתקשות לעמוד בדרישות הלימודיות במהלך הסמסטרים הראשונים.

ריאיונות חצי מובנים, באורך 30-90 דקות, נערכו עם הסטודנטיות בתחילת ובסוף הסמסטר בערבית (ע"י המחברת הראשונה). בנוסף, במהלך הסמסטר הסטודנטיות דיווחו על קורותיהן באמצעות שני ראיונות יומן מקוונים (באמצעות הדוא"ל).

הנתונים נותחו באמצעות שילוב קודים אינדוקטיביים ודדוקטיביים (Saldana, 2016). קידוד אינדוקטיבי נעשה על מנת לחפש נושאים חוזרים בראיונות של הסטודנטיות, בעוד קודים דדוקטיביים התבססו על האוריינטציה התיאורטית של עולמות דימויים, מרחבים סיפוריים, זהות, ופעלנות. הנרטיבים המרכזיים שעלו בראיונות ביחס לקונפליקטים בין העולמות הדימויים של הבית והטכניון התייחסו למוצא אתני, דת ומגדר. בתוך נושאים אלה חיפשנו נרטיבים סותרים אשר נכתבו או סופרו ע"י הסטודנטיות. ביחס לנרטיבים הקונפליקטואליים חיפשנו אינדיקציות לפעלנות הן במעשים (או בחסרונותיהם) המתוארים על ידי המרואיינות והן באופן שבו הן דיברו על הקונפליקט (כמצב נתון או כמשהו שניתן לעבוד עליו).

ממצאים מרכזיים

התמקדנו בדיווח זה במקרים של מירא ולנא, משום שהן מדגימות מסלולי הסתגלות שונים ביחס לעולם הדימויים הטכניוני.

מירא הנה דור ראשון להשכלה אקדמית. היא מגיעה מכפר ערבי מוסלמי. לפי דיווחיה, עד שהגיעה לטכניון לא הייתה לה שום אינטראקציה עם אנשים ששונים ממנה. הקונפליקט העיקרי שמירא ביטאה מתוך המרחב הסיפורי שלה במהלך הסמסטר הראשון היה קונפליקט סביב שייכות אתנית ודתית. קונפליקט זה התבטא בנרטיבים של "אני כערביה" ו"אני כמוסלמית" לעומת פעולות מוערכות בעולם הטכניון, למשל, יציאה עם חברים לבילויים. במהלך הסמסטר חל שינוי מסוים באופן שבו מירא הביעה קבלה של סטודנטים מדתות ומוצאים אתניים שונים. בסיפוריה של מירא מופיעות אינדיקציות עקביות לפעלנות, לרב בבחירה לדבוק בערכי עולם הבית, אך תוך כדי המנעות מעימות ("אני מעדיפה להשאר בצד" או "אני עושה מה שטוב לי והם עושים מה שטוב להם"). סביב הזהות המתמטית, מירא החלה את הסמסטר בפקפוק לגבי יכולותיה המתמטיות וציינה שהיא לא אוהבת מתמטיקה. במהלך הסמסטר, מירא דיווחה על עניין מתגבר ב"אינפי" (חשבון אינפיניטסימלי 1) ובסוף הסמסטר, עמדה בדרישות המבחנים לשביעות רצונה, לאחר שהתגברה על כישלון במועד המבחן הראשון. דיווחיה על התמודדותה עם הקשיים במתמטיקה גם הם היו רוויי פעלנות.

לעומתה לנא, ערביה מוסלמית אף היא, היא בת להורים אקדמיים, והגיעה לטכניון מלווה, לדבריה, בציפיות גבוהות מאוד מצד המשפחה והקהילה של עולם הבית. לנא לא הזכירה בראיונות עמה קונפליקטים אתניים או דתיים כלל וכשנשאלה ישירות עליהם, ביטלה אותם כלא רלוונטיים עבורה. הקונפליקט העיקרי עליו לנא דיברה היה הקונפליקט המגדרי וביחס אליו הפעלנות שלה הייתה מינימלית. למן ההתחלה, היא אימצה את הנרטיב ש"לבנים יש יותר בטחון עצמי מאשר בנות". עם התקדמות הסמסטר המרחב הסיפורי שלה כלל אזכורים הולכים וגוברים לעליונות גברים על נשים במתמטיקה. כך למרות שלנא החלה את הסמסטר כאשר היא מספרת על עצמה כמצטיינת במתמטיקה, במהלך הסמסטר היא סיפרה יותר ויותר על קשיים, וכן נכשלה במבחני סוף הסמסטר בחשבון אינפיניטסימלי. חוסר הפעלנות של לנא ביחס לקשייה התבטא בכך שהיא דיברה בדיעבד על החלטות שגויות שעשתה במהלך הסמסטר (כגון הסתגרות ואי בקשת עזרה), אך אף פעם לא דיברה על שינוי פעולותיה ביחס לקשייה והתמידה לייחס אותם למימדים פסיכולוגיים הקשורים במגדר שלה (בטחון עצמי, אמונה בעצמי) ואשר אינם בשליטתה.

דיון

המקרים של מירא ולנא העניקו לנו הזדמנות להציג ולהשוות תהליכים שונים של שינוי בסיפורי זהות בכניסה של סטודנטיות ערביות לעולם האוניברסיטאי. כניסה זו כרוכה במעבר לעולם דימויים שונה מהעולם אותו חוו

הסטודנטיות בילדותן, ושני המקרים מציגים דרכים שונות שבהם שינויים בזהות כרוכים ב"פעלנות" מול נרטיבים במרחב הסיפורי. בזהירות, נאמר כי המקרים של מירא ולנא מרמזים כי ייתכן שפעלנות הנה היבט מכריע של הסתגלות אקדמית, במיוחד במקרים בהם עולמות הדימויים של הבית ושל האקדמיה שונים ואף קונפליקטואליים. פעלנות מתאפשרת כאשר החלופות ברורות וגלויות לעין, Holland et al., 1998; Solomon, Radovic & Black, 2016). ייתכן כי עבור סטודנטיות ערביות, קיימת לפיכך חשיבות רבה למודעות לקונפליקט החברתי והאתני שבו הן נתקלות בעת כניסתן לעולם נרקם שונה.

מקורות

עראר, ח. (2015). עיצוב הזהות החברתית והלאומית של הסטודנטים הערבים במרחב האקדמי בישראל. **זיהוי, נרטיב ורב-תרבות בחינוך הערבי בישראל**, (April, 301-334).

Arar, K., & Haj-Yahia, K. (2016). *Higher education and the Palestinian Arab minority in israel*.

Flum, H., & Kaplan, A. (2016). Higher education in a transforming society: The case of Arabs in Israel. *International Journal of Educational Research*, 76, 89–95.

Holland, D., Lachicotte, W., Skinner, D., & Cain, C. (1998). *Identity and agency in cultural worlds*. Cambridge: Harvard University Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate peripheral participation. *New York: Cambridge University Press*.

Saldana, J. (2016). *The Coding Manual for Qualitative Researchers* (3rd ed.). London: Sage.

Solomon, Y., Radovic, D., & Black, L. (2016). "I can actually be very feminine here": contradiction and hybridity in becoming a female mathematician. *Educational Studies in Mathematics, 91*(1), 55–71.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher, 34*(4), 14–22.

Wenger, E. (1998). Communities of practice: learning, meaning and identity. Cambridge: *Cambridge University Press*.

שיח מבוסס צילום עצמי בוידאו ככלי להתפתחות מקצועית של מדריכים למתמטיקה

רותי סגל, מכון ויצמן למדע, מכללת שאנן
ירון להבי, מכון ויצמן למדע, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד-ילין
אבי מרזל, האוניברסיטה העברית ירושלים
עמי ברעם, מכון ויצמן למדע
בת שבע איילון, מכון ויצמן למדע

◆◆◆

מבוא

שימוש בוידאו לפיתוח מקצועי של המורים

במהלך העשורים האחרונים, קיימת הסכמה רחבה כי תיעוד וידאו מהכתה מהווה כלי שימושי להתפתחות מקצועית של מורים כאשר הבחירות במה להתמקד ובאלו שיטות לנקוט השתנו במהלך השנים (Sherin, 2004; Santagata and Guarino 2011; Blomberg, Sherin, Renkl, Glogger & Seidel, 2014)

תצפית מבוססת וידאו מאפשרת את פיתוח היכולת הרפלקטיבית ביחס לאירועי הכיתה - אחת המטרות העיקריות של תהליך ההתפתחות של מורים (Borko et al., 2008; Sherin & Van Es, 2009). לפיכך, בדרך כלל, מעודדים מורים לצפות בסרטוני ההוראה שלהם או באלה של אחרים (Borko, et al., 2008 Sherin & Han, 2004; Rosaen, Schram, & Herbel-Eisenmann, 2002). נמצא כי בהשוואה לניתוח קטעי וידאו של מורים אחרים, מורים שניתחו את ההוראה שלהם חוו פעילות משמעותית יותר, שבין היתר סייעה להם להיות מודעים יותר למרכיבים הרלוונטיים של ההוראה והלמידה (Seidel et al., 2011). השימוש בווידאו מסייע למורים להתמקד בראייה וניתוח של ההוראה שלהם מנקודת מבט חדשה, לסמוך על המשוב שקיבלו ולשנות בהתאם את מיומנויותיהם (Tripp & Rich, 2012). בנוסף, מובילי רפורמות חינוכיות תומכים במעורבות המורים בתצפיות בעמיתים ובמתן משוב ותמיכה (Vescio, Ross, & Adams, 2008), משום שהדבר מזמן יישום משופר ובר-קיימא של הרפורמה (Coburn, Mata, & Choi, 2013, Frank, Zhao & Borman, 2004). יחד עם זאת מובילים של תכניות להתפתחות מקצועית של מורים מבוססות תצפית וידאו צריכים להיות מודעים לכך ש:

"Video alone does not define a lesson, it must be embedded within an instructional approach in order to foster teacher learning" (Blomberg et al., 2014, p.458).

פרויקט "וידקטיקה" VBD (Video-Based Didactics) עקרונות ושיטות עבודה

הפרויקט עוסק בגישה לפיתוח יכולת ההנחיה של שיח דידקטי סקרני-חקרני ולא שיפוטי בין עמיתים (מורים ומדריכים למתמטיקה ופיסיקה) המבוסס על תיעוד ווידיאו של המורים מכתותיהם (שיח-VBD). הגישה מבוססת על ההנחה שפרטיות המורים ועצמאותם הם גורמים חשובים וכי למרות העובדה שווידאו מספק הזדמנות מצוינת להשגת הפיתוח המקצועי של המורים, לא כולם מרגישים בנוח עם חשיפה כזו (Sherin & Han, 2004).

שיח ה-VBD מבוסס על שמונה עקרונות, ביניהם: 1.**שימש בראיות** המבוססות על התצפית; 2. **בעלות** - המורים משתמשים במכשירי הצילום שלהם (בדרך כלל הטלפון שלהם) לצורך תיעוד ההוראה שלהם. הסרטון הוא בעלותם ומיועד לשימושם האישי; 3. **אוטונומיה** - המורים חופשיים לבחור את קטע הוידאו (5-7 דקות) שעליו יתבסס השיח; 4. **חלוקת תפקידים מוגדרת** - בכל שיח-VBD המורה שמציג את תיעוד הוידאו מכתתו הוא המונחה ובן-שיחו הוא המנחה והם עשויים להחליף ביניהם את התפקידים; 5. **התמקדות בחקר** - המנחה והמונחה מאמצים עין סקרנית בבואם לבחון את הקטע המצולם ואת הנושאים שיידונו במהלך השיח.

מסגרת תיאורטית

ההתפתחות המקצועית של מורים כרוכה בין היתר בעליה ברמות המודעות ביחס לתהליכי הוראה שלהם. במחקר הנוכחי אומץ כבסיס המודל שהוצע ע"י Mason (1998) לרמות שונות של מודעות הנדרשות ממורים למתמטיקה:

1. **מודעות בפעולה** - Awareness in action: מודעות ליכולת לבחור, להבחין, להבדיל, לזהות קווי דמיון, לזהות הכללות, לראות משהו כדוגמה למשהו אחר, להתחבר, להתאים, לדמיין ועוד.
2. **מודעות בתחום הדעת** - Awareness in discipline (ידע על מודעות לפעולה): מודעות ליכולת לבחון כיצד המורה מבצע את הפעולות שהוזכרו ברמה הקודמת, תוך התייחסות לתחום הדעת.
3. **מודעות בעצה** - Awareness in counsel (ידע על מודעות בתחום הדעת): מודעות עצמית ורגישות לצורכיהם של אחרים, על מנת לבנות את המודעות שלהם בפעולה ובתחום הדעת.

המודל פותח והותאם לצורך אפיון תרומת ה-VBD לפיתוח המקצועי של שתי מדריכות למתמטיקה.

מתודולוגיה

שאלות המחקר

1. **מהי התרומה של שיח מבוסס וידאו להתפתחות המקצועית של מדריכים למתמטיקה?**
2. **מהם המאפיינים של שיח מבוסס וידאו אפקטיבי?**

כדי לענות על שאלות אלה, אימצנו את הגדרתה של Chapman (2017) , לשיח אפקטיבי המבוסס על וידאו, כמייצר תובנות חדשות של רעיונות הוראה חדשים, מחזק את המודעות לגבי תהליך ההוראה-למידה, ויוצר אירועים קריטיים ונקודות מפנה (turning points) משמעותיות (Chapman, 2017).

במסגרת הנוכחית נתייחס לשאלה הראשונה בלבד.

אוכלוסיית המחקר

שתי מדריכות מחוזיות למתמטיקה (נלה ואירה), המובילות את ההדרכה באחד המחוזות בארץ. שתיהן השתתפו במהלך קיץ 2017 בתוכנית ייחודית להכשרה להנחית שיח - VBD.

שיטת המחקר, כלי המחקר וניתוח הנתונים

המחקר נערך בהתאם לפרדיגמת המחקר האיכותני.

כלי המחקר כללו: (1) קטעי וידאו קצרים משני שיעורי מתמטיקה של המדריכות בכיתותיהן; (2) שיח-VBD עם כל אחת מהמדריכות בהנחיית אחד מחברי צוות הפרויקט; (3) ראיונות עם שתי המדריכות לאחר שיח ה-VBD; (4) שאלון שהוגש למדריכות.

קטעי הוידאו משיעורי מתמטיקה של שתי המדריכות, הראיונות ושיחות ה-VBD בעקבותיהם הוקלטו ותומללו. כל חבר בצוות המחקר שלנו ניתח באופן עצמאי את הממצאים וניסה לזהות את נקודות המפנה ואת המעבר בין הרמות השונות של המודעות על פי המודל שפותח. לאחר מכן הושוו התוצאות בין היתר לצורך גיבוש ותיקוף הממצאים.

ממצאים

נמצא כי שיח ה-VBD הוביל את כל אחת משתי המדריכות לנקודות מפנה שעוררו עליה ברמות המודעות שלהן הן כמורות והן כמדריכות למתמטיקה. להלן תוצאות הניתוח המשותף של קטע משיעור גיאומטריה של נלה ודוגמאות שעלו במהלך השיח עמה על השיעור:

מודעות לפעולה כמורה למתמטיקה (Awareness in action): מודעות לחשיבות של הצגת פתרון משימה בדרכים שונות, מודעות למגוון של בניות עזר שניתן לשלב במשימה גיאומטרית מסוימת, מודעות לקשיי התלמידים בבניית עזר בגיאומטריה ומודעות לרעיונות מגוונים של תלמידים.

מודעות לפעולה כמדריכה למתמטיקה (Awareness in action): "אני חושבת על התהליכים שעברו המדריכים לקראת הדרכת מורים למתמטיקה, ואני מבינה שזה לא מספיק". מודעות לעוצמה שבהתבוננות חוזרת ונשנית בשיעור של מורה מודרך המבוסס על וידאו בהשוואה לתצפית ללא תיעוד: " לדעתי, על ידי התבוננות בכיתה ללא תיעוד בוידאו, לא ניתן להגיע לתובנות עמוקות כאלה". מודעות לפוטנציאל לפתח הדרכה אפקטיבית כמו למשל לראות משהו כדוגמה למשהו אחר: "המצב שהתרחש בכיתה שלי הוא למעשה דוגמה כללית יותר קשיי התלמידים שמדריכים למתמטיקה צריכים להיות מודעים להם".

מודעות לעצה כמדריכה למתמטיקה (Awareness in counsel): הכרה כמדריכה בחשיבות השימוש המושכל בשיח VBD ככלי הדרכה לשיפור ההתפתחות המקצועית של מורים ומדריכים למתמטיקה "למדתי משיח ה-VBD לשאול את המורים, והמדריכים את השאלה הבאה: האם מה שקרה בכיתה מאפיין את השיעורים שלך?".

סיכום

במחקר הנוכחי, הוצגו חלק מהראיות לפיתוח מקצועי של שתי מדריכות למתמטיקה במהלך שיח VBD אפקטיבי. השתתפותן בתכנית ייחודית למדריכים בנושא שילוב שיח VBD בהדרכה, עוררה והגבירה רמות שונות של מודעות שלהן, כמורות וכמדריכות למתמטיקה. ממצאי המחקר מצביעים על כך ששיח VBD מהווה כלי חיוני ומשמעותי התורם להתפתחות מקצועית של מורים ומדריכים למתמטיקה.

מקורות

Blomberg, G., Sherin, M. G., Renkl, A., Glogger, I., & Seidel, T. (2014). Understanding video as a tool for teacher education: investigating instructional strategies to promote reflection. *Instructional Science, 42*(3), 443-463.

Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., & Pittman, M. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education*, 24, 417-436.

Chapman, Olive (2017). Mathematics Teachers' Perspectives of Turning Points in Their Teaching. In: Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., & Choy, B.H. (Eds.). (2017). Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, 45-60). Singapore: PME.

Coburn, C. E., Mata, W. S., & Choi, L. (2013). The embeddedness of teachers' social networks: Evidence from a study of mathematics reform. *Sociology of Education, 86*(4), 311-342.

Frank, K. A., Zhao, Y., & Borman, K. (2004). Social capital and the diffusion of innovations within organizations: The case of computer technology in schools. *Sociology of Education, 77*(2), 148-171.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. Journal of Mathematics *Teacher Education, 1*(3), 243-267.

Santagata, R., & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. ZDM the International Journal of Mathematics Education, 43, 133–145. doi:10.1007/s11858-010-0292-3.

Seidel, T., Stürmer, K., Blomberg, G., Kobarg, M. & Schwindt, K. (2011). Teacher learning from analysis of videotaped classroom situations: Does it make a difference whether teachers observe their own teaching or that of others? *Teaching and Teacher Education, 27*(2), 259-267.

Sherin, M. G., & Han, S. Y. (2004). Teacher learning in the context of a video club. Teaching and Teacher education, 20(2), 163-183.

Sherin, M. G. (2004). New perspectives on the role of video in teacher education. In J. Brophy (Ed.),Using video in teacher education (pp. 1-28). Amsterdam, Netherlands: Elsevier.

Sherin, M. G., & van Es, E. (2009). Effects of video club participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education, 60*, 20-37

Rosaen, C. L., Schram, P., & Herbel-Eisenmann, B. (2002). Using hypermedia technology to explore connections among mathematics, language, and literacy in teacher education. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 2(3), 297-326.

Tripp, T. R. & Rich, P. J. (2012). The influence of video analysis on the process of teacher change. *Teaching and Teacher Education, 28*(5), 728-739.

Vescio, V., Ross, D., & Adams, A. (2008). A review of research on the impact of professional learning communities on teaching practice and student learning. *Teaching and teacher education, 24*(1), 80-91.

סגנון חשיבה אנליטי-ויזואלי של תלמידים והשפעתו על מאפייני תהליכי המודלינג שלהם

ג'והיינה עוואודה-שחברי, אקדמיית אלקאסמי ומכללת סכנין
ראניה סלאמה, אקדמיית אלקאסמי

הקדמה ורקע תיאורטי

סגנון חשיבה איננו משקף את יכולותיו של האינדיבידואל, אלא את הדרך המועדפת עליו לשימוש ביכולותיו. סגנון חשיבה מתמטית מלמד על האופן שבו היחיד מעדיף ללמוד מתמטיקה, ועל הדרכים המועדפות עליו, בעת התמודדות עם משימות מתמטיות (Sternberg, 1997). על כן, חשוב מאוד שתהיה למורים מודעות לסגנונות החשיבה השונים, לשם קביעת ההתערבות החינוכית המתאימה, בעת התמודדות התלמידים עם פתרון בעיות, ובמיוחד כאשר תלמידים מתמודדים בפעילויות מודלינג. מעט מאוד מחקרים הדגישו את תהליכי המודלינג של תלמידים בעלי סגנונות חשיבה שונים. המחקר הנוכחי ינסה לבדוק השפעת סגנון החשיבה אנליטי-ויזואלי של תלמידים על מאפייני תהליכי המודלינג שלהם.

ברומו פירי וקייזר (Borromo-Ferri & Kaiser, 2003) דיווחו על שלושה סגנונות חשיבה שונים: הוויזואלי, האנליטי והמשולב. במחקר הנוכחי, התמקדנו בשני הסוגים הראשונים. תלמידים בעלי חשיבה וויזואלית מראים העדפות לדמיון ציורי פנימי ולייצוגים ציוריים חיצוניים. כמו כן, להעדפות להבנת עובדות מתמטיות וקשרים באמצעות ייצוגים הוליסטיים. תלמידים בעלי סגנון חשיבה מראים העדפות לדמיון פורמלי פנימי ולייצוגים פורמליים חיצוניים. הם מעדיפים להבין עובדות מתמטיות באמצעות ייצוגים סמבוליים או מילוליים (Monga & John, 2007).

גישת המודלינג מדגישה את תפקיד המתמטיקה בחיי היום-יום, ומציעה פעילויות מודלינג הכוללות מידע חלקי ולא ברור לגבי סיטואציה מציאותית. המתמודדים צריכים לתת מענה לסיטואציה תוך שימוש בידע המתמטי שלהם, בזמן עבודה בקבוצות קטנות (English & Watters, 2005). תהליך המודלינג מתאר התמודדות בפעילויות מודלינג, אשר מובילה לבניית מודלים מתמטיים דרך מחזורים איטרטיביים (Lesh & Doerr, 2003). בלום וליב (Blum & Leib, 2005) הציעו תיאור ויזואלי לניתוח קוגניטיבי של תהליך המודלינג, הנקרא מעגל המודלינג, שכולל שלבים ופעולות. השלבים: מודל מציאותי, מודל מתמטי, תוצאות מתמטיות, תוצאות ריאליסטיות. הפעולות: הבנה ופישוט של הסיטואציה, עבודה מתמטית לבניית מודל מתמטי, יישום המודל המתמטי, תרגום התוצאות המתמטיות בהקשר למציאות והערכה של תוצאות.

שאלת המחקר

האם קבוצות של תלמידים בעלי סגנונות חשיבה שונים (ויזואלית או אנליטית) נבדלים ביניהם בתהליכי המודלינג שלהם, במהלך עבודתם ברצף של פעילויות מודלינג, ואם כן - כיצד?

שיטה

בשלב הראשון השתתפו 35 תלמידי כיתה ח', ובשלב השני נבחרו 10 תלמידים. התלמידים ענו על שאלון לזיהוי סגנון החשיבה שלהם. השאלון הורכב מבעיות שנלקחו מהספרות המחקרית, המאפשרות פתרון ויזואלי וסימבולי. תשובות התלמידים נותחו בהתאם לקטגוריות של ברומו פירי וקייזר (Borromo-Ferri & Kaiser, 2003). על פי תשובות התלמידים, הם סווגו מחדש לשלוש קבוצות חשיבה: אנליטיים (14 תלמידים), ויזואליים (11 תלמידים) וקבוצות חשיבה משולבת (10 תלמידים). כפי שצוין, אנו התמקדנו בסגנון החשיבה האנליטי והוויזואלי, ולכן חילקנו את התלמידים לשתי קבוצות. עבור כל קבוצה בחרנו חמישה תלמידים (סה"כ 10 משתתפים), וזאת בסיוע המורה

למתמטיקה שלהם, כדי למקסם את משתני ההתאמה (למשל: מגדר, יכולות מתמטיות, מצב סוציו-אקונומי). שתי הקבוצות (האנליטית והוויזואלית) התמודדו עם שלוש פעילויות מודלינג במשך שלושה שבועות, פעילות אחת בשבוע. התלמידים תועדו במצלמת וידיאו, וההקלטות תומללו מילה במילה. לשם ניתוח הנתונים, השתמשנו בשיטת ההשוואה המתמדת (Glaser & Strauss, 1967), תוך התחשבות בהיבט הקוגניטיבי של תהליכי המודלינג (שלבים ופעולות) של בלום וליב (Blum & Leib, 2005). השלבים והפעולות שעברו התלמידים זוהו, ותהליכי המודלינג תוארו באופן ויזואלי, בהתבסס על מעגל המודלינג של בלום וליב (Blum & Leib, 2005).

ממצאים

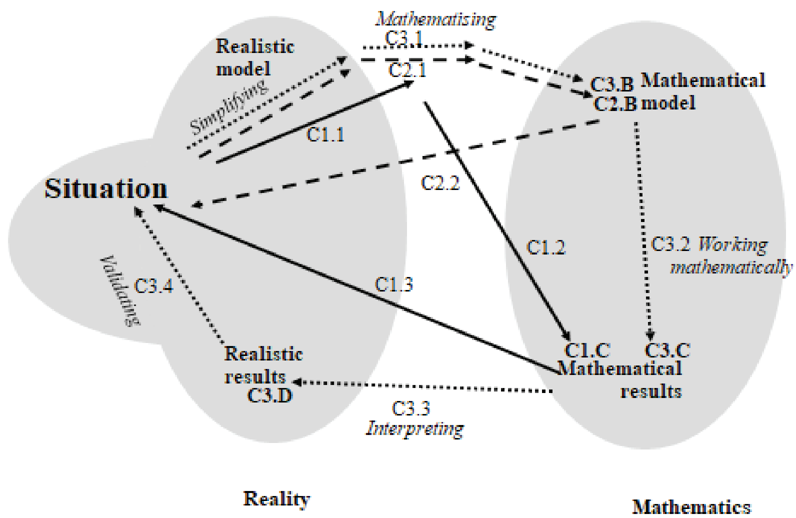
ניתוח תהליכי המודלינג (פעולות ושלבים) מצביע על כך שלכל קבוצה היו מאפיינים דומים בכל אחת משלוש הפעילויות, אך נצפה גם שוני בין שתי הקבוצות. השוני המרכזי היה בפעולת הפישוט ובשלב המודל המציאותי. בקבוצה האנליטית, פעולה זו ושלב זה לא זוהו כלל באף אחת משלוש הפעילויות. הקבוצה האנליטית התחילה בפעולת המתמטיזציה אחרי קריאת הפעילות, ולא הוצג בה מודל מציאותי. לעומת זאת, בקבוצה הוויזואלית ניסו התלמידים לתת הסברים לסיטואציה, תוך שימוש בציורים ובהדגמות. שוני נוסף שזוהה בין שתי הקבוצות היה בפעולת המתמטיזציה, ובשלב המודל המתמטי. בטבלה 1 מוצג השוני בין הקבוצות, בליווי דוגמאות משיח התלמידים.

טבלה1: השוני בהליכי המודלינג בין הקבוצה הוויזואלית לקבוצה האנליטית

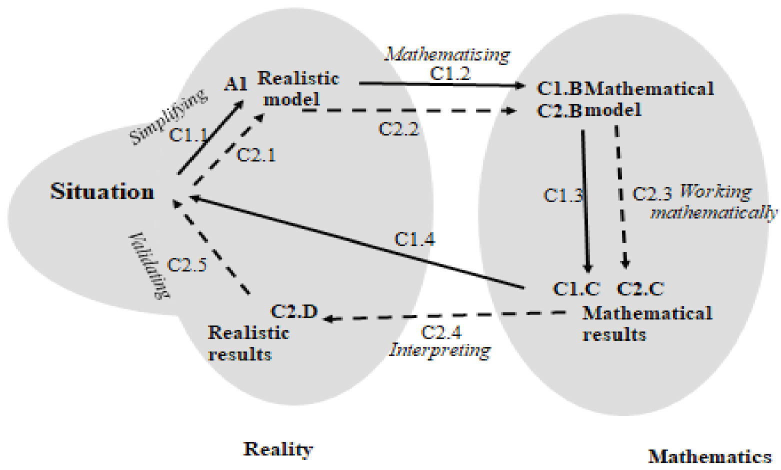
<table>
<tr><th>פעולה \ שלב</th><th>קבוצה ויזואלית</th><th>קבוצה אנליטית</th></tr>
<tr><td>מתמטיזציה</td><td>פעולת המתמטיזציה התאפיינה בשימוש בטבלאות ובלוחות.

[10] תלמיד 3: נבנה טבלה.
[16] תלמיד 3: הנעליים שלך באורך 26 והגובה שלך 160 (בנה טבלה ורשם את הנתונים בתוך הטבלה)
<table>
<tr><th>אורך הנעליים</th><th>גובה התלמיד</th></tr>
<tr><td>26</td><td>160</td></tr>
<tr><td>30</td><td>163</td></tr>
<tr><td>28</td><td>146</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>תהליך המתמטיזציה התאפיין בחיפוש אחרי נוסחה.
[9] תלמיד 4: היחס בין האורך והרוחב... האורך 32 והרוחב 12 (אורך ורוחב הנעליים שלהם).
[11] תלמיד 2: אנחנו צריכים לפשט את היחס 32:12.</td></tr>
<tr><td>המודל המתמטי</td><td>המודל המתמטי הוצג תוך שימוש בטבלאות ובלוחות. לדוגמה:
<table>
<tr><th>היחס</th><th>אורך נעליים</th><th>גובה התלמיד</th></tr>
<tr><td>5.51</td><td>29</td><td>160</td></tr>
<tr><td>5.43</td><td>30</td><td>163</td></tr>
<tr><td>5.53</td><td>28</td><td>155</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5.36</td><td>5.29</td><td>X</td></tr>
</table></td><td>המודל המתמטי הוצג תוך שימוש בנוסחה. לדוגמה:
גובה הענק = אורך הנעליים x 5</td></tr>
</table>

ניתוח מעמיק של תהליכי המודלינג בשתי הקבוצות ובשלוש הפעילויות, ותיאור ויזואלי שלהם, מצביעים על הבדל נוסף בין שתי הקבוצות. יחסית לקבוצה הוויזואלית, הקבוצה האנליטית עברה יותר מעגלי מודלינג, עד להגעה למודל הסופי. נוסף על כך, בקבוצה האנליטית נצפו דילוגים על שלבי מודלינג, יותר מאשר בקבוצה הוויזואלית. בקבוצה האנליטית זוהו שלושה מעגלי מודלינג בכל אחת משלוש הפעילויות, בעוד שבקבוצה הוויזואלית זוהו רק שני מעגלי מודלינג בכל אחת מהפעילויות. ממגבלת המקום, מודגם תהליך המודלינג של שתי הקבוצות, במהלך התמודדות התלמידים עם פעילות אחת - פעילות הנעליים של בלום וברומו פירי (Blum & Borromeo-Ferri, 2009). הקבוצה האנליטית מתוארת באיור 1, והקבוצה הוויזואלית מתוארת באיור 2 (האות C מייצגת את המילה cycle, והמספרים מצביעים על מספר המעגל).



איור 1: מסלול המודלינג של הקבוצה האנליטית בפעילות הנעליים



איור 2: מסלול המודלינג של הקבוצה הוויזואלית בפעילות הנעליים

שני האיורים, 1 ו־2, מראים שתהליכי המודלינג בקבוצה הוויזואלית היו יותר עקביים בין השלבים והפעילויות, בעוד שבקבוצה האנליטית היו יותר דילוגים.

דיון

ממצאי המחקר מעידים על כך שבשתי הקבוצות היו מאפייני התמודדות דומים בשלוש הפעילויות, אך נמצא גם שוני בין שתי הקבוצות. בכל פעילות, תלמידי הקבוצה האנליטית העדיפו לתרגם את הסיטואציה למונחים תוך שימוש במתמטיקה. הם חיפשו אחר נוסחאות, ולא העדיפו לייצג את הסיטואציה במודל מציאותי, כלומר: תהליך הפישוט נקשר עם תהליך המתמטיזציה, והקישור עם הסיטואציה נעשה פורמלי. לעומת זאת, תהליך הפישוט בקבוצה הוויזואלית התאפיין בשימוש באיורים ובציורים, כלומר: התלמידים הוויזואליים חשבו יותר במונחים של העולם האמתי, ולא בפתרונות פורמליים. ממצאים אלה מצביעים על כך שתלמידים שסגנון חשיבתם ויזואלי נוטים יותר לקשר בין המתמטיקה לעולם האמתי.

לבסוף, התלמידים בשתי הקבוצות עברו תהליך מודלינג שונה, אבל המודלים שהתקבלו בסוף היו דומים זה לזה. לכן יש חשיבות למודעות המורים לסגנונות החשיבה של תלמידיהם לצורך עיצוב התערבויות יעילות. אנו ממליצות להרחיב את המחקר הנוכחי ולבדוק במדגם גדול יותר.

מקורות

Blum, W., & Leiß, D. (2005). "Filling Up"-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 1623-1633). Sant Feliu de Guíxols, Spain: Fundemi Iqs, Universitat Ramon Llull.

Borromeo-Ferri, R., & Kaiser, G. (2003). First Results of a Study of Different Mathematical Thinking Styles of Schoolchildren. In Leone Burton (Ed.) *Which Way in Social Justice in Mathematics Education?* (pp. 209-239). London: Greenwood.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics education research journal, 16*(3), 58-79.

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). Foundations of models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Monga, A. & John, D.)2007). *Cultural differences in brand extension evaluation: the influence of analytic versus holistic thinking*. *Journal of consumer research, 33*(4), 529- 536.

Sternberg, R. J. (1997). *Thinking styles*. New York: Cambridge University Press.

התפשטות רעיונות מתמטיים במליאה וצמיחת פרקטיקות מתמטיות כיתתיות בשיח טיעוני ובניצוח המורה

עפרה עפרי, אוניברסיטת תל אביב
מיכל טבח, אוניברסיטת תל אביב

◆◆◆

מבוא

הוראה ולמידה של רעיונות מתמטיים עשויות להתרחש בשיח טיעוני במליאת הכיתה בניצוחו של המורה. מכאן, עולה השאלה: כיצד מתפשטים רעיונות מתמטיים וכיצד צומחות פרקטיקות מתמטיות המשותפות לכיתה? במאמר זה יוצג חלק ממחקר רחב יותר העוקב אחר התפשטות של רעיונות מתמטיים במגוון של סביבות למידה. שתי השאלות שתענינה במאמר, הן: מהם המאפיינים של התפשטות רעיונות מתמטיים במליאה ושל צמיחת פרקטיקות מתמטיות של הכיתה? מהו תפקיד המורה בתהליך זה?

רקע תיאורטי

ההשקפה הסוציו-תרבותית רואה את הפרקטיקות המתמטיות הנורמטיביות, והמשמעויות המקובלות בקהילת הכיתה, כנבנות בתהליך מתמשך של אינטראקציה בין התלמידים והמורה. השקפה זו אינה מנסה להגדיר את המכניזם הקוגניטיבי של התלמיד, אלא להתייחס להתפתחות האיכותית של הסקת המסקנות במובן של ארגון מחדש של הפעילות ושל העולם בו הלומדים פועלים (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001).
במחקר זה יושמה גישה מתודולוגית תלת-שלבית לתיעוד פעילות קולקטיבית - Documenting Collective) DCA Activity, Rasmussen & Stephan, 2008), המגדירה את הפעילות הקולקטיבית כתופעה חברתית, שבאמצעותה רעיונות מתמטיים הופכים להיות נורמטיביים ומבוססים בקהילת הכיתה, באמצעות אינטראקציה בין הלומדים; ככל שהם מציגים את רעיונותיהם, מסבירים את חשיבתם, פותרים רעיונות ועוד. הפעילות הקולקטיבית בהקשר החברתי של הכיתה מזמנת לתלמידים הזדמנויות לצמיחה רעיונית. מוקד גישה זאת הוא האופן בו **רעיונות מתמטיים** 'מתפקדים כמו-היו-משותפים' - FAIS ('function-as-if-shared'), בתהליך טיעוני של הסקת מסקנות באמצעות שפה, כלים, סמלים ומחוות. תהליך זה מזוהה מחקרית בעזרת מודל הטיעון של טולמין (Toulmin, 1969), בהנחה כי קיימת שונות בדרכים בהן רעיונות מתמטיים אלה נתפשים על ידי יחידים בכיתה. **פרקטיקה מתמטית** מוגדרת בגישה זו כאוסף של רעיונות מתמטיים ה'מתפקדים כמו-היו-משותפים', כלומר, רעיונות אלו הם הדרכים הנורמטיביות להסקת מסקנות (Normative Ways of Reasoning- NWR) המוכלות בנושא מתמטי כללי יותר (Rasmussen & Stephan, 2008).

מטרות המחקר

1. לאפיין את התפשטות הרעיונות המתמטיים במליאה ואת צמיחת הפרקטיקות המתמטיות של הכיתה בה מתקיים שיח טיעוני.
2. לאפיין את מהלכי המורה המובילים להתפשטות רעיונות מתמטיים ולצמיחת פרקטיקות מתמטיות בכיתה.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר כללה 30 תלמידים בכיתה ט' הלומדים במסלול של 4-5 יחידות לבגרות. תשעה שיעורים ראשונים מתוך 20 שיעורים בנושא 'פונקציה ריבועית' תועדו ונותחו. כלי המחקר כללו צילומי וידאו של דיוני המליאה והקלטה קולית במקביל של שני זוגות תלמידים, שעבדו עם "עט חכם". ניתוח הנתונים נערך במתודולוגיה איכותנית.

ניתוח השיח המתמטי בדיוני הכיתה בוצע בעזרת מתודולוגית DCA (Documenting Collective Activity) בשלושה שלבים. בשלב הראשון - בניית יומן טיעונים שנצפו בדיוני המליאה (argumentation-log), בתמלילים אותרו מרכיבי הטיעון על פי המודל של טולמין (Toulmin, 1969): נתונים, טענה, הצדקה, תימוכין, התנגדות וסייג. לשלב זה נוסף מיון של כל טיעון לשלוש רמות: בסיסית - הטיעון מכיל "נתונים" ו"טענה", או גם "הצדקה" אחת; מורחבת - הטיעון כולל את הרמה הבסיסית ו"התנגדות" אחת לפחות ו/או "הסתייגות" אחת לפחות ו/או מספר "הצדקות"; מורכבת - הטיעון כולל את הרמה הבסיסית או את הרמה המורחבת ומקונן טיעון אחד לפחות באחד ממרכיבי הטיעון. בשלב השני - זוהו הרעיונות המתמטיים שבטיעונים והם נותחו בעזרת שלושה קריטריונים המאפיינים מצבים שבהם רעיונות מתמטיים מקובלים בכיתה ו'מתפקדים כמו-היו-משותפים' (FAIS): (1) 'השמטה', (2) 'שינוי מקום' ו-(3) 'שימוש חוזר'. בשלב השלישי - הרעיונות המתמטיים אורגנו מן השלב שהם FAIS ואוגדו לפרקטיקות מתמטיות.

מהלכי המורה במליאה נותחו באמצעות סכמת קידוד IODM (Inquiry Oriented Discursive Move) (Rasmussen, Marrongelle, & Kwon, 2008), במטרה לאפיין את תרומת המורה להתפשטות הידע המתמטי בכיתה.

ממצאים מרכזיים

מניתוח השיח הטיעוני בכיתה, באמצעות מרכיבי המודל של טולמין, נצפו 130 טיעונים במהלך תשעת השיעורים, מתוכם 32% ברמה בסיסית, 42% ברמה מורחבת ו- 25% ברמה מורכבת. כל רמות הטיעונים הופיעו בכל שמונת השיעורים הראשונים, למעט בשיעור התשיעי בו התקיים דיון קצר בנושא 'פונקציה ריבועית' והופיע בו טיעון אחד ברמה הבסיסית.

הטיעונים שזוהו בדיוני המליאה היוו אבני בניין לרעיונות מתמטיים נכונים ורעיונות מתמטיים שגויים, שחלקם FAIS וחלקם אינם FAIS. בנושא פונקציה ריבועית הופיעו 27 רעיונות מתמטיים נכונים, כאשר 21 מהם הם FAIS. הרעיונות הצמיחו את שבע הפרקטיקות המתמטיות שזוהו בכיתה. לדוגמה, בלוח 1 מפורטת הפרקטיקה המתמטית הרביעית (MP4) בנושא סימטריה של פונקציה ריבועית, הכוללת ארבעה רעיונות מתמטיים שהם FAIS במליאה.

לוח 1: הרעיונות המרכיבים את הפרקטיקה המתמטית הרביעית – סימטריה של פונקציה ריבועית (MP4)

הפרקטיקה	קוד הרעיון	הרעיון המתמטי ש'תפקד כמו היה משותף' (FAIS) כלומר, הדרך הנורמטיבית להסקת מסקנות בכיתה (NWR)
סימטריות של פונקציה ריבועית	NWR 4-1	ציר הסימטריה מחלק את הפונקציה לשני חלקים שווים
	NWR 4-2	ציר הסימטריה עובר דרך נקודת הקודקוד
	NWR 4-3	שתי נקודות שיש להן ערך y זהה, נמצאות במרחק שווה מציר הסימטריה והן סימטריות זו לזו
	NWR 4-4	משוואת ציר הסימטריה היא איקס שווה לערך איקס-קודקוד שלה

הופעת הרעיונות המתמטיים של הפרקטיקות המתמטיות במהלך השיעורים מתוארת בלוח 2. בהמשך לדוגמה שהוצגה לעיל של פרקטיקה רביעית, ניתן לראות בלוח זה שהיא צמחה משלושה רעיונות מתמטיים שהופיעו בשיעור הראשון, ונצפו כ- FAIS בטיעונים שהופיעו בשיעור השני, ומרעיון רביעי שהופיע בשיעור השלישי ונצפה כ- FAIS באחד מהטיעונים שהופיעו בשיעור השמיני. אפשר לראות כי התפשטות הרעיונות המתמטיים וצמיחת

שבע הפרקטיקות המתמטיות במהלך השיעורים הן תהליכים שאינם לינאריים, אלא מאופיינות כרשת של פרקטיקות הצומחות במקביל.

הממצאים העיקריים של מהלכי המורה בדיונים המתמטיים במליאה מוצגים בלוח 3 (מוצגות רק הקטגוריות העיקריות של סכמת IODM, ללא פירוטן לקטגוריות משנה).

קטגוריית התשאול (Questioning) כללה כמחצית ממהלכי המורה (51.4%). קטגוריה זו כוללת ארבע תתי-קטגוריה. בשכיחות הגבוהה ביותר המורה ביקשה לבחון הבנה (350, 42%). בקשת הבהרה (238, 29%), בקשה מהתלמידים שיסבירו את דברי חבריהם או יגיבו בהסכמה או אי הסכמה (188, 23%). בשכיחות הנמוכה ביותר בקטגוריית התשאול הביעה המורה בקשה לספק צידוק או תמיכה (46, 5%).

לוח 2: הפרקטיקות המתמטיות שצמחו במליאה במהלך תשעת השיעורים הראשונים

קוד הפרקטיקה	שם הפרקטיקה	קוד הרעיון	מספרי הפעמים שרעיון מתמטי נצפה בכל שיעור (רקע כהה יותר מעיד שהרעיון FAIS באחד מהטיעונים)								
		שיעור מס׳:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MP1	עלייה וירידה של פונקציה ריבועית	NWR 1-1	1	2	4		2	1			
		NWR 1-2		5	4			6			
MP2	ייצוג אלגברי של פונקציה ריבועית והייצוג הגרפי	NWR 2-1	4		2		1		1		
		NWR 2-2		7	9	1	2				
		NWR 2-3			12	7	3				
		NWR 2-4			1	11					
MP3	ייצוג מילולי של פונקציה ריבועית, הייצוג האלגברי והגרפי	NWR 3-1	5							5	
		NWR 3-2				15			10	13	
		NWR 3-3				3		3	1	4	
		NWR 3-4				4				8	
MP4	ציר סימטריה של פונקציה ריבועית	NWR 4-1	5	3	1					3	
		NWR 4-2	1	3						1	
		NWR 4-3	1	4						1	
		NWR 4-4			3					1	
MP5	מאפייני הקדקוד של פונקציה ריבועית	NWR 5-1	2	4		11					
		NWR 5-2			2					3	
		NWR 5-3			2	5	2		2		
MP6	נקודות האפס של פונקציה ריבועית	NWR 6-1	6	7	3	10				3	
		NWR 6-2	1								1
MP7	המאפיינים של פרמטר a	NWR 7-1		3	3	1	4	2	12	3	
		NWR 7-2					11	4			

לוח 3: סיכום של מהלכי המורה בקטגוריות העיקריות של סכמת IODM בדיוני המליאה

מהלכי המורה	מספר מהלכי הוראה	שכיחות יחסית מכלל הדיונים המתמטיים במליאה
תשאול Questioning	822	51.4%
ניהול Managing	300	18.8%
היגד Telling	424	15.2%
השמעה חוזרת של המורה Revoicing	234	14.6%
סה"כ בדיונים מתמטיים	1,600	

דיון ותרומת המחקר

ממצאי המחקר תורמים להרחבת הידע הקיים בנושא מאפיינים של התפשטות רעיונות מתמטיים במליאה וצמיחה של פרקטיקות מתמטיות כיתתיות, בניצוחו של המורה. במהלך תשעה שיעורים ראשונים בנושא פונקציה ריבועית זוהו שבע פרקטיקות מתמטיות שצמחו במקביל כרשת במליאה. רוב מהלכי המורה התמקדו בתשאול, במטרה לעודד ולפתח את השיח הטיעוני, מהלך שתרם להופעת טיעונים שמרביתם נמצאו ברמה מורחבת וברמה מורכבת, ובעקבות זאת להתפשטות הרעיונות המתמטיים ולהצמחת הפרקטיקות המתמטיות של הכיתה. המחקר הנוכחי עשוי לתרום להרחבת הידע התיאורטי והמתודולוגי בתחום החינוך המתמטי, ולהשפיע גם בהיבט הפרקטי בתכנון ובביצוע מהלכי מורה בשיח טיעוני במליאה.

*מחקר זה נתמך בחלקו על ידי הקרן הישראלית למדעים, מענק מס. 1057/12

מקורות

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The journal of the Learning Sciences, 10*(1-2), 113-163.

Rasmussen, C., & Stephan, M. (2008). A methodology for documenting collective activity. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of innovative design research in science, technology, engineering, mathematics* (STEM) education (pp. 195-215). New York: Taylor and Francis.

Rasmussen, C., Kwon, O., & Marrongelle, K. (2008). A framework for interpreting inquiry-oriented teaching. In *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, Mission Valley, CA*.

Saxe, G. B., Gearhart, M., Shaughnessy, M., Earnest, D., Cremer, S., Sitabkhan, Y., Platas, L., & Young, A. (2009). A methodological framework and empirical techniques for studying the travel of ideas in classroom communities. In B. B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 203-222). London, UK: Routledge.

Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University

ההבנה הפרוצדורלית וההבנה הרלציונית של מתכשרים להוראת מתמטיקה בפתרון בעיה העוסקת בזוויות בפירמידות

דורית פטקין, מכללת סמינר הקיבוצים - המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאמנויות

◆◆◆

תקציר

מאמר זה הוא חלק ממחקר המתמקד בהבנה הפרוצדורלית (PPU) וההבנה הרלציונית (PRU) שיש למתכשרים להוראת מתמטיקה. המאמר מתמקד במשימות העוסקות בזוויות בפירמידות ובוחן את ההבנה הפרוצדורלית וההבנה הרלציונית שהציגו הסטודנטים בהתמודדותם בפתרון בעיות הקשורות לזוויות בפירמידה.

רקע תיאורטי

במסגרת לימודי גיאומטריה אוקלידית מתמודדים תלמידים בבית הספר התיכון כמו גם סטודנטים המתכשרים להוראת המתמטיקה עם שאלות המצריכות ידע של אוסף העובדות הגיאומטריות (אקסיומות, משפטים, הגדרות, צורות ותכונותיהן) כמו גם מיומנויות טכניות. השלבים המתקדמים ברמות החשיבה הגיאומטרית לפי ואן הילה (Van Hiele), כוללים הבנת יחסי היררכיה בין קבוצות של צורות, הבנת מרכיבים של מבנה אקסיומתי- דדוקטיבי ויכולת שימוש בהם לבניית הוכחות ונימוקים תוך הבנת כללים לוגיים ושמירה בהם (Patkin, 2014). לפי סקמפ (Skemp, 1976) ההבנה האינסטרומנטלית היא ידיעת הכלל ויכולת ישומו, כאשר ההבנה הרלציונית היא ידיעת **מה לעשות ומדוע**. סקמפ קורא להבנה אינסטרומנטלית גם כ"ידיעת הכלל ללא סיבות" וטוען כי לרוב התלמידים ולמורים רבים פירוש ההבנה הוא ידיעת הכלל ויכולת ישומו , כלומר ההבנה האינסטרומנטלית בלבד. כדי לפתח הבנה רלציונית אצל תלמידים יש לבנות תהליך הוראה מתאים ושונה מתהליכי הוראה ה"קונבנציונליים" המבוססים באופנים שונים על פעילויות ופתרון בעיות רבות לפי הכללים הנלמדים. מחקרים ומאמרים העוסקים בפיתוח הבנה רלציונית מתמקדים בעיקר בפיתוח החשיבה הרלציונית במהלך לימודי החשבון ובהשפעתה על הבנה אלגברית בהמשך הלימודים(Stephens 2006, 2008, Skemp 1976, Fujii, & Stephens,2001) . יחד עם זאת, נדרש המשך פיתוח הבנה וחשיבה רלציונית גם בלימודי מתמטיקה בבית ספר על יסודי. גיאומטריה יכולה לספק שדה נוסף למגמה הזאת. ליקין (Leikin, 2004) מראה איך ניתן להפוך בעיה סטנדרטית בגיאומטריה לבעיה הדורשת מהפותר יכולות המאפיינים הבנה רלציונית. מחקרים מעידים על קשיים בוויזואליזציה ובמעברים מצורות דו ממדיות לתלת ממדיות ולהפך. קשיים כאלה התגלו בקרב תלמידים השייכים לשלבי למידה שונים בבית ספר וגם בקרב אנשים מבוגרים (Barkai & Patkin, 2014). בספרות המחקר מתוארים גם ניסיונות לשיפור התפיסה המרחבית (פטקין, שריקי וברקאי, 2018; Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1988, 1989; Medina, (Gerson & Sorby, 1998; Sorby & Baartmans, 2000; Turos & Ervin, 2000. אולם אף אחד מאותם מחקרים לא התייחס לטיפוח ופיתוח ההבנה הרלציונית, אלא בעיקר להבנה אינסטרומנטלית. מכאן עולות שאלות כמו האם אפשר להביא לפיתוח ההבנה הרלציונית של לומדים בעקבות אימון? והאם למתכשרים להוראת המתמטיקה יש הבנה רלציונית? כפי שציינו, מאמר זה מתמקד במשימות הדורשות הבנה רלציונית.

מטרת המחקר היתה להחשף להבנה הרלציונית שיש לסטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה במסלול להכשרת מורים לבית הספר העל יסודי בעקבות פעילות בצורות במרחב, המעודדת הבנה רלציונית.

שאלת המחקר היתה האם מתכשרים להוראת מתמטיקה יפגינו הישגים דומים בפתרון בעיות במרחב שמצריכות הבנה פרוצדורלית [PPU] ובפתרון בעיות שמזמינות הבנה רלציונית [PRU]?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 16 סטודנטים בעלי תואר ראשון בתחומי דעת שונים העושים הסבה להוראת מתמטיקה בבית ספר על יסודי השתתפו במחקר. ארבעה מהם בעלי ניסיון בהוראת מתמטיקה בבית ספר על יסודי. הסטודנטים למדו קורס שנתי שעסק ב"גיאומטרית המרחב". הקורס עסק בהעמקת הידע בגיאומטריית המרחב תוך שילוב פעילות במחשב. בהצגת הנושאים הנלמדים מודגש גם הפן הדידקטי של הוראת גיאומטריית המרחב. כמו כן, הקורס עוסק בקשיים המרובים של תלמידים בלימוד הנושא תוך התייחסות מחקרים העוסקים בכך. בקורס מורחבים הנושאים תפיסה ויזואלית, תאוריות התפתחות בגיאומטריית המרחב, הוכחת משפטים יסודיים, ופתרון בעיות העוסקות בגופים. כלי המחקר היה שאלון שהווה מבחן סוף הקורס שהכיל שמונה פריטים בנושא צורות במרחב וזוויות בפירמידות: ששת הפריטים הראשונים הצריכו לצורך פתרונם הבנה פרוצדורלית - PPU. בפתרון שני הפריטים הנוספים נדרשת הבנה רלציונית - PRU, שכן יש למצא את הקשר בין הגבולות של מידת זווית הראש של פאה צדדית של פירמידה ריבועית כמו גם מידת זווית הראש של פאה צדדית בכל פירמידה ישרה אחרת שבסיסה מצולע משוכלל למידת זוויות המצולע שמהווה את בסיס הפירמידה.

לדוגמא: בהינתן שבסיס פירמידה ישרה הוא מחומש משוכלל, יש לבחור מבין האפשרויות הבאות את האפשרות / אפשרויות - המתאימה/מתאימות להיות מידת זווית הראש של פאה צדדית : 720, 600, 750, 300 , אף אחת מהאפשרויות אינה עונה על הדרישות (יש להקיף את האפשרות/אפשרויות שנבחרו ולנמק את הבחירה).

ממצאים

ממצאי מחקר זה מצביעים על פער בין ההישגים בפתרון בעיות במרחב ברמת ההבנה הפרוצדורלית לבין ההישגים המצריכים הבנה רלציונית. לא לכל הסטודנטים יש הבנה רלציונית מספקת, ולא תמיד הם עושים קישור בין גיאומטרית המרחב לגיאומטרית המישור. ההצלחה בפתרון ששת הפריטים הראשונים מצביעה על הבנה פרוצדורלית, המתבטאת בידע על התנאים והכללים ועל היכולת ליישמם וכל המתכשרים להוראה למעט אחד, הפגינו הבנה פרוצדורלית טובה או טובה מאוד של החומר הנלמד. ההישגים המתייחסים לפתרון הפריטים המצריכים הבנה רלציונית היו נמוכים יותר. עשרה מתוך 13 המתכשרים ענו נכון אבל רק שמונה מהם נימקו את תשובותיהם. רק שניים מתוך שבעת המשתתפים אשר השיגו יותר מ 90% מהנקודות ב PPU, השיגו מעל 80% ב- PRU ושניים אחרים השיגו ב PRU פחות מ 17%- נקודות. משמעות הדבר היא כי ההבנה הפרוצדורלית של תוכן הקורס לא בהכרח מעידה על הבנה רלציונית. מצד שני, כל המשתתפים אשר השיגו יותר מ 80%- ב- PRU, השיגו לפחות 88% מהנקודות ב- PPU. ממצא זה עשוי להצביע על כך שההבנה הרלציונית כוללת באופן בלתי נמנע הבנה פרוצדורלית.

מחקר זה מראה שהפעילויות וההצלחה של הלומדים בפתרון PPU בגיאומטריה, אינם בהכרח מספיקים להיווצרות של הבנה רלציונית בתחום. לכן יש להפעיל שיקול דעת נוסף בעת הוראת הגיאומטריה ולהתמקד בפתרון בעיות המובילות לפיתוח כיווני חשיבה שונים המביאים את הפותרים לבעיות נוספות, הכללות ומסקנות, שעשויות לשפר את הבנת המונחים ובכך להוביל להתקדמות ולפיתוח ההבנה הרלציונית. לפיכך, מומלץ להמשיך ולהרחיב את מגוון הפעילויות העשויות לפתח הבנה רלציונית בנושאים נוספים במסגרת הלימודים ולבסס סדרה של מחקרי המשך גם בנושאים נוספים, שיתמקדו בפיתוח ההבנה הרלציונית.

רשימת מקורות

פטקין, ד., שריקי, ע. וברקאי, ר. (2018). פיתוח כישורים מרחביים באמצעות אימון ליצירת דימוי מנטלי של גופי סיבוב. בתוך: א. לבנברג וד. פטקין (עורכות), גאומטריה פנים רבות לה - מן המחקר אל המעשה. (114 - 135). תל-אביב: הוצאת מכון מופ"ת.

Ben-Chaim, D., Lappan G., & Houang, R. T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal, 25*(1), 51-71.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 121-146.

Barkai, R., & Patkin, D. (2014). An investigation of the visual-mental capability of pre-and in-service mathematics teachers: A tale of two cones and one cube. *Research in Mathematical Education, 18*(1), 41-54.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 258-264). Melbourne: University of Melbourne.

Leikin, R. (2004). Towards high quality geometrical tasks: Reformulation of a proof problem. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3 pp 209–216.

Medina, A. C., Gerson, H. B. P., & Sorby, S. A. (1998). Identifying gender differences in the 3D visualization skills of engineering students in Brazil and in the United States. *Proceedings of the International Conference for Engineering Education*, Rio de Janeiro, Brazil.

Patkin, D. (2014). Global van Hiele (GVH) Questionnaire as a Tool for Mapping Knowledge and Understanding of Plane and Solid Geometry. *J. Korean Soc. Math. Educ*., Ser. D, Res. Math. Educ. Vol. 18, No. 2, June 2014, 103–128

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26

Sorby, S. A., & Baartmans, B. G. (2000). The development and assessment of a course for enhancing the 3D spatial visualization skills of first year engineering students. *Journal of Engineering Education, 63*(2), 21-32.

Stephens, M. (2008). Some key junctures in relational thinking. *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* Volume 2, pp. 479-486. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/236661294

Stephens, M. (2006). Discribing and Exploring the Power of Relational Thinking. *Conference: MERGA* 29, Volume 2, pp. 479-486. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/236661303

Turos, J. & Ervin, A. (2000). Training and gender differences on a Web-based mental rotation task. *The Penn State Behrend Psychology Journal, 4*(2), 3-12.

טיפוח תחושת מסוגלות-עצמית מתמטית באמצעות יישום הכלי 'התכתבות עם הפרופסור'

אנה פרוסק, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, אורנים - המכללה האקדמית לחינוך
עטרה שריקי, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך

מבוא

עיקרון ההומניזציה בחינוך גורס שתפקיד המורים הוא לסייע לתלמידים לממש את היכולות והנטיות הגלומות בהם, תוך פיתוח דימוי עצמי חיובי (אלוני, 2005). אולם מורכבותה של סביבת הכיתה מונעת ממורים להיענות באופן מיטבי לצרכיו האישיים של כל תלמיד, וכתוצאה מכך עלולות להיווצר בקרב חלק מהתלמידים תחושות תסכול, ירידה בתחושת המסוגלות-העצמית (להלן תמ"ע) וירידה בהישגים הלימודיים (Lewis, Ream, Bocian, Cardullo, Hammond & Fast, 2012).

לפיכך, נראה שאת הציפייה ממורים לתת מענה אישי יש להחליף בציפייה ממורים לסייע לתלמידים לרכוש כלים אשר יאפשרו להם לזהות ולבטא את קשייהם ואת מקור הקשיים ולפתח את יכולתם להתוות לעצמם תכנית פעולה להתמודדות עם הקשיים. לצורך זה פיתחנו כלי דידקטי שאותו כינינו בשם 'התכתבות עם הפרופסור'- תלמידים כותבים מכתב לפרופסור דמיוני ובו הם מתארים את קשייהם הלימודיים בהקשר מסוים ואת הסיבות לקשיים, ובהמשך כותבים לעצמם מכתב-תשובה מפורט בשמו של הפרופסור ובו הצעות לדרכי התמודדות עם הקשיים. כתיבת מכתב לעצמי מזוהה כפרקטיקת תרפיה המאפשרת לפרט לפתח את יכולתו להתמודד עם תחושותיו ועם מניעיו, ולסייע לו לפתור את בעיותיו בכוחות עצמו (Gray, 1992). לאחר הכתיבה של כל אחד מהמכתבים התלמידים משיבים לשאלון רפלקטיבי, במטרה לאפשר להם לפתח מודעות לתחושותיהם, למניעיהם ולפעולותיהם, כמו גם להגיע למסקנות על בסיס בחינה של אפשרויות ונסיבות (Mezirow, 1991). מידע אודות מרכיבי הכלי והשימוש בו ניתן למצוא אצל פרוסק ושריקי (Prusak & Shriki, 2017).

במחקר הנוכחי נתמקד בבחינת התרומה של השימוש בכלי לטיפוח תחושת המסוגלות-העצמית המתמטית (להלן תמע"מ) של תלמידים.

תחושת מסוגלות-עצמית מתמטית

תמ"ע מתייחסת לאופן שבו הפרט תופס את היכולת שלו להשלים משימה כלשהי (Bandura, 1982). תמ"ע קשורה לניסיון העבר של הפרט, כאשר הצלחות מחזקות אותה בעוד כישלונות מחלישים אותה. אדם בעל רמה נמוכה של תמ"ע נמנע מהתמודדות עם משימות הנתפסות בעיניו כקשות, תוך שהוא רואה בהן איום אישי (Bandura, 1994). באופן ספציפי ללימודי מתמטיקה, תמע"מ, התפיסה העצמית אודות היכולת להשלים בהצלחה משימה הקשורה ללימודי מתמטיקה, זוהתה כמנבא עיקרי להישגים במתמטיקה, יותר מאשר גורמים כגון דימוי שיש לתלמידים אודות מתמטיקה, חרדת מתמטיקה, מגדר, או רקע כלכלי-חברתי (OECD, 2013). לאור זאת, מיוחסת חשיבות מרובה לחיזוק התמע"מ של תלמידים. יחד עם זאת, נכון להיום, המחקר העוסק בטיפוח תחושת התמע"מ בסביבות למידה בית ספריות איננו מספק (Bonne & Johnson, 2016). על רקע זה, ראינו לנכון לבחון את התרומה של יישום הכלי 'התכתבות עם הפרופסור' לעלייה בתמע"מ של תלמידים.

המחקר

המחקר בכללותו נועד לבחון את תרומת הכלי 'התכתבות עם הפרופסור' לשינויים הנוגעים לממדים אישיים, רגשיים וקוגניטיביים בהקשר ללמידת מתמטיקה, בדגש על תמורות שהן פועל יוצא מהתמודדות תלמידים עם ארבע משימות 'התכתבות' לאורך שנת לימודים אחת- הכנת שיעורי בית במתמטיקה, התכוננות למבחנים במתמטיקה והיבחנות, וקשיים בנושאים תכניים שונים. להלן נתמקד בתרומת יישום הכלי בהקשר של משימת ההתכתבות הראשונה- הכנת

שיעורי בית במתמטיקה, תוך התייחסות לאחד מההיבטים השייכים לממד הרגשי- תמע"מ.
במחקר השתתפו 207 תלמידי כיתה י' משבעה בתי ספר בצפון הארץ, אשר למדו מתמטיקה בהקבצה הגבוהה ביותר שקיימת בבית ספרם. כלי המחקר היו התוצרים שהפיקו התלמידים (קרי, המכתבים שכתבו), שכן הללו משקפים תהליך שעוברים תלמידים (Rosnow & Rosenthal, 2009), וכן השאלונים הרפלקטיביים עליהם השיבו התלמידים לאחר כתיבה של כל אחד מהמכתבים. ניתוח המידע התבצע באמצעות שימוש בשיטות לניתוח תוכן (Krippendorff, 2013), וליצירת קטגוריות ותימות העולות מתוך הנתונים נעשה שימוש בקידוד פתוח וקידוד צירי (Strauss & Corbin, 1998).

ממצאים

בספרות המחקר מייחסים את עיקר הקשיים של תלמידים בהכנת שיעורי בית במתמטיקה להיעדר מיומנויות ניווט עצמי של הלמידה, בעיות קשב וריכוז, וידע מתמטי לקוי (למשל, Merriman & Codding, 2008). מניתוח **המכתבים שכתבו התלמידים לפרופסור** עולה מגוון רחב יותר של קשיים, כאשר עיקר ההתייחסות הייתה להיבטים רגשיים. על אף שמדובר בתלמידים הלומדים מתמטיקה ברמה גבוהה, מתוך 207 תלמידים, 198 (כ-96%) דיווחו על קושי כלשהו. נראה שניתן לייחס זאת לבקשה המפורשת לתאר קשיים בהכנת שיעורי הבית במתמטיקה. חלק מהתלמידים ייחס את הקשיים ליותר מאשר סיבה אחת, ביניהן - קשיים קוגניטיביים (כ-21% מהתלמידים), ובפרט ידע מתמטי בלתי מספק וחוסר גמישות מחשבתית; קשיים אישיים (כ-31% מהתלמידים), הכוללים יכולת התמדה ונחישות; וקשיים רגשיים (כ-68% מהתלמידים), כגון- תחושת תיסכול, חוסר ביטחון ואף ייאוש, ובפרט קשיים שניתן לייחס אותם לרמה נמוכה של תמע"מ, כאשר תחושה זאת נמצאה בזיקה ישירה לדימוי אודות מתמטיקה.
בדומה לספרות המחקר (למשל, Picker & Berry, 2000), מצאנו שתלמידים שהביעו קשיים רגשיים תופסים את המתמטיקה כתחום דעת מוחלט או כתחום דעת היררכי במהותו. לדימוי זה יש השלכות על התמע"מ וכתוצאה מכך להימנעות מהתמודדות עם שיעורי הבית: "במתמטיקה, זה או שאתה עונה נכון או שאתה עונה לא נכון. ואם אני לא בטוחה שהתשובה שלי נכונה, אני פשוט מוותרת כי אם אני אטעה זה רק יגרום לי להרגיש רע עם עצמי. עצם זה שאני יודעת שאני גרועה במתמטיקה."; "ללמוד מתמטיקה זה כמו לנסוע ברכבת. ברגע שיורדים מהרכבת, לא יכולים לעלות עליה, כי היא כבר נסעה. אז בשבילי, זה פשוט בזבוז זמן לנסות להכין את שיעורי הבית במתמטיקה, כי רכבת המתמטיקה שלי כבר מזמן נסעה לשלום...אז ממילא לא אצליח".
בניגוד לנימה הרגשית השלילית שעלתה מהמכתבים שאותם כתבו התלמידים לפרופסור, **ממכתבי-התשובה שכתבו לעצמם בשמו של הפרופסור** עלתה נימה חיובית ואופטימית. מכתבי-התשובה כללו הבעות של תמיכה רגשית ועצות פרקטיות: " אם לא תנסי אף פעם לא תדעי למה את מסוגלת במתמטיקה, וגם לא תוכלי להצליח. אבל גם בסדר להיכשל מדי פעם."; "אתה יודע שלחץ מוציא ממך דברים שליליים שמורידים מהיכולת שלך. לפני שאתה מתחיל להכין את השיעורים קודם כל תוריד את רמת הלחץ שלך."; "המתמטיקה סתם נראית לך משהו ענקי וקשה. אם בראש שלך תדמיין מתמטיקה כמשהו מעניין וקל, אז לא תפחד לעשות לבד שיעורים.". חלק מהעצות לווּ בשיקוף של תחושות חיוביות שעתידות לעלות כתוצאה ממימושן: "אחרי שתפתרי את הבעיה הראשונה תרגישי הרבה ביטחון, ואז תראי שהבעיות האחרות יותר קלות. את רק צריכה להתגבר על הראשונה".

סיכום ומסקנות

מהשוואה בין המכתב שכתבו התלמידים לפרופסור לבין מכתב-התשובה שכתבו לעצמם בשמו של הפרופסור נראה שיש בכוחו של הכלי 'מכתבים לפרופסור' לטפח את התמע"מ של תלמידים, ובפרט את התובנות שלהם אודות הקשר שבין הצלחות לבין חיזוק הביטחון-העצמי ביכולת והנחישות להצליח (Bandura, 1994). בדומה לממצאיו של גריי (Gray, 1992), כתיבת שני המכתבים סייעה לתלמידים לגלות משאבים פנימיים שיאפשרו להם להתמודד באופן עצמאי עם הקשיים שלהם במתמטיקה.

לסיום נעיר שככל שהתלמידים ביצעו יותר משימות 'התכתבות', כך התפתחה היכולת הרפלקטיבית שלהם, כמו גם היכולת להשיא לעצמם עצות יעילות. לפיכך, נראה שהשימוש בכלי תואם את רוח ההומניזציה בחינוך (אלוני, 2005), וממצב את פיתוח היכולת של תלמידים לעזור לעצמם כמטרה חינוכית העומדת בפני עצמה. יחד עם זאת, דרוש מחקר מעקב על מנת לבחון השפעות ארוכות טווח של יישום הכלי בכיתות.

רשימת מקורות

אלוני, נ. (2005). חינוך הומניסטי: מהלכה למעשה. **מחשבה רב-תחומית בחינוך ההומניסטי, 1**, 1-10, המכון למחשבה חינוכית, סמינר הקיבוצים.

Bandura, A. (1982). Self-efficacy mechanism in human agency. *American Psychologist, 37*(2), 122-147.

Bandura, A. (1994). Self-efficacy, in V. Ramachaudran (ed.), *Encyclopedia of human behavior*, Vol. 4 (pp. 71–81). New York, NY: Academic Press.

Bonne, L., & Johnson, M. (2016). Students' beliefs about themselves as mathematics learners. *Thinking Skills and Creativity, 20*, 17-28.

Gray, J. (1992). Men are from Mars; *Women are from Venus: A definitive guide to relationships*. Harper Thorsons Harper Collins Publishers.

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: An introduction to its methodology* (3rd edition). Sage Publications, Inc.

Lewis, J. L., Ream, R. K., Bocian, K. M., Cardullo, R. A., Hammond, K. A., & Fast, L. A. (2012). Con carino: Teacher caring, math self-efficacy, and math achievement among Hispanic English learners. *Teachers College Record, 114*, 1–42.

Merriman, D. E., & Codding, R. S. (2008). The effects of coaching on mathematics homework completion and accuracy of high school students with attention-deficit/hyperactivity disorder. *Journal of Behavioral Education, 17*(4), 339-355

Mezirow, J. (1991) *Transformative dimensions of adult learning*. San Francisco, Jossey-Bass.

OECD (2013). PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. OECD Publishing. Available at: https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf

Picker, S. H., & Berry, J. (2000). Investigating pupils' images of mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 43*(1), 65-94.

Prusak, A., & Shriki, A. (2017). "Corresponding with the Professor": A didactic tool for fostering students' ability to identify scholastic difficulties and ways of coping with them. *Creative Education, 8*, 1702-1719. Available at: https://www.scirp.org/journal/PaperInformation.aspx?PaperID=78595

Rosnow, R. L., & Rosenthal, R. (2009). Effect sizes: Why, when, and how to use them. *Journal of Psychology, 217*(1), 6-14.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research techniques and procedures for developing grounded theory* (2nd edition). Sage Publications: London.

מהערכה שיפוטית לשיח פרודוקטיבי: שינוי בשיח של מורי מתמטיקה במסגרת מועדון וידאו

יוחאי פרץ, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה.
רוני קרסנטי, מכון ויצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים.
עינת הד-מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה.

◆◆◆

מבוא

מועדון וידאו הינו מודל של התפתחות מקצועית, אשר החל בשנות התשעים המוקדמות של המאה הקודמת (Sherin, 2004; Sherin & van Es, 2009). במסגרתו נפגשת קבוצת מורים באופן קבוע, בדרך-כלל תחת הדרכתו של מנחה, לצפות ולדון בקטעי וידאו הנבחרים בהתאם למטרה מסוימת. אחד הנושאים המרכזיים הקשורים לניהול מועדוני וידאו הוא ביסוסן של נורמות דיון. מלבד לכוונה הבסיסית של הבטחת אווירה של אמון, בה מורים מרגישים בטוחים להעלות רעיונות, הנורמות מתייחסות גם לאופן בו מידע מועבר, מה הופך רעיון לראוי לחקירה וכיצד ניתן לפרש את הפרקטיקה של האחר (van Es, 2009; Clancey, 1995). מועדוני וידאו שונים עשויים לאמץ נורמות שונות, אך ישנה הסכמה כללית בספרות כי הערות בעלות אופי מעריך, שיפוטי או תגובות שליליות, מובילות לדיונים בעלי ערך מועט (Coles, 2010; Jaworski, 1990; van Es & Sherin, 2008).

במאמר זה נציג תוצאות של מחקר שנערך במועדון וידאו בית ספרי, שבו בחנו את סוגי ההערות המעריכות של המורים ועקבנו אחר תדירותן לאורך רצף הפגישות.

סביבת המחקר ומשתתפיו

מועדון הווידאו הנחקר נערך במסגרת פרויקט פיתוח מקצועי בשם עדש"ה (עמיתים דנים בשיעורי המתמטיקה) שפותח במכון ויצמן למדע. בפרויקט זה שיח העמיתים מונחה על-ידי שימוש במסגרת ניתוח המורכבת משש עדשות דרכן ניתן לדון בשיעור המוסרט. מסגרת ניתוח זו מאפשרת לייחס מטרות ואמונות למורים אחרים, ולדון ברעיונות המתמטיים שהוצגו בשיעור, במטלות שניתנו בו, בדילמות שהמורה חווה בשיעור ובאינטראקציות של המורה עם תלמידיו (להרחבה: Karsenty & Arcavi, 2017; Karsenty 2018).

מעבר לכך, מקדם פרויקט עדש"ה מספר נורמות דיון (Karsenty & Arcavi, 2017): (1) ההנחה היא שהמורה המצולם פועל לטובת תלמידיו; (2) יש להתאמץ "להיכנס לנעלי המורה המצולם" בניסיון להבין את מטרותיו, החלטותיו ואמונותיו; (3) שמירה על שיח מכבד ולא שיפוטי באמצעות ניתוב הערות שיפוטיות לדיון באלטרנטיבות שונות למהלך הוראה על יתרונותיהם וחסרונותיהם.

מועדון הווידאו הנחקר נערך במסגרת בית-ספרית במהלך שנת 2017 בתיכון במרכז הארץ. אוכלוסיית בית הספר מאופיינת בשיעור גבוה של תלמידים הלומדים מתמטיקה ברמת 3 יח"ל. צוות המתמטיקה כולל 7 מורים, כאשר 5 מהם בעלי ניסיון של מעל 30 שנות הוראה וה-2 הנותרים בעלי ניסיון הוראה של פחות מ-10 שנים. מנחה המועדון (המחבר הראשון של מאמר זה) הוא חבר בצוות המורים. המועדון נפגש 8 פעמים במהלך השנה (כאחת לחודש) למשך כשעתיים. בדיון מקדים עם ראש הצוות הוחלט, לאור מאפייני בית-הספר, כי המועדון יתמקד בשיעורים מוסרטים ברמת 3 יח"ל. בששת המפגשים הראשונים נצפו סרטים של מורים שאינם מוכרים לצוות, מתוך סרטי עדש"ה הזמינים, ואילו במפגש השביעי נצפה שיעור מוסרט של מנחה המועדון ובמפגש האחרון נצפה שיעור של אחד ממורי הצוות שהתנדב להצטלם.

רציונל ושאלת המחקר

במחקר הנוכחי המנחה הוא חבר בצוות המורים המשתלמים, מצב המאפשר אינטימיות בקרב המשתתפים. סיטואציה זו אפשרה מחקר נוסף בנושא מזווית שטרם נחקרה והיוותה הזדמנות ללמוד על מה מורים מדברים בהשתלמות מעין זו. כפועל יוצא, שאלת המחקר היא: מה מאפיין את השיח בקרב מורים למתמטיקה המשתתפים במועדון וידאו בית-ספרי?

שיטת המחקר ואיסוף נתונים

איסוף הנתונים כלל תיעוד בווידאו של מפגשי המועדון (למעט אחד) מגובה בהקלטות אודיו. כמו-כן, תועדו המפגשים ביומן חוקר על-ידי מנחה המועדון. ניתוח הנתונים כלל את השלבים הבאים:

1. ביצוע תמלול מרפרף של כל המפגשים וזיהוי תמות חוזרות.
2. בחירת מפגשים לניתוח מעמיק. מתוך שש הפגישות שבהן נצפו קטעי וידאו של מורים לא מוכרים, הוחלט לבחור את שני הראשונים ואת שני האחרונים (#1,2,5,6) כדי לאפשר בחינה של השינוי לאורך זמן. כמו כן, נבחרו שני המפגשים האחרונים (#7,8) בהם נצפו סרטים של חברי הצוות.
3. פילוח התמלולים ליחידות משמעות - כלומר קטע בו מופיע רעיון אחד, בין אם מדובר בתור אחד או במספר תורות.
4. סיווג כל יחידת משמעות לאחת מהתמות שזוהו בשלב הראשון.
5. זיהוי קטגוריות בתוך כל תמה וסיווג שיטתי של כל תורות הדיבור לפי הקטגוריות שזוהו. סיווג זה תוקף על-ידי שני חוקרים.

ממצאים ודיון

אחת התמות המרכזיות שזוהתה כללה הערות בעלות אופי מעריך כלפי המורה המצולם או מהלכי הוראתו. כ-18% מיחידות המשמעות סווגו לתמה זו. כאמור, אחת מנורמות הדיון בעדש"ה היא התרחקות משיפוטיות ועל-כן עניין אותנו לסווג הערות אלו ולבחון האם חל שינוי בהיענות המורים לנורמת היעדר השיפוטיות. דיווח זה מתמקד רק בנושא האמור.

זוהו שלוש קטגוריות של הערות בעלות אופי מעריך:

קטגוריה I: שיפוטיות נחרצת כלפי מהלכי הוראה נצפים בסרט.

קטגוריה זו אופיינה בשימוש במילים נחרצות, כדוגמת " אסור לעשות ככה", ו"לא מקובל עליי" . כמו כן, בלט חוסר האפשרות להתייחס למהלכי ההוראה של מורה אחר מתוך נקודת המבט שלו, במנותק מהשקפת המורה הצופה.

קטגוריה II: אי הסכמה עם מהלכי הוראה נצפים בסרט והצעת אלטרנטיבה.

סוג זה של אי-הסכמה התבטא לרוב בצורה של הצעה, לעיתים ממש כאילו המורה המצולם נוכח בחדר, וזאת ללא שימוש בביטויים של ביטול כלפי מהלך ההוראה הנצפה.

קטגוריה III: יכולת לייחס סיבות למהלכי הוראה נצפים בסרט, למרות התנגדות להם.

קטגוריה זו כוללת מקרים בהם מפגין המורה המתנגד יכולת להעמיד את עצמו במקומו של המורה המצולם, על אף התנגדותו למהלכיו, ולנמק את מהלכיו באופן הלוקח בחשבון סיבות שונות לביצוע מהלך זה.

בנוסף זיהינו קטגוריה רביעית הקשורה להערכה, אותה כינינו "התנגדות לביקורת". קטגוריה זו כללה תורות בהם מורים התנגדו לאופי הביקורת שהועלתה כלפי המורה המצולם מצד עמיתיהם או סיפקו הסבר סביר למהלכיו של המורה המצולם.

טבלה 1 מציגה את אחוזי האמירות השיפוטיות לפי קטגוריות, בכל אחד מהמפגשים שנותחו.

קטגוריה	מפגש 1	מפגש 2	מפגש 5	מפגש 6	מפגש 7	מפגש 8
שיפוטיות נחרצת	26.67%	21.74%	20.75%	67.74%	0.00%	0.00%
אי-הסכמה והצעת חלופות	34.67%	33.70%	0.00%	22.58%	20.00%	47.06%
יכולת לייחס סיבות למורה אחר	8.00%	32.61%	18.87%	9.68%	50.00%	17.65%
התנגדות לביקורת	30.67%	11.96%	60.38%	0.00%	30.00%	35.29%

טבלה 1 : שכיחות תורות הדיבור שסווגו לקטגוריות 1-4, מתוך כלל תורות הדיבור שסווגו כבעלות אופי מעריך

כפי שניתן להבחין, השיפוטיות הנחרצת הלכה ופחתה לאורך המפגשים, למעט במפגש השישי. מפגש זה ראוי לניתוח מעמיק יותר, שטרם בוצע. נציין אף כי ניתן לייחס, בחלקו, את העדר השיפוטיות הנחרצת בשני המפגשים האחרונים לכך שבמפגשים אלו נצפו שיעורים של מורים מהצוות, שנכחו בדיונים. אנו משערים כי הסתגלות הדרגתית לנורמות של עדש"ה, בשילוב עם רגישות לעמיתים, הביאה להעדר שיפוטיות נחרצת במפגשים אלו. באשר לשאר הקטגוריות, הפרודוקטיביות יותר בטבען, לא נמצא דפוס מובחן מניתוח הנתונים.

תמה	מפגש 1	מפגש 2	מפגש 5	מפגש 6	מפגש 7	מפגש 8
אירועי ביקורת	31.58%	17.78%	10.53%	16.67%	9.09%	8.33%

טבלה 2 : שכיחות יחידות המשמעות שסווגו כבעלות אופי מעריך, מתוך כלל יחידות המשמעות שסווגו

בחינה של שכיחות יחידות המשמעות שסווגו תחת התמה של הערות מעריכות (טבלה 2), מראה בבירור כי המורים המשתתפים השקיעו פחות ופחות ממרצם לסוג זה של הערות (שוב, יוצא דופן המפגש השישי), ומכאן שתשומת לב רבה יותר ניתנה למוקדי דיון אחרים (לדוגמה, שיח בנוגע לתלמידים מתקשים). זהו ממצא חיובי, שכן כאשר הווידאו משמש יותר להעלאת סוגיות הנוגעות לפרקטיקה, ופחות כמקור לביקורת, סביר להניח כי תתרחש חשיבה רפלקטיבית.

סיכום

הכלי המתודולוגי שבנינו מסייע לבחינת שיפוטיות בשיח של מורים, ולמיטב ידיעתנו הוא הראשון מסוגו. עבור מנחים, המודעות לתהליך בו ירידה כזו בשיפוטיות יכולה להתרחש היא בעלת חשיבות מעשית. בעבור חוקרים, מתודולוגיה זו יכולה לספק נתיב פורה לקראת הבנה טובה יותר כיצד ובאילו נסיבות הערות בעלות אופי מעריך יכולות לפחות.

מקורות

Clancey, W. J. (1995). A tutorial on situated learning. In J. Self (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Computers and Education* (Taiwan) (pp. 49–70). Charlottesville, VA.

Coles, A. (2010). Using video for professional development: A case study of effective practice in one secondary mathematics department in the UK. In M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 30*(2).

Jaworski, B. (1990) Video as a tool for teachers' professional development. *British Journal of In-Service Education, 16*(1), 60-65.

Karsenty, R. (2018). Professional development of mathematics teachers: Through the lens of the camera. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 269-288). Hamburg: Springer.

Karsenty, R. & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(5), 433-455.

Sherin, M. G. (2004). New perspectives on the role of video in teacher education. *Advances in Research on Teaching, 10,* 1-27.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., &. Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics Teacher Noticing: Seeing Through Teachers' Eyes*. New York: Routledge.

Sherin, M. G., & van Es, E. A. (2009). Effects of video participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education, 60*(1), 20-37.

van Es, E. A. (2009). Participants' roles in the context of a video club. *Journal of the Learning Sciences, 18*(1), 100-137

van Es, E., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education, 24*, 244-276.

מודל טיפוח הכוונה עצמית בלמידה בשילוב צרכים פסיכולוגיים (אוטונומיה, שייכות ויכולת), להעלאת הישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה

ענבל קולושי-מינסקר, אוניברסיטת בר-אילן ושאנן המכללה האקדמית הדתית לחינוך
ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר-אילן

◆◆◆

הקדמה ורקע תיאורטי

תכניות הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי (NCTM, 2016) מדגישות את פתרון הבעיות כאחד הנושאים המרכזיים במתמטיקה, כיוון שהן מקשרות בין עולם המציאות לבין העולם המתמטי (OECD-PISA, 2013).

לדעת חוקרים, הקשיים של תלמידים רבים בפתרון בעיות אינם נובעים מחוסר ידע בלבד, אלא גם מקשיים בשימוש בהכוונה עצמית של מיומנויות קוגניטיביות ,מטהקוגניטיביות ומוטיבציוניות-רגשיות, הבאות לידי ביטוי בכל שלבי הפתרון (TIMSS, 2015). בשנים האחרונות, מופנה זרקור אל **תיאוריית ההכוונה העצמית בלמידה SRL (Self-Regulated Learning)** שהיא מודל רב ממדי המדגיש את התפקיד הפעיל של תלמידים בהכוונה של תהליכי למידה במרכיבים: **קוגניציה, מטהקוגניציה ומוטיבציה ללמידה** (Zimmerman, 2008) ובכך תורמת להעלאת הישגים לימודיים בכלל ובמתמטיקה בפרט (Mevarech & Kramarski, 2014).

מרבית המחקרים מתמקדים בהכוונה עצמית קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית בדגש על **מיומנויות (Skills)**. אולם בשנים האחרונות נראה, כי טיפוח המיומנויות כשלעצמן אינו מספיק לקידום הישגי התלמידים, אלא על התלמידים לגלות גם **מוטיבציה-רגשית ללמידה** (Will). **תיאוריית ההכוונה העצמית לפי SDT (Self-Determination Theory)** מדגישה את חשיבות התחום המוטיבציוני-רגשי של התלמידים בסביבת הלמידה שלהם, באמצעות טיפוח שלושת הצרכים הפסיכולוגיים הבסיסיים: **אוטונומיה, שייכות ויכולת** (Kramarski, Weisse, & Kololshi-Minsker, 2010; Ryan & Deci, 2000). על כן יש לשלב מרכיבים מוטיבציוניים-רגשיים בצד מרכיבים קוגניטיביים-מטהקוגניטיביים במודלים של שיטות לטיפוח ההוראה בכיתה. **ייחודיות המחקר הנוכחי בכך שהוא משלב בין שתי תיאוריות ההכוונה העצמית בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. למחקר הנוכחי שתי מטרות בקרב תלמידים צעירים:**

- מציאת **קשרים** בין תיאוריות ההכוונה העצמית (SRL, SDT) לבין הישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה בקרב תלמידים מכיתות **א'-ו'**.
- בחינת ההשפעה של **שלוש תכניות ההתערבות** המושתתות על התיאוריות ושילובן (SDT+SRL; SDT; SRL), על ההישגים של תלמידי כיתות **ג' ו-ה'**, וכן על יישום מיומנויות הכוונה עצמית בלמידה ותחושת סיפוק שלושת הצרכים הבסיסיים בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה.

שיטה

לבדיקה של **מטרת המחקר הראשונה** - בחינת **הקשרים** שבין משתני המחקר, השתתפו 737 תלמידים שנחשפו לתכנית ההתערבות המשולבת (SDT+SRL), בכיתות א'-ו' מבית-ספר יסודי אחד. לבדיקה של **מטרת המחקר השנייה** - בחינה של מידת השפעתן של **שלוש תכניות התערבות** (SDT+SRL; SDT; SRL), על פתרון בעיות מילוליות וסוגי הכוונה עצמית, השתתפו 383 תלמידים בכיתות ג' ו-ה', אשר נבחרו משלושה בתי-ספר יסודיים ממלכתיים, ממצב סוציו-אקונומי זהה. לפני ההתערבות ולאחריה הועברו: מבחני הישגים בפתרון בעיות מילוליות, וכן שאלונים לבדיקת SRL ו-SDT בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה.

תכניות ההתערבות לטיפוח הכוונה עצמית:

SRL - טיפוח הכוונה עצמית קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית - הושתתה על מודל לולאת הכוונה עצמית בלמידה בסיוע מיומנויות: **תכנון, ניטור והערכה** (Zimmerman, 2008) אמצעות אימון **בשאלות עצמיות** בכל שלבי פתרון הבעיה (Mevarech & Kramarski, 2014; נשר, תשס"ג; סגל, 2002).

SDT - טיפוח הכוונה עצמית מוטיבציונית-רגשית - הושתתה על טיפוח הצרכים הפסיכולוגיים הבסיסיים: אוטונומיה, שייכות ויכולת (Ryan & Deci, 2000) בהתבסס על **דיאלוג תומך צרכים** (קפלן ועשור, 2003) באמצעות אימון **בשאלות עצמיות** במהלך פתרון הבעיה.

SDT+SRL - טיפוח הכוונה עצמית קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית ומוטיבציונית-רגשית אשר שילבה את שתי תכניות ההתערבות.

בתרשים 1 מוצגים שני המודלים התיאורטיים על בסיסם נבנו תכניות ההתערבות וכן השאלות העצמיות לטיפוח הכוונה עצמית בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, שנבנו עבור המחקר (קלושי-מינסקר, 2017).

<table>
<tr><th>מרכיבי SRL
Zimmerman, 2008
Pintrich, 2000</th><th>תהליך פתרון
בעיה מילולית</th><th>שאלות עצמיות
תכנון, ניטור והערכה
Mevarech & Kramarski, 2014</th></tr>
<tr><td>טיפוח מיומנויות קוגניטיביות</td><td>היזכרות
קישור לידע קודם
ארגון מידע</td><td rowspan="3">שאלות לדוגמה:
מה בבעיה?
מהי האסטרטגיה?
מה דומה ומה שונה?
האם אני בדרך הנכונה?
האם הפתרון הגיוני?
האם אני יכול לפתור בדרך אחרת?</td></tr>
<tr><td>טיפוח מיומנויות מטהקוגניטיביות</td><td>בדיקה
בקרה
השוואה</td></tr>
<tr><td>טיפוח מיומנויות מוטיבציוניות ללמידה</td><td>מוטיבציה פנימית
מוטיבציה חיצונית
ערך עצמי</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>מרכיבי SDT
Ryan & Deci, 2000</th><th>תהליך פתרון
בעיה מילולית</th><th>שאלות עצמיות
דיאלוג תומך צרכים פסיכולוגיים
קפלן ועשור, 2003</th></tr>
<tr><td>טיפוח תחושת אוטונומיה</td><td>בחירה ואקטיביות
עניין ורלוונטיות
חשיבה עצמאית</td><td rowspan="3">שאלות לדוגמה:
האם הייתי פעיל/ה בפתרון הבעיה?
האם הבעיה עוררה בי עניין?
האם הבעיה לקוחה מחיי?
האם התייחסו לדבריי?
האם העבודה עם חבריי סייעה לי?
האם אצליח בפתרון בעיות אתגר?</td></tr>
<tr><td>טיפוח תחושת שייכות</td><td>מסר של חיבה
אכפתיות והערכה
הקשבה וקבלה</td></tr>
<tr><td>טיפוח תחושת יכולת</td><td>התמודדות
מאמץ
אתגר</td></tr>
</table>

ממצאים מרכזיים

במענה למטרת המחקר הראשונה - (א) אוששו **הקשרים** בין המרכיבים: קוגניציה, מטה קוגניציה ומוטיבציה לבין המבנה התיאורטי של SRL בקרב לומדים צעירים; (ב) אוששו **הקשרים** בין המרכיבים: אוטונומיה, שייכות ויכולת לבין המבנה התיאורטי של SDT בקרב **לומדים צעירים**; (ג) נמצא **קשר חיובי חזק** בין שתי התיאוריות: SRL ו-SDT; (ד) נמצא **קשר ישיר וחיובי** בין SRL לבין ההישגים בפתרון בעיות שגרתיות במתמטיקה; (ה) בניתוח נתיבים (SEM) נמצא כי **הכוונה עצמית מוטיבציונית-רגשית (SDT) מעצימה את ההכוונה הקוגניטיבית-מטהקוגניטיבית (SRL) שבתורה - תורמת להעלאת ההישגים.**

במענה למטרת המחקר השנייה - נמצא כי הישגי התלמידים שנחשפו לתכנית ההתערבות המשולבת SDT+SRL היו הגבוהים ביותר, הן בפתרון בעיות שגרתיות הן בפתרון בעיות חדשניות. בנוסף לכך, תחושת היכולת בקרב תלמידים אלו נמצאה הגבוהה ביותר. בהתאם לקשרים שנמצאו בין SRL לבין SDT לבין ההישגים, תלמידי הקבוצה המשולבת (SDT+SRL) הרגישו כי הכוונה המוטיבציונית-רגשית העצימה את יכולתם לפתור בעיות מילוליות במתמטיקה וליישם את המיומנויות הקוגניטיביות-מטהקוגניטיביות שרכשו.
עוד נמצא כי תלמידים בקבוצת SRL בלבד הגיעו להישגים גבוהים יותר בהשוואה להישגי התלמידים בקבוצת SDT בלבד. כמו כן תחושת האוטונומיה הייתה הגבוהה ביותר בקבוצת SDT.

דיון ותרומת המחקר

ממצאי המחקר מחזקים את הצורך בטיפוח משולב של מרכיבי **שתי התיאוריות** להכוונה עצמית: קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית (SRL) ומוטיבציונית-רגשית (SDT) בקרב תלמידים צעירים בבית ספר יסודי, הן לשם העלאת הישגיהם בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה (שגרתיות וחדשניות), והן לשם יישום של מיומנויות ההכוונה העצמית משתי התיאוריות: קוגניטיבית-מטהקוגניטיביות (SRL) ומוטיבציונית-רגשיות (SDT). **למחקר תרומה תיאורטית, מתודולוגית ויישומית.** מהמודל התיאורטי שאושש במחקר ניתן לבנות וליישם תכניות התערבות לטיפוח הכוונה עצמית בלמידה, קוגניטיבית-מטהקוגניטיבית (SRL) ומוטיבציונית-רגשית (SDT), לשיפור ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. **במחקרי המשך** מומלץ לבחון את השפעת התכנית המשולבת SRL+SDT בדרגות כיתה שונות ובמגזרים שונים.

מקורות

נשר, פ' (תשס"ג). שלושה מרכיבי קושי של שאלה מילולית במתמטיקה. עיונים בחינוך, 10, 131-144.

סגל, ד' (2002). אחת ולתלמיד. ירושלים: אלמוג.

קולושי-מינסקר, ע' (2017). מודל טיפוח הכוונה עצמית בלמידה וצרכים פסיכולוגיים: אוטונומיה, שייכות ויכולת, להעלאת הישגים בפתרון בעיות במתמטיקה. חיבור לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה. בית ספר לחינוך, אוניברסיטת בר אילן, רמת גן.

קפלן, א' ועשור, א' (2003). דיאלוג תומך צרכים פסיכולוגים בין מורים ותלמידים כמקדם רווחה נפשית בבית הספר: המשגה ותוכנית יישומית. הייעוץ החינוכי, 13, 161-188.

Kramarski, B., Weiss, I., & Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? ZDM: *The International Journal on Mathematics Education, 42*(2), 179-193.

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2014). *Critical Maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. OECD publisher, Paris (196 pages).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2016). Mathematics teaching in the middle school, 21(8), 472-479. *Available: https://www.bgsu.edu/content/dam/BGSU/nwo/documents/camp/June9-2016/NCTM.pdf*.

OECD-PISA (2013). Organization for Economic *Co-operation and Development [OECD]. PISA 2015 draft collaborative problem solving assessment framework*. OECD Publishing.

Pintrich, P. R. (2000). An achievement goal theory perspective on issues in motivation terminology, theory and research. Contemporary Educational Psychology, 25, 92-104.

Ryan, R. M., & Deci, E. R. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25,* 54-67.

TIMSS (2015). International results in mathematics (November 2016). Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., & Hooper, M. Available: http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/ international-results/timss-2015/mathematics/student-achievement/

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical back-ground, methodological development, and future prospects. *American Educational Research Journal, 45*(1), 166-183.

רפלקציה של מורים על רצף הוראה – מה ניתן ללמוד מתיוג והצגה של מאפיינים דידקטיים

ג'ייסון קופר, אוניברסיטת חיפה, החוג לחינוך מתמטי
שי אולשר, אוניברסיטת חיפה, החוג לחינוך מתמטי
מיכל ירושלמי, אוניברסיטת חיפה, החוג לחינוך מתמטי

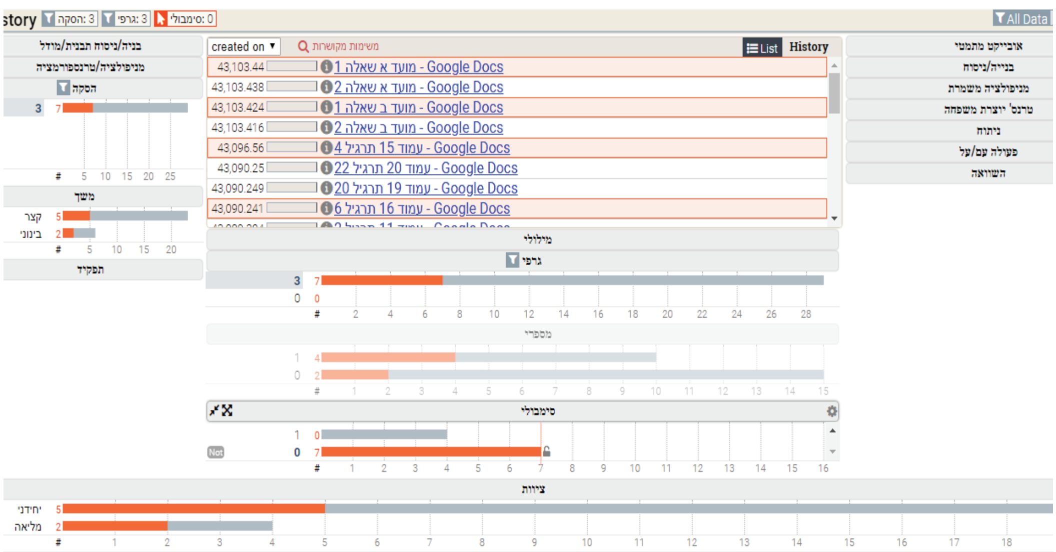
◆◆◆

מבוא

גם כאשר מורים מארגנים את ההוראה סביב ספר לימוד, הם שותפים בעיצוב ההוראה בדרכים רבות: בבחירת משימות מבין המוצעות בספר לימוד, בארגון הלמידה בכיתה ובבית - באופן יחידני, בקבוצות או סביב דיון במליאה, ועוד. תפקיד המורה כמעצב מתעצם בעידן הדיגיטאלי כאשר הוא משלב משאבי למידה מהאינטרנט, או כאשר הוא מרכיב רצף הוראה בעצמו, מספרים, מאתרים שונים וביצירה עצמאית.

כיצד מורים יתארו את רצפי ההוראה שעיצבו - לעצמם, למדריכים, למנהלים, ואף לתלמידים? חסרים כלים להתבוננות ביקורתית ברצפי הוראה, ויתכן אף שלמורים רבים חסרה "שפה" דידקטית לתאר בה את השיקולים שמנחים אותם בעבודת העיצוב.

בשנתיים האחרונות אנחנו עוסקים בפיתוח של כלים טכנולוגיים אשר מטרתם לתמוך במורים כשותפים במלאכת העיצוב. כלים אלה מגדירים שפה שבעזרתה ניתן לתאר מאפיינים דידקטיים של משימות, של ספרים ושל רצפי הוראה. במקביל, אנחנו עורכים מחקר על עבודה של מורים עם כלים אלה ועל התפתחות השיח שלהם סביב שיקולים דידקטיים. הפיתוח הטכנולוגי כולל שני כלים משלימים. הראשון מאפשר לתייג אספקטים דידקטיים של משאבי למידה בודדים (כגון משימות). הכלי השני מספק שני ייצוגים של רצפי הוראה. הייצוג הראשון וההוליסטי, אשר מתאים גם לייצוג של מאגר כללי של משאבי למידה, מספק מבט דידקטי על האוסף המתויג באמצעות "חיתוכים" - סינון על פי אוסף של קריטריונים דידקטיים. הוא מאפשר, למשל, לענות על השאלה: "כמה מהמשאבים המתויגים (ואילו) דורשים מתלמידים להסיק מסקנות, וכוללים ייצוג גרפי של האובייקט המתמטי הנדון, אבל לא כוללים ייצוג סימבולי (אלגברי)" (תרשים 1)? הנחתנו היא שבחירה של משימות בעלות מאפיינים כאלה או אחרים היא בלב עבודת העיצוב של המורה.



תרשים 1: מתוך 80 משימות מתוייגות של שרה, מודגשות 7 משימות אשר דורשות הסקת מסקנות ברמה 3 (הגבוהה ביותר), כוללות ייצוג גרפי (רמה 3), אך אינן כוללות ייצוג סימבולי (רמה 0). הכלי מראה גם כיצד מתפלגים האספקטים הדידקטיים האחרים: למשל: 5 בעלי משך קצר ו- 2 בעלי משך בינוני, וכו'

הייצוג הנוסף של רצפי הוראה מתייחס לארגון הלינארי בזמן של המשאבים המרכיבים את רצף ההוראה, ומאפשר לענות על שאלות כגון: "כיצד משתנה ארגון הכיתה במהלך ההוראה"? (תרשים 2).
המחקר המוצג כאן עוסק בשני מורים שתייגו את כל משאבי הלמידה במהלך רצף הוראה. השאלה שעומדת בבסיס המחקר היא: כיצד תיוג של מאפיינים דידקטיים ברצף הוראה, והתבוננות בייצוגים ויזואליים של הרצף המתויג, עשויים לתמוך ברפלקציה של מורים על שיקולים דידקטיים בעיצוב ההוראה.

רקע תאורטי

יש חוקרים המתארים את האתגר של עיצוב רצפי הוראה במושגים של קוהרנטיות. Pepin, Gueudet, Yerushalmy, Trouche, & Chazan (2015) מבחינים בין שני סוגי קוהרנטיות. קוהרנטיות עיצובית (coherence of design) כוללת אספקטים כגון נכונות מתמטית, גישה אפיסטמית עקבית לתוכן, התחשבות בידע קודם, והתאמה לתוכנית לימודים ארצית. קוהרנטיות בשימוש (coherence in use) מתייחסת למה שמורים מציעים לתלמידיהם בפועל, מתוך ספר הלימוד או ממקורות אחרים.
השפה הדידקטית המיושמת בכלי התיוג והייצוג מאורגנת סביב רעיונות אלה של קוהרנטיות, וכוללת אספקטים שונים של קוהרנטיות עיצובית (למשל סוגי הייצוגים הרלוונטיים של האובייקטים המתמטיים, אופי האינטראקציה של תלמידים עם איורים דינאמיים, ועוד) לצד אספקטים של קוהרנטיות בשימוש (למשל ארגון הכיתה בקבוצות או לדיון מליאה, סוג הטכנולוגיה שזמין לתלמידים בזמן העבודה, ועוד). תיאור מפורט של קטגוריות התיוג הופיע אצל קופר ואולשר (Cooper & Olsher, 2018). קטגוריות אלה משמשות מסגרת אנליטית לניתוח של רצפי הוראה.

מתודולוגיה

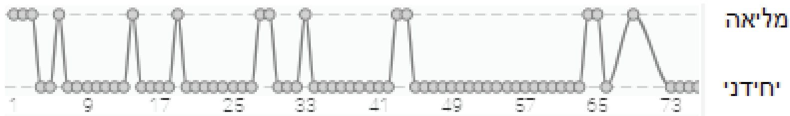
המחקר הנוכחי נערך בשיתוף שני מורים מנוסים, שתייגו את כל משאבי הלמידה בהם השתמשו במהלך רצף הוראה שארך כ- 6 שבועות (80 ו- 73 משאבים בהתאמה).
שרה (שם בדוי), לימדה בכיתה י"א (4 יחידות לימוד) את נושא המעגל בגיאומטריה אנליטית. גדי לימד בכיתה י"א (4 יחידות לימוד) את הנושא של משוואות טריגונומטריות.
בתום רצף ההוראה הרכבנו ייצוגים של רצפי ההוראה המבוססים על התיוג של המורים, וניתחנו את הייצוגים על מנת למצוא בהם דפוסים. ניתוחים אלה היוו בסיס לראיון רפלקטיבי בן כשעתיים עם המורים על השיקולים שהנחו אותם בעבודת העיצוב. לאור הראיונות, הדפוסים מוינו לשלושה סוגים: 1. מפורש: משקף גישה דידקטית מפורשת של המורים שהייתה ידועה להם. 2. משתמע: משקף גישה דידקטית שלא הייתה ידועה למורים באופן מפורש, אך הדפוס הגיוני בעיניהם והם יודעים להסביר אותו. 3. סמוי: מציף פן של גישתם הדידקטית שלא הייתה ידועה למורים קודם לכן.
שאלת המחקר קיבלה מענה במושגים האלה - כיצד השימוש בכלים, ובשפה הדידקטית המעוגנת בהם, תמך במורים בניסוח של שיקולים דידקטיים ידועים, בחשיפה של שיקולים משתמעים, ובהצפה של שיקולים סמויים.

ממצאים נבחרים

שרה

הדפוסים הדידקטיים של שרה שעלו מתוך הייצוגים היו מפורשים ומשתמעים. זאת תוצאה של הסיטואציה הלימודית ושל הרכב הכיתה - בנות לקראת בגרות שחוו כישלונות בשנים קודמות. שרה מעידה: "תוכנית הלימודים בכיתה הזאת ממש בנויה [...] להצלחה בבגרות". על כן, המשימות שבחרה שיקפו את סוגי השאלות הנפוצות במבחן הבגרות. כלי הייצוג סיפק לשרה שפה דידקטית שבעזרתה יכלה לבטא את אופי השאלות בבגרות. למשל, האמירה "רוב השאלות [הם] או לבנות משוואה או למצוא שיעורי נקודות" תורגמה על ידה לשפה המופשטת יותר של כלי התיוג - משימות של "בניית תבנית" ושל "מניפולציה/טרנספורמציה" בהתאמה.

של משימות לעבודה עצמית (ראו מחזוריות בתרשים 2)



תרשים 2: אירגון הכיתה לאורך רצף ההוראה

שרה ציינה שהייצוג של מאפיינים דידקטיים לאורך ציר הזמן מתאר נאמנה את ההוראה שלה, והיא הייתה משתמשת בו על מנת להציג לפרחי הוראה את גישתה להוראה באופן ויזואלי.

גדי

הדפוסים של גדי חשפו בין היתר גם שיקולים סמויים. למשל, בראיון הוא הצהיר שאין הבדל בין משימות כיתה (שתויגו בתור "תרגול") למשימות בית (שתויגו כ- "שיעורי בית"). אך התיוג הציף תמונה שונה: בחיתוך של "תפקיד ברצף" עם הקטגוריה "אהבתי" התברר שיש קורלציה משמעותית בין הקטגוריות: תיוג של "אהבתי" היה נפוץ יותר בקרב משימות הבית בהשוואה למשימות הכיתה. עובדה זו הפתיעה את גדי. בניסיון להסביר אותה, הוא שיער שהוא נוטה לארגן את הרצף כך שהשאלות "היפות" יינתנו כשיעורי בית, על מנת להגביר את המוטיבציה של התלמידים לעבוד בבית, והמשימות הסטנדרטיות יותר ניתנות בסיטואציה של תירגול כיתתי, שממילא מתווך על ידי מורה.

דיון

שני המורים שהשתתפו במחקר ערכו רפלקציה על שיקולים דידקטיים בעיצוב ההוראה, כפי שעלו מתוך ייצוגים של הרצף המתויג. המורים היו שונים בסגנון ההוראה שלהם ובסוג התובנות שצמחו מתוך הרפלקציה. שרה, שהקדישה מחשבה רבה לארגון רצף המשימות, לא הופתעה מהסיפור שעלה מעיון ברצף המתוייג. עבורה התועלת הייתה באפשרות לנסח שיקולי עיצוב מקומיים ("כך נראות שאלות הבגרות בגאומטריה אנליטית בנושא המעגל") במושגים יותר כלליים ומופשטים ("ברמה של 3 יחידות לימוד יש משימות של בניית מודל ושל מניפולציה, אך נדיר ששאלה משלבת בין השניים"). לעומתה, גדי הפיק תובנות חדשות לגבי ההוראה שלו. לצד עקרונות גלויים (שלא תוארו מפאת קוצר היריעה), עלו מהניתוח גם עקרונות עיצוב סמויים, שגדי לא היה מודע אליהם במפורש. עבור שניהם הייצוגים היו משמעותיים, עבור שרה בעיקר בתקשורת שלה עם אחרים, ועבור גדי גם בתקשורת שלו עם עצמו.

מקורות

Cooper, J., Olsher, S. (2018). Boundary crossing in design based research – Lessons learned from tagging didactic metadata. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 299-306). Umeå, Sweden: PME.

Pepin, B., Gueudet, G., Yerushalmy, M., Trouche, L., & Chazan, D. (2015). e-textbooks in/for teaching and learning mathematics: A disruptive and potentially transformative educational technology. *Handbook of International Research in Mathematics Education. Third edition*., 636-661.

תפקידה של טכנולוגיה (ASSISTment ו-GeoGebra) כתומכת הערכה מעצבת לקידום למידה והוראה (בדגש על משוב מעצב)

אמל קעדאן, אוניברסיטת חיפה

◆◆◆

תקציר

מחקרים רבים מראים כי קיימים קשיים בהבנת המושגים הגיאומטריים ובהכרת הצורות הגיאומטריות ותכונותיהן בכל רמות הגיל. מחקרים העלו גם, שהתפתחות החשיבה הגיאומטרית תלויה יותר בהוראה מאשר בהתפתחות הטבעית ובגיל. ולכן החוקרים הציעו ללמד את הגיאומטריה בשלבים עוקבים, כדי לעזור לתלמידים לעבור מרמה לרמה; להשתמש בייצוגים חזותיים כאמצעי הוראה; לכוון את התלמיד לחשיבה, ולהתאים בין רמת ההבנה של התלמיד לרמת המשימות שהוא מקבל. הכוונה והתאמה כזו, דורשת, בהתאם לספרות המחקרית בנושא, "הערכה מעצבת" ו-"משוב מעצב "באופן עקבי ותדיר, (Heritage, 2010; Aldon et al., 2015; Black & Wiliam, 1998) דרישה כזו, מתאפשרת ביעילות רבה אם היא משולבת עם הטכנולוגיה אשר מסייעת הן למורים לקיים הערכה מעצבת משופרת, והופך אותם ממעבירי ידע, למנהיגים המובילים את תלמידיהם ללמידה מעניינת ומאתגרת; והן לתלמידים לקחת "אחריות" על תהליך הלמידה, ומוביל אותם לחשיבה מסדר גבוה בעזרת משוב מתאים. במחקר שלנו נקרא לו "משוב מעצב" שמוגדר כמשוב שכולל רמזים ומותאם לצרכי התלמידים השונים וניתן בזמן קצר או מיידי במטרה לקדם למידה (Stacy &Wiliam, 2012).

לאור הנ"ל, במחקר זה בנינו פעילויות בעזרת שני כלים טכנולוגיים ASSISTment ו-Geogebra; אשר הכלי הראשון מתאפיין בבניית משימות אשר מתבססות על הערכה מעצבת (שכוללת משוב מעצב) והכלי השני מאפשר סביבה אינטראקטיבית. למחקר שלנו יש כמה מטרות, אחת המטרות היא לבדוק את תפקידה של הטכנולוגיה כתומכת הערכה מעצבת; מטרה שנייה, היא לבדוק את השפעתו של משוב מעצב בפעילויות של הערכה שנבנו בסביבת ה-ASSISTment בשילוב עם ה-Geogebra על הישגיהם של תלמידי כיתה ו' ועל הבנתם לנושא שטח המשולש, ואחר כך גם השפעתו על הובלת השיח המתמטי בין זוגות תלמידים, כאשר בכל זוג יש תלמיד אשר עבד על משימות עם משוב מעצב ותלמיד שני אשר עבד על משימות עם משוב שיפוטי.

השאלות העיקריות בהן עוסק המחקר הן:

1. האם סוג המשוב נתמך טכנולוגיה משפיע על הישגיהם של תלמידים הלומדים את נושא שטח המשולש? האם יש הבדל בהישגים אצל תלמידים בעלי רמות חשיבה שונות כשאר הם מקבלים משוב מעצב?
2. איזה פונקציות טכנולוגיות מספקת סביבת ה-ASSISTment בשילוב עם ה-Geogebra ואיך שינוי בפונקציות הטכנולוגיות משפיע על חמש אסטרטגיות המפתח של הערכה מעצבת אצל התלמידים?
3. האם למשוב המעצב השפעה על הובלת השיח המתמטי בעת פתרון משימה על נושא שטח המשולש בין תלמיד שקיבל משימות עם משוב מעצב לביו תלמיד שקיבל משימות עם משוב שיפוטי?

שיטת המחקר משלבת בין שיטת מחקר כמותית ושיטת מחקר איכותנית לשם הבנה טובה יותר של התופעה הנחקרת. במחקר השתתפו 60 תלמידים משתי כיתות הטרוגניות (ו'1+ ו'2), 30 תלמידים בכל כיתה, מבית ספר יסודי ערבי במשולש, בית הספר נבחר באופן אקראי.

אחרי שסיימו התלמידים ללמוד את נושא שטח המשולש, שתי הכיתות קיבלו משימות הערכה שנבנו על ידי החוקרת בעזרת סביבת ה-ASSISTment וה-Geogebra בחדר המחשבים. כיתה אחת קיבלה את המשימות עם משוב שיפוטי

(של נכון או לא נכון) ואילו כיתה שנייה קיבלה את אותן משימות עם משוב מעצב.

לפני הניסוי, התלמידים בשתי הכיתות עברו מבדק בנושא שטח המשולש שמטרתו לבדוק שליטת התלמידים בנושא וכן שאלון "ואן הילה" שמטרתו לבדוק את רמת החשיבה הגיאומטרית אצל התלמידים. אחר כך, התלמידים בשתי הכיתות נכנסו לחדר המחשבים (כל כיתה בנפרד) ופתרו שלוש פעילויות על שטח המשולש בשלושה שלבים: שלב ראשון, מתן שלוש פעילויות שהתלמידים פותרים כיחידים דרך סביבת ה- ASSISTment עם קישורים לגאוגברה.

אחרי שלב זה התלמידים משתי הכיתות עברו שוב מבדק סיום על נושא שטח המשולש במטרה לבדוק את הידע של התלמידים על שטח המשולש אחרי הניסוי. המשתנה התלוי הוא ההישגים של התלמידים והמשתנה הבלתי תלוי הוא סוג המשוב.

שלב שני, החוקרת בחרה ארבעה זוגות בעלי הישגים גבוהים ועם יכולת לנהל דיון (בכל זוג היה תלמיד אחד מכל קבוצה). זוג אחד חזר על חלק מהמשימות (כזוג) בליווי החוקרת בעזרת הכלים הטכנולוגיים במטרה לצפות בשיח המתרחש בין שני התלמידים ולבדוק את השפעתה של הטכנולוגיה על ההערכה המעצבת, עם שני תלמידים אלה נערך גם ראיון לאחר החזרה על המשימות.
שלושת הזוגות האחרים התבקשו לפתור שאלה על נושא שטח המשולש בנוכחות החוקרת, במטרה לצפות בשיח המתמטי שמתרחש ולבדוק את ההובלה של שיח מתמטי זה בשני מישורים המישור המתמטי והמישור של סוג האינטראקציה בין שני התלמידים.
שלב שלישי, אחרי קבלת התוצאות מהסביבה ומהנתונים של השאלון והמבדק הוחלט על דיון כיתתי לתלמידי קבוצת הניסוי שמטרתו לתת תמונה יותר טובה על תשובות התלמידים והחוויה שהם עברו בניסוי.

מהתוצאות שקיבלנו מהמשוב המסכם של סביבת ה-ASSISTment ראינו כי המשוב המעצב שסיפקה הסביבה לקבוצה שקיבלה משוב מעצב עזר לתלמידים בתיקון הטעויות שלהם יותר מאשר המשוב השיפוטי שניתן לקבוצה שקיבלה משוב שיפוטי. דבר שנתמך גם בממצאים הכמותיים של מבדק הסיום אשר ממצאיו הראו כי יש עלייה מובהקת בהישגיהם של תלמידי הקבוצה שקיבלו משימות עם משוב מעצב בהשוואה לקבוצת התלמידים שקיבלו אותן משימות עם משוב שיפוטי אצל כל התלמידים מכל רמות החשיבה.
בעזרת המשוב המעצב דימוי המושג על שטח המשולש (ובין היתר גם על גובה במשולש) שנמצא אצל התלמידים התקרב להגדרת המושג. אצל התלמידים נוצר קונפליקט כאשר הבנתם למושג לא הייתה שלמה, והמשוב המעצב עזר להם לתקן את הטעויות שלהם. מצד שני, תלמידים אשר הייתה להם תפיסה מוטעית ולא ניסו להיעזר במשוב המעצב לא הייתה עלייה בהישגיהם וגם לא הבינו את המושג בצורה טובה יותר.

השפעתו של המשוב המעצב בלטה גם כאשר בדקנו את הובלת השיח המתמטי בעת פתרון של אחת המשימות בנושא שטח המשולש. מניתוח השיח עולה כי השיחה בין שלושת הזוגות לא הייתה מאוזנת, כך ששלושת התלמידים מהקבוצה אשר עבדו על משימות עם משוב מעצב הובילו את השיח המתמטי הן מבחינת תוכן מתמטי והן מבחינת אינטראקציה או בשני תחומים אלו יחדיו. אולם, שלושת התלמידים מקבוצה אשר עבדו על משימות עם משוב שיפוטי עקבו אחריהם וההיגדים שהם השתמשו בהם היו תגובה למה שהתלמידים מקבוצה של תלמידים אשר עבדו על משוב מעצב בדרך כלל יזמו (Sfard, 2012).

עוד, התוצאות שקיבלנו מסביבת ה- ASSISTment מראות כי לתלמידים עם רמת חשיבה גבוהה היו תשובות נכונות

יותר מאשר תלמידים בעלי רמת חשיבה נמוכה בשתי הקבוצות. הדבר נתמך גם בניתוח הסטטיסטי שביצענו על תוצאות המבדק אחרי הניסוי, אשר הראה הבדלים מובהקים סטטיסטית בין הרמות השונות של החשיבה אצל התלמידים. לעומת זאת, תלמידים מכל רמות החשיבה השיגו שיפור בתוצאות שלהם ביחס למבדק הקדם אחרי הניסוי בקבוצת התלמידים אשר עבדו על משימות עם משוב מעצב, לעומת תלמידים מקבוצת התלמידים אשר עבדו על משימות עם משוב שיפוטי שלא היה הבדל מובהק סטטיסטי בהישגים לפני ואחרי הניסוי.

כמו כן, מתוך התצפיות, הראיונות והדיון הכיתתי ראינו את תרומתה של סביבה שתומכת הערכה מעצבת כמו ה-ASSISTment על עיצוב ההוראה של המורה ועל קידום תהליך הלמידה אצל התלמידים.

ביבליוגרפיה

Aldon, G., Cusi, A., Morselli, F., Panero, M., & Sabena, C. (2015). Which support technology can give to mathematics formative assessment? The FaSMEd project in Italy and France. "*Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*", n. 25, Supplemento n.2, 2015 G.R.I.M. (Departimento di Matematica e Informatica, University of Palermo, Italy).

Black, P., &Wiliam, D. (1998). Inside the Black Box: Raising Standards through Classroom Assessment. *The Phi Delta Kappan, 80*(2), 139–148.

Heritage, M. (2010). Formative assessment: *Making it happen in the classroom*, Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sfard, A. (2012). Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51 – 52, 1–9.

Stacey, K., Wiliam, D., (2012). Technology and Assessment in Mathematics.In Clements, M. A., Bishop, A. J., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). (2013), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 721-751). New York, NY: Springer New York.

השיח הפדגוגי והשיח המתמטי – הילכו יחדיו?

גלית שבתאי, מכללת סמינר הקיבוצים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
עינת הד מצויינים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

◆◆◆

רקע תיאורטי

מחקרנו לוקה כנקודת פתיחה את התאוריה הקומוגניטיבית של ספרד (Sfard, 2008), לפיה למידת מתמטיקה היא סוג של השתתפות בשיח. השיח המתמטי מורכב ממילות-מפתח (כגון "שתיים", "פונקציה" או "משולש שווה שוקיים"), מתווכים סימבוליים (f(x), Δ ,2), היגדים מקובלים ("4=2+2", "במשולש שו"ש זויות הבסיס שוות") ורוטינות לייצור היגדים מקובלים (למשל, כפל, הוכחת חפיפת משולשים, גזירת פונקציה)(Sfard, 2008). ההשתתפות בשיח המתמטי יכולה להתקיים על רצף בין ריטואל וחקירה (לביא וספרד, 2016). ריטואל הוא רוטינה המבוצעת ביזמת אדם אחר ובלי שנדרשות במהלך ביצועה החלטות עצמאיות של המבַצע. השתתפות כזו כוללת צורך של הלומד בקבלת אישור ממקור הסמכות על נכונות התהליך והתוצאה. בנוסף, השתתפות זו מאופיינת בהעדר גמישות בביצוע התהליך ובשימת דגש על שלבי ההליך, ולא על התוצאה אליה שואפים להגיע. רוטינת חקירה, לעומת זאת, היא רוטינה שמטרתה ייצור נרטיב, לרב על אובייקט מתמטי מסוים, והיא מבוצעת ביוזמת הלומד כאשר כל שלביה מנומקים על-ידי המבצע באמצעות הסתמכות לוגית על שלבים קודמים.

המורה הוא המוביל את תהליכי ההוראה-למידה בכיתתו (Tabach, & Nachlieli, 2016). הד מצויינים, טבח ונחליאלי (Heyd-Metzuyanim, Tabach & Nachlieli, 2016) הגדירו הוראה ריטואלית כהוראה המעודדת השתתפות ריטואלית והוראה חקירתית כהוראה המאפשרת הזדמנויות לתלמידים להשתתפות חקירתית. למרות שהוראה חקירתית נמצאה כמועילה לתלמידים, הן מבחינת פיתוח הזהות המתמטית, והן מבחינת פיתוח הבנה מושגית (Boaler & Greeno, 2000; Hiebert & Grouws, 2007; Schoenfeld, 2014) מחקרים (,Nachlieli & Tabach 2018; Resnick, 2015) מראים שמורים רבים נמנעים מהוראה חקירתית המערבת דיאלוג, שיח כיתתי ופתרון בעיות מורכבות.

שבתאי והד מצויינים (Shabtay & Heyd- Metzuyanim, 2017) בחנו דרך השיח הפדגוגי של המורים את הגורמים להימנעות מהוראה חקירתית. לצורך מחקר זה הן הגדירו את המונח 'שיח פדגוגי' כשיח העוסק בתהליכי הלמידה (מה ללמד), בדרכי ההוראה (כיצד ללמד) ובנמעני הלמידה (את מי ללמד). במחקר המשך של שבתאי והד מצויינים (Shabtay & Heyd- Metzuyanim, 2018) נמצא כי השיח הפדגוגי של המורים מאופיין בשיח על שני היבטים של הוראה: "הקנייה" ו"חקירה". השיח שבמרכזו עומד ההיבט של ההקנייה מאופיין בתפקיד המורה כמסביר וכאחראי בלעדי ללמידה של התלמידים, בעוד השיח שבמרכזו עומד ההיבט של חקירה, מאופיין בתפקיד התלמידים ובפעילות שלהם כמייצרים נרטיבים מתמטיים.

מטרת המחקר

המחקר הנוכחי בוחן את הקשרים בין השיח המתמטי (ריטואל וחקירה) והשיח הפדגוגי (מה יילמד, איך יילמדו ומי ילמד) של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי במטרה להבין טוב יותר את הסיבות להימנעות של מורים מהוראה חקירתית.

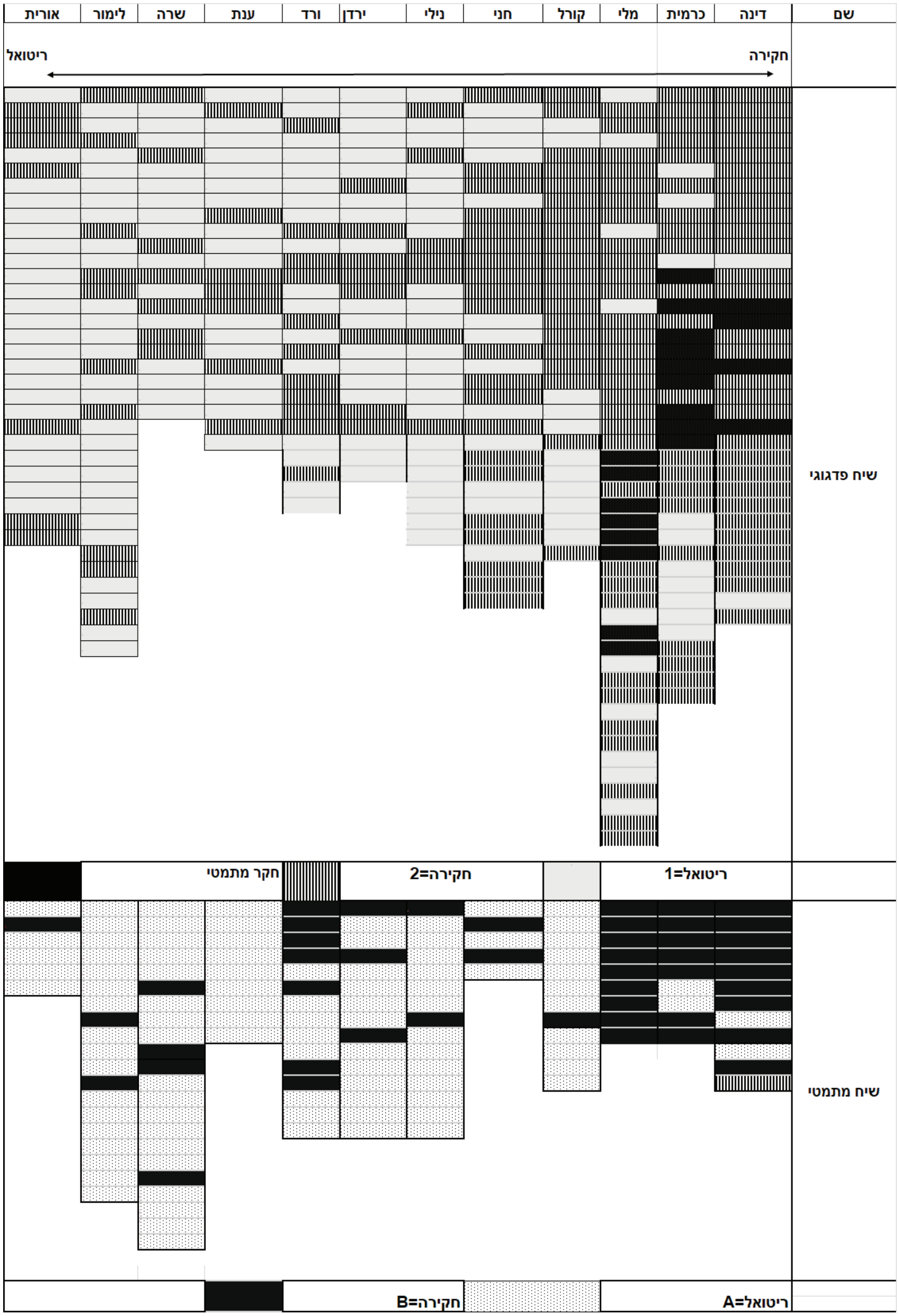
מתודולוגיה

במחקר השתתפו 12 מורות למתמטיקה המלמדות בבתי ספר יסודיים. המורות השתתפו בראיון שעוצב באופן שיעודד שיח פדגוגי ביחס להוראה שלהם. בין השאר, המורות התבקשו להתייחס לסיפורים קצרים המתארים סגנונות הוראה

שונים לבעיה מתמטית זהה (בנושא שברים) (ראה Shabtay & Heyd- Metzuyanim, 2017 להרחבה בנושא זה).
בסוף הריאיון המורות התבקשו לענות על שאלה מתמטית העוסקת באחוזים. בשאלה המורות התבקשו להחליט האם הנחה של 10% על מוצר ולאחר מכן ייקור של 10% יובילו למחיר זהה למחיר שיתקבל מייקור ולאחר מכן הנחה. הבעיה מזמנת הכללה אלגברית על מנת להוכיח את הנרטיב המתמטי של שוויון בין שני התהליכים (הנחה וייקור לעומת ייקור והנחה). הראיונות תוכתבו במלואם ונותחו. הניתוח כלל אפיונים של השיח הפדגוגי (מה יילמד, איך יילמד ומי ילמד) ושל השיח המתמטי (שימוש בנרטיבים מתמטיים מקובלים, ובמתווכים ויזואליים, גמישות בביצוע התהליך, שימוש בעקרונות או תהליכים מתמטיים מוכרים).
הראיונות קודדו באקסל, כך שהמשפטים הריטואליים בשיח הפדגוגי של המורה נצבעו באפור בהיר ואילו המשפטים החקירתיים נצבעו באפור כהה. החלק של השיח המתמטי נצבע בהתאם כך שכשהמורה השתמשה ברוטינות ריטואליות אמירותיה נצבעו באפור מנוקד בהיר, וכשהיא השתמשה ברוטינות חקירה אמירותיה נצבעו בצבע שחור.

ממצאים

נמצא כי המורות היו מגוונות מאוד בשיח הפדגוגי שלהן. שלוש מורות השתמשו בעיקר בשיח חקירתי בדברן על מה ללמד, כיצד ללמד ואת מי ללמד. יתר המורות (N=9) היו בעלות שיח מעורב, אם כי נמצאו הבדלים במידת המעורבות של השיח (ראו איור מספר 1) וחלק מהמורות (N=5) נטו יותר לשיח ריטואלי.
השיח המתמטי של כל המורות התאפיין בבחירה בדוגמא מספרית פשוטה (100) על מנת להצדיק את תשובתן. דוגמא זו לא איששה את תשובתן, וגרמה להן למבוכה. כמו כן היא הובילה לצורך בהכללה. שתי מורות בחרו מיוזמתן להכליל בעזרת אלגברה ואכן הצליחו להגיע להכללה מתמטית באופן עצמאי. שתי מורות נוספות ניסו להגיע להכללה מתמטית והתחילו בתהליך אך לא הצליחו לסיימו וביקשו סיוע. יתר המורות לא ניסו להגיע להכללה או להתחלה של הכללה ומראש ביקשו סיוע מהסמכות החיצונית.
נמצא כי ככל שהשיח הפדגוגי היה יותר ריטואלי, כלומר מורות שציינו את החשיבות של התרגול ושל הפרוצדורות כמרכיב משמעותי בהוראה, גם השיח המתמטי שלהן נטה להיות ריטואלי. לעומת זאת, כאשר השיח הפדגוגי היה חקירתי, דהיינו, עסק בדיונים מתמטיים עם התלמידים, ובהבניית הידע מתוך ידע קודם שנלמד, השיח המתמטי היה לא אחיד. לעיתים הוא היה ריטואלי ולעיתים חקירתי. ממצאים אלו הינם בהלימה למחקרים קודמים (Heyd-Metzuyanim, Munter, & Greeno, 2017), בהם נמצא שמורה שהודרכה להוראה חקירתית התייחסה בשיח הפדגוגי שלה רק לחלק מהמאפיינים של הוראה זו, והחמיצה מאפיינים אחרים. בדומה למורה זו, גם בקרב המורות במחקר שלנו הודגשו יותר המאפיינים ה"חברתיים" של למידה חקירתית, דהיינו - עבודה בקבוצות והתמודדות עצמאית של תלמידים עם משימות. לעומת זאת, המאפיינים המתמטיים של ההוראה החקירתית - כולל התייחסות מעמיקה למושגים מתמטיים, חשיפה לייצוגים שונים לאובייקטים מתמטיים וקישור ביניהם לא זכו לרוב להתייחסות, גם בקרב המורות שהדגישו את המאפיינים החברתיים של הלמידה החקירתית. בהתאם לכך, השיח המתמטי של המורות בעלות השיח ה"מעורב" אופיין כריטואלי יחסית. איור מספר 1 מדגים את הקשר בין השיח הפדגוגי והמתמטי של 12 המורות. באיור ניתן להבחין כי ככל שהשיח הפדגוגי של המורות צבוע בצבע כהה יותר, דהיינו הוא חקירתי יותר, גם השיח המתמטי שלהן צבוע בשחור, כלומר הוא שיח חקירתי.



איור מספר 1: הקשר בין השיח הפדגוגי והשיח המתמטי של המורות

סיכום ודיון

הממצאים מעידים על קשר אפשרי בין השיח הפדגוגי של המורות, ודרך ההשתתפות שלהן בלמידת מתמטיקה, קרי, השיח המתמטי שלהן. כמובן שזאת בהסתייגות, לאור המספר המצומצם של המורות שנחקרו, ולאור הבחינה המצומצמת של השיח המתמטי (באמצעות שאלה אחת בלבד). בנוסף, ייתכן שתגובות המורות היו ייחודיות

לסיטואציה שבה המראיינת היוותה דמות סמכות עבורן (מדריכה מחוזית). לפיכך ייתכן שאלמנט הריצוי או לחץ רגשי בא לידי ביטוי בראיון אתה. יחד עם זאת, הממצאים מאששים מחקרים קודמים (למשל Heyd- Metzuyanim, Munter & Greeno, 2017; Sfard, 2016) אשר העלו את הסברה כי העיסוק החקירתי במתמטיקה עצמה קשורה קשר הדוק לשיח הפדגוגי של המורים.

ביבליוגרפיה

לביא, ע., ספרד, א., (2016). עצמים מדיבורים : כיצד ילדים קטנים יוצרים מספרים בתוך שיח. כתב עת לחינוך ולעיון בחינוך מתמטי, 4, עמו' 68-22.

Boaler, J., & Greeno, J. (2000). Identity, agency, and knowing in mathematics worlds. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics education* (pp. 171–200). Westport, CT: Ablex.

Heyd- Metzuyanim, E., Munter, C., Greeno, J. (2017). Conflicting frames: a case of misalignment between professional development efforts and a teacher’s practice in a high school mathematics classroom. *Educational studies in mathematics,* 97 (1), 21-37.

Heyd-Metzuyanim, E., Tabach, M., & Nachlieli, T. (2016). Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19, 547–574.

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students’ learning. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1, 371-404.

Nachlieli, T. & Tabach, M. (2018). Ritual-enabling opportunities-to-learn in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, (Vol. 3) pp 1–19 https://doi.org/10.1007/s10649-018-9848-x

Resnick, L. B. (2015). Talking to learn: The promise and Challenge of Dialogic Teaching. *In Socializing Intelligence Through Academic Talk and Dialogue* (pp. 441–450). American Educational Research Association.

Schoenfeld, A.E. (2014) What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A Story of Research and Practice Productively Intertwined. *Educational Researcher*, 43 (8), 404–412.

Sfard, A. (2016). Ritual for ritual, exploration for exploration: Or, what learners are offered is what you get from them in return. In J. Adler & A. Sfard (Eds.), *Research for Educational Change* (pp. 41–63). Elsevier.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge: Cambrige University Press.

Shabtay, G., & Heyd-Metzuyanim, E. (2017). Teachers’ discourse on students’ conceptual understanding and struggle. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4) (pp. 177–184). Singapore: PME.

Shabtay, G., & Heyd-Metzuyanim, E. (2018). Examining teachers' discourse on students' struggle through figured worlds. Bergqvist, E., Österholm, M., Granberg, C., & Sumpter, L. (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4). (pp.155-163). Umeå, Sweden: PME.

Tabach, M., & Nachlieli, T. (Eds.). (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 91(3), 299-306.

השפעת טיפוח מטה קוגניציה של מורים ותלמידיהם על תפיסת המסוגלות העצמית ועל תפקיד הלומד במרכז בעת השיח הכיתתי

ענת שילה, אוניברסיטת בר אילן
ברכה קרמרסקי, אוניברסיטת בר אילן

מחקר זה בחן את ההשפעה של טיפוח מטה-קוגניטיבי על הוראת מתמטיקה בבית ספר יסודי בקרב מורים ותלמידיהם בטווח הקצר ולאורך זמן. נבדקו מספר מדדים, בהרצאה זו נתמקד בתיאור הממצאים המתייחסים **למסוגלות עצמית ולתפקיד הלומד במרכז בעת השיח הכיתתי**. קבוצת הניסוי הושוותה לקבוצת ביקורת שלא נחשפה למטה-קוגניציה.

במחקר השתתפו 32 מורים למתמטיקה המלמדים בכיתות ה' ו 849 תלמידיהם אשר פתרו בעיות בנושא "תובנה מספרית". מניתוח הממצאים הכמותיים והאיכותיים נמצא כי הישגי קבוצת הניסוי היו גבוהים מזו של קבוצת הביקורת מיד לאחר ההתערבות ולאורך זמן. למחקר זה יש תרומה תאורטית ומעשית לטיפוח ההישגים במתמטיקה בגישה מטה-קוגניטיבית.

מבוא

בעשורים האחרונים חלו תמורות משמעותיות בתפיסות על התכנים ועל הסגנון של הוראת המתמטיקה. הסטנדרטים החדשים של החינוך המתמטי מדגישים בניית ידע משמעותי וטיפוח הלומד במרכז באמצעות פתרון בעיות תובנה מספרית ושימוש בכלים המעודדים שיח. במחקרים נמצא כי למרות המאמצים הרבים שנעשו במשך השנים להכשיר תלמידים לפתח מיומנויות אלה, לומדים רבים בגילים שונים מתקשים עדיין לרכוש אותן. במחקרים נמצא כי מורים בעלי מיומנויות מטה קוגניטיביות, מספקים הסברים מתמטיים טובים יותר, מציגים נושאים בצורה טובה יותר, קשובים יותר לתלמידיהם, ורמת השיח בכיתותיהם גבוהה יותר. כל אלה מובילים לכך שההוראה שלהם איכותית יותר והישגי תלמידיהם טובים יותר (Mevarech & Kramarski, 1997, 2014).

מעט מחקרים נעשו על המורים כדי לבדוק באיזו מידה הם מפעילים את המרכיבים המטה קוגניטיביים ומה השפעתם על הישגי תלמידיהם, מחקרים שנעשו מצביעים כי המורים משתמשים במרכיבים אילו בצורה סמויה ולא דנים בהם בצורה מפורשת. מכאן המלצת החוקרים להפעיל תכניות מובנות לטיפוח המטה קוגניציה אצל המורים ויישומם אצל תלמידיהם בכיתה. במחקר הנוכחי טפחנו את המיומנויות המטה קוגניטיביות של המורים ובדקנו את ההשפעה על המסוגלות העצמית של המורים והתלמידים ועל תפקיד הלומד במרכז בעת השיח הכיתתי.

רקע תאורטי

- **מטה-קוגניציה** היא תהליך של "חשיבה על חשיבה" המופעל במהלך ההתמודדות עם פתרון משימות מתחומים שונים. למטה-קוגניציה **מבנה מורכב רב-ממדי** הכולל שני מרכיבים מרכזיים: **ידע על הקוגניציה** הכוללת את הידע של הלומד על עצמו, על המשימה ועל האסטרטגיה לפתרון המשימה, **ורגולציה של הקוגניציה** הכוללת יכולת ויסות ושליטה על התהליך (Flavell, 1979; Schraw, 1998).
- **מסוגלות עצמית** (self-efficacy) היא התפיסה של הלומד את יכולתו לבצע מטלות מסוימות. בנדורה (1997) מצא שבני אדם המאמינים ביכולתם לבצע את המטלות ולהשיג את היעדים ינקטו צעדים אקטיביים וישאפו להשיג מטרות מוגדרות . בעלי המסוגלות העצמית הגבוהה יותר , כלומר מי שמאמינים יותר ביכולתם לבצע את המשימה , הם שישקיעו את המאמץ , יתמידו ויגיעו להישגים גבוהים בביצועה של המשימה (Bandura, 1997).

מטרות המחקר

- פיתוח תכנית התערבות ייחודית לטיפוח המטה קוגניציה תוך התבססות על מודל של Zimmerman (2008) המייחס חשיבות למעגליות במודעות המטה קוגניטיבית.
- חקר השפעת תכנית ההתערבות על המסוגלות העצמית של מורים ותלמידיהם ועל תפקיד הלומד במרכז בעת השיח הכיתתי.
- הערכת האפקטיביות של תכנית ההתערבות באמצעות כלים כמותיים וכלים איכותניים המתמקדים בתהליך הלמידה בזמן אמת.

מתודולוגיה

אוכלוסייה: במחקר השתתפו 32 מורים למתמטיקה בבית ספר יסודי 849 תלמידיהם שנדגמו בצורה אקראית וחולקו לשתי קבוצות.

כלי המחקר: שאלוני מטה קוגניציה, שיפוט עצמי ומסוגלות עצמית, מבחני ידע מתמטי, צילום שיעור וידאו בכל אחת מהכיתות, פתרון בעיה מילולית בקול של קבוצת מיקוד מבין תלמידים.

תכנית ההתערבות: התמקדה בהדרכת המורים בנושא "תובנה מספרית " שנמשכה 16 שעות ובלווי המורים בהעברת הנושא בכיתותיהם. קבוצת הניסוי נחשפה לעקרונות המטה קוגניציה וחשיבותה בלמידה והוראה תוך דגש על שאילת שאלות מטה קוגניטיביות עצמיות(Kramarski & Michalsky, 2013).

ממצאים מרכזיים ותרומת המחקר

מניתוח השאלונים נמצא כי מורי ותלמידי קבוצת הניסוי שיפרו באופן מובהק את המיומנויות המטה קוגניטיביות וכן את המסוגלות והשיפוט העצמי, לא נמצא שיפור בקרב משתתפי קבוצת הביקורת. ויותר מכך, המסוגלות העצמית בקרב התלמידים, מקבוצת הביקורת, ירדה לאחר ההתערבות.

מהניתוח האיכותני של השיעורים המצולמים בווידיאו נמצא כי קיימים הבדלים משמעותיים בין הקבוצות באשר למיומנויות מטה קוגניטיביות, רמת השיח ותפקיד הלומד במרכז.

בקבוצת הניסויי, המורה השתמשה במגוון מהלכי דיבור שכללו **זמן לחשיבה**, **עודדה אותם להשתתף**, **ביקשה מהם להסביר מדוע פעלו בדרך שפעלו**, **וחזרה על חלק מהתשובה של התלמיד** כמו כן, **היא ביקשה מהתלמידים להביע את דעתם על התשובה**. בקבוצת זו, התלמידים והמורה השתמשו במגוון היגדים מטה קוגניטיביים. השיח היה ברמה בינונית וגבוהה. המורה לא הרבתה במתן הסברים, אלא כיוונה את תלמידיה באמצעות שאלות לתת הסברים בעצמם. לעומת זאת, **בקבוצת הביקורת**, המורה והתלמידים השתמשו בעיקר בהיגדי ידע דקלרטיבי וידע אסטרטגי-פרוצדוראלי. לא נצפו הסברים, והשיח היה ברובו **ברמה נמוכה** ואופיין בתשובות ישירות לשאלות קצרות ללא מתן זמן לחשיבה.

תרומת המחקר: בתחום התאורטי, במחקר נמצא כי על ידי טיפוח מיומנויות מטה קוגניטיביות של מורים ניתן לשפר את המסוגלות העצמית של מורים ותלמידיהם ואת תפקיד הלומד במרכז. ממצאי המחקר מחדדים גם ממצאי מחקרים קודמים שבהם נמצא כי טיפוח מטה-קוגניציה באמצעות שאילת שאלות עצמיות המכוונות לתכנון, לניטור ולהערכה, יעיל לשיפור הישגים לאורך זמן. עוד נמצא כי יש חשיבות רבה לטיפוח מטה-קוגניציה של מורים באמצעות **הוראה מפורשת**. לסיכום, המחקר חידד ומיקד את התפיסות התאורטיות באשר **לדרכי טיפוח** מטה-קוגניציה וכן את הקשר בין טיפוח זה לבין מסוגלות עצמית של **מורים ותלמידיהם הצעירים**.

בתחום המתודולוגי, במחקר נעשה שימוש במגוון רחב של כלי מדידה כמותיים ואיכותניים המתייחסים לתהליך הלמידה בזמן אמת (צילומי וידיאו של שיעורים, פתרון בעיה מילולית בקול).

בתחום היישומי, במסגרת המחקר פותחה תכנית התערבות **ייחודית להכוונה מטה-קוגניטיבית בתחום התובנה המספרית**.

מקורות

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: Freeman.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychology, 34*(10), 906-911. doi:10.1037/0003-066X.34.10.906

Kramarski, B., & Michalsky, T. (2010). Three metacognitive approaches to training pre-service teachers in different learning phases of technological pedagogical content Knowledge. *Educational Research and Evaluation, 15*(5), 465-485. doi:10.1080/13803610903444550

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal, 34*(2), 365-394. doi:10.3102/00028312034002365

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2014). *Critical Maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. Paris: OECD.

Schraw, G. (1998). Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science, 26*(1-2), 113-125.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological development, and future prospects. *American Educational Research Journal, 45*(1), 166-183. doi:10.3102/0002831207312909

כפל וחילוק במספרים טבעיים: ידע וחוללות עצמית של מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות חינוך מיוחד

איריס שרייבר, סמינר הקיבוצים, אוניברסיטת בר אילן

רחל פילו, סמינר הקיבוצים

◆◆◆

מבוא

מחקר זה מתמקד בהוראת הכפל והחילוק במספרים טבעיים אשר, על פי תוכה"ל במתמטיקה לחינוך היסודי, מהווה חלק משמעותי מפרק המספרים הטבעיים (משה"ח, 2006). במסגרת המחקר נבדקו שני גורמים העשויים להשפיע על תהליך ההוראה-למידה: ידע המורים והחוללות העצמית שלהם.

ידע המורים נבדק על פי המסגרת התיאורטית של דבורה בול ועמיתיה, אשר הגדירו ארבעה מרכיבי ידע (Ball, Thames & Phelps, 2008):

-ידע תוכן שגרתי. למשל, ידע לפתור תרגיל.

- ידע תוכן לא שגרתי. למשל, ידע של דרכי פתרון נוספים לבעיה.

- ידע פדגוגי של תוכן והוראה. למשל, ידע של דרכי ייצוג/המחשה לבעיה.

- ידע פדגוגי של תוכן ותלמידים. למשל, ידע לגבי שגיאות אופייניות של תלמידים.

הגורם השני שנבדק הוא גורם מתחום הרגש, חוללות עצמית (self-efficacy).

המונח חוללות עצמית הוצג לראשונה על ידי בנדורה והוגדר כמידת הביטחון של אדם ביכולתו לארגן ולבצע בהצלחה את הדרוש לשם השגת תוצאה רצויה (Bandura, 1986). חוללות עצמית עשויה להשפיע על תהליך ההוראה כיוון שתפקוד המורה בכיתה יכול להיות קשור ברמת הביטחון שלו למלא את תפקידו בהצלחה.

רקע תיאורטי

על פי מסמך ההתאמות לכיתות חינוך מיוחד, למידת הכפל והחילוק מהווה חלק חשוב בלימודי המתמטיקה בכיתות אלה (משה"ח, 2014). על פי המסמך יש לכלול במסגרת לימודי המתמטיקה ביצוע חישובים שונים וקישור בין הפעולות לבין ייצוגים שונים.

חוקרים מדגישים את החשיבות לביסוס משמעויות הכפל והחילוק ולשימוש באמצעי המחשה בתהליך ההוראה בכיתות חינוך מיוחד(Cimen, 2014; Boaler, 2015) ומאפיינים שגיאות של תלמידים, כמו למשל שגיאות בשימוש בחוקים או שגיאות בשימוש באלגוריתמים (Bainbridge, 1981; Radatz, 1997).

המלצות משרד החינוך והממצאים המחקריים הללו מדגישים את החשיבות שיש לידע של מורה המלמד מתמטיקה בכלל ובכיתות החינוך המיוחד בפרט.

במחקרים שבדקו מרכיבי ידע של מורים למתמטיקה בחינוך המיוחד מודגשת החשיבות של ידע ספציפי למורי מתמטיקה בחינוך מיוחד הכולל מרכיבי ידע תוכני ופדגוגי (Van-Inger et al. 2016).

כמו כן, נמצא כי איכות ההוראה של מורים בכיתות חינוך מיוחד קשורה בידע שלהם (התוכני והפדגוגי) בתחום הדעת, לצד הידע שלהם בהיבטים ספציפיים לחינוך מיוחד (Brownell et al. 2010).

בהתייחס לחוללות עצמית של מורים במסגרות חינוך מיוחד, נמצא כי ככל שהחוללות העצמית גבוהה תפקודו של המורה משתפר (Skaalvik & Skaalvik, 2010) וכי מורים בעלי חוללות עצמית גבוהה מאמינים יותר ביכולת התלמידים ומצליחים יותר לקדם הישגים (Tschannen-Moran & Barr, 2004).

מטרות המחקר

- לבדוק את ידע המורים ואת רמת החוללות העצמית שלהם (בנוגע לארבעת מרכיבי הידע השונים) בנושא כפל וחילוק במספרים טבעיים.
- לבדוק האם קיימים הבדלים בין רמת הידע/רמת החוללות העצמית של המורים בהתייחס לסוגי ידע שונים ו/או בהתייחס לפעולות השונות.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 64 מורות למתמטיקה בכיתות חינוך מיוחד ללקויי למידה בעלות מגוון שנות וותק בהוראת מתמטיקה ומגוון מסגרות הכשרה.

לצורך המחקר נבנו שני שאלונים שעברו פיילוט, תוקפו ושופרו:

שאלון עמדות לבדיקת רמת חוללות עצמית של המורים. השאלון כולל 24 היגדים (אותם דירגו המורים בסולם מ- 1 עד 5 על פי מידת הביטחון שלהם בהיגד) הקשורים למרכיבי הידע השונים. בשאלון הופיעו 3 היגדים לגבי כל מרכיב ידע בכל פעולה.

לדוגמא: "דרג/י את מידת הביטחון שלך:"

- לפתור תרגילי כפל במסגרת לוח הכפל (היגד הקשור לביטחון בידע תוכן שגרתי)
- לצפות מראש שגיאות תלמידים בתרגילי הכפל (היגד הקשור לביטחון בידע פדגוגי של תוכן ותלמידים).

שאלון לבדיקת ידע הכולל כ- 40 פריטים פתוחים. הפריטים נבנו בהתאם לדרישות והמלצות מסמכי תוכה"ל, ציוני הדרך לתוכה"ל ומסמך ההתאמות לחינוך מיוחד שפורסמו על ידי משרד החינוך. בשאלון הופיעו 5 שאלות לגבי כל מרכיב ידע בכל פעולה. לדוגמא:

- מבלי לבצע חישוב מלא, אמד/י את תוצאת התרגיל 326:25 (שאלה הבודקת ידע תוכן לא שגרתי)
- הציע/י המחשה המתאימה להוראת התרגיל 6x7 (שאלה הבודקת ידע פדגוגי של תוכן והוראה)

מהלך המחקר: כל מורה מילאה קודם את שאלון החוללות העצמית (על מנת ששאלון הידע לא ישפיע על המענה לשאלון החוללות) ולאחר מכן את שאלון הידע ללא שימוש במחשבון.

ממצאי המחקר:

לממצאי השאלונים בוצעה בדיקת מהימנות אלפא של קרונבך, חושבו מדדי סטטיסטיקה תיאורית ובוצע ניתוח סטטיסטי בעזרת ANOVA ומבחני T.

בהתייחס להבדלים בין סוגי הידע השונים:

בשאלון החוללות העצמית הוגדר משתנה חדש שהוא קבוצת כל השאלות של סוג ידע מסוים. נמצא כי קיים הבדל בין ממצאי המשתנים החדשים שהוגדרו $F=37.83$, $p<0.001$.

גם בשאלון הידע נמצאו הבדלים משמעותיים בין סוגי הידע השונים. למשל, אם אחוז ממוצע של משיבים נכון בידע תוכן שגרתי עמד על 94%, הרי שבידע של תוכן והוראה האחוז הממוצע של משיבים נכון הוא 73% ובידע של תוכן ותלמידים האחוז הממוצע הוא 60%. בבדיקת מובהקות הבדלי הממצאים של זוגות שאלות באותה פעולה, כל שאלה בודקת סוג אחר של ידע, נמצא כי בכל הזוגות קיים הבדל משמעותי מאד $p<0.001$.

בהתייחס להבדלים בין כפל לחילוק:

נמצאו הבדלים בין רמת החוללות העצמית של המורים בנושא כפל לבין רמת החוללות העצמית שלהם בנושא חילוק (החוללות העצמית בנושא הכפל גבוהה מרמת החוללות העצמית בנושא חילוק): כ-20% מהמורים דירגו נמוך יותר את הביטחון שלהם בהיגדים לגבי חילוק מאשר לגבי כפל, הן בקשר לידע תוכן, והן בקשר לשגיאות ילדים.

בניתוח ממצאי זוגות היגדים זהים (האחד לגבי כפל והשני לגבי חילוק) נמצא כי ב- 10 מתוך 12 זוגות של היגדים נמצא הבדל מובהק $p<0.01$.

בשאלון הידע, בשאלות הקשורות לידע תוכן ותלמידים, נמצאו הבדלים מובהקים בין כפל לחילוק (בכפל ממוצע משיבים נכון 66%, בחילוק 56%) ובשאלות הקשורות לידע תוכן והוראה (בכפל ממוצע משיבים נכון 78%, בחילוק 68%), p<0.05.
לא נמצאו הבדלים בידע המורים לגבי ידע תוכן בין כפל לחילוק.

מסקנות ודיון

בממצאי המחקר נמצאו הבדלים בין הידע וההוללות העצמית בפעולות השונות. בפתרון תרגילי חילוק ישנם אלמנטים העלולים לעורר קושי, שאינם נמצאים בפתרון תרגילי כפל. למשל, חילוק עם שארית, אלגוריתם החילוק הארוך ועוד. הממצא מדגיש כי אעפ"י שבתוכנית הלימודים במתמטיקה מודגשים האלמנטים הללו, נושא החילוק דורש כפי הנראה תשומת לב יותר ממוקדת בהכשרה והדרכה למורים.
בממצאי המחקר נמצא כי רמת הידע התוכני של המורים גבוהה יותר מרמת הידע הפדגוגי של תוכן והוראה של המורים וזו גבוהה יותר מרמת הידע הפדגוגי של תוכן ותלמידים. ידע לגבי תלמידים, במידה ואיננו נלמד במהלך ההכשרה של המורים, הינו ידע שעשוי להירכש בניסיון בהוראה. העובדה שאוכלוסיית המורים במחקר הייתה הטרוגנית וכללה גם מורים חדשים עשויה להסביר את חלקיות הידע לגבי תלמידים. ממצא זה משליך על הצורך בשימת לב רבה לגבי ידע פדגוגי במסגרת הכשרת מורים ובליווי והדרכה למורים חדשים.

ביבליוגרפיה

משרד החינוך והתרבות (2006). תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות היסוד לכל המגזרים בישראל. ירושלים: ת"ל.
משרד החינוך והתרבות (2014). מסמך ההתאמות לתלמידי החינוך המיוחד. ירושלים: ת"ל.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching- What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Bainbridge, R. (1981). To err is human: Towards a more positive approach to young children's mistakes in arithmetic. *Mathematics in school, 10*, 10-13.

Boaler, J. (2015) Fluency Without Fear: Research Evidence on the Best Ways to Learn Math Facts *Youcubed, Stanford*

Brownell, M. T., Sindelar, P. T., Kiely, M. T., & Danielson, L. C. (2010). Special education teacher quality and preparation: Exposing foundations, constructing a new model. *Exceptional Children, 76*, 357-377.

Cimen. (2014). How Do Children Multiply: Reflection and Prospective Pedagogical Implications. *Procedia – Social and Behavioral Sciences 159*, 593-597

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research inMathematics Education, 10*, 163-171.

Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2010). Teacher self-efficacy and teacher burnout: a study of relations. *Teacher and Teacher Education, 26*, 1059-1069.

Tschannen-Moran, M., & Barr, M. (2004). Fostering student achievement: The relationship between collective teacher efficacy and student achievement. Leadership and Policy in Schools, 3, 187-207.

דגמים חוזרים בגני ילדים: העתקה והמללה

דינה תירוש, אוניברסיטת תל אביב
פסיה צמיר, אוניברסיטת תל אביב
רותי ברקאי, אוניברסיטת תל אביב
אסתר לוינסון, אוניברסיטת תל אביב

◆◆◆

רקע תיאורטי

אחד הנושאים הנכללים בתכניות הלימודים במתמטיקה לחינוך קדם יסודי הוא דגמים חוזרים (משרד החינוך והתרבות, 2010). תכנית הלימודים מדגישה כי "עיסוק בדגמים חוזרים מוביל את הילד לחשיבה גבוהה - יכולת להכליל" (משרד החינוך והתרבות, 2010, עמ' 46). בנוסף לכך, תכנית הלימודים מתייחסת לחשיבות שיש לזיהוי היחידה החוזרת על עצמה.

מחקר זה מתמקד בדרכי התמודדות של ילדים עם מטלת העתקת דגמים חוזרים. בנוסף, המחקר בוחן את יכולתם המילולית של ילדי גן לזהות את הדומה בין הדגם אותו העתיקו לבין הדגם שהוצג להם ושימש כמודל העתקה, בהקשר ליחידת החזרה.

פאפיק ועמיתיה (Papic et al, 2011) מתארים שלושה סוגים של מטלות העתקת דגמים: העתקה תוך שימוש בחומרים זהים לאלה של הדגם, העתקה תוך שימוש בחומרים דומים אך לא זהים לאלה של הדגם והעתקה תוך טרנספורמציה לייצוג אחר (למשל, מדגם שבנוי מקוביות לציור). חוקרים אלה מדווחים על שלוש אסטרטגיות להעתקת דגמים: (i) העתקה ישירה- התאמה של כל אחד מאיברי הדגם שמשמש כמודל לכל אחד מאיברי הדגם אותו הילד בונה; (ii) העתקת רצף- התייחסות לאיבר המתאים הבא ביחידת החזרה (What comes next); (iii) זיהוי יחידת הדגם- אסטרטגיה בה הילד בוחר תחילה את היחידה כולה ורק לאחר מכן מעתיק אותה.

העתקת דגם תוך שימוש בחומרים דומים אך לא זהים לאלה של המודל היא משימה מופשטת ומורכבת שעשויה לקדם את ההבחנה ביחידת החזרה (Sarama & Clements, 2009; Rittle-Johnson et al., 2013). במחקר קודם (Tsamir et al., 2017) ילדי גן התבקשו להשוות בין שני דגמים נתונים שעשויים מחומרים דומים אך לא זהים נקבעו שלוש רמות של התייחסות מילולית ליחידת החזרה: רמה 0, בה לא הייתה התיחסות ליחידת החזרה; רמה 1, בה הייתה התייחסות חלקית ליחידת הדגם תוך ביצוע התאמה בין האיברים המתאימים בשני הדגמים ורמה 2, בה הילדים זיהו והתייחסו ליחידת הדגם. במחקר דווח כי רק חלק קטן מילדי הגן התייחסו ליחידת החזרה הזהה.

בעקבות המחקר הקודם עלו שאלות בהן מתמקד המחקר הנוכחי: כיצד הילדים יבצעו משימה בה הם יתבקשו תחילה להעתיק את הדגם תוך שימוש בחומרים דומים אך לא זהים לחומרים מהם בנוי הדגם המשמש כמודל ורק לאחר מכן להתייחס באופן מילולי לדמיון בין המודל לבין הדגם שהם העתיקו? האם יכולת ההעתקה, האסטרטגיות בהם ישתמשו הילדים בעת ההעתקה וזיהוי הדמיון בין המודל לבין הדגם אותו בנו תלויים בסוג הדגם?

שאלות המחקר:

(1) האם יימצא הבדל בין יכולת ילדים להעתיק דגם חוזר מסוג AB לבין יכולתם להעתיק דגם חוזר מסוג AAB?
(2) מהן האסטרטגיות של ילדי גן בהעתקת דגמים חוזרים?
(3) האם ילדי גן משתמשים באסטרטגיות שונות בעת העתקת דגמים שונים (מסוג AB ומסוג AAB)?
(4) האם ילדי הגן מתייחסים לדמיון ביחידת החזרה בין המודל לבין הדגם אותו הם בנו כאשר הם מתבקשים להתייחס לדמיון ביניהם?
(5) האם יש קשר בין היכולת להעתיק דגם חוזר לבין היכולת להביע את הדמיון בין המודל לבין הדגם אותו הם בונים?

מתודולוגיה

עשרים ושלוש גננות השתתפו בהשתלמות העוסקת בהוראת מתמטיקה בגן ילדים. במהלך ההשתלמות הוצגו לגננות מטלות שונות בדגמים חוזרים. כמשימת סיכום, הגננות התבקשו לבחור שתיים מתוך המטלות שהוצגו בהשתלמות, להפעיל אותה עם ילד בגן ולתעד את ההתרחשות. מאמר זה מתמקד במטלה שנבחרה ויושמה על ידי עשר גננות.

המטלה שהוצגה לגננות במהלך ההשתלמות, הייתה:

מציגים לילד שרשרת חרוזים בעלת מבנה דגם חוזר מסוג AB. מניחים לפניו חוט וחרוזים בשני צבעים השונים משני הצבעים בשרשרת שהוצגה לפניו. מבקשים מהילד ליצור שרשרת באותו דגם כמו השרשרת המוכנה.

לאחר שהילד יצר את השרשרת שואלים: "מה דומה בין שתי השרשרות?" לאחר שהילד עונה חוזרים על השאלה עד שלילד אין מה להוסיף. לאחר מכן שואלים את הילד: "מה שונה בין שתי השרשרות?" חוזרים על שאלה זו שוב כפי שנעשה בשאלה הראשונה.

כעת מציגים לילד שרשרת עם חרוזים בעלת מבנה דגם חוזר מסוג AAB, וחוזרים על אותו תהליך כמו במטלה עם השרשרת מדגם AB.

ממצאים

בניתוח ההשוואה בין שרשרת המודל לבין השרשרת אותה הילדים בנו נמצא כי תשעה ילדים (מתוך העשרה) העתיקו את השרשרת מדגם AB וששה העתיקו את השרשרת מדגם AAB (נציין כי ילד נוסף העתיק את הדגם AAB לאחר התערבות הגננת וילד נוסף העתיק את הדגם אך השחיל בסוף השרשרת עוד חמישה חרוזים מאותו צבע שנשארו בכלי).

בהתייחס לאסטרטגיות ההעתקה, נציין ראשית כי בהעתקת הדגם מסוג AAB נמצאה אסטרטגיה נוספת של לקיחה והשחלה של שני חרוזים מאותו צבע (A) ולאחר מכן לקיחה והשחלה של חרוז מהצבע השני (B) . זו אמנם אינה הכרה ביחידת הדגם אך זוהי אסטרטגיה מתקדמת יותר מאסטרטגית הרצף. קראנו לאסטרטגיה זו "שניים ואחד".

מצאנו כי בעת העתקת הדגם מסוג AB ילד אחד מתוך תשעה הילדים שהעתיקו את השרשרת בהתאמה למודל השתמש באסטרטגיה של זיהוי יחידת הדגם ושמונה השתמשו באסטרטגית הרצף. בהתייחס לדגם AAB, שלשה מתוך ששה הילדים שהעתיקו את השרשרת בהתאמה למודל השתמשו באסטרטגית הרצף ושלושת האחרים השתמשו באסטרטגית "שניים ואחד".

לגבי יכולת הילדים לציין במה דומה שרשרת המודל לשרשרת אותה הם יצרו נמצא כי בהשוואת השרשרות מדגם AB, ארבעה ילדים סווגו ברמה 0 וארבעה ברמה 1 (ילד אחד לא נשאל לגבי הדמיון). אף לא אחד מהילדים התייחס בצורה מפורשת ליחידת החזרה. לעומת זאת, כאשר הילדים התבקשו לציין במה דומות שתי השרשרות מדגם AAB שני ילדים סווגו ברמה 0, שניים ברמה 1 ושניים ברמה 2, המצביעה על זיהוי יחידת הדגם.

תרומת המחקר

מטרה מרכזית של עבודה עם דגמים חוזרים בגן היא לפתח אצל ילדי הגן יכולת להבחין ביחידת החזרה. במחקר זה המשימות שהוטלו על הילדים (בניית דגם דומה לדגם ששימש כמודל תוך שימוש בצבעים שונים והתייחסות מילולית לדמיון בין המודל לבין הדגם אותו בנו) איפשרו לבחון היבטים שונים, ביצועי ומילולי, של יכולת זיהוי יחידת החזרה. בנוסף, המחקר מצביע על החשיבות שיש לעיסוק בדגמים בעלי יחידת חזרה שונה בהקשר לזיהוי אסטרטגיות העתקה ולקביעת התיפקוד הביצועי והמילולי (במחקר הנוכחי נמצא שוני ביכולות הביצועיות (העתקה) לעומת היכולות המילוליות של ילדי הגן בהתייחס לדגם מסוג AB ולדגם מסוג AAB וזוהתה אסטרטגיה נוספת בהקשר לדגם מסוג AAB).

דיון במהלך השתלמויות לגננות במשימות אלה תוך התייחסות לאסטרטגיות בהעתקת כל אחד מהדגמים ולהבחנה בין ההעתקה לבין ההתיחסות המילולית יכול לסייע בקידום הידע הפדגוגי- תכני של הגננות לגבי דגמים חוזרים.

הצגה ודיון במשימות תוך התייחסות לאופן הצגת המשימות ולמאפייני המשימות (למשל, סוג הדגם, האסטרטגיות הצפויות, הסברים מילוליים אופיינים) יכולים לקדם את הידע הן לגבי תפיסות ודרכי חשיבה של ילדים והן לגבי עיצוב מטלות בהקשר לדגמים חוזרים.

המחקר שמתואר במאמר זה ממומן על ידי הקרן הלאומית למדע (מענק מחקר 1270/14)

מקורות

משרד החינוך והתרבות (2010). תכנית לימודים במתמטיקה לגן הילדים. האגף לתכנון ופיתוח תכניות לימודים, ירושלים.

Papic, M., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-269.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., & McEldoon, K. L. (2013). Emerging Understanding of Patterning in 4-Year-Olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376-396.

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. London, England: Routledge.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2017). Repeating patterns in kindergarten: Children’s enactments from two activities. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 83-99.

הוראת חשבון ושברים בשילוב תרגול מתוקשב בשיטת משחק טָבוּעַ (inherent gamification)

ענת אבן-זהב, תלפיות מכללה אקדמית לחינוך
פיליפ סלובוצקי, "הלומדה", תלפיות מכללה אקדמית לחינוך

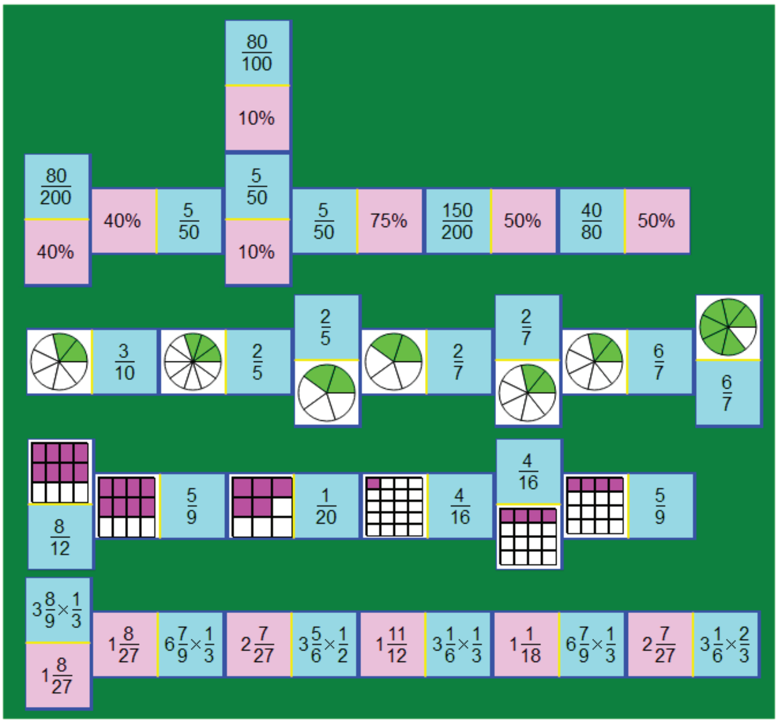
◆◆◆

רקע תיאורטי: משחק טבוע. שיטת "הדומינו"

המושג משחוק (gamification) - שילוב משחקים בלמידה עצמית בהוראה בכלל, ובנושאי המתמטיקה בפרט - תופס חלק נכבד בפורומים חינוכיים (Dichev & Dicheva, 2017). עם זאת, המחקרים מראים שלעיתים אין תוצאות ממשיות לשיפור הלמידה ממתן נקודות, בונוסים ופרסים בהוראת מתמטיקה בעזרת משחק לתלמידי בי"ס יסודי וחט"ב (Filsecker & Hickey, 2014; פלג ואלגלי, 2013) . הסבר אפשרי הוא כי שילוב משחקים (לרוב משחקים בנוסח טריוויה) בין קטעי תוכן אינו מגביר את הרצון והמוטיבציה ללימוד הקטעים שאינם קשורים למשחק.

דרך הלימוד שאנו מציעים היא **משחוק טבוע** (inherent gamification), המהווה יחידת תרגול המוצגת בצורה של משחק, כאשר כללי המשחק משלבים את התוכן הנלמד ואת חוקי המשחק עצמו.

המשחק שנבחר לצורך לימוד מתמטיקה בבית ספר יסודי בכלל, ושברים בפרט, הוא דומינו, הנקרא "דומינו-שברים". הרעיון המרכזי שמאחורי משחקי "דומינו-שברים" מבוסס על העובדה שבכל תרגול ניתן להגדיר את קבוצת ה"שאלות" (הפעולות לחישוב/התרגילים) וקבוצת ה"תשובות" (תוצאת פעולת החישוב) ולקבוע את כללי ההתאמה ביניהן. ההתאמה איננה חד-חד ערכית, כיוון ש"תשובה" אחת יכולה להתאים כמענה לכמה "שאלות".



איור 1: דוגמת משחק דומינו בנושא שברים

דוגמת משחק מובאת באיור 1: האובייקטים משתי הקבוצות מוצגים באופן גרפי על-גבי "אבני דומינו", כאשר בצד אחד של האבן מוצגת ה"שאלה", ובצד השני - ה"תשובה" (איור 1), על התלמיד/המתרגל להתאים תשובה לשאלה (או להיפך).

מערך זה הופך את לימוד ותרגול נושא השברים למשחק דומינו המוכר לכל, משחק עם מספר כללים מועט ופשוט ליישום, הכולל מאפיינים של: תחרות (תלמיד מול מחשב או תלמיד מול תלמיד), חשיבה על הצעד קדימה, תכנון וחשיבה אסטרטגית, ועשוי להגביר שמחה והתלהבות הבאה לביטוי מניצחון או אכזבה מהפסד וכיוצב'.
על בסיס הפלטפורמה Domino-Math שפותחה בחברת "הלומדה" ליישומי השיטה בנושאים שונים, פותחו שתי סדרות של משחקי תרגול במתמטיקה לבי"ס יסודי: "דומינו-שברים", המכילים 72 משחקים בכל נושאי השברים הנלמדים בכיתות ג' עד ו' (ראו איור 2), ו"דומינו-חשבון", המכילים תרגול ברוב נושאי החשבון מ- א' עד ה' (ראו איורים 3, 4, 5). המשחקים מופעלים דרך אתר האינטרנט, והם מותאמים למערכות הפעלה שונות (Windows ו- Android).

ציור 2

איור 2: נושאים בשברים כיתה ג'-ו'

ציור 3

נושא	רמה I	רמה II	רמה III
חיבור מספרים שלמים	6 3+5	14 6+8	85 46+39
חיסור מספרים שלמים	8−1 3	17−4 16	99−46 24
כפל מספרים שלמים	20 2×4	32 6×2	1500 300×7
חילוק מספרים שלמים	32:8 5	160:4 50	18 90:5
פעולות מעורבות	99 2+5	78:13 6	6 11×6

איור 3: פעולות במספרים שלמים כיתה א'-ה'

ציור 4

איור 4: תרגול ספירה עד 100 כיתות א'-ה'

ציור 5

איור 5: תרגול ספירה מתקדם כיתות א'-ה'

סוגיות בהוראת השברים

הוראת השברים בבית ספר יסודי מהווה אתגר גדול בהיבט למידה משמעותית בקרב תלמידים (אהרוני, 2006; Wallace & Susan, 2005; Tirosh & Graeber, 1998; Graeber, 1993). תכניות הלימודים של משרד החינוך בכיתות היסוד כוללות דרישות לשילוב של יישומונים בשיעורים, וכן דוגמאות וקישורים ליישומנים אלה (תכנית לימודים במתמטיקה, 2006). ברם, רוב היישומונים המוזכרים בתכניות הלימודים הם באנגלית, מיועדים להמחשה בכיתה על-ידי המורה ואינם מתאימים לעבודה עצמית של תלמידי בתי"ס יסודיים.

לכן, אנו מוצאים שראוי להמשיך ולאתר דרכי הוראה שישפרו את למידת נושא השברים בבית הספר היסודי, תוך כדי שימוש במשחק בזמן השיעור ולתרגול ע"י התלמיד בזמנו הפנוי או כשעורי בית. כאנשי חינוך מתמטי אנו מעריכים כי לימוד הנושא בשילוב של תרגול מתוקשב דרך משחק ה"דומינו" עשויה להיות דרך מועילה ותורמת להבנה מעמיקה של הנושא.

יתרון השימוש במשחקי "דומינו" צפוי להיות בכמה רבדים: המשחקים מוגשים בשפה העברית; המשחקים מהווים תרגול אקטיבי של התלמידים, בשונה מהצגה פרונטלית על-ידי המורה בכיתה; יחידות ה"דומינו" מקיפות את כל תכנית הלימודים במתמטיקה בנושא שברים בבית הספר היסודי; היחידות כולן בנויות באמצעות משחק.

מחקר פיילוט במכללת תלפיות מהלך שנת תשע"ט

כדי לבדוק את תרומת השימוש במשחק הדומינו בעת לימוד נושא השברים, נתחיל מחקר במכללת תלפיות בשנת תשע"ט, בו נשלב סטודנטים להוראה ותלמידי בית ספר יסודי שיתנסו בשיטה, ואשר במהלכו נבדוק את השלכות יישום השיטה הן מנקודת מבטם של תלמידינו הסטודנטים להוראה והן בקרב תלמידי בתי ספר יסודיים.

בחרנו בקורס "סמינריון מחקרי במתמטיקה" לחשוף את הסטודנטים למשחק ה"דומינו" ולשלבם במחקר. הסטודנטים ישתתפו כעוזרי מחקר הבוחנים סוגיה בתחום המתמטיקה, במקרה זה "הוראת שברים בעזרת משחק". מערך המחקר ומהלכו מהלך יתוארו במפורט בקבוצת הדיון. אלו הן השאלות שהצבנו לעצמינו לבחון במחקר:

1. האם השימוש במשחק ה"דומינו" בהוראת מתמטיקה בבית ספר יסודי מביא לשיפור בהשיגי התלמידים בנושא השברים? אם כן, כיצד?
2. האם השימוש במשחק ה"דומינו" משפר את המוטיבציה ללימוד נושא השברים בקרב תלמידי ביס יסודי? אם כן, כיצד? שאלה זו תיבחן על פי ביטויים של מרכיבי מוטיבציה: מסוגלות, אוטונומיה ושייכות (Ryan & Deci, 2000)
3. מהן העמדות והתפיסות של המורים המלמדים בכיתות שהתנסו בהוראה תוך שימוש במשחק ה"דומינו" ביחס לתרומתו להוראת נושא השברים בביס יסודי?

שימוש בשיטת ה"דומינו" בהוראת נושאים אחרים

מלבד שברים, השיטה "Domino-Math" מתאימה לתרגול בנושאים אחרים עפ"י השיטה של "משחק טבוע" (inherent gamification), כאשר המגבלה היחידה היא הדרישה לרישום קומפקטי של ה"שאלה", כלומר, יש להתייחס למגבלת גודל אבן הדמינו בניסוח השאלה. נושאי חשבון אלמנטרי מתאימים לתנאי זה, וסדרת המשחקים "**דומינו-חשבון**" בנושאי החשבון לכיתות א' - ד' פותחה לפי השיטה הזו.

בכנס JCRME השביעי, אנו מזמינים את העמיתים ועמיתות העוסקים בהוראת המתמטיקה בבתי ספר היסודיים וחט"ב לדיון בשולחן עגול בו נציג את המחקר (ראו מטה מסגרת העבודה) ובנוסף יוכלו העמיתים/ות להציע נושאים מתמטיים חדשים, המתאימים ליישומי הפלטפורמה "Domino-Math". נדון על אפשרויות פיתוח המשחקים עבור תלמידי ביס יסודי ותלמידי חט"ב (לגבי האחרונים טרם פותחו משחקים מתאימים בתוכנת "הלומדה"). כמו כן, אנו מציעים לערוך דיון בביצוע מחקרים הבודקים את תרומתם של יישומים אלו להוראת המתמטיקה בבתי הספר. מחקרים שיבוצעו במוסדות להכשרת מורים ובשיתוף פעולה בין מוסדות הכשרת מורים בשימוש היישומים האלה בכיתה.

בקבוצת הדיון נעלה את השאלה האם הוראה עפ"י שיטת ה"דומינו" מתאימה גם לנושאים בגיאומטריה כמו: סוגי משולשים, חפיפה ודמיון משולשים, פתרון משולשים וכיוצב'.

מסגרת העבודה במפגש השולחן העגול: נציג את התוכנה ושימושה בעזרת מספר מחשבי לפ-טופ שיונחו על השולחן, נתאר את המחקר: סוגיית המחקר ומערך המחקר, נשתף בדילמות שאנו ניצבים בפניהםעם תחילת ביצוע המחקר. נפתח לדיון בסוגיות תיאורטיות ומתודולוגיות עבור מחקר הנמצא בשלביו הראשונים.

מקורות

אהרוני ר' (2006). מדוע קשה ללמד שברים?. **מספר חזק 2000**. 11: 56-60. נדלה מתוך: http://ymath.haifa.ac.il/images/stories/mispar_chazak_2000/issue11/teaching_fractions_ron_haroni.pdf

פלג, א. ואלגלי צ. (2013). ממנ"י והלאה : הקשר בין נטיות חשיבה , משחקי מחשב ותהליכי למידה. מס"ע מכון מופ"ת . נדלה מאתר: http://portal.macam.ac.il/Search.aspx?keyType=Writer&itemId=1909. קישור למאמר: https://docs.google.com/file/d/0By1Xi947FU8nOWVRdG5CRnNSU1k/edit

תכנית לימודים במתמטיקה. (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתוב א-ו בכל המגזרים**. האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים תכנית לימודים משרד החינוך, התרבות והספורט, ירושלים. נדלה מ: http://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/Yesodi/mavo1.pdf

Dichev, C., & Dicheva, D. (2017). Gamifying education: what is known, what is believed and what remains uncertain: a critical review. *International Journal of Educational Technology in Higher Education, 14*(1), 9.

Filsecker, M., & Hickey, D. T. (2014). A multilevel analysis of the effects of external rewards on elementary students' motivation, engagement and learning in an educational game. *Computers & Education, 75*, 136-148.

Graeber, A. O. (1993). Misconceptions about multiplication and division. *Arithmetic Teacher, 40*(7), 408-412.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American psychologist, 55*(1), 68.

Tirosh, D., & Graeber, A. O. (1989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. Educational *Studies in Mathematics, 20*(1), 79-96.

Wallace, Ann H., and Susan P. Gurganus. "Teaching for mastery of multiplication." *Teaching Children Mathematics* 12, no. 1 (2005): 26. Retrieved from: http://www.cusdmathcoach.com/multiplication.pdf

האם מהנדסים משתמשים במתמטיקה תיכונית?

דורון אורנשטיין, הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, הטכניון
זהבית כהן, הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, הטכניון

◆◆◆

מבוא

אחד האתגרים העומדים בפני מורים הוא עידוד העניין והמוטיבציה ללימוד מתמטיקה, בפרט ברמה מוגברת (Rose, Shumway, Carter & Brown, 2015). אחד המכשולים לכך, בעיקר בתיכון, הוא ניתוק בעיות הלימוד מהעולם האמתי. ניתוק זה גורם לעיתים לקשיי הבנה אצל תלמידים, ומביא אותם לשאול מדוע להתאמץ מעבר לצורך לצלוח בשלום את הבחינות.

במחקר גישוש ראשוני, שכלל ראיונות עם מהנדסים בתעשיית ההייטק, נמצא כי ישנם מהנדסים שפותרים בעיות מתמטיות מעניינות כחלק מעבודתם, אשר חלקן ניתנות להצגה בדומה לבעיות הקיימות בתכנית הלימודים בתיכון. בהמשך, מחקר הגישוש בחן את עמדותיהם של מורים ואנשי חינוך במתמטיקה בנוגע למספר בעיות נבחרות שנלקחו מתעשיית ההייטק. לדעת רובם, תלמידים ומורים שנחשפים בחיי יומיום לחידושי הטכנולוגיה ולהצלחות בעולם ההייטק, יכולים למצוא תועלת בשילוב בעיות כאלו (אחרי פישוטים והתאמות) בשיעורים.

מטרת מחקר רב-שלבי שחלקו הראשון מתואר להלן, היא לאתר בעיות מתמטיות מתחום ההייטק ולחקור אפשרויות להנגיש אותן, כדי שמורים יוכלו להיעזר בהן בשיעורים לצורך הגברת העניין, המוטיבציה, ההבנה והאוריינות המתמטית של תלמידיהם. השלב הראשון מתמקד בחיפוש בעיות מתאימות בעולם ההייטק, ובדיקת הרלוונטיות שלהם לתחום החינוך המתמטי בעיני מהנדסים.

מטרת המחקר

באילו תחומים מתמטיים והנדסיים, ניתן למצוא דוגמאות לבעיות מעולם העבודה של מהנדסים בהייטק, שנראות להם רלוונטיות ומעניינות למורים ותלמידים, וניתן להציגן כבעיות ברמה תיכונית?

רקע תיאורטי

בעיות מבוססות הקשר בהוראת המתמטיקה

שילוב בעיות מבוססות הקשר בלמידה נחקר רבות, בפרט בתחומי המדעים (לדוגמא, Dori, Avargil, Kohen, & Saar, 2018), ונמצא שלשימוש בבעיות אלו פוטנציאל ליצירת עניין ומוטיבציה ללמידה, כמו גם שיפור ההבנה והאוריינות המדעית. מחקרים שבוצעו בתחום המתמטיקה הראו שלשילוב בעיות מבוססות הקשר מתחומי היומיום של תלמידים בבתי ספר יסודיים בשיטה הנקראת Realistic Mathematic Education -RME (Van den Heuvel-Panhuizen ,2014), יש יתרונות בהקניית נושאי לימוד ובהבנת הישימות שלהם. אולם, כשמגיעים לתיכון, החומר נהייה מורכב ואבסטרקטי, ולכן קשה להדגים את ישימותו בחיי היומיום, כפי שאמרה נפוצה אומרת: "גם סטודנט מצטיין במתמטיקה, לא מחשב פילוג פואסוני של זמן ההגעה של אוטובוס, בזמן שהוא מחכה לו בתחנה"...

שימוש במתמטיקה על ידי מהנדסים: מחקרים (כגון, Damlamian, 2013; Straesser, 2015) על שימושיות המתמטיקה בעבודת מהנדסים, מצאו כי: (1) השימוש במתמטיקה בתעשייה לא נעשה בצורה מבודדת, והוא קשור לאילוצים של מקום העבודה (2) עקב גידול בסיבוכיות של המודלים המתמטיים, מהנדסים רבים אינם נעזרים במתמטיקה, אלא במדידות ובסימולטורים, והמודל המתמטי הוא "קופסה שחורה". (3) אולם כאשר יש צורך לבצע שינויים ופריצות דרך, נוצר הצורך לייצר מודלים מתמטיים חדשים. חלק מהמודלים המתמטיים הם די מורכבים, אולם חלקם ניתנים לפישוט לצורך הבנתם והצגתם (למשל, Neunzert, 2013).

מתודולוגיה

מתודולוגית המחקר התבססה על מחקר איכותני על בסיס שאלונים פתוחים וראיונות עם מהנדסים בהייטק. השאלונים כללו שאלות על (1) שימושיות המתמטיקה בעבודת המהנדס ובסביבתו ו- (2) בעיות מתחומי עבודת המהנדס שנראות מעניינות ורלוונטיות גם לתלמידי תיכון. מדגם המחקר כלל 20 מהנדסים בכירים, בעלי יותר מ-10 שנות ניסיון בעבודה, בשש חברות הייטק מובילות בישראל.

מהלך וממצאי המחקר

תגובה ראשונית של חלק ממהנדסי ההייטק שנשאלו הייתה שהם לא משתמשים במתמטיקה בעבודתם; הם משתמשים רבות בסימולטורים, כלי מדידה וניתוח, המחליפים את הצורך בפיתוחים מתמטיים. למשל, בתכנון מעגלים חשמליים, המהנדסים משתמשים בסימולטורים, ולא פותרים משוואות דיפרנציאליות.

אולם, עם התקדמות הראיון, המהנדסים דיווחו על שימוש לפרקים במתמטיקה לפיתוח מודלים מתמטיים, בדרך כלל באמצעות משוואות באקסל. הפיתוחים נעשים בדרך כלל בתחילת פרויקטים, או בזמן שינויים גדולים, לצורך שיערוך פרמטרים ללא הסתמכות על סימולציות. לדוגמה, קובץ אקסל שקיבלנו ממהנדס הכיל משוואות לשערוך שטח הסיליקון של מעגל חשמלי. בחינה מדוקדקת של קובץ זה העלתה שניתן להמיר את המשוואות המופיעות בקובץ האקסל לבעיה מילולית באלגברה בנושא חישוב שטח.

דרך יעילה לעידוד המהנדסים לחשוב על בעיות מתמטיות אשר באות לידי ביטוי כחלק מעבודתם השוטפת, הייתה באמצעות הצגת דוגמאות קיימות. לדוגמא, במהלך הראיונות, הצגנו בעיה מתחום ההייטק ("תקיעת סרטון וידאו" ביוטיוב.) שהיא אנלוגית לבעיית "ברז ממלא בריכה" בתיכון. בעיה זו נתנה השראה לדוגמאות נוספות, כמו חישוב קצב התרוקנות סוללת המחשב כתלות בזמן שהמסך או המעבד היו פעילים. בעיה זו קרובה לעולם התלמידים, ואנלוגית לבעיית "ריקון הבריכה".

תרשים 1 מתאר התאמה שביצענו בין תחומי ההייטק לתחומי לימוד במתמטיקה תיכונית, לצורך הערכת הקושי במציאת דוגמאות. בתחומים מסוימים, כמו ארכיטקטורות מחשבים ותקשורת, ניתן למצוא די בקלות שאלות שנראות מעניינות ורלוונטיות. גם בתחומים המתחברים לטריגונומטריה מצאנו דוגמאות. למשל, בעקבות שיחות עם מהנדס מחברת מובילאיי ושימוש במאמר הנדסי (Stein, 2003), פיתחנו דוגמה לבעיה בנושא דמיון משולשים שמציגה את פריצת הדרך של החברה. לעומת זאת, קיימים תחומים שבהם קשה למצוא דוגמאות, כמו למשל תכן לוגי. בנוסף, בדקנו גם אילו תחומי למידה בתיכון מכוסים על ידי הדוגמאות. למשל, מצאנו שרוב הדוגמאות שאספנו היו בתחום האלגברה, ומעט מאוד בגאומטריה.

תחום הנדסי	קושי באיתור בעיות מעניינות	תחומי לימד במתמטיקה
ארכיטקטורות מחשבים, תכנון מערכות, ביצועי מחשבים	קל (ראיונות, קבצי אקסל, וגם סקירת מאמרים הנדסיים),	אלגברה, סדרות, הסתברות, אנליזה (פונקציות, קיצון)
תקשורת, בדיקת שגיאות, אמינות, מדידות	קל (ראיונות , מאמרים הנדסיים)	אלגברה, סדרות, הסתברות, אנליזה (פונקציות, קיצון)
גרפיקה, עיבוד תמונות, מצלמות, מדידות, ניווט	קל: (ראיונות עם אלגוריתמאים, מאמרים הנדסיים)	טריגו, גאומטריה אנליטית, קצת דמיון משולשים
תכנון יחידות חשמליות ברכיבים אלקטרוניים	בינוני (ולא תמיד מעניין,למשל: אקסל לחישוב שטח והספק)	אלגברה, אנליזה (תיאור פונקציות)
תכנה עם הערכת ביצועים	בינוני (תחומים: למידת מכונה, קומפיילרים, תהליכים מקביליים.)	אלגברה, הסתברות, אנליזה (תיאור פונקציות)
סייבר, הצפנה	בינוני (חסר ידע בתורת מספרים)	אלגברה ,הסתברות
תכנה כללית	קשה (האלגוריתמים לא מתאימים למתמטיקה תיכונית)	
ניתוח סטטיסטי, רגרסיות	קשה (חסר ידע בנושא)	
תכנון לוגי	קשה (חסר ידע: על יצוג בינרי)	

תחום למידה בתיכון	קושי למציאת בעיות מעניינות
אלגברה (כולל בעיות מילוליות):	קל
הסתברות	קל
סדרות	קל (בעיקר סדרות הנדסיות וכלליות)
טריגונומטריה וגאומטריה אנליטית	קל
תיאור פונקציות (אנליזה)	קל (אבל רק מספר סוגים)
בעיות קיצון מילוליות (אנליזה)	קל
גאומטריה, הנדסת מרחב	קשה (מלבד דמיון משולשים)
וקטורים	לא מצאנו במדגם שנבדק
מספרים מרוכבים	לא מצאנו במדגם שנבדק
הגדרת נגזרות, אינטגרליים	לא מצאנו במדגם שנבדק

תרשים 1. התאמות בין בעיות אותנטיות מעולם ההייטק לבעיות מתמטיות בתיכון

סיכום ודיון

במחקר הנוכחי נמצאו כ-60 בעיות מתמטיות אותנטיות מתחומי הייטק שונים, שלדעת המהנדסים ניתן להשתמש בהן לצורך הוראה. המהנדסים שיתפו פעולה, וחלקם אף הציעו לשתף קבצי אקסל אשר כוללים חישובים מתמטיים שניתן להמירם לחישובים המתאימים למתמטיקה תיכונית. ניתוח תגובותיהם של מהנדסי ההייטק הוליד מסקנות מעניינות: התגובה הראשונית הייתה: "אין שימושיות רבה במתמטיקה". אולם בהמשך, אחרי שראו מספר דוגמאות, רובם הצליחו לספק שפע בעיות. השינוי נבע מכך שרובם לא היו מודעים לשימושיות המתמטיקה, בעיקר משום שהם פותרים בעיות מתמטיות בצורה עקיפה, כגון שימוש באקסל, בפרט עקב חוסר זמן. אכן, מספר מהנדסים טענו שיש בתחומם הרבה בעיות מעניינות במתמטיקה, אולם חוסר הזמן מאלץ אותם להשתמש לעיתים קרובות בפתרונות "אד-הוק".

אם כן, נראה כי בהייטק יש שימוש במתמטיקה בהרבה מקרים. אולם, השימושיות נעשית באופן אינטגרלי כחלק מעבודתם של המהנדסים, ועל כן שונה מתרגול מתמטי בכיתה.

התרומה התיאורטית של המחקר הרב-שלבי היא בהרחבת מחקרים בלמידה מבוססת הקשר לתחום המתמטיקה. כמו כן, למחקר תרומות יישומיות, ביניהן: (1) פוטנציאל להגברת ההבנה, העניין והמוטיבציה ללימודי מתמטיקה דרך קישור לנושאים טכנולוגיים המוכרים לתלמידים; (2) הגברת החשיפה לעולם הייטק, דרך הצצה לעולמם של

מהנדסים והכרה בשימושיות המתמטיקה; (3) פוטנציאל לפיתוח חשיבה אנליטית והכנה להתמודדות עם בעיות דומות בעתיד; (4) פוטנציאל להגדלת הסיכוי שתלמידים יבחרו מקצועות מתמטיקה, מדע והנדסה כלימודים וכעיסוק עתידי.

מקורות

Damlamian, A., Rodrigues, J. F., & Sträßer, R. (2013). *Educational interfaces between mathematics and industry*. Report on an ICMI-ICIAM-study. Cham: Springer

Dori, Y.J., Avargil, S., Kohen, Z., & Saar, L. (2018). Context-based learning and metacognitive prompts for enhancing scientific text comprehension. *International Journal of Science Education*,1-23.

Stein, G. P., Mano, O., & Shashua, A. (2003, June). Vision-based ACC with a single camera: bounds on range and range rate accuracy. In *Intelligent vehicles symposium*, 2003.

Straesser, R. (2015). "Numeracy at work": a discussion of terms and results from empirical studies. *ZDM, 47*(4), 665-674.

Neunzert, H. (2013). Models for industrial problems: How to find and how to use them—in industry and in education. In *Educational interfaces between mathematics and industry* (pp. 59-76). Springer International Publishing.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 521-525). Springer Netherlands.

Rose, M. A., Shumway, S., Carter, V., & Brown, J. (2015). Identifying Characteristics of Technology and Engineering Teachers Striving for Excellence Using a Modified Delphi. *Journal of Technology Education, 26*(2), 2-21.

תפקידי התרגול בשיעורי המתמטיקה

רחל זקס, מכון ויצמן למדע
בוריס קויצ'ו, מכון ויצמן למדע

◆◆◆

רקע תיאורטי

יחסי הגומלין בין הוראה מבוססת פתרון בעיות ובין תרגול וחזרה לקראת פיתוח מיומנויות טכניות אינם ברורים. קיים מתח מתמיד בין השניים ונראה שהחוקרים (למשל Sweller, Clark & Kirschner, 2010 לעומת 2009 Schoenfeld,) מתקשרים בעולמות מקבילים, שכן כל אחד מן הצדדים מגדיר הצלחה בלמידת המתמטיקה בדרך אחרת. אף שפתרון בעיות תופס מקום של כבוד במחקר המתמטי העדכני והתבסס בקרב אוכלוסיות מורים רחבות (למשל, Felmer, Pehkonen & Kilpatrck, 2016), חלק נכבד מזמן השיעור ועבודות הבית מוקדש לחיזוק שליטה במיומנויות טכניות, המהווה אחד מהכישורים המתמטיים הנדרשים גם לפי תכנית הלימודים הישראלית (משרד החינוך, 2006).

אמנם הוצעו בעבר דרכים לעיצוב משימות תרגול של טכניקות אלגבריות ככלי להשגת יעדים מוגדרים, אולם תיאוריות אלו אינן נתמכות עדיין בראיות אמפיריות (ראה למשל Friedlander & Arcavi, 2012).

התרגול הוא מושג נפוץ בשיח המורים. עם זאת, מורים שונים מפרשים אותו בדרכים שונות ולעתים קשה לרדת לסוף דעתם כשהם משתמשים בו. מכיוון שבספרות המקצועית לא מצויה הגדרה ל'תרגול', נציע כאן הגדרה אופרציונלית שמשרתת אותנו במחקר זה, בהשראת ההגדרה למושג 'בעיה' (למשל אצל Schoenfeld, 1985): תרגול מתמטי הוא משימה - הכוללת נתונים ושאלה שעל הפותר להשיב עליה - המוצגת לתלמידים במסגרת ההוראה, כך שמציג הבעיה סבור שלפותר ידועה הדרך להגיע לפתרון המשימה.

מטרת המחקר

המחקר הנוכחי הוא חלק מפרויקט הבוחן את מקומו של התרגול בשיעורי מתמטיקה המבוססים על פתרון בעיות: בשיח המורים, בעמדותיהם, במגוון השיקולים המנחים אותם בבחירת משימות התרגול ובדרכי שילובן ברצף ההוראה. מטרת המחקר היא לזהות תפקידים של תרגול בשיעורי מתמטיקה, כפי שהם נתפסים על ידי מורי מתמטיקה ברמת 5 יח"ל בעלי אוריינטציה של הוראה מבוססת פתרון בעיות.

בקרב מורים הדוגלים בחזרה לקראת שליטה, סביר למצוא הקצאת משאבי זמן רבים למשימות תרגול. אולם ההנחה העומדת בבסיסו של מחקר זה היא, כי הקדשת חלק בלתי מבוטל משיעורי המתמטיקה לתרגול אינה פעולה הנובעת מתוך תפיסה של הוראה לקראת שליטה דווקא, ומצויה למכביר גם בקרב מורים בעלי אוריינטציה מובהקת של הוראה מושתתת על פתרון בעיות. ההנחה היא כי שילוב התרגול בשיעורי המתמטיקה אינה פעילות הנובעת מתוך אילוצי חוסר ברירה, אלא היא משרתת יעדי הוראה שונים, שהינם לעתים סמויים אף למורים עצמם.

מתודולוגיה

בשלב הראשון של המחקר השתתפו תשע מורות, כולן בעלות תואר שני ומעלה, המלמדות מתמטיקה ברמת 5 יח"ל בבתי ספר מגוונים ברחבי הארץ. המדגם הוא מדגם נוחות (convenience sample). הוותק של המורות נע בין שלוש ל-36 שנים, עם ממוצע של 18.9 שנות ותק (SD = 9.88). כל המורות שנבחרו להשתתף במחקר הינן בעלות מוניטין של מורות מעולות הדוגלות בהוראה המושתתת על פתרון בעיות, על סמך הקלטות של שיעוריהן שמפורסמות באתרים ייעודיים, מחקרים, פרסומים, הדרכה, הובלת השתלמויות וכדומה.

שיטת איסוף הנתונים שנבחרה היא ריאיון עומק. גישת המחקר היא גישה איכותנית מסוג תיאוריה המעוגנת בשדה

עם קטגוריות מוגדרות באופן חלקי (Charmaz, 1996). הריאיון מחולק לשני חלקים: ריאיון חצי-מובנה (שקדי, 2003) וריאיון קליני מבוסס משימה (Goldin, 2000). בהתאם לאופיו האיכותני-קונסטרוקטיביסטי, הריאיון תלוי באופן מוחלט בשפת המורים הנחקרים ונערך בשפה זו. הריאיון שארך 45 - 60 דקות, נפתח בשיחה פתוחה שבה תיאר המרואיין אופן הוראה של יחידת לימוד לבחירתו, ובעקבותיה נשאלו שאלות מנחות לפי מבנה הריאיון (ראה תרשים 1). בחלק השני של הריאיון התמודד המרואיין עם משימת מיון וסידור של מערכת משימות תרגול בנושא "נקודות פיתול" (ראה תרשים 2). המרואיין התבקש לבחור משימות מתוך סט המשימות ולסדרן ברצף שבו היה מציג אותן לתלמידיו, בהתאם לתפיסותיו, ולנמק את מהלכיו. בשני חלקי הריאיון נשאלו שאלות להבהרה ושאלות להדגמה במקומות הנחוצים על ידי המראיינת, שהיא הראשונה בין כותבי מאמר זה.

- מניין את לוקחת משימות? איך את בוחרת?
- ספרי/הראי תרגול מוצלח לטעמך.

תרשים 1: דוגמאות לשאלות מתוך ריאיון חצי-מובנה

לפניכם סקיצה של גרף הפונקציה f(x). ענו לפי הגרף, נמקו את תשובותיכם:

א. סמנו על הגרף נקודות אפס, נקודות קיצון ונקודות פיתול (אם ישנן).
ב. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?
ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
ד. מהם תחומי הקמירות והקעירות של הפונקציה?

קבעו: נכון או לא נכון? נמקו.

אם קיים x_0 כך ש: $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$
אז x_0 היא נקודת פיתול של הפונקציה f

מצאו נקודות פיתול של הפונקציה $y = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + 4$

תרשים 2: דוגמאות למשימות מתוך הריאיון הקליני

מיד עם תחילת איסוף הנתונים בשדה המחקר התחיל גם ניתוחם, כאשר תהליך איסוף הנתונים ותהליך הניתוח התבצעו במקביל והמשך האיסוף הושפע והונחה על-ידי תוצרי הניתוח. כל הריאיונות הוקלטו והתכנים המילוליים שוקלטו במלואם. הנתונים מוינו לפי נושאים ומילות מפתח, כאלו הידועות מן הספרות ונוספות שעלו מתוך הריאיונות עצמם. המיון הוביל ליצירת קטגוריות-על ותת-קטגוריות שעודנו ככל שנוספו ריאיונות והתקדם הניתוח. זיקוק הקטגוריות נשען גם על מונחים מקובלים בספרות מקצועית (למשל Cuoco, Goldenberg & Mark, 1996). סדרת הריאיונות נמשכה כל עוד מערכת הקטגוריות לא התייצבה, והסתיימה רק כאשר ריאיונות נוספים לא איימו לערער על יציבותה.

ממצאים

מתוך ניתוח שני חלקי הריאיון, עולים תפקידים שונים של התרגול בשיעורי המתמטיקה, לפי תפיסות המורים שהשתתפו במחקר:

ללכלך את הידיים'. שמונה מתוך תשע הנחקרות ציינו שהתרגול משמש כר נרחב להתנסות עצמאית פעילה שהיא חיונית לחיבור של הלומד עם הנלמד. גילי[1]: *"תרגול טוב[...], אני אוהבת לראות שהם עושים לבד... שהם אלה שעושים. אני מרגישה[...] שאז הרבה פעמים הלמידה מתרחשת, אסימונים נופלים."*

עוגן לפתרון בעיות. התרגול מעניק תחושת ביטחון לקראת פתרון בעיות, הן בהבניית סכימות ובשליטה בטכניקה

1 שמות כל המרואיינות המופיעים במאמר זה בדויים.

נחוצה (שש מרואיינות) והן מהפן הרגשי (שבע). ורדית: *"הבעיות שהם מתבקשים לפתור הן בעיות מורכבות [...], והם צריכים להפעיל שיקול דעת [...] ואז כשהם משתמשים בכלי בצורה נבונה, אז אני יודעת שעשיתי טוב. שהתרגול היה מוצלח"*; הלן: *"תלמיד שמרגיש [...] שיש לו את המיומנות, שהוא יודע והוא מצליח והוא עושה והוא תרגל והוא יודע, אז הוא בא לבעיה החדשה עם יותר הרגשה טובה, עם ביטחון, עם זה שהוא לא נאבד[...]"*

טיפוח הרגלי חשיבה מתמטיים. שבע מהמורות מנצלות את התרגול לעידוד התנהגויות מתמטיות ולרכישת הרגלים, ביניהם: מרדף אחר הכללות, בקרה עצמית והעלאת שאלות עיבוד. זיווה: *"[...] זה לא היה בשביל התרגיל, אבל פתאום נורא עניין אותה...."*;

כלי דיאגנוסטי. ארבע מהמרואיינות תופסות את התרגול ככלי דיאגנוסטי ביד המורה, למשל לאיתור שגיאות, לזיהוי הבנה של התלמידים ולבחירת נושאי דיון. אהובה: *"אני בונה על זה שהם עושים את זה בבית, ובשיעור הבא [...] אם יתקשו במשהו אני אתייחס"*; ורדית: *"כי אז [-בתרגול] הם בודקים מה הם יודעים ומה הם לא יודעים [...] ואז הם צריכים לחזור עם התובנות שלהם לאנשהו..."*

הכנה למבחנים. תפקיד זה של התרגול הופיע אצל שבע מהמרואיינות.

סיכום ודיון

התחושה הרווחת בקרב מורים היא שהתרגול הנפוץ מאוד בשיעורים אינו אלא כורח בל יגונה. נימה זו של התנצלות ואי-נוחות ביחס לתרגול צפה ועלתה גם במהלך סדרת הריאיונות שניתוחה מוצג כאן. חשיפת התפקידים המגוונים של התרגול בשיעורי המתמטיקה עשויה להשיב את התרגול למקום הראוי לו.

התרומה המעשית של המחקר מתבטאת בהשלכות לכיתה. הכרת תפקידיו של התרגול עשויה להוות שיקול בתכנון השיעור, בבחירת משימות ובאופן הצגתן. מחקר זה מעורר את הצורך במחקר המשך שיתחקה אחר דרכים לעיצוב תרגול המשרת יעדים מוגדרים, כגון בניית רצף משימות כהטרמה לפתרון בעיה ספציפית או לשם השגת התנהגות מתמטית נבחרת.

ביבליוגרפיה

משרד החינוך, התרבות והספורט המזכירות הפדגוגית האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים.** ירושלים: משרד החינוך, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים.

שקדי, א' (2003). **מילים המנסות לגעת: מחקר איכותני תיאוריה ויישום.** תל אביב: רמות.

Charmaz, K. (1996), The search for meaning – Grounded theory. In J. A. Smith, R. Harre, & L. Van Langenhove (Eds.), *Rethinking Methods in Psychology* (pp. 27-49). London: Sage Publication.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.

Felmer, P. L., Pehkonen, E., & Kilpatrck, J. (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems*. Springer International Publishing.

Friedlander, A., & Arcavi, A. (2012). Practicing algebraic skills: A conceptual approach. *MatheMatics teacher, 105*(8), 608-614.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. (2009). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Colección Digital Eudoxus*, (7).

Sweller, J., Clark, R., & Kirschner, P. (2010). Teaching general problem-solving skills is not a substitute for, or a viable addition to, teaching mathematics. Notices of the *American Mathematical Society, 57*(10), 1303-1304.

שימוש של מורים בבעיות לא שגרתיות בהוראת מתמטיקה

נאדר חילף, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר שבע, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
אבי ברמן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

רקע תיאורטי

פתרון בעיות מהווה מרכיב חשוב בהוראת המתמטיקה ויש רבים הסוברים כי המטרה העיקרית של למידת מתמטיקה היא פיתוח היכולת לפתרון בעיות (Schoenfeld, 1988; Polya, 1962 ;NCTM, 2000 ; גזית ופטקין, 2009).
גירון (גירון, 2009) מתייחסת במחקרה לבעיות שגרתיות ובעיות לא שגרתיות. בעיות לא שגרתיות הן בעיות שדורשות חשיבה מסדר גבוה ובדרך כלל אינן נמצאות בספרי הלימוד במתמטיקה. כמו כן מאפשרות לבדוק את יישום החומר הנלמד, ברמות שאינן שחזור אלגוריתם או פרוצדורה שתורגלה בכיתה.

שאלות המחקר

1. מהן עמדות המורים כלפי השימוש בבעיות לא שגרתיות?
2. מהם מאפייני הבעיות הלא שגרתיות שהמורים מחברים?
3. מהם הקשיים של תלמידים בפתרון בעיות לא שגרתיות?

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה 25 מורים המלמדים מתמטיקה בבתי ספר על-יסודיים, 76 תלמידי כיתה ט' (43 שלומדים בקבוצות המצוינות ו-33 שלומדים בכיתה הרגילה).

כלי המחקר

במחקר נעשה שימוש בשאלון עמדות למורים וקובץ של 4 בעיות לא שגרתיות שהועבר לתלמידים.

ממצאים

תחילה יוצגו הממצאים הקשורים למורים, לאחר מכן לממצאים הקשורים לתלמידים.

1. ניתוח שאלוני המורים

המורים ציינו שהקושי העיקרי של תלמידים בפתרון בעיות לא שגרתיות נובע מכך שהתלמידים לא יודעים איך לגשת לפתרון בעיות כאלה, זה נובע מכך שהם לא נחשפו לאסטרטגיות לפתרון בעיות, כיוון שלמורים שרוצים להספיק את החומר הנדרש בתכנית הלימודים אין זמן לעשות זאת ובעיות כאלה כמעט ולא מופיעות בספרי הלימוד. קושי נוסף שצוין הוא קשיים בהבנת הנקרא.
כשליש מהמורים ציינו שהם עצמם לא נחשפו לבעיות לא שגרתיות. המורים שכן נחשפו לבעיות לא שגרתיות נתנו מספר דוגמאות לבעיות: מצא את הכלל לפיו בנויה סדרה (יש הרבה כללים), חידות מתמטיות וריבועי קסם. היו מורים שציינו שהם נחשפו אך לא זוכרים דוגמאות. למרות שחלק מהמורים לא נחשפו לבעיות לא שגרתיות, כמעט כולם (24) ציינו שהם מעודדים שילוב בעיות לא שגרתיות. המורים ציינו מספר יתרונות לשילוב בעיות לא שגרתיות בהוראת המתמטיקה: חשיבה מחוץ לקופסא, פיתוח חשיבה מתמטית, פיתוח חשיבה ביקורתית, גורם ללמידה משמעותית, מקל על התמודדות עם לימודי המתמטיקה ברמה של 5 יח"ל, מעורר עניין ומוציא משגרה, מחזק את הרגשת המסוגלות של התלמידים. כמו כן המורים ציינו מספר חסרונות: בא על חשבון הספק תכנית הלימודים, הבעיות מתאימות רק לחלק מהתלמידים בכיתה ואלה שלא מבינים את הבעיות ולא מצליחים לפתור אותן נפגעת אצלם הרגשת המסוגלות דבר שעלול לגרום לחרדה ממתמטיקה.

2. ניתוח פתרונות התלמידים

נתייחס ראשית לממצאים הקשורים לתלמידים בקבוצת המצוינות ולאחר מכן לתלמידים בקבוצה הרגילה עבור כל אחת מהבעיות.

בעיה מס' 1

"במשפחה 4 ילדים בני 5, 8, 13, 15. חנה, ברוך, אהובה וגלית. מה הגיל של כל ילד אם ילדה אחת הולכת לגן, חנה מבוגרת מברוך ואילו סכום הגילאים של חנה ואהובה מתחלק ללא שארית ב 3".

מרבית התלמידים (37) כתבו תשובות נכונות עם הסברים מלאים, כל התלמידים בדקו אפשרויות שונות והגיעו לאפשרות שמתאימה לנתוני השאלה "ילדה אחת הולכת לגן ולכן זה לא ברוך כי ברוך הוא הבן היחידי ולכן הוא לא בן 5 אך ידוע לנו שגם חנה יותר מבוגרת מברוך ולכן הוא לא יכול להיות בן 15 ולכן האופציות הנותרות הן 8 ו- 13. הסכומים שמתחלקים ב- 3 הם: 13+5 או 13+8 אהובה וחנה לא יכולות להיות בנות 13 ו 8 כי אז בארוך יהיה בן 5 וזה בלתי אפשרי אז חנה ואהובה חייבות להיות בנות 5 ו- 13 אך חנה לא יכולה להיות בת 5 כי היא גדולה מברוך אז חנה חייבת להיות 13 ואהובה 5 מכיוון שחנה בת 13 אז בארוך חייב להיות בן 8 וזה משאיר לגלית להיות בת 15"

5 תלמידים כתבו תשובות סופיות נכונות בלי הסברים ותלמיד אחד פתר לא נכון.

בעיה מס' 2

"40% ממשקל הצמר של כבשה שווה ל- 25% ממשקלה של הכבשה כולל הצמר. האם משקל הצמר גדול/קטן או שווה למשקל הכבשה ללא הצמר? נמקו את תשובתכם"

21 תלמידים פתרו באופן מלא על ידי בנית משוואה בשני נעלמים כך שאחד הנעלמים הוא משקל הצמר והשני משקל הכבשה ללא הצמר ומצאו קשר בין שני הנעלמים. שניים פתרו נכון אך ציין בסוף שהוא לא משוכנע מהתשובה שלו כי לא הגיוני שמשקל הצמר יותר גדול ממשקל הכבשה ללא צמר.

3 מהתלמידים טענו שלפי "ההיגיון" משקל הכבשה ללא צמר יותר גדול ממשקל הצמר וזו תשובה לא נכונה.

מספר תלמידים (11) בנו משוואות נכונות כך ש- X הוא משקל צמר ו- Y משקל כבשה ללא צמר, הגיו בסוף הפתרון לכך ש- $3x = 5y$ אך לא הצליחו לקבוע מי יותר גדול.

תלמיד אחד הגיע לכך ש- $85\%y = 75\%x \Rightarrow 0.15y = 0.25x$ ונתן תשובה נכונה

2 תלמידים בנו משוואה נכונה ולא הצליחו להמשיך ולהגיע לקשר בין הנעלמים. חמשה תלמידים פתרו לא נכון אחד מהן הסביר כי 40% יותר גדול מ 25% אז משקל הצמר יותר גדול, שניים כתבו הסבר לא ברור, אחד הסביר אם X הוא משקל צמר אז משקל צמר $0.4x$ ולכן משקל כבשה ללא צמר הוא $9.6x$ ולכן $9.6x$ יותר גדול מ- $0.4x$ ולכן משקל צמר יותר קטן שזו תשובה לא נכונה.

בעיה מס' 3

הוכיחו כי:

$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}.$$

(אפשר להשתמש בזהות: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$)

18 תלמידים פתרו נכון, 4 מהם השתמשו באינדוקציה ו- 14 השתמשו בזהות הנתונה.

19 תלמידים פתרו לא נכון, מרביתם התחילו לפתור לפי הזהות והמשיכו לא נכון.

6 תלמידים לא פתרו.

בעיה מס' 4

הוכיחו כי אם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אז $\frac{xa+yc}{xb+yd}=\frac{\sqrt[3]{a^2c}}{\sqrt[3]{b^2d}}$

7 תלמידים פתרו נכון, הציבו את הנתון והגיעו לכך ש- $\frac{\sqrt[3]{a^2c}}{\sqrt[3]{b^2d}}=\frac{a}{b}$

5 רשמו $\frac{xa+yc}{xb+yd}=\frac{a}{b}$ עשו כפל באלכסון ולבסוף הגיעו לנתון

2 תלמידים השתמשו בנתון $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ הסיקו מכך ש- $c=\frac{ad}{b}$ ו- $d=\frac{bc}{a}$, הציבו בביטוי $\frac{xa+yc}{xb+yd}$

ולאחר הוצאת גורם משותף וצמצום הגיעו לתוצאה לאגף ימין $\frac{a}{b}$.

26 תלמידים פתרו לא נכון ו- 10 תלמידים לא נתנו פתרון.

התלמידים בקבוצה הרגילה קיבלו הדרכה לפתרון הבעיות: בבעיה מס' 1 קיבלו את הרמז "להתחיל את הפתרון בהסבר למה הגיל של בארוך בין 5 שנים ל- 15 שנים", בבעיה מס' 2

"אם $3x=5y$ איזה מספר יותר גדול y או x", בבעיה מס' 3 "$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$"

בבעיה מס' 4 "אם $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אז $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{\sqrt[3]{a^2c}}{\sqrt[3]{b^2d}}$"

מרביתם לא הצליחו לפתור את הבעיות ולא השתמשו ברמז הנתון.

כמו כן, מרבית התלמידים ציינו:

1. מסכימים במידה בינונית שילוב בעיות לא שגרתיות בהוראת המתמטיקה.
2. נחשפו במידה מעטה לבעיות לא שגרתיות במהלך לימודיהם.
3. מסכימים במידה רבה לקושי של הבעיות שקיבלו.
4. ההדרכה עזרה במידה מעטה.
5. מסכימים במידה בינונית ששילוב בעיות לא שגרתיות בשיעור הופכות את השיעור ליותר מעניין.
6. מסכימים במידה בינונית לתת את ההדרכה לפתרון בהתחלה עם הבעיות.

רשימת מקורות

גזית, א. ופטקין, ד. (2009). מקומה של יצירתיות בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות אצל מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ואצל סטודנטיות המוכשרות להוראה בתחומי דעת אחרים. **מספר חזק 2000**, 19, 16-24.

גירון, ת. (2009). תרומתן של בעיות בלתי שגרתיות. **מספר חזק 2000**, 17, 42-48.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (Vol. I). New York: Wiley.

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses". *Educational Psychologist, 23*(2), 145-166.

שיח תלמידים סביב קריאת הוכחות ללא מילים

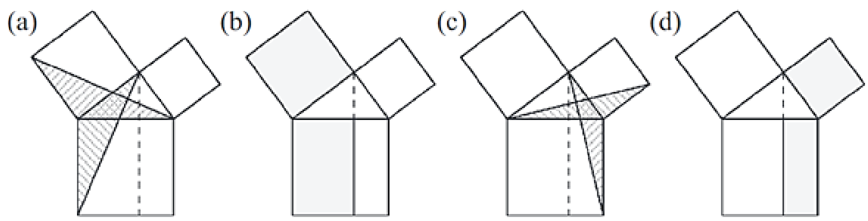
נדב מרקו, האוניברסיטה העברית בירושלים

תיאור המיצג

המיצג יאפשר למשתתפים להתנסות בקריאת הוכחות ללא מילים (הל"מ) מתחומים שונים במתמטיקה. מטרות המיצג הנן לחשוף את המשתתפים ליופי ולאלגנטיות של הוכחות אלה, לאפשר להם להתנסות בעצמם באתגר פענוח ההוכחות ולהיווכח ברווח ובהנאה שהשימוש בהן יכול להסב לתלמידים. בנוסף, במיצג יוצגו ממצאים ראשוניים ממחקר במסגרתו תלמידי תיכון וחטיבה ייחשפו להל"מ. המחקר הוא מחקר גישוש המבקש לברר מהם האתגרים עמם מתמודדים תלמידים בעת קריאת הל"מ וכן לעמוד על מהלכי שיח שונים בהם הם נוקטים בהתמודדותם עם אתגרים אלה. בנוסף יתמקד ניתוח השיח בביטויים של אסתטיקה.

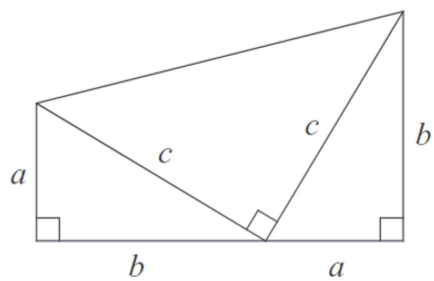
רקע תיאורטי

קשה להפריז בחשיבותן ומרכזיותן של הוכחות בתחום המתמטיקה. הוכחות אינן רק מאשרות את נכונותן של טענות, אלא אף מסבירות אותן ומציגות רעיונות, שיטות וכלים מתמטיים המשמשים לחקר ופיתוח תחום המתמטיקה (Rav, 1999). בנוסף, בקהילת העוסקים בחינוך המתמטי מקובל לטעון כי להוכחות תפקיד מרכזי בפיתוח ההבנה המתמטית של תלמידים (Hanna, 2001).



דוגמא 1: הוכחה ללא מילים למשפט פתגורס של אוקלידס (I.47)

הל"מ, או הוכחות ויזואליות, הן סוג של טקסט מתמטי, העושה שימוש בשרטוטים כדי להצביע על דרך להוכחת משפט או טענה מסוימים (Nelsen, 1993; Miller, 2012). השרטוט יכול לכלול גם כמה סימנים מתמטיים וכמה חישובים, אך אף מילה איננה מצורפת אליו ועל הקורא להשלים את ההוכחה על סמך המידע הנרמז בו. לצורך פיענוח של הל"מ על הקורא לגלות רמת מעורבות גבוהה ולנקוט מספר פעולות אפיסטמולוגיות: להבין כיצד כל חלק בציור מתקשר לטענה אותה מבקשים להוכיח, לקשר חלקים אלה לידע קודם שיש בידיו, לגלות את הסדר של הבנייה בשרטוט, את סדר הטענות המופקות ממנו ואת ההנמקות המתאימות, כך שיוכל לשחזר את ההוכחה בשלמותה. שתי הדוגמאות הבאות מהוות הל"מ למשפט פיתגורס (Alsina & Nelsen 2011, pp. 3-22):



דוגמא 2: הוכחה ללא מילים של משפט פתגורס מאת ג'יימס גרפילד נשיאה ה-20 של ארה"ב.

ניתן לראות בהל"מ גם סוג של ייצוג ויזואלי מתמטי המשמש למטרות פדגוגיות. קיים מחקר ענף על ייצוגים אלה המתאר את יתרונות השימוש בהם, הקשיים של תלמידים בהבנתם ואת הסיבות לכך שהשימוש בהם אינו נפוץ בקרב מורים למתמטיקה (Arcavi, 2003; Natsheh & Karsenty, 2014; Rivera, 2011; Vinner, 1989). עם זאת, מחקר אודות הל"מ הוא מצומצם. במחקר חלוצי בחנו הראל ודרייפוס (2009) את המידה בה תלמידי תיכון מקבלים הוכחות אלו כתקפות ואת מידת ההעדפה שלהם אותן על פני הוכחות אלגבריות. הם מצאו שתלמידים שנחשפו להל"מ ראו אותן כמשכנעות ומסבירות יותר מהוכחות אלגבריות מקבילות, אך לא סברו שהן תהיינה תקפות ומקובלות בעיני מוריהם כמו ההוכחות האלגבריות. כמו כן, נמצא כי שילוב הוכחות ויזואליות בשיעורים תרם לרמה גבוהה של מעורבות ועניין מצד התלמידים. ממצאים אלו אינם מסבירים את השימוש המועט בהל"מ בכיתות (הראל ודרייפוס, 2009).

המחקר הנוכחי

במחקר הנוכחי אנו מבקשים לבחון כיצד זוגות של תלמידים מתמודדים עם פענוח הל"מ. היות ומדובר בטקסט מתמטי תמציתי ועשיר בפערים אנו רואים בהל"מ אובייקט שיח מבטיח העשוי לזמן דיון מתמטי פורה בין תלמידים. מחקרים חינוכיים רבים הראו את הכדאיות והרווחים של שיח טיעוני של תלמידים סביב טקסט מבחינת המוטיבציה, המעורבות ופיתוח יכולת "שכילה" (reasoning) (Clark, Anderson, Kuo, Kim, Archodidou, & Nguyen-Jahiel, 2003; Jadallah et al., 2011; Reznitskaya, et al. 2009). המחקר אודות שיח של תלמידים סביב טקסטים מתמטיים נמצא עדיין בתחילת דרכו אך תומך בממצאי מחקרים אלו (אלבום-כהן, 2016). ככל הידוע לנו בעת כתיבת שורות אלו, שיח של תלמידים סביב הל"מ טרם נבחן מחקרית.

מקורות

אלבוים-כהן, א' (2016). מאפייני ההוראה והלמידה בקורסים לקריאת טקסטים מתמטיים לתלמידים מתקדמים בתיכון. (חיבור לשם קבלת תואר "דוקטור לפילוסופיה"), מכון ויצמן למדע, רחובות.

הראל, ר' ודרייפוס, ט' (2009) הוכחות ויזואליות: השקפותיהם ואמונותיהם של התלמידים. **על"ה 41**, 12-19.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2011). *Icons of mathematics: An exploration of twenty key images* (No. 45). MAA.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 52*(3), 215-241.

Clark, A. M., Anderson, R. C., Kuo, L. J., Kim, I. H., Archodidou, A., & Nguyen-Jahiel, K. (2003). Collaborative reasoning: Expanding ways for children to talk and think in school. *Educational Psychology Review, 15*(2), 181-198.

Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies In Mathematics*, 44, 5-23.

Jadallah, M., Anderson, R. C., Nguyen-Jahiel, K., Miller, B. W., Kim, I. H., Kuo, L. J., ... & Wu, X. (2011). Influence of a teacher's scaffolding moves during child-led small-group discussions. *American Educational Research Journal, 48*(1), 194-230.

Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. *ZDM, 46*(1), 109-122.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking* (No. 1). MAA.

Miller, R. L. (2012). *On proofs without words*. Whitman College, Washington.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia mathematica, 7*(1), 5-41.

Reznitskaya, A., Kuo, L. J., Clark, A. M., Miller, B., Jadallah, M., Anderson, R. C., & Nguyen-Jahiel, K. (2009). Collaborative reasoning: A dialogic approach to group discussions. *Cambridge Journal of Education, 39*(1), 29-48.

Rivera, F. (2011). Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: Research, theory, practice, and issues. Dordrecht: Springer.

Vinner S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*, 149-156.

האם עבודות אמנות תורמות להבנת מושגים מתמטיים? המקרה של מתכשרים להוראה

ליאורה נוטוב, האקדמית גורדון, חיפה

◆◆◆

אחת המטרות של העוסקים בחינוך בכלל ובחינוך המתמטי בפרט, היא לקדם את איכות החיים באמצעות שיפור והנגשה של החינוך לכל שכבות האוכלוסייה. אחת הדרכים להשגת מטרה זו היא חינוך אינטרדיסציפלינרי המשלב אמנות בלימודים בכלל ובמתמטיקה בפרט. התומכים בשילוב זה (למשל Eisner, 2002) מונים את היתרונות: למידת חקר; פיתוח חשיבה ביקורתית-יצירתית; חיפוש פתרונות מרובם שלא עושים שימוש בכללים ואלגוריתמים ידועים; פיתוח יכולת למידה אינטרדיסציפלינרית; תפקוד וקיום בסיטואציה של חוסר וודאות; ביטוי בצורות יותר מורכבות ממילים וממספרים; חוויה באמצעות חושים שלא ניתן לקבל בשום דרך אחרת פרט לאומנות; התאמה לסגנונות למידה שונים ולסוגי אינטליגנציה רבות.

במוסדות להשכלה גבוהה בעולם נעשו ניסיונות לשלב אמנות בלימודי מתמטיקה, למשל: שילוב סיפורים שמטרתם להגביר את סקרנות הלומדים (Dietiker, 2015); חקר יצירות אמנות באמצעות תוכנת מחשב ייעודית (Sendova & Chehlarova, 2013); הגשת פרויקט סיום בקורס המשלב בין תכנים מתמטיים ברמה של בית ספר על-יסודי ובין יצירות אמנות (Uğurel, Tuncer, & Toprak, 2013); חקר של יצירות אמנות בקורס חשבון אינפיניטסימלי (Wu, Jia, & Ye, 2015). ניסיונות אלה לא לוו במחקר שבוחן את הקשר בין שילוב אמנות להישגים מתמטיים לאוכלוסייה זו. לעומת זאת, במחקרים עבור אוכלוסיית לומדים בבתי ספר נמצא כי שילוב אמנות בלימודי מתמטיקה מעלה את ההנאה של הלומדים, מוריד חרדות ונותן מענה לימודי לאוכלוסייה הטרוגנית וגם מעלה את ההישגים גם לטווח קצר וגם לטווח ארוך (למשל Gullatt, 2007; Smithrim & Upitis, 2005).

כדי לחשוף מתכשרים להוראת מתמטיקה ללמידה אינטרדיסציפלינרית המשלבת אמנות ולאפשר להם להתנסות בלמידה כזו, ומתוך ידיעה שמורים נוטים ללמד בדרכים בהם למדו (Oleson & Hora, 2014), פתחתי קורס מקוון אסינכרוני סימסטריאלי בשם "כשמתמטיקה פוגשת אמנות". אחדות ממטרות הקורס היו: הרחבת הידע המתמטי; יישום ידע מתמטי לשם ניתוח יצירות אמנות; יישום מושגים מתמטיים בחיי יום יום ותופעות טבע. בקורס נלמדו שישה נושאים מתמטיים שסטודנטים לא הכירו כלל או הכירו באופן שטחי ביותר: ריצופים, אפס ואינסוף בהקשר של חישוב שטח והיקף, חתך הזהב, ראיה מרחבית (מיקוד בצורות בלתי אפשריות), ממד ודמיון עצמי. חלק מהנושאים נלמדים בבית הספר היסודי, חלקם נזכרים אך לא נלמדים לעומק וחלקם לא נלמדים כלל. כדי להתייחס לפער הקיים בידע אודות הקשר בין עיסוק באמנות והישגים במתמטיקה בין אוכלוסיית התלמידים לאוכלוסיית מתכשרים להוראה, תוכנן מחקר מלווה לקורס. שאלת המחקר הייתה: האם עיסוק באמנות (מקורית של הלומד או לא מקורית) תורם להישגים במתמטיקה?

עבור מחקר זה נבחר הדגם **The Explanatory Design** (Creswell & Plano Clark, 2007) הכולל שתי פעימות: איסוף נתונים כמותיים ולאחר מכן, פרוש הנתונים הכמותיים באמצעות נתונים איכותניים. שיטה זו מאפשרת לחוקר לנצל את יתרונות של שתי הפרדיגמות המחקריות: באמצעות שיטה כמותית ניתן לבחון קשר בין מספר משתנים. באמצעות שיטה איכותנית, ניתן לקבל את פרשנותם של משתתפי המחקר לממצאים הכמותיים.

במחקר השתתפו 127 מתכשרות להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי הלומדות בשנה שנייה באחת המכללות בצפון הארץ.

כדי לבדוק את קיום הקשר בין עיסוק באמנות להישגים מתמטיים, נאספו **נתונים כמותיים** משלושה מקורות: ציונים במבדקים מקוונים שבחנו ידע מתמטי; ציון במבחן המסכם שכלל את כל המושגים שנלמדו בקורס וציונים על יצירות אומנות (מקוריות או לא מקוריות) שהציגו פרשנות אישית של הסטודנטיות למושגים המתמטיים. **נתונים איכותניים** נאספו מארבעה מקורות: ראיונות בתום הקורס עם סטודנטיות שהתנדבו; משובים ייעודיים לכל אחת מיחידות הקורס, משוב סטנדרטי שנערך על ידי המכללה ופורומים ביחידות השונות.

הנתונים הכמותיים עברו ניתוח סטטיסטי - חושבו שני מקדמי מתאם של פרסון: r_1 מתייחס לקשר בין ציונים על יצירות האמנות וציונים במבדקים מקוונים; ו- r_2 מתייחס לקשר בין ציון במבחן המסכם ולציונים על יצירות האמנות. הנתונים האיכותניים נותחו על פי שיטתם של שטראוס וקורבין (Strauss & Corbin, 1990): בשלב ראשון כל אחד מהראיונות, המשובים והפורומים נותחו לשם זיהוי תמות מרכזיות ומשניות. בשלב הבא זוהו קשרים בין הקטגוריות השונות ולאחר מכן נעשה ניסיון לקשור בין הממצאים הכמותיים והאיכותניים.

ממצאים כמותיים: נמצא קשר חיובי ומובהק עבור שני המתאמים: r_1=0.30 ו-r_2=0.26 ברמה של 0.01. ציונים על עבודות אומנות בחמישה תחומים (פרט לממד) תרמו ל-r_1. לעומת זאת, התרומה העיקרית ל-r_2 הייתה מציונים על עבודות אמנות בנושאים דמיון עצמי (לכל שאלות המבחן) וראיה מרחבית (לשלוש שאלות בלבד). התרומה של עבודות בנושא דמיון עצמי לשני המקדמים מעלה את ההשערה שיש קשר בין תזמון עיסוק באמנות למועד הבחינה (מבחינה מתמטית אין קשר בין התכנים של דמיון עצמי ליתר הנושאים של הקורס). כלומר, ככל שהעיסוק באמנות קרוב יותר למועד הבחינה, כך התרומה להישגים גדלה. השערה זו צריכה להיבדק במחקרים הבאים.
נתונים משתי יחידות, ממד ומפגש בין אפס ואינסוף בהקשר של חישוב שטח והיקף, נותחו כחקרי מקרה. יחידת ממד נבחרה מכוון שערכם של המתאמים r_1 ו-r_2 היה כמעט אפס. מניתוח פוסטים בפורום על ידע קודם בנושא הממד עולה כי לרוב הסטודנטיות היו תפיסות שגויות אודות המושג. התפיסות השגויות היו משני מקורות עיקריים: תפיסת מושג או פרשנות מילולית(Nutov, 2018a; Nutov, 2018b) .
היחידה אפס ואינסוף בהקשר של חישוב שטח והיקף נבחרה כחקר מקרה מכוון שבגלריה של היחידה היו מעל לשליש עבודות אמנות מקוריות (47 מתוך 127), מה שאפשר לבדוק את הקשר בין יצירת עבודות מקורית להישגים. ואכן, נמצא קשר מובהק בין ציוני עבודות מקוריות להישגים במבדק מקוון (r_1=0.308 ברמת מובהקות 0.05) ובשאלה התואמת במבחן המסכם (r_2=0.178 ברמת מובהקות 0.05). כלומר, סטודנטית שעשתה עבודת אמנות מקורית, קבלה ציון מעל לממוצע הכיתתי גם במבדק המקוון וגם במבחן.
ממצאים איכותניים: מניתוח דברי הסטודנטיות עולה כי:
- הקשר בין אמנות להוראת המתמטיקה הוא חדשני, מעורר סקרנות, מהנה ומעורר השראה אצל הלומדים: "זה מדהים. בחיים לא ראיתי את זה ככה. לא הסתכלתי על זה מנקודת מבט כזו".
- הקשר בין מתמטיקה לאמנות הוא דו-כווני: כלומר, יצירות אמנות עוזרות להבין מושגים מתמטיים וההפך, הבנה מתמטית של מושג עוזרת ליצור עבודת אמנות בנושא המתמטי: "אמנות נותנת לי ראיה מקיפה... וזה מניע אותי לצייר דברים שהם לא שגרתיים... ועזר לגבש את הרעיון ואיך לצייר".
- חלק מהסטודנטיות מצאו את הקשר בין מתמטיקה לאמנות כיעיל להוראת מתמטיקה וחושבות ליישם אותה בעתיד: "אני אוהב את הרעיון של חיבור בין מתמטיקה לאמנות. זה טוב ללמד ילדים מושגים מתמטיים ולאחר מכן לבקש מהם לצייר אותם. הם אוהבים ציור. אני אשתמש בשיטה זו כאשר אהיה מורה".

סיכום

ממצאי המחקר מצביעים על קיום קשר בין עיסוק באמנות להישגים במתמטיקה. חשוב לציין שהסטודנטים השקיעו זמן רב בעיסוק באמנות למרות שהערכה עבור עבודות האמנות תרמה מעט לציון הסופי (9%) בהשוואה להערכת

הידע המתמטי (20% למבדקים ו-56% למבחן), עובדה המצביעה על כך שלא ניתן להתעלם מהתרומה הרגשית והקוגניטיבית, של העיסוק באמנות להישגים מתמטיים בקורס.

מקורות

Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research, 2nd edition*. Los Angeles | London | New Delhi Singapore | Washington DC

Dietiker, L. (2015). What mathematics education can learn from art: The assumptions, values, and vision of mathematics education. *Journal of Education, 195*(1), 1-10.

Eisner, E. (2002). The arts and the creation of mind. New Haven & London: Yeal Universiry Press.

Gullatt, D. E. (2007). September). Research links the arts with student academic gains. *The Educational Forum, 71*(3), 211-220).

Nutov, L. (2018a). When mathematics meets art: How might art contribute to the understanding of mathematical concepts? Bridges Conference Proceedings, Bridges Stockholm, Sweden, July 25–29, pp 341-346.

Nutov, L. (2018b). Is dimension a size, a surface or a space? Pre-service teachers' perceptions of the concept. In B. Maj-Tatsis, K. Tasis, & E. Swoboda, *Mathematics in the Real World* (pp. 231-240). Rzeszow: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Oleson, A., & Hora, M. T. (2014). Teaching the way they were taught? Revisiting the sources of teaching knowledge and the role of prior experience in shaping faculty teaching practices. *Higher Education, 68*(1), 29-45.

Sendova, E., & Chehlarova, T. (2013). Studying fine-art compositions by means of dynamic geometry. *DynaMath 12 Conference* (pp. 495-502). Nitra, Slovakia: Constantine the Philosopher University.

Smithrim, K., & Upitis, R. (2005). Learning through the arts: Lessons of engagement. *Canadian Journal of Education/Revue canadienne de l'éducation,* 109-127.

Strauss, A. L., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. SAGE Publications, Inc.

Uğurel, I., Tuncer, G., & Toprak, Ç. (2013). Is it possible to design a math-art instructional practice? Cases of pre-service teachers. *Journal of Theoretical Educational Science, 6*(4), 455-476.

Wu, L., Jia, L., & Ye, L. (2015). Exploration of calculus teaching and assessment through artwork. *International Journal of Applied Research, 1*(8), 731-735.

כיצד מורים למתמטיקה בישראל תופסים את השימוש בגאוגברה בכתה?

מאיה ניב, מכללת לוינסקי לחינוך
רותם עבדו, מכללת לוינסקי לחינוך

◆◆◆

רקע תאורטי

שילוב כלים דיגיטליים בהוראה יכול לשנות את פני ההוראה והלמידה בכיתת המתמטיקה (למשל, Leung & Baccglini-Frank, 2016). כלים דיגטלים רבים תומכים במימדים שונים של הוראה ולמידת המתמטיקה, מחוץ לכיתה ובתוכה (Hyoles, 2018). אחד מסוגי הכלים הדיגיטלים הפופולריים ביותר בקרב חוקרי הוראה ולמידת מתמטיקה כיום הוא כלי המתמטיקה הדינמית, אשר מאפשרים יצירה וחקירה של מודלים דינמיים למושגים מתמטיים - על ידי מורים ותלמידים. והפופולארית שבהם (Sinclair et al., 2016) היא תכנת גאוגברה (Hohenwarter & Lavicza, 2007).

עם זאת, אנו תחת התחושה כי גאוגברה - כמו כלי מתמטיקה דינאמית אחרים - בקושי משולבת בכתות על אף הפוטנציאל הרב שלה להעצים את דרכי ההוראה, ולשנות את הדרך שבה לומדים תלמידים בכיתת המתמטיקה. כיוון שלא מצאנו מידע אמפירי בנושא, החלטנו לחקור כיצד מורים בישראל תופסים את השימוש בגאוגברה בכיתה? מחקרים קודמים זיהו מספר גורמים המשפיעים על השימוש בטכנולוגיות מתמטיקה דינמית בכיתות. על פי ליטל (Little, 2009), (1) כלי מתמטיקה דינאמית המשולב בכתה צריך להיות נוח לשימוש, כך שהדגש הוא למידת המתמטיקה בעזרת התוכנה, ולא למידת השימוש בתוכנה; (2) ישנה חשיבות בנגישות למחשבים; ו (3) מורים חייבים להיות משוכנעים בכך שכלים אלו יאפשרו ללמד את הנדרש בתכנית הלימודים באופן יעיל יותר ממה שנעשה עד כה. אנתוני וקלארק (Anthony & Clark, 2011), מציינים אף הם את הטענה האחרונה, ואף מראים כי מורים רבים אינם רואים בגאוגברה ככלי המזמן חקר מתמטי. אנתוני וקלארק אף מוסיפים כי מורים רבים טענו כי הם חסרים חניכה ולווי מקצועי הולם. יתר על כן, מורים רואים בכלים דוגמאת גאוגברה ככלים להעשרה של נושאים לימודיים, שאינם מתקשרים באופן ישיר אל תכנית הלימודים. לבסוף, מציינים אנתוני וקלארק, ישנו חשש בקרב מורים למתמטיקה - שלמרות ההכנות הרבות לשיעורים מבוססי טכנולוגיה ישנו תמיד סיכוי לתקלה במערכת המחשוב אשר יכולה לעכב, או אף לבטל, את השיעור.

במחקר זה נרחיב את היריעה ונמפה את עמדותיהם והקשיים עמם הם מתמודדים מורים ישראלים - אישית ומערכתית - לגבי אופן השימוש בגאוגברה בכיתתם. שאלות המחקר אם כך, הן:

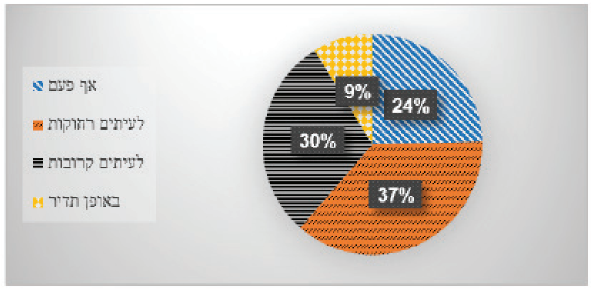
א. מהי התכיפות השימוש של המורים בגאוגברה בכתתם? מהו אופן השימוש בכלי זה?
ב. כיצד תופסים מורים את השימוש בגאוגברה?
ג. עם אילו חסמים מתמודדים המורים בעת שימוש בגאוגברה?
ד. אילו פתרונות מציעים אותם מורים לחסמי שימוש אלו?

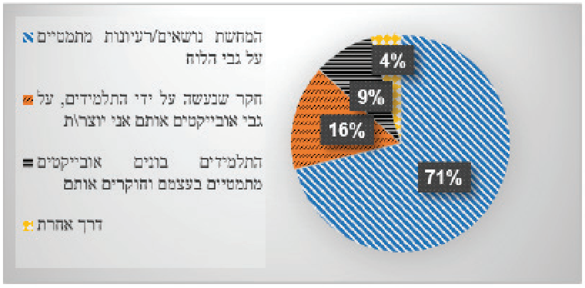
שיטת מחקר

מערך המחקר מהווה שילוב של מחקר איכותני וכמותני (mixed methods), אשר באה לידי ביטוי בקידוד וספירה של תמות על מתוך תשובותיהם של מורים לשאלון אנונימי שיצרנו. השאלון נועד לאסוף נתונים דמוגרפיים של המורים, וכולל שאלות פתוחות שמותאמות לשאלות המחקר. נדווח כאן על ממצאי מחקר הפיילוט, בו לקחו חלק 57 מורים למתמטיקה מכל הארץ. המורים גויסו דרך קבוצות פייסבוק כגון "מורים למתמטיקה מכל הארץ". ממוצע הגילאים היה 44, עם ותק ממוצע של 11 שנים; כ- 16% מלמדים בבתי ספר יסודיים וכ 88% מלמדים בבתי ספר תיכונים (שני מורים מלמדים גם וגם).

תוצאות

להלן התשובה לשאלת המחקר הראשונה, "מהי תכיפות השימוש בגאוגברה בכתתם? מהו אופן השימוש בכלי זה?"





איור 1: התפלגות תשובות המורים. מימין, כמענה לשאלה: באיזו תכיפות את/ה משלב/ת שימוש בגאוגברה בכתה?
משמאל, כמענה לשאלה: במידה והנך משלב/ת שימוש בגאוגברה בכתה, מהן מטרות השימוש העיקריות?

כדי לענות על שאלות מחקר 2-4, שני חוקרים דנו יחד וזיהו תשובות אשר ביטאו רעיונות דומים, מתוך התשובות אותם נתנו המורים, ואגדו אותם לכדי רשימה של תמות-על (שקדי, 2003). כדי לענות על שאלת המחקר השניה, שאלנו מורים: "לדעתך, מדוע כדאי\לא כדאי להשתמש בגאוגברה בכתה?" (טבלות 1&2). התוצאות עבור שאלת המחקר השלישית (טבלה 3), הרביעית (טבלה 4) מופיעות להלן. נציג את תמות-העל הללו, ונביא דוגמאות שלהן. נשים לב: מורים הביעו יותר מתמה אחת.

טבלה 1: למה מורים חושבים שכדאי להשתמש בגאוגברה?

תמת על	מאפשר המחשה (33)	מאפשר חקר (12)	מתחבר לעולמם של התלמידים (2)	חוסך זמן להדגמות (4)
דוגמה	מאפשר לתלמידים להבין באופן מוחשי מושגים ורעיונות מתמטיים.	מדמה עבודה של מתמטיקאי: חוקר, מעלה השערות, מוכיח/מפריך	כדי להראות שמתמטיקה יכולה להיות כמו משחק	התוכנה מספקת דוגמאות רבות בזמן קצר ובכך עוזרת להגיע להכללה, לאחר מכן נותר רק להוכיח...

טבלה 2: למה מורים חושבים שלא כדאי להשתמש בגאוגברה?

תמת על	חשש מעודף מסכים וטכנולוגיה (2)	חשש משינוי והעדפה ללמד באופן מסורתי (3)	חוסר ניסיון / העדר הכשרה בשימוש בטכנולוגיה (8)
דוגמה	... צריך להפחית במסכים בכל מחיר	עדיף להיצמד לנדרש ממשרד החינוך.	לא מספיק מכירה בשביל להשתמש

טבלה 3: מענה לשאלה: לפי ניסיונך, מהם הקשיים של מורים בשילוב גאוגברה בכתה? האם תוכלו לחשוב על שניים או אפילו יותר?

חוסר היכרות (מספקת) עם הכלי (19)	פחד מטכנולוגיה (9)	תשתיות מחשוב (26)	קשיים הקשורים לזמן (13)	קשיים הקשורים לידע פדגוגי טכנולוגי (11)	חוסר מוטיבציה לעשות שינוי (14)	שונות (8)
לא יודעים לבנות יישומונים, לא שולטים בתפעול הגיאוגברה	רתיעה מהטכנולוגייה...	חוסר כלים טכנולוגים בכיתה	זמן שצריך לחקר ולהסבר לתלמידים...	...צורך להתמצא גם במתמטיקה גם ביכולות התוכנה	חוסר אמונה בתרומות הכלי	... המורה הוא בעל הידע ולכן עבור המורה הכלי מיותר

טבלה 4. מענה לשאלה: כיצד יהיה ניתן לגרום, לדעתך, להרחבת השימוש של טכנולוגיות למידה כגון גאוגברה בכיתות נוספות?

שינויים בתכנית הלימודים (8)	גיבוש פורום מורים (3)	שיפור תשתיות מחשוב (6)	פיתוח מאגר מידע (10)	הכשרה מקצועית (27)
...צריכה להיות חלק מתכנית הלימודים בחט"ב...	...היה עוזר פורום פעיל של עמיתים...	...תשתיות, לפטופים בכל כיתה או מס מחשבים נייחים בכל כיתה	לבנות מאגר שימושי...	השתלמויות נוספות שיכירו למורים את הכלי.

דיון ומסקנות

מטרת מחקר זה היא לספק תשתית ראייתית בפני אנשי החינוך המתמטי בישראל, על מאפייני השימוש של מורים למתמטיקה בישראל, בתכנת גאוגברה. הנתון המעודד הוא כי 39% מהמורים שהשתתפו במחקר משתמשים בגאוגברה לעיתים קרובות ומעלה. לגבי אופי השימוש, עם זאת, מצאנו כי מתוך המורים אשר משתמשים בגאוגברה, 71% נעזרים בה בעיקר כדי להמחיש רעיונות ונושאים מתמטים בפני הכיתה. כלומר, מורים רבים רואים בגאוגברה כאמצעי המחשה, והרבה פחות ככלי המאפשר חקר. במידה מסויימת, נראה כי השימוש בגאוגברה עדיין לא משפיע על פרקטיקות ההוראה בכיתה - בייחוד, למידה קונסטרוקטיביסטית (ר' גם, Mor & Abdu, 2018).

הסיבה הראשית שבגללה מורים חושבים שלא כדאי להשתמש בגאוגברה, היא חוסר ניסיון בשימוש בכלי ואף "פחד מטכנולוגיה". במידה מועטת יותר, מורים חוששים משינוי פרקטיקות הוראה המתלוות לשימוש בטכנולוגיה ומנוכחות מוגברת של מסכים בכיתה. כמו כן, ניכר שנושא עיקרי המעסיק מורים נוגע לקיומן של תשתיות מחשוב יציבות. מעניין לראות כי מספר מורים אף גילו חוסר מוטיבציה (או, זמן) לעשות שינוי.

בדומה למחקרים המובאים לעיל (Anthony & Clark, 2011; Little, 2009) הפתרון אותו תופסים מורים כמשמעותי ביותר נוגע לפיתוח הכשרות מורים בנושא. בנוסף, מורים העלו את האפשרות לפתח מאגרי מידע, ו/או גיבוש פורום מורים. ולבסוף, היו מורים שטענו כי יש צורך בשינוי תכנית הלימודים.

מקורות

שקדי, א. (2003) מלים המנסות לגעת: מחקר איכותני -- תיאוריה ויישום. תל אביב: רמות, אוניברסיטת תל אביב.

Anthony, A. B., & Clark, L. M. (2011). Examining dilemmas of practice associated with the integration of technology into mathematics classrooms serving urban students. *Urban Education, 46*(6), 1300-1331.

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 49-54.

Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, 1-20.

Leung, A., & Baccaglini-Frank, A. (Eds.). (2016). *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks: Potential and Pitfalls* (Vol. 8). Springer.

Little, C. (2009). Interactive geometry in the classroom: Old barriers & new opportunities. *Mathematics in School, 38*(2), 9-11.

Mor, Y., & Abdu, R. (2018). Responsive learning design: Epistemic fluency and generative pedagogical practices. *British Journal of Educational Technology*.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM, 48*(5), 691-719.

השפעת הוראת סוגיות מתמטיות הקשורות לחשבון דיפרנציאלי בספרות הרבנית על עמדות סטודנטים חרדים כלפי מתמטיקה

מאיר סנדיק, מכללת אורות ישראל

◆◆◆

תקציר

בשנים האחרונות מספר הגברים מהציבור החרדי הפונים ללימודים אקדמיים הולך וגדל בצורה משמעותית. בעקבות זאת, נפתחות מכינות קדם אקדמיות רבות המכשירות סטודנטים חרדים לקראת לימודים אקדמיים. במסגרת לימודי המכינה נחשפים לראשונה סטודנטים אלה לעולם המתמטיקה בצורה מעמיקה.

בספרות הרבנית מצאנו התייחסות רבה לנושאים מתמטיים שונים, ואף נכתבו מספר לא קטן של ספרי מתמטיקה על ידי רבנים בדורות השונים.

אחד מתחומי המחקר בהוראת המתמטיקה אשר פותח על ידי המתמטיקאי D'Ambrosio (1985) הוא "אתנומתמטיקה". הוא עוסק בהשפעת התרבות של האוכלוסיה הלומדת על לימוד המתמטיקה והוראתה בקבוצות אתניות שונות (במשמעות של ההקשר החברתי , העוסק בשפה, בנורמות ההתנהגות ובסמלים של קבוצה תרבותית מסוימת). בעקבות הספרות המחקרית בנושא "אתנומתמטיקה", מטרתו של המחקר הייתה לבחון את ההשפעה של הוראת סוגיות מתמטיות בספרות הרבנית על אמונותיהם ועמדותיהם כלפי מתמטיקה של סטודנטים חרדים הלומדים במכינות קדם אקדמיות. כלומר אמונות אודות המתמטיקה באופן כללי, כלפי טבעה של המתמטיקה, כלפי מסוגלות עצמית במתמטיקה וכלפי הקשר בין תורה ובין -מתמטיקה .

המדגם כלל 195 סטודנטים (גברים) חרדים הלומדים מתמטיקה ברמה של 4 יחידות במכינות קדם אקדמיות. לצורך מחקר זה "סטודנט חרדי" הוא מי שראוי להתקבל ללימוד בתוכניות המיוחדות לציבור החרדי במכינות הקדם אקדמיות לפי הוראת המל"ג, דהיינו:

1. אדם אשר בשנות התיכון שלו למד 4 שנים בישיבה שאיננה תיכונית (3 שנים בישיבה קטנה ושנה אחת בישיבה גדולה).
2. יש לו אישור על פטור צבאי או לחילופין אישור על שירות אזרחי (כלומר, איננו במעמד "תורתו אמונתו").

הסטודנטים שהשתתפו במחקר חולקו לשתי קבוצות - קבוצת המחקר בה נלמדו הסוגיות המתמטיות (n=108), וקבוצת ביקורת (n=87).

המחקר בוצע בארבעה שלבים:

1. העברת שאלון מקדים לבחינת עמדות הסטודנטים כלפי מתמטיקה בתחילת לימודי המכינה לכלל הסטודנטים.
2. הוראת 3 סוגיות מתמטיות בספרות הרבנית וקישורן לחומר הנלמד במכינה, לקבוצת המחקר.
3. העברת השאלון פעם נוספת לבחינת השינוי בעמדות הסטודנטים החרדים ואמונותיהם כלפי מתמטיקה, לכלל הסטודנטים.
4. העברת השאלון פעם נוספת לאחר זמן לכלל הסטודנטים, לבדיקת השפעת ההתערבות לאורך זמן.

בהרצאה זאת, אני מתכוון להראות חלק מתוצאות המחקר אשר הראו כי הוראת סוגיות מתמטיות בספרות הרבנית מביאה לשינוי חיובי בעמדות הסטודנטים בעמדתם כלפי מתמטיקה למרכיביה השונים.

תרומת המחקר באה לידי ביטוי בפן המעשי של הוראת מתמטיקה לסטודנטים חרדים הלומדים באקדמיה. הסיבה לכך היא שלפי ממצאי המחקר, הוראת המתמטיקה לסטודנטים חרדים דרך סוגיות מתמטיות בספרות הרבנית, השייכות לעולמם התרבותי של הסטודנטים החרדים, משפרת את יחסם החיובי למקצוע המתמטיקה. השינוי ביחס יתבטא באמונתם כלפי טבעה של המתמטיקה, במסוגלות העצמית שלהם במקצוע ובקשר שבין תורה ומתמטיקה.

לאור זאת, נראה לומר כי מן הראוי להורות מתמטיקה לסטודנטים חרדים בשילוב סוגיות מתמטיות בספרות הרבנית.

המחקר הזה הוא נושא עבודת הדוקטורט שלי אשר נעשתה בהנחייתם של פרופ' עלי מרצבך מהמחלקה למתמטיקה באוניברסיטת בר אילן ופרופ' נח דנא-פיקארד מהמרכז האקדמי לב.

מקורות

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44-48.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 43*(4), 471–482.

קידום ופיתוח מיומנויות הוראה של מורים ליישום עקרונות תיאורטיים בכיתות (א'-יב') המאוכלסות בתלמידים חלשים

תקוה עובדיה, מכללת אורנים ומכללת ירושלים

◆◆◆

מבוא

במחקר שבחן עקרונות התערבות להוראה בכיתות המאוכלסות בתלמידים חלשים נמצאו שלושה רעיונות תאורטיים עיקריים המקדמים למידה של התלמידים: הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות, בניית קשרי דמיון בין בעיות מתמטיות ושימוש בדפי דוגמאות פתורות בכיתת המתמטיקה. המחקר הנוכחי בוחן את אופן הפרשנות והיישום של עקרונות הוראה אלה, על ידי מורים שלמדו את העקרונות מהספרות התיאורטית, ובנו שיעורי מתמטיקה בהתאם לעקרונות. נתוני המחקר נאספו מפעילויות שבוצעו בששה קורסים שונים שכללו סה"כ 280 משתתפים סטודנטים להוראה ומורים בפועל במתמטיקה, בכל מחזור של שני קורסים בוצעה הערכה מעצבת של השגת מטרות הקורס ועוצבו הקורסים הבאים בהתאם למסקנות. נתונים נאספו מהמקורות הבאים: צפיית החוקרת בשיעורים שלמדו המורים בכיתותיהם, צפייה משתתפת של החוקרת בשיעורי הוראה זוטא שלמדו המורים עמיתים בקבוצות הלמידה, וממסמכים שהגישו המורים כהכנה, תיעוד ורפלקציה להוראתם. מניתוח הנתונים עולה כי קיימות חמש רמות של יישום העקרונות התיאורטיים, והן משתנות בהקשר של מיקוד תכני הקורס הנלמד ובהקשר של שינוי פעילות הלומדים בקורס. רמות היישום מתאפיינות בפעולות הוראה, אותם מבצעים המורים בכיתות, החל מפעולות שגרתיות שהמורים מכנים אותם בשמות של ה"עקרונות התיאורטיים" ועד פעולות חדשות, שמבוססות על העקרונות ומותאמות ללומדים ולסביבה.

מילות מפתח: יישום עקרונות תיאורטיים להוראה, עקרונות התערבות להוראת תלמידים חלשים, הוראת מתמטיקה לתלמידי תיכון חלשים, הוראת מתמטיקה לתלמידי יסודי חלשים, עקרונות לקידום מיומנויות הוראה של מורים.

רקע תיאורטי למחקר

מאפייני החשיבה של תלמידים חלשים במתמטיקה מתייחסים להיבטים רחבים של הלמידה, כגון: הקושי להבין אריתמטיקה באמצעות פעולות חשבון המבוצעות על כמויות המיוצגות באמצעות מספרים (למשל: Geary, Berch, Ochsendorf, & Koepke, 2017; McNeil, Hornburg, Fuhs, & Connor, 2017), המורכבות לתפוס צורות גאומטריות ותכונותיהן בהקשרים רחבים (Mammarella, Giofrè, & Caviola, 2017), היכולת לעבד מידע, להסיק מסקנות לוגיות בהקשר של תובנה מספרית ובהקשר של מתמטיקה מופשטת, המתארת אובייקטים ויחסים ומבנים מתמטיים (למשל: Peng, Wang, & Namkung, 2018), היכולת לארגן את המידע הנלמד באמצעות קשרים ולזכור ולקשר את הידע החדש בפעילות המתמטית הבאה (Sweller, 2015).

במחקרה של עובדיה (2014) נמצאו שלושה עקרונות תיאורטיים כמקדמים התפתחות ועצמאות בפתרון בעיות בקרב תלמידים חלשים: א. הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות (א"ה) לפתרון, תוך כדי אימון בפתרון בעיות הנפתרות באמצעות אותה א"ה, (Koichu, Berman & Moor, 2007) ב. הוראה העוסקת בבניית קשרים בין ידע תוכן, מיומנויות, מושגים וא"ה לצורך בניית סכמה קוגניטיבית הכוללת את כל הקשרים, מקושרים באופן משמעותי ללומד (Schoenfeld, 1999; Lobato, 2008 Herbert & Carpenter, 1992 ;). ג. הוראה באמצעות סוגים שונים של דוגמאות פתורות, מותאמות לצרכי התלמידים ולסביבת הלמידה (Sweller, 1988; Sweller; 2015; Sweller, 2016).

מורים לתלמידים חלשים מוצאים את עצמם חסרי כלים להוראה המקדמת את תלמידיהם לקראת למידה ועשיה מתמטית בכלל ועצמאית בפרט (עובדיה, 2017; עובדיה, 2018). בנוסף, מחקרים מצביעים על כך שמורים לתלמידים חלשים, בוחרים משימות עם דרישות מתמטיות נמוכות, שאינן בהכרח מתאימות לקידום ופיתוח חשיבה מתמטית

(עובדיה, 2014; Watson, 2001). בנוסף, מורים באופן כללי מתקשים ליישם רעיונות תיאורטיים, בכיתות הוראתם גם כאשר הם מאמינים בידע התיאורטי אליו נחשפו (Star, 2016). לאור זאת, המחקר הנוכחי התמקד בקידום פיתוח מיומנויות הוראה של מורים, בהקשר של יישום עקרונות תיאורטיים להוראת תלמידים מתקשים במתמטיקה.

שיטת המחקר

המחקר הנוכחי נעשה בגישה איכותנית, כחקר מרובה מקרים. מטרת המחקר הייתה לזהות ולאפיין את האופן שבו מורים לומדים ומיישמים עקרונות תיאורטיות להוראת תלמידים חלשים, ולבנות מסלול(ים) הוראה פוטנציאלי(ם) לקידום מורים ליישום עקרונות אלה.

אוכלוסיית המחקר כללה כ- 280 סטודנטים להוראה ומורים בפועל הלומדים בתוכניות לתואר ראשון ותואר שני בקורסים המתמקדים באסטרטגיות להוראת תלמידים חלשים בבית הספר היסודי ובבית הספר התיכון.

שאלות המחקר:

האם וכיצד מיישמים סטודנטים ומורים למתמטיקה עקרונות תיאורטיים שלמדו בקורסי הכשרה, בכיתות המאוכלסות בתלמידים חלשים?

האם וכיצד ניתן לקדם את ההתפתחות המקצועית של המורים, לקראת יישום יעיל של עקרונות ההוראה בכיתותיהם?

איסוף נתונים בוצע במהלך הוראה בששה קורסים במהלך שלוש שנים. נתונים נאספו מצפיית החוקרת בשיעורים שלמדו הסטודנטים, צפייה משתתפת של החוקרת בשיעורי הוראה זוטא שלמדו הסטודנטים\המורים עמיתים בקבוצת הלמידה, וממסמכים שהגישו המורים כהכנה, תיעוד ורפלקציה להוראתם.

ניתוח נתונים נעשה כל שנה על נתונים שנאספו מקורסי אותה שנה. הניתוח התמקד ב: משימות שעוצבו להוראה בהתאם לעקרונות, ניתוח תהליך הלמידה בקורס וניתוח תוצרי הוראה של הלומדים בהקשר של עקרונות ההוראה שנלמדו, ניתוח עבודות שהגישו הלומדים.

ממסקנות הנתונים עוצבו מחדש הקורסים לשנת ההוראה הבאה. את מסקנות העיצוב אתאר בקצרה באמצעות תרשים 1 להלן.

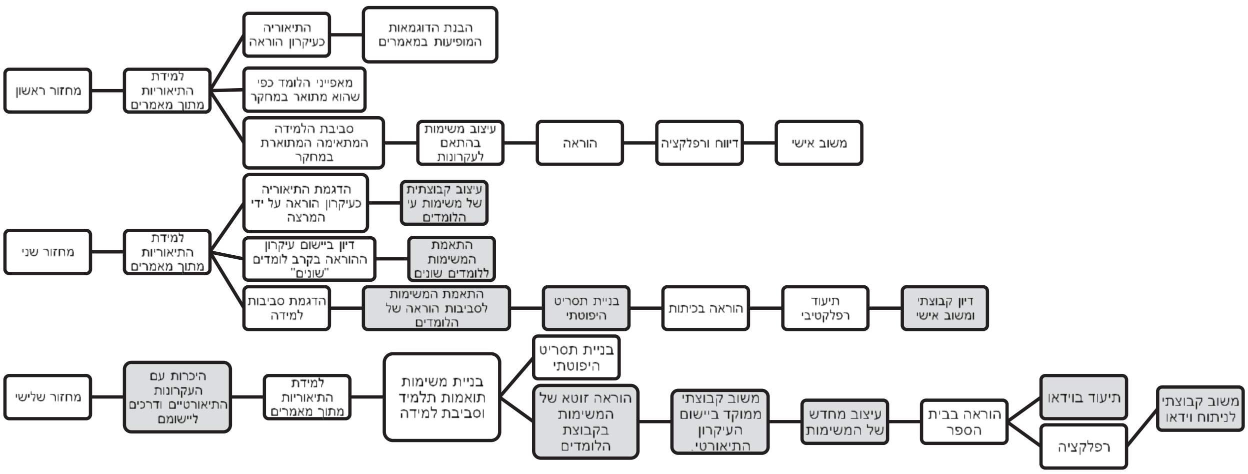
ממצאים

נמצאו חמש רמות של יישום העקרונות התיאורטיים: א. ביצוע פעולות הוראה "שגרתיות" וכינויים באמצעות "עקרונות ההוראה" התיאורטיים. ב. הבנת העקרונות התיאורטיים, ויישום של פעילויות בהוראה כפי שהם הופיעו בספרות או בקורס. ג. הבנת העקרונות התיאורטיים וניסיון לקשר כראוי בינם לבין פרקטיקות הוראה מוכרות וליישמם בהוראה. ד. הבנת העקרונות התיאורטיים ויישומם באופן זהה, לאופן שבו הם הוזכרו במאמרים, בסביבות למידה שונות. ה. הבנת העקרונות התיאורטיים ויישומם בהתאם לצרכי הלומדים וסביבת הלמידה. עוד נמצא כי סטודנטים ומורים שחוו משוב אישי או קבוצתי על יישום העקרונות בהוראתם, התקדמו לקראת פיתוח פרקטיקות הוראה המתאימות יותר לסביבות למידה בהם פעלו. בכל מחזור של שני קורסים מקבילים, נוספו פעולות שבצעה המרצה בקורס כמסקנות מניתוח נתונים של קורסים קודמים. במחזור הראשון של הלומדים ההוראה בקורס כללה: למידה של העקרונות התיאורטיים מתוך מאמרי מחקר, דיון בהיבטים של מאפייני לומד וסביבת למידה עיצוב משימות הוראה רפלקציה ומשוב אישי. במחזור השני נוספו פעולות הוראה: בניה קבוצתית של משימות בהתאם לעקרונות, דיון במאפייני הלומד והסביבה והתאמת המשימות למאפיינים, בניית מסלול היפותטי להוראה, ומשוב אישי מהקבוצה בהתאם לדיווח רפלקטיבי. במחזור השלישי נוספו הפעולות: הוראה זוטא של המשימות בקבוצת הלומדים, קבלת משוב על ההוראה מהקבוצה, עיצוב מחדש של המשימות, תיעוד הוראה בווידאו, וניתוח הווידאו על ידי הלומדים.

ככל שפעילות ההתערבות בקורס כללה: עיצוב משימות ודיון בהם בקבוצות עמיתים, הוראת עמיתים אודות המשימות המעוצבות, ומשוב מדויק לווידאו, הלומדים פיתחו את יכולתם לעצב משימות בהתאם לעקרונות.

סיכום ומסקנות

בתיאורית הלמידה תוך כדי פעולה (Learning through acting) מציגים החוקרים (Simon, Kara, Placa , & Avitzur, 2018) דרכים להשגת התפתחות קונספטואלית של מושג מתמטי קוהרנטי והן: תכנון היפותטי של הוראה, עיצוב בצעדים, ליווי והדרכה ליישום של חידושים בלמידה ויישום הוראה באמצעות כלים טכנולוגיים. למרות שהתיאוריה הנזכרת נחקרה ואוחדה כמקדמת למידה\הוראה בקרב תלמידים, במחקר הנוכחי נמצא בדיעבד כי ניהול הוראה עבור סטודנטים ומורים המיישם את הדרכים הנזכרות, מקדם התפתחות מקצועית של הלומדים. הלומדים מתפתחים לכדי מסוגלות ליישם את העקרונות התיאורטיים, באופנים מגוונים, ובסביבות מגוונות, בהתאם. עוד נמצא כי ככל שהלמידה כללה עיצוב משימות בקבוצה ומשוב להוראת עמיתים על עיצוב ופתרון המשימות, הלומדים התפתחו יותר הן בעיצוב משימות מתאימות ללומד ולסביבתו, והן ביכולת לזהות בזמן אמת את השינויים שעליהם לבצע על מנת להתאים את המשימה לסיטואציה הלימודית שנוצרה. בתרשים להלן ניתן לראות את מבנה הקורס כך שפעולות הוראה שנוספו בין המחזורים צבועות באפור. במחזור השלישי רוב הלומדים יישמו עקרונות תיאורטיים בהוראה ברמות 4-5. בשולחן העגול אציג את הדוגמאות לכל שלב התפתחות, נדון בהיבטים של הדוגמאות, ונבחן את הקשרים שבין שינוי ההוראה בקורס לקידום מיומנויות הלומדים ליישם עקרונות תיאורטיים, עבור שיעורי מתמטיקה.



תרשים 1: פעולות הוראה בקורסים בשלושה מחזורים

מקורות

עובדיה, ת. (2014). טיפוח מיומנויות לפתרון בעיות בקרב תלמידות תיכון "חלשות" במתמטיקה (126 עמ' A4) הפקולטה לחינוך מדע וטכנולוגיה. טכניון. בהנחיית פרופ' בוריס קויצ'ו.

עובדיה, ת. (2017). קידום פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות באמצעות אסטרטגיה היוריסטית: "בניית קשרי דמיון בין בעיות". כתב העת **כעת** מס' 2. מכללת תלפיות.

עובדיה, ת. (2018). עקרונות התערבות לקידום תהליכי פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות. מחקר ועיון בחינוך מתמטי מס' 6. מכללת שאנן.

Geary, D. C., Berch, D. B., Ochsendorf, R. J., & Koepke, K. M. (2017). Insights from Cognitive Science on Mathematical Learning. In Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts pp 1-18.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. *Handbook of research on mathemaCcs teaching and learning: A project of the NaConal Council of Teachers of MathemaCcs*, 65-97.

Koichu, B. Berman, A. & Moore, M. (2007). The effect of promoting heuristic literacy on the mathematic aptitude of middle-school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(1), 1-17.

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science, 35, 99–139*.

Lobato, J. (2008). When students don't apply the knowledge you think they have, rethink your assumptions about transfer. Making the connection: *Research and teaching in undergraduate mathemaCcs*, 289-304.

McNeil, N. M., Hornburg, C. B., Fuhs, M. W., & Connor, D. O. (2017). Understanding Children's Difficulties with Mathematical Equivalence. In Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts (pp. 167-195).Peng, P., Wang, C., & Namkung, J. (2018). Understanding the Cognition Related to Mathematics Difficulties: A Meta-Analysis on the Cognitive Deficit Profiles and the Bottleneck Theory. Review of Educational Research, 0034654317753350.

Schoenfeld, A. H. (1999). Looking toward the 21st century: challenges of educational theory and practice. *Educational Research, 28*(7), 4-14.

Star, J. R. (2016). Small steps forward: Improving mathematics instruction incrementally. Phi Delta Kappan, 97, 58-62. doi: 10.1177/0031721716641651,(2016).

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science, 12*, 257–285.

Sweller, J. (2015). In Academe, what is learned, and how is it learned? Current Directions in Psychological Science, 24(3), 190-194.

Sweller, J. (2016). Working memory, long-term memory, and instructional design. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition, 5*(4), 360-367.

Simon, M. A., Kara, M., Placa, N., & Avitzur, A. (2018). Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The Learning Through Activity theoretical framework. Journal of Mathematical Behavior. IN PRESS.

Watson A. (2001). Low attainders exhibiting higher-order mathematical thinking Support for learning 16(4) Nov pp.179-183. ISSN 0268-2141 Wong, R. M. F.

מה אנחנו יכולים ללמוד ממתמטיקה דינמית
בחינת הקשר בין פעילות במתמטיקה דינמית והבנה מושגית בקרב פרחי הוראה ומורים

תומר פלג, הטכניון-הפקולטה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
זהבית כהן, הטכניון-הפקולטה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
רון אהרוני, הטכניון-הפקולטה למתמטיקה

◆◆◆

הקדמה ורקע תיאורטי

בשנים האחרונות, במסגרת התכנית הארצית ללמידה משמעותית, שהחלה לפעול בשנת הלימודים תשע"ד, הושקה תכנית מקיפה להבטחת מצוינות במתמטיקה, במטרה לגדל דורות חדשים של מתמטיקאים ומדענים יצירתיים ובעלי יכולת חשיבה אנליטית (משרד החינוך, 2016). אלא שהיכולת של מורים לטפח את תלמידיהם עם הכישורים הדרושים קשורה ליכולות שלהם עצמם ליישם מיומנויות אלו (Kohen & Kramarski, 2017; Kramarski & Kohen, 2016). אחת מהמיומנויות החשובות למצוינות במתמטיקה היא הבנה מושגית (Etkind, Kenett, & Shafrir, 2010). חוקרים (כגון, Duval, 2006; Zazkis, 2016), הראו כי ההבנה של מושג מתמטי קשורה קשר הדוק למספר הייצוגים שמחזיק הלומד לגבי המושג המתמטי ויכולת המעבר שלו בין ייצוגים.
המחקר הנוכחי מתמקד במתמטיקה דינמית שהינה שם כולל לכלים טכנולוגיים המאפשרים למורה ו/או לתלמיד למדל אובייקטים מתמטיים בעזרת ייצוגים שונים, ולשנות אחד או יותר מהנתונים במודל ולצפות כיצד משתנה האובייקט המתמטי והנתונים האחרים שלו. המתמטיקה הדינמית מיושמת על ידי תוכנות כדוגמת GeoGebra, Geometer's sketchpad וכדומה ועל ידי אתרים כמו Desmos. הודות לכך שחלק מתוכנות אלה הן חינמיות נוצר מצב שהמתמטיקה הדינמית כבר נמצאת בכל כיתה שיש בה מחשב ומכאן שהשאלה הנשאלת היא לא האם היא תכנס לכיתה אלא מה תיהיה ההשפעה שלה על לימודי המתמטיקה בכיתה (Sinclair et al., 2016) ומכיוון שהאיכות של הפעילות הדינמית משפיע על תוצאות המחקר נבחן את הפעילות לפי מודל הערכה של פעילויות בגאומטריה דינמית אשר פותח על ידי (Trocki & Hollebrands, 2018) . מטרות המחקר הנוכחי הן, אם כן, לבחון את ההשפעה של פעילות במתמטיקה דינמית על ההבנה מושגית בקרב פרחי הוראה ומורים ולהעריך את ההשפעה שיש לשילוב בין הפעילות הנ"ל ובין מודל הערכה על איכות הפעילויות הנבנות על ידם לצורך קידום הבנה מושגית אצל תלמידים.
הצעה נוכחית זו מתמקדת בשלב הראשוני בו פרחי ההוראה והמורים מתבקשים להתנסות בפעילות דינמית, ובחינת ההשפעה של התנסות זו על ההבנה המושגית של הנבדקים. שלב ב' של המחקר יכלול בחינת יכולתם לבנות פעילות דינמית.

מתמטיקה דינמית

המתמטיקה הדינמית מאפשרת למשתמש לבנות אובייקט מתמטי במספר ייצוגים שונים (אלגברי, גרפי, טבלאי) ולעבור ביניהם בקלות. הדינמיות באה לידי ביטוי באינטראקציה של המשתמש, הכלי המיישם (במקרה שלנו הוא Geogebra) והמושגים המתמטיים. הכלים הניתנים למשתמש בגאומטריה דינמית הם : הוספת אובייקט לדוגמה: נקודה, קו, מצולע, מעגל וכדומה, שינוי אובייקט לדוגמה: גרירה וסיבוב, חישובים על אובייקט לדוגמה: גודל זווית, אורך קטע וכו'. בתוכנות של מתמטיקה דינמית ניתן להוסיף גם אובייקטים כמו פונקציות, טבלאות, מטריצות וקטורים ועוד, וניתן לבצע פעולות כמו נגזרת, שכיחות, הכפלת מטריצות, חיבור ווקטורים ועוד (Arcavi, 2003).
הייחודיות במתמטיקה הדינמית היא בתמיכתה בחשיבה וויזואלית שמתבטאת בשני תחומים; הראשון הוא אפשרות ליצירת מספר רב של מופעים שונים באותו ייצוג , השני הוא המעבר בין ייצוגים שונים (אלגברי, גרפי, טבלאי) של אותו אובייקט. פיתוח חשיבה וויזואלית היא בעלת חשיבות לתהליך ההבנה של מושגים מתמטיים (Presmeg, 2006).

הבנה מושגית

במחקר זה בחרתי להשתמש במושג הבנה מושגית של (Eisenhart et al., 1993) אשר מבחינים בין שני סוגי ידע: א. ידע פרוצדוראלי הכולל הכרת אלגוריתמים ושיטות טכניות, וב. ידע קונספטואלי הכולל הבנת הקשרים העמוקים בין אובייקטים מתמטיים והמשמעות שלהם. לתלמיד יש הבנה מושגית אם הוא רכש את שני סוגי הידע.

הערכת הבנה מושגית במחקר הנוכחי מתבצעת על בסיס שימוש בכלי פדגוגי הנקרא מרלו (MERLO), אשר פותח על ידי Etkind, Kenett, & Shafrir, 2010. מרלו הינו כלי ושיטה להערכת הבנה מושגית אצל הלומדים על ידי יצירה של גבולות המושג וקיום דיון סביב השייכות לתחום המושג. הכלי מאפשר בנייה של פריטי מרלו אשר מכילים משפט מטרה שהינו המושג הנלמד (או המוערך) ושלושה משפטים נלווים, אשר רק אחד מהם (Q2) הינו בעל זהות מושגית דומה (אך בעל ייצוג חזותי שונה) (ראה איור 1). ייחוס כל אחד מהמשפטים להגדרתו על פי כלי המרלו מאפשרת בחינת הבנה מושגית של הלומד.

איור 1. תבנית לסוגי יחידות המשתלבים בפריט מרלו

מתודולוגיה

משתתפי המחקר

כ-20 פרחי הוראה שהינם סטודנטים לתואר ראשון בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. המחקר המוצע יערך במסגרת קורס הוראת הגאומטריה לחטיבת הביניים; וכ-20 מורים למתמטיקה שנרשמו לתכנית הרחבת הסמכה לשנת הלימודים 2017-18 בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. מורים אלו הינם מורים מנוסים במערכת החינוך, בפרט בחטיבה העליונה. המחקר המוצע יערך במסגרת קורס גיאומטריה.

אתיקה

המחקר קיבל את אישור ועדת האתיקה למחקר במדעי ההתנהגות של הטכניון (אישור מס' 2018-031). השתתפות פרחי ההוראה והמורים במחקר הינה על בסיס התנדבותי ולאחר חתימה על טופס הסכמה להשתתפות במחקר.

מהלך המחקר

במחקר זה אנו מציעים פעילות המשלבת מתמטיקה דינמית ובחינת השפעת על הבנת מושג מתמטי: קטע אמצעים במשולש. הפעילות המוצעת כוללת שימוש בשלושה כלים טכנולוגיים המאפשרים יישום של מתמטיקה דינמית: סרגל ומחוגה, מתקן מעץ המאפשר שרטוט דינמי (ראה איור 2), ומחשב עם תוכנת גאוגברה.

איור 2. מתקן עץ לשרטוט דינמי, עבודה עם סרגל ומחוגה ועם תוכנת גאוגברה
מהלך הפעילות מתואר בנספח א

סוגיות לדיון

1. מה הם היתרונות והחסרונות בשימוש במתמטיקה דינמית?
2. האם שימוש במתמטיקה דינמית מבוססת טכנולוגיה הוא בעל פוטנציאל לטיפוח הבנה מושגית (כגון, על ידי המחשה של מספר רב של מקרים בו זמנית) או עלול לפגום בהבנה מושגית (הסתמכות על פתרון ויזואלי כהוכחה, ללא התאמצות למציאת הוכחה מתמטית מסודרת)?

בהנחה כי ימצא קשר בין השתתפות של פרחי הוראה ומורים בפעילות המשלבת מתמטיקה דינמית להבנה מושגית במתמטיקה, כיצד ניתן להשליך את תוצאות המחקר על פיתוח הבנה מושגית בקרב תלמידים?

נספח א'

מהלך הפעילות

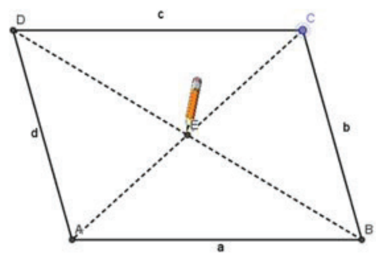
שלב I - בתחילת הפעילות המורים מתבקשים להוכיח או להפריך שלושה הגדים הקשורים לקטע אמצעיים במשולש. בשלב זה נבחנת ההבנה של המושג המתמטי קטע אמצעיים באמצעות שיטת MERLO שבה ההבנה נבחנת על ידי היכולת של המורה לתאר את ההגדרה של המושג (היגד א') את ההגדרות השקולות (היגד ג') ואת ההגדרות שלא מתאימות למושג (היגד ב'). ראה איור 3.

• הוכיחו או הפריכו את ההיגדים הבאים

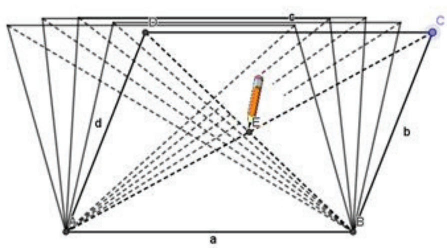
	היגד	הוכחה/הפרכה
א	קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומגיע לאמצע צלע שנייה שווה למחצית הצלע השלישית ומקביל לה	
ב	קטע היוצא מאמצע צלע אחת במשולש ושווה למחצית הצלע השניה הוא קטע אמצעיים	
ג	קטע היוצא מאמצע צלע אחת במשולש ומקביל לצלע השניה הוא קטע אמצעיים	

איור 3. דוגמא לפריט מרלו לבחינת הבנה מושגית בנושא קטע אמצעים

שלב II - מוצגת למורים שאלת חקר הקשורה למרכז מקבילית שאותה פותרים באחד משלושת הכלים המייצגים את המתמטיקה הדינמית. שאלה זו כוללת הגדרה של מקבילית "דינמית" (שבה ניתן לשנות זוויות אך לא את גודלי הצלעות) ושאלת חקר: "מה יצייר עיפרון אם נניח אותו במרכז המקבילית (מפגש האלכסונים) ונניע 3 מצלעות המקבילית?" (ראה איור 4).

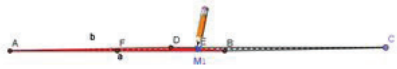


איור 4א. מקבילית דינמית

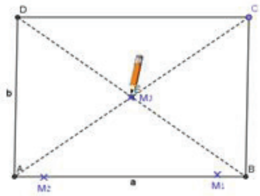


איור 4ב. שלוש מצלעות המקבילית נעות

בתהליך החקירה מוצעים למורים אסטרטגיות אפשריות לפתרון, כמו בדיקת מקרי קצה (ראו איור 5). המטרה של שלב זה הוא תרגול של בניה ומידול של תרגילים במתמטיקה דינמית על-ידי יצירת וויזואליזציה דינמית, ובעקבות כך לטפח אצל המורים הבנה מושגית על ידי הפיכת מספר מקרים למקרה כללי.

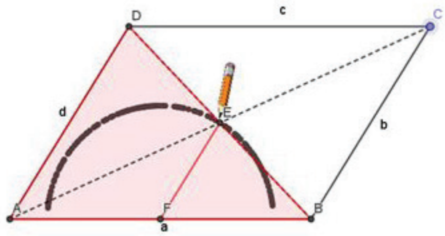


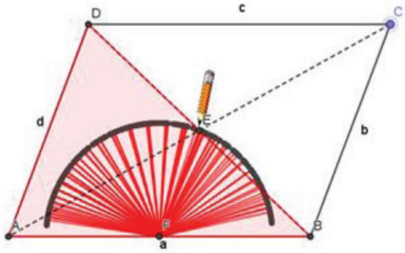
איור 5א. מקרה קצה ימין



איור 5ב. מקרה פשוט – מלבן

שלב III- המורים מתקבצים לקבוצות ומסבירים אחד לשני את הפתרון בעזרת הכלי הדינמי שקיבלו (ראו איור 6). בשלב זה הסטודנטים נחשפים לכלים דינמיים אחרים ולפתרונות שונים. שלב זה מאפשר להחצין את הוויזואליזציה שנוצרה ולבחון אותה אל מול עמיתים במעגלי חשיבה קטנים.



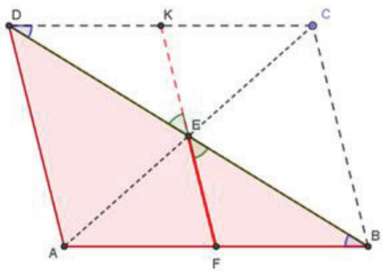


איורים 6א., 6ב. פתרון ויזואלי –חיבור מרכז הצלע הקבועה עם מרכז המקבילית וקבלת מעגל

שלב IV - בשלב זה המורים מתארים במליאה את הצורה שמצאו ואת ההסבר המתמטי שלה (תהליך ההחצנה של הוויזואליזציה)

שלב V- סיכום וחזרה על ההוכחה - הצגת הוכחה פורמלית של הבעיה המתמטית על בסיס הויזואליזציה הדינמית (ראו איור 7), תוך מציאת הקשר בין שאלת החקר המקדימה לפעילות הדינמית.

EF הוא קטע אמצעיים במשולש ולכן שווה למחצית הצלע שמולו (צלע המקבילית). מכיוון שצלעות המקבילית הן בגודל קבוע גם EF בגודל קבוע. F היא מרכז הצלע הקבועה לכן היא לא זזה. מכאן ש E היא כל הנקודות הנמצאות במרחק קבוע מנקודה F שזו ההגדרה של מעגל.



איור 7. הוכחת קטע אמצעיים במשולש בשיטת ההשלמה למקבילית

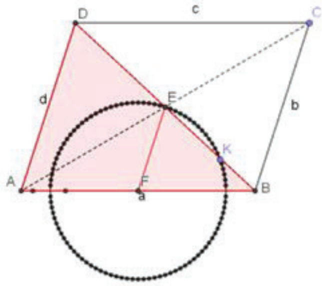
שלב VI - ההפרכה של היגד ב' (הוכחה שאינה שקולה בפריט המרלו המציג הוכחת משפט קטע אמצעים). ראו איור 8.

מסמנים נקודה בחיתוך של המעגל שנוצר והאלכסון (K)

EF=FK כי K על המעגל

EF הוא קטע אמצעיים לכן EF=1/2*AD

FK=1/2*AD אבל הוא לא קטע אמצעיים - בסתירה להיגד ב'



איור 8: המעגל שנוצר על ידי EF

שלב VII - חזרה להיגדים של פריט מרלו המציג הוכחת משפט קטע אמצעים, לצורך פתרון חוזר, לבחינת ההבנה המושגית השלמה של ההוכחה (חזרה מדוייקת על שלב I).

מקורות

משרד החינוך (2016). היוזמה להרחבת מעגל המצוינות. אוחזר מתוך: http://www.5p2.org.il/

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 52*(3), 215-241.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational *Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Etkind, M., Kenett, R.S., Shafrir, U. (2010). The evidence based management of learning: diagnosis and development of conceptual thinking with meaning equivalence reusable learning objects (MERLO). In: *8th International conference on teaching statistics* (ICOTS), Ljubljana, Slovenia.

Haqciomeroglu, E. S. (2011). Visualization Through Dynamic Geogebra Illustrations. Processing Mathematics *Through Digital Technologies*, 132–144.

Kohen, Z. & Kramarski, B. (2018). Promoting mathematics teachers' metacognition. In Y. J. Dori, Z. Mevarech, and D. Baker (Eds.), *Cognition, Metacognition and Culture in STEM Education* (pp. 279-306). Dordrecht, The Netherlands: Springer-Verlag.

Kramarski, B. & Kohen, Z. (2017). Promoting preservice teachers' dual self-regulation roles as learners and as teachers: effects of generic vs. specific prompts. *Metacognition and Learning, 12*, 157–191.

Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). Conceptual Knowledge Falls through the Cracks: Complexities of Learning to Teach Mathematics for Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 8. https://doi.org/10.2307/749384

Sinclair, N., Bartolini, M. G., Michael, B., Keith, D. V., Kortenkamp, U., Leung, A., … Sinclair, N. (2016). Recent research on geometry education : an ICME - 13 survey team report. *Zdm*. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

Trocki, A., & Hollebrands, K. (2018). *The Development of a Framework for Assessing Dynamic Geometry Task Quality. Digital Experiences in Mathematics Education*. Digital Experiences in Mathematics Education. https://doi.org/10.1007/s40751-018-0041-8

מורים פותרים בעיות אתגר בפורומים מקוונים: חקר תהליכים מטה-קוגניטיביים

נלי קלר, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
זהבית כהן, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
בוריס קויצ'ו, מכון ויצמן למדע

◆◆◆

תקציר

מחקרים רבים שהתבצעו במשך שלושת העשורים האחרונים, מצביעים על צורך בשינוי הדגש בהוראת המתמטיקה. הקו החורז בין מאמרים אלו, הינו העברת נקודת המבט ממרכיבי התוכן של המתמטיקה, אל מרכיבי התהליך המתמטי (Schoenfeld, 1982). מעבר זה דורש מהמורה שינוי בתפיסות ההוראה, הבא לידי ביטוי בהתמודדות הן עם בעיות מתמטיות מאתגרות מבחינת רמת החשיבה, והן עם תהליך למידה שבו תלמידים מקבלים יותר עצמאות בבחירת דרכי ההתמודדות שלהם עם הבעיות. כתוצאה מכך, עולה צורך בעיצוב סביבות למידה למורים, התומכות ומסייעות לשינוי התפיסות שלהם כלפי ההוראה. המחקר הנוכחי חוקר הצעה לסביבת למידה כזו, שבה המורים מתנסים בפתרון שיתופי של בעיות מתמטיות מאתגרות בפורומים מקוונים (Problem Solving Forum - PSF). הסביבה מאפשרת למורה לבצע רפלקציה על כל שלב בתהליך פתרון הבעיה הן כפותר (נקודת מבט למידתית) והן כמבקר של תהליך הפתרון (נקודת מבט הוראתית). סביבה זו מייצרת בסיס רחב לתהליכים מטה-קוגניטיביים אישיים וקבוצתיים. המחקר הנוכחי מציע לחקור תהליכים אלו ואת השפעתם על תפיסות ההוראה של מורים.

מבוא ורקע תיאורטי

הוראת מתמטיקה המתבססת על פתרון בעיות מאתגרות תופסת מקום מרכזי במחקר כבר תקופה ארוכה. מטרתה של הוראה כזו הינה פיתוח החשיבה המתמטית של התלמידים. חוקרים רבים הצביעו על תהליכים מטה-קוגניטיביים שמלווים גישת הוראה זו. תהליכים אלה נובעים מכך שפתרון בעיות מאתגרות דורש חשיבה ברמה גבוהה הכוללת וויסות עצמי ופיקוח פעיל על מיומנויות חשיבה שונות (Schoenfeld, 1987 Kilpatrick, 2016, Kramarski & Friedman, 2014). פתרון שיתופי של בעיות מתמטיות בקבוצות קטנות הוא אחד הענפים בתחום מחקר זה. המחקרים מצביעים על כך שתהליך הפתרון השיתופי מעודד שיח מתמטי שבו התלמיד צריך להסביר לחבריו מה בדיוק ומדוע הוא עושה וכיצד פעולותיו מקדמות את הפתרון (Johnson & Johnson, 1987). חוקרים הראו כי שיח כזה גורם לפיתוח היכולות המטה-קוגניטיביות של התלמידים (Clark, Jeims & Montelle, 2014). עם התפתחות הטכנולוגיה נוצרו אפשרויות נוספות ללמידה שיתופית, ביניהן פורומים מקוונים ברשתות חברתיות המיועדים לפתרון שיתופי של בעיות מתמטיות מאתגרות (Problem Solving Forum - PSF) (Stahl, 2009). יחד עם זאת, לא מעט מחקרים טוענים שעל מנת שפעילות קבוצתית תהיה מועילה מבחינת תהליכים מטה-קוגניטיביים, על התלמידים לרכוש תוך כדי הלמידה מיומנויות חיוניות ללמידה שיתופית, כמו שאלת שאלות הדדית, מוכנות לחלוק ברעיונות ועוד (Webb et al., 2014, אבינון, 2013). הקניית מיומנויות אלו דורשת שינויים משמעותיים בתפיסת המורים מבחינה מתמטית ופדגוגית: מוכנות להגדלת המשקל של פתרון בעיות מאתגרות בתהליך ההוראה; פתיחות לקבל גישות שונות של פתרון מהתלמידים; ידע כיצד לסייע לתלמידים עם מתן העצמאות במציאת הפתרון (Schoenfeld, 1985, Schwarz et al., 2015), ועוד. בנוסף, מחקרים אחרים מראים כי למורה קשה מאוד להוביל בכיתה תהליכי למידה שאין לו בהם ניסיון אישי (Kramarski et al., 2017 ,Leikin et al., 2006). מכאן נובע הצורך בעיצוב וחקר סביבות למידה למורים המסייעות בשינוי התפיסות שלהם באשר להוראה הן כלומדים והן כמורים.

מטרת המחקר

מטרת המחקר היא לזהות ולאפיין תהליכים מטה-קוגניטיביים שמתרחשים בסביבת למידה למורים שבה הם פותרים בעיות מאתגרות ב PSF ולעקוב אחר שינויים, במידה וישנם, בתפיסות המורים בקשר ללמידה שיתופית ושילוב של PSF לתהליך הלמידה, תוך כדי התנסות זו.

שאלות המחקר

1. אילו תהליכים מטה-קוגניטיביים מתרחשים בסביבת PSF כאשר מורים משתתפים בה בתור לומדים/פותרים?
2. כיצד, אם בכלל, משתנות תפיסות המורים בקשר ללמידה שיתופית ושילוב של PSF לתהליך הלמידה לאחר התנסותם ב PSF כפותרי בעיות?

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 20 מורים שלומדים בתוכנית "הרחבת הסמכה למורים 5 ו-++5 יחידות לימוד" בטכניון. המחקר נעשה במסגרת הקורס "יסודות הגיאומטריה" סביב הנושא המרכזי של הקורס, "טרנספורמציות המישור". במשך הקורס המשתתפים קיבלו 10 משימות לפתרון בסביבת PSF. כל משימה הורכבה מבעיה מאתגרת בגיאומטריה שיש לה כמה דרכי פתרון, המתבססות על החומר שנלמד בקורס. המשתתפים התחלקו לקבוצות, בכל קבוצה כ-4-5 מורים. הקבוצות עבדו על המשימות בפורומים מקוונים מסונכרנים באמצעות קבוצות WhatsApp, בזמנים שנקבעו על ידי חברי הקבוצה. המנחה (המחברת הראשונה של הצעה זו, ששימשה כמרצה בקורס) הייתה חברה בכל הקבוצות, וכך עקבה אחרי כל הפעילות בפורומים. כמו כן, בזמן קיום דיונים בפורום תפקיד המנחה היה עידוד הפותרים והכוונה של הדיונים. בשיעור שהתקיים לאחר כל משימה התקיימו שיחת רפלקציה על התהליכים שהתרחשו בפורומים, תוך כדי שיח על יעילות פתרון הבעיה מבחינה מתמטית ומבחינה פדגוגית.

במשך המחקר נאספו הנתונים הבאים:

1. 50 פרוטוקולים של כל הדיונים בפורומים.
2. 4 הקלטות אודיו של הדיונים בכיתה סביב קטעים מהפורומים.
3. שאלוני רפלקציה על ההתנסות בסביבת PSF שמולאו בידי כל אחד מהמשתתפים.
4. שאלוני רפלקציה בנוגע לקטע מאחד הדיונים בפורום על פי בחירת המנחה, שמולאו בידי כל אחד ממשתתפים.

ממצאים מרכזיים

א. זיהוי תהליכים מטה-קוגניטיביים שהתרחשו בפורומים

ניתוח פרוטוקולי הפורומים הצביע על כך שהדיונים שהתרחשו בהם מהווים ברובם שיח מטה-קוגניטיבי. ניתן להבחין בין חמישה סוגים של היגדים מטה-קוגניטיביים שהיו בשימוש על ידי המשתתפים:

הסוג הראשון כולל התייחסויות לסוגיות המתמטיות בפתרון הבעיה לפני, תוך כדי ואחרי סיום הפתרון. לדוגמא, טענה המותחת ביקורת על הפתרון: "עברתי על הפתרון. לדעתי, ישנה אי-התאמה בין השרטוט לבין המסקנות. משהו לא מסתדר לי. בואו נעבור על הכל מהתחלה."

הסוג השני כולל ביטויים לשיטות החשיבה בהן השתמשו המשתתפים במהלך פתרון הבעיה. לדוגמא, התייחסות לכיווני חשיבה אפשריים בפתרון בעיות גיאומטריות: "קראתי את השאלה ומיד חשבתי על דמיון. אם נתונות הזוויות, זהו כיוון החשיבה, נכון? מה דעתכם?"

הסוג השלישי כולל התייחסויות לארגון הפעילות של ה-PSF . לדוגמא, התייחסות לנורמות שצריכות להיות מקובלות בין המשתתפים כדי שהפורום יהיה מועיל: "למה פרסמת חלק שלם של הפתרון? זה עלול לקבע את החשיבה של המשתתפים, לא?"

הסוג הרביעי כולל רפלקציות על שינוי בדרכי החשיבה בעקבות הרחבת בסיס הידע המתמטי. לדוגמא, התייחסות

לשילוב בין בסיס הידע הקלאסי לבין הידע המתקדם שנרכש בקורס: "זה ממש יפה, ומצריך מחשבה די עמוקה על הבעיה, ולדעת לשלב בין המשפטים הקלאסיים לבין טרנספורמציות של המישור".

הסוג החמישי כולל רפלקציות על שינוי בתפיסה לגבי דרכי ההוראה בעקבות ההתנסות ב-PSF. לדוגמא: "אחת ההשלכות המשמעותיות בשבילי היא אימוץ השיטה שהשתמשנו בה בכיתות שלי. הוראת גיאומטריה בכיתות יכולה להפוך ליותר מאתגרת, מעניינת ולא מפחידה".

ב. תפיסות המורים כלפי למידה שיתופית בסביבה PSF לאחר ההתנסות כפותרי בעיות

בשאלון רפלקציה על תהליך ההשתתפות בפורומים, 18 מתוך 20 המשתתפים הצביעו על שינוי בתפיסות שלהם בקשר ללמידה שיתופית בסביבת PSF, ועל מוכנותם לנסות לשלב PSF בכיתות הלימוד שלהם. אחד מהמשתתפים תיאר את תהליך השינוי כך: "התחלתי מאוד סקפטי. אני תמיד מעדיף לעבוד לבד. אבל ההתנסות בפורומים תרמה לי בהבנת המהות של למידה שיתופית. ההקשבה לרעיונות של אחרים ופעילות סינכרונית, האפשרות לקדם את הפתרון שמישהו התחיל ונתקע על ידי רעיונות האחרים... לדעתי זה כלי נהדר ".

מסקנות ודיון

המחקר הנוכחי בוחן אפשרות של תרומה מטה-קוגניטיבית לתהליך של פתרון בעיות שיתופי, ובכך מקדם את המחקר התיאורטי בנושא. מצאנו כי התנסות המורים בסביבת PSF עשירה בתהליכים מטה-קוגניטיביים בכל שלב של פתרון הבעיה: לפני, תוך כדי ולאחר סיום הפתרון. חלקם מתייחסים לתוכן המתמטי וחלקם לפן הפדגוגי של תהליך הפתרון. כמו כן, למחקר תרומה פרקטית-יישומית בכך שהוא בוחן את הסביבה המזמינה את המורה להסתכל על תהליך פתרון הבעיה הן כלומד והן כמבקר, דבר המסייע להעמקה בהבנת התהליכים שמתרחשים תוך כדי למידה שיתופית סביב פתרון בעיות מאתגרות.

על סמך הרפלקציות של המורים על תהליך ההתנסות שלהם בסביבת ה-PSF, הגענו למסקנה שבקרב רובם חל שינוי בתפיסה כלפי למידה שיתופית, הם העריכו את השיטה כמועילה וגילו רצון להשתמש בה בכיתות הלימוד. עם זאת, נראה שמבחינה מעשית השינוי בתפיסות המורים מתרחש בצורה איטית יותר, והתנסות נרחבת ב-PSF בתור לומדים עשויה לתרום להטמעת השינוי גם בשטח כמורים בכיתות הלימוד.

מקורות

אבינון, י. (2013) למידה שיתופית היא היפוכה של הלמידה פרונטלית. הד החינוך, אפריל 2013, כרך פ"ז, גיליון מס' 05, עמ' 92-93.

Clark, K., James, A. & Montelle, C. (2014) "We definitely wouldn't be able to solve it all by ourselves, but together…" Group synergy in tertiary student's problem – solving practices. Researching Mathematics Education, 16(3), 306 – 323.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1987). Learning together and alone: Cooperative, competitive, and individualistic learning (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ, US: Prentice-Hall, Inc.

Kilpatrick, J. (2016). Reformulating: Approaching Mathematical Problem Solving as Inquiry. In Posing and Solving Mathematical Problems, Springer, Cham, 69-81.

Kramarski, B. & Friedman, S. (2014). Solicited versus Unsolicited Metacognitive Prompts for Fostering Mathematical Problem Solving Using Multimedia. Journal of Educational Computing Research, 285-314.

Leikin, R., Levav-Vineberg, A., Gurevich, I, & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance?

FOCUS on Learning Problems in Mathematics, 28, 1-22.

Schwarz, B. B, de Groot, R., Mavrikis, M., & Dragon, T. (2015). Learning to Learn Together with CSCL tools. International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning, 10(3), 239-271.

Schoenfeld, Alan H., Expert and Novice (1982). Mathematical Problem Solving. Final Project Report and Appendices B-H., ERIC, ED 218124, p.258

Schoenfeld, A. (1985) Mathematical problem solving. New York. Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and mathematics education (pp. 189 – 215). Hillsdale, NY: Elbaum

Stahl, G (Ed) (2009) Studying virtual math teams. New York, NY: Springer.

Webb, Noreen M., Megan L. Franke, Marsha Ing, Jacqueline Wong (2014). Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning. *International Journal of Educational Research, 63*, (79-93).

להתאהב במתמטיקה דרך פייסבוק?

דורון אורנשטיין, הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, הטכניון
זהבית כהן, הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, הטכניון
צוות העמותה "מדע גדול בקטנה"

◆◆◆

כיצד ניתן להנגיש נושאים במתמטיקה ולהראות את יופייה והשימושיות שלה לציבור הרחב, כשחלקו מרוחק ממנה במרחק שנות אור, וחלקו מגדיר את עצמו "מאותגר מתמטית"? נראה שפייסבוק הוא לא הפלטפורמה האידיאלית לכך: המשתמשים בו מדפדפים בדרך כלל במהירות ובחוסר סבלנות בין שלל פוסטים, תוך חיפוש אחרי מסרים פשוטים ומידיים, והמוני פוסטים הנלחמים אילו באילו על תשומת לב מזערית של המשתמשים.

מצד שני, לפייסבוק יש תכונות עוצמתיות: הנגישות, פשטות השימוש ובעיקר היכולת לאינטראקציה בין המשתמשים (למשל: "לייקים", שיתופים, תגובות לפוסטים, והודעות לדף). נראה שעמותת "מדע גדול בקטנה" מצליחה אט אט לפצח את השיטה כיצד להשתמש בפייסבוק: עמותה התנדבותית זו, שמטרתה לחבר את הציבור לנושאי מדע, מצליחה לרכז סביבה (9/2018) קרוב למאה ועשרים אלף עוקבים חובבי מדע וטכנולוגיה, שלעיתים מזומנות קוראים ומגיבים על פוסטים, ומתכתבים עם המומחים בצוות. בין שלל הפוסטים המרתקים, שנכתבים על ידי הצוות, למשל על לטאות, וירוסים ותורת הקוונטים, אנחנו משלבים גם פוסטים על מתמטיקה, בדגש על השימושיות שלה בחיינו. חלק ניכר מהפוסטים שפורסמו זכו להתייחסויות ולתגובות טובות, המעניקות לנו את התחושה שיש להם השפעה.

לדוגמא: לאחרונה (9/2018) פורסמה כתבה בעיתונות המבקרת את לימודי המתמטיקה, וטוענת שהמתמטיקה לא שימושית בעליל, גם בהייטק! אנחנו, צוות העמותה בשיתוף עם הפקולטה לחינוך למדע ולטכנולוגיה בטכניון, פרסמנו בדף פוסט תגובה זועם שהכיל שלל דוגמאות לשימושיות של המתמטיקה , הלקוחים ברובם ממחקר שמתבצע בטכניון. המשוב שקיבלנו היה טוב (חשיפה: 33,600 משתמשים) וכלל תגובות מעניינות על הוראת המתמטיקה והשימושיות שלה. חלק מהתגובות הכילו דוגמאות לשימושי המתמטיקה, היכולות לשמש גם לצרכי הוראה.

חלק מפוסטים שפרסמנו מדגימים טכנולוגיות מתקדמות בעולם ההייטק, דרך בעיות מתמטיות ברמה תיכונית. למשל פוסט שפרסמנו על מובילאיי, הסביר את פריצת הדרך של החברה, (חישוב מרחק בין מכוניות תוך שימוש במצלמה) דרך שימוש ב"משולשים דומים". מספר מורי מתמטיקה שקראו את הפוסט, פנו אלינו והביעו רצון לשלב את הדוגמה במהלך השיעורים בתיכון, לצורך הדגמה וכדי לתת השראה.

בנוסף לשימושי מתמטיקה בהייטק, כתבנו על שימושיות המתמטיקה בתחומים אחרים, למשל בביולוגיה. מספר דוגמאות: הסבר "עיקרון ההכבדה" בביולוגיה אבולוציונית דרך שאלה באנליזה, הסבר מתמטי של עקרון "היונה והנץ" באבולוציה, המתמטיקה של התרבות אוכלוסין, ושל התפשטות מגפות. בנוסף, כתבנו פוסטים קלילים על מתמטיקה בחיי היום יום (למשל: האם לרוץ או ללכת בגשם? והאם לחגוג את יום הפאי, יום האי, או יום הטאו?).

ממשובים שקיבלנו, נראה שלמרות המגבלות הפייסבוק, הדף של "מדע גדול בקטנה" מצליח לרתק ולהשכיל קוראים, חלקם תלמידים, סטודנטים, אנשי הוראה, מדענים וחובבי מדע. חלק מהפוסטים (ששמורים גם באתר

העמותה) והתגובות יכולים לתת השראה להוראת מתמטיקה. נושא זה משתלב עם מחקר שאנו מבצעים בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון על האפשרויות לשילוב בעיות אותנטיות מעולם המדע והטכנולוגיה בלימודי המתמטיקה. מחקר זה מזין לעיתים את הדף דרך דוגמאות שנאספו בו, והמשובים מהקוראים נותנים לנו מידע ורעיונות להמשך המחקר.

במהלך הכנס, אנו נציג (דרך פוסטר ומצגת במחשב) דוגמאות לפוסטים ולתגובות שקיבלנו להם. אנו מחפשים עוד תגובות ורעיונות, ונשמח לשיתופי פעולה!
https://www.facebook.com/MadaGB

קוביות או לא להיות

רונית בסן צינצינטוס, סמינר הקיבוצים המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאמנויות
עדי גלאון, ביה"ס התיכון עירוני ה ת"א

◆◆◆

משחקי מזל וקובייה מבוססים על ההנחה שהקוביה הוגנת ולכן ההסתברות של קוביה ליפול על כל אחת מהפאות שלה היא זהה ושווה ל-1/6.

אחד האפיונים העיקריים של תכנית הלימודים כפי שמופיע בהמלצות של משרד החינוך (משרד החינוך, 2013), הוא לימוד משולב של מיומנויות חישוב עם לימוד לקראת הבנה כך שהמיומנויות יתמכו בפיתוח הבנה ופיתוח ההבנה יתמוך בלימוד וחיזוק המיומנויות. על פי תכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבות הביניים, לימודי המתמטיקה בכיתה ט' משלימים את הנחת התשתית לקראת לימודי המתמטיקה בתיכון. הגישה בכיתה ט' היא פורמאלית יותר מאשר בכיתות ז'-ח', יחד עם זאת, מקפידה על שימור איזון בין גישה אינטואיטיבית ופיתוח יכולות טכניות.

כיום, במערכת החינוך מעודדים מורים לשלב פעילויות משחק וחקר בהוראה שהן אמצעי לפיתוח מיומנויות החשיבה בכלל וחשיבה לוגית בפרט. הוראה כזו מפתחת ידע והבנה של רעיונות, כמו הבנה של הדרך בה לומדים, ומזמנת ללומד אפשרות להתנסות בחיפוש אחר תשובות לתופעה. בשיעורי המתמטיקה ברצוננו ליצור סביבה מתמטית מעניינת ומאתגרת כדי לפתח את החשיבה ההסתברותית המאפשרת לטפל במצבים מחיי היום יום ומתחומי המדע השונים.

הפעילות שתוצג, מיועדת לתלמידי כיתות ט' ברמה בינונית-גבוהה ומתארת סדרת ניסויים בהטלת קוביות כך שעל פאותיה של כל קוביה שני מספרים בלבד (דוגמא לפריסת קוביה: 4,4,4,4,4,1).

תחילה מתבצעת הפעילות בקוביות בודדות ובהמשך בזוגות של קוביות. הפעילות מאפשרת למורים להקנות חומר לימודי באופן משחקי ומזמנת סיטואציות של שיח מתמטי משמעותי בכיתה. חוקי המשחק פשוטים, ולתלמידים יש את היכולת הטבעית לשחק ואף להסיק את המסקנות הנדרשות. בפעילות נעשית חזרה על הסתברות מותנית, שימוש במושג האי תלות בחישוב הסתברויות והכרות עם מערכת לא טרנזיטיבית.

בהתאם לעקרונות תכנית הלימודים, פעילות זו מותאמת לגישה הפורמאלית הרווחת יותר בהוראה בכיתה ט' מאשר בכיתות ז'-ח', ויחד עם זאת מקפידה על שימור איזון בין גישה אינטואיטיבית ופיתוח יכולות טכניות. מטרת הלימוד היא פיתוח אינטואיציה להתניה ואי-תלות, לצד המשך פיתוח יכולת החישוב. יש לגשת לפתרון המשימות בדרך אינטואיטיבית, ולהימנע מהצבה מכאנית בנוסחאות.

בפעילות תוצג כוחה של האלגברה כאמצעי להסבר של תופעות מספריות ולהכללה של חוקים מתמטיים, יינתן דגש על למידה מהתנסות לחישובים, נמחיש עד כמה החשיבה הטרנזיטיבית שלנו חזקה ונוביל באמצעות חישובים גם למצבים של העדר טרנזיטיביות.

ביבליוגרפיה

משרד החינוך והתרבות (2013). תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לכיתות ז,ח,ט. מדינת ישראל, המזכירות הפדגוגית - מדעים אגף הפיקוח על הוראת המתמטיקה.

ייצוג גרפי דינמי להתרת בעיות תערובת

מריטה ברבש, המכללה האקדמית אחוה

◆◆◆

במיצג דינמי זה נראה כיצד ניתן להשתמש בווקטורים ובגרפים של פונקציות ליניאריות להתרת מגוון של בעיות ריכוז תערובת של שני מרכיבים תוך שימוש בתוכנה דינמית (GeoGebra).

הגישה המוצעת מאפשרת ייצוג גרפי עשיר וגמיש למצבים רבים ומגוונים שבהם מתעורר הצורך בחישוב הריכוז של תמיסה המתקבלת מערבוב שתי תמיסות של אותו חומר מומס ואותו חומר ממיס, בכמויות כלשהן ובריכוזים כלשהם.

תוך שינוי מתאים, שיטה זו יכולה לשמש להתרה גרפית דינמית של בעיות אחרות המתבססות על יחס בין שני גדלים, כגון מהירות, הספק וכיו"ב.

לצורך ההדגמה נבחרו בעיות המאפשרות להציג מגוון רחב של דרכי פתרון וכן ניתוח נתונים משמעותי.

בכל אחת מהשאלות נעריך את ה"ערך המוסף" המיוחד לשימוש בשיטה: הפשטות, אפשרויות ההכללה, אפשרויות לנתח נתונים של הבעיה והקשר ביניהם שלא מתגלה בדרך אחרת, לגלות נתונים מיותרים, וכדומה. בכל אחת מהדוגמאות נתייחס כמובן לייחודיותה בהדגמת הכלי.

בדיון נפרד נתייחס סוגיית הדיוק בהקשר לשיטה המוצעת בסביבה ממוחשבת, לעומת שיטות גרפיות עם נייר ועפרון.

כאמור, השימוש הדינמי מאפשר לא רק לפתור את הבעיות אלא גם לשאול שאלות נוספות המובילות לניתוח נתונים וגם להכללות. לפעמים ניתוח הנתונים מוביל למסקנות שקשה להגיע אליהן בדרך אחרת, ואף עוזר לתמוך בפתרונות שלא כל כך "מסתדרים" עם אינטואיציה. מעבר לכך, אופן השימוש בכלי הדינמי כפי שהוא מוצע מהווה סוג של פתרון בניסוי וטעיה, תוך מתן דרך ברורה של קבלת החלטה - מתי הפתרון שמגיעים אליו הוא זה המבוקש, ואם איננו נכון- כיצד מגיעים ממנו לפתרון הנכון. הדרך של ניסוי וטעיה היא דרך לגיטימית של פתרון בעיות, בתנאי שיש קריטריונים ברורים המאפשרים להבחין בתנאים לקיום הפתרון ובנכונותו.

ביבליוגרפיה

Blum, W. (2003). On the Role of "Grundvorstellungen" for Reality-Related Proofs – Examples and Reflections. http://fibonacci.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG4/TG4_Blum_cerme3.pdf (retrieved 2/4/2017)

https://www.geogebra.org/m/r5RSDAnK#chapter/99397

מיצג "המתמטיקה של החיים שלי" – לימוד מתמטיקה בחטיבת ביניים בשימוש בדוגמאות אותנטיות מהחיים האמיתיים בתחום העניין של התלמיד ובשיטת PBL

בועז בריגר, Big Eyes for Math
צבי לירז, Big Eyes for Math

◆◆◆

קבוצת Big Eyes for Math מציעה להציג יוזמה ייחודית בחינוך מתמטי, במתכונת של שיח גלריה דינמי, במהלכו נציג יחידת לימוד פעילה, על כל מרכיביה המתודולוגיים, ונעורר שיח ודיאלוג על סוגיות מהותיות הנובעות מהגישה ודרכי יישומה.

חשיבות המיצג ומידת העניין לקהילה

- התמודדות עם שינוי תפקידים המתהווה (ממורה למנחה, פיתוח קשר בין עולם העסקי או חברתי לבין מורים, עצמאות הלומד והבחירה שלו)
- שינוי הלמידה המתמטית (מעבר ללמידה בעשייה והבנה מקדימה ומטרימה של חוקיות, ותרגול)
- שינוי מקורות הידע (וביסוסם על מגוון התנסויות העולם האמיתי) ושליטה בהיקף הידע (בקרה וניהול במגוון סוגיות ומטלות מתמטיות אדיר)

תיאור המיזם

BE4M היא מערכת כוללת ללימוד מתמטיקה לתלמידים בגיל חטיבת ביניים, באמצעות הוראה מותאמת אישית לתחום בחירה ועניין.
ייעודה של BE4M להסיר ולנטרל את החרדה ממתמטיקה, וכך להעצים מימוש הפוטנציאל של כל אחד. אנו מאפשרים לכל תלמיד ותלמידה להתחבר למתמטיקה מבחירה בנתיב הנוח להם, בתחום העניין האישי שלהם.
אנו מציעים לכל תלמיד ותלמידה רצפים לימודיים משמעותיים בתכנית שנתית מותאמת אישית: "המתמטיקה של החיים שלי" - הבנויה ממשימות המשלבות למידה מעורבת ופעילה בהן הם חוקרים בעצמם או בצוות של 2-4 תלמידים את המתמטיקה בתחומי העניין האישיים שלהם.

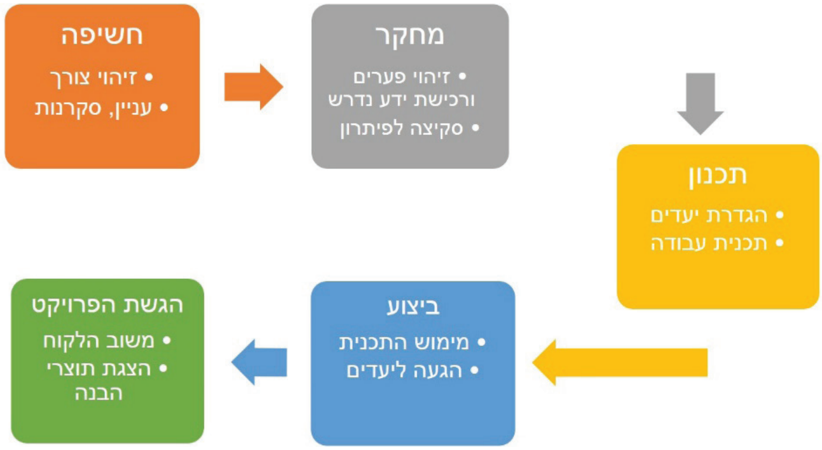
מתמטיקה – מכישורי החיים החשובים ביותר לכל אזרחי המאה ה-12

המתמטיקה נמצאת בכל דבר הסובב אותנו. בכל המקצועות. העוסקים בכל תחום, ולא רק מהנדסים ומדענים, שוקלים היום שיקולים שמתמטיקה משרתת אותם, משתמשים בכלים ובתוכנות, אפליקציות ושירותים מבוססי ענן, אלה מממשים מודלים מתמטיים של המציאות הקשורה לעיסוקם. זו הסיבה שבמאה ה-21, חוסר ידע וחרדה ממתמטיקה פשוט אינם באים בחשבון; מכשילים את הצעיר או הצעירה בהתקדמותם.
BE4M מנגישה את המתמטיקה לתלמידים דרך תחום העניין האישי של כל אחד, ובכך מאפשרת להתחבר למתמטיקה באופן כללי, ולהתפתח ולהיות בקיאים במתמטיקה בתחומים שעשויים להיות עיסוקם העתידי.

PBL – למידה מבוססת פרויקטים

הלמידה המיטבית מתרחשת בתהליכים מערבים ופעילים, מבוססי צורך אמיתי של התלמיד. ב-BE4M אנו עושים זאת בשיטת PBL (למידה מבוססת פרויקטים - Project Based Learning). כאשר תלמידים מתמודדים במשימות BE4M הם פעילים ומעורבים, כיוון שמשימת המתמטיקה היא בתחום העניין בו בחרו, מחוברת לעולם אמיתי ומתגמלת בשלושה אופנים: הם ממנפים ידע ואינטואיציות שיש להם בתחום העניין שלהם לטובת למידת

המתמטיקה, הם לומדים מתמטיקה בצורה מעורבת בתחום שמעניין אותם והם נעשים יותר טובים בתחום העניין שלהם. למידה קפדנית המבוססת על פרויקטים מביאה לקיום מתמשך של רפקלציה בתהליך ועל התהליך, ולתוצרי הבנה משמעותית.



פלטפורמת BE4M ליצירת תכנים אותנטיים במתמטיקה

חברות וארגונים מובילים בתחומי העניין השונים של התלמידים (מוזיקה, ספורט, טכנולוגיה, רשתות חברתיות, משחקי וידאו, תחביבים ועוד) מפרסמים "מכרזים" משובצי מתמטיקה בהם מוצגות סוגיות אותנטיות ומקצועיות משגרת יומם של המומחים שלהם, בהם המתמטיקה רלוונטית, תומכת עשייה מקצועית ובאה לביטוי.

מורים מעצבים ויוצרי תוכן מקהילת BE4M מגיבים למכרזים, מעבדים הסוגיות על בסיס מנגנון ענן מכוון והופכים אותן למערכי PBL המציעים לתלמידים להתנסות בחוויית למידה פעילה ומערבת באופן אותנטי בתחום העניין האישי שלהם, המחייבת אותם לביצוע המבטֵא הבנה וידע במתמטיקה.

מערכת ניהול למידה מותאמת אישית

הפלטפורמה כוללת מערך LCMS לניהול תכנים ולמידה (Learning & Content Management System) ובינה מלאכותית (AI) הנותנים לכלל המשתמשים את הכלים לניהול למידה מותאמת אישית לפי תחום העניין של כל תלמיד\ה - כולל בניית תכנית לימוד אישית הניתנת לעדכון בכל עת, משוב, מעקב התקדמות, המלצות תוכן נוסף והתאמת שותפי צוות.

מקורות

פיתוח 'ידע בר-העברה' ומיומנויות עבור המאה ה-21; נגזר ב-19/8/2009 מ- http://www.trump.org.il/wp-content/uploads/2016/05/מיומנויות-המאה-העשרים-ואחת-ולמידת-עומק-דוח-המועצה-הלאומית-למחקר-ארהב--2012גרסא-מלאה.pdf

Edutopia. (2001). PBL Research Summary: Studies Validate Project-Based Learning the George Lucas education foundation, retrieved on 22.10.2008 from http://www.edutopia.org/project-based-learning-research.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1999). Cooperative learning, Making cooperative learning work. Theory into practice.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation, Cambridge university press.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionism, Constructionism, Westport, CT, US: Ablex Publishing.

Pappert, S. (1981). Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas, Basic Books, Harper & Colophon books.

Thomas, J. W. (2000). A review of research on project based learning. This Research Review and the Executive Summary available on the Web at http://www.autodesk.com/foundation, Supported by The Autodesk Foundation, retrieved on 12.11.2010.
Schön. D. (1982). The reflective practitioner, Basic house, a Member of the Perseus books group.
Vygotsky, L. (1978). The Role of Play in Human Development, Harvard University Press Cambridge.

הערכה מעצבת אוטומטית: מה ניתן ללמוד מדוגמאות של סרטוטים דינמיים של מרובעים?

פורת פופר, אוניברסיטת חיפה

◆◆◆

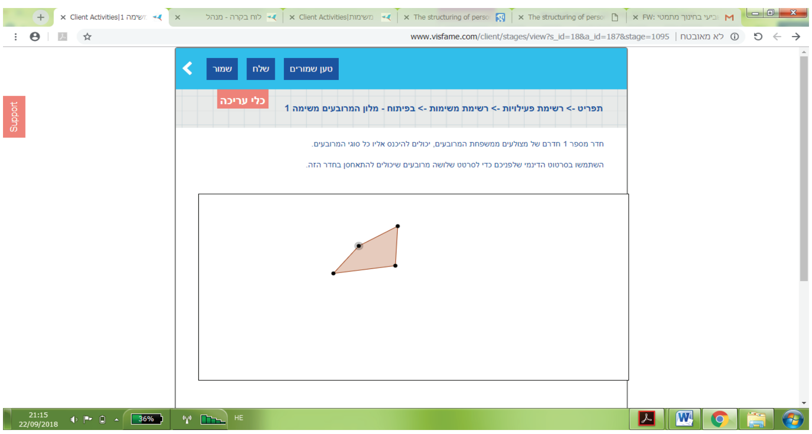
תקציר

מחקר זה בוחן שימוש בהערכה מעצבת אוטומטית של דוגמאות שתלמידים יוצרים בסביבה ממוחשבת. מוקד המחקר המדווח כאן עוסק בשאלה מה יוכל מורה ללמוד מפתרונות הנבדקים והמנותחים באופן אוטומטי.

הערכה מעצבת הינה תהליך הערכה לשם למידה ושיפור ההוראה. תהליך זה כולל תכנון מהלך הוראה המבוסס על ראיות מעבודות התלמידים (Black &Wiliam, 2010). יצירה ואימות של דוגמאות יכול לשמש כראיה להבנת התלמיד (Zaslavsky & Zodik, 2014). על מנת לאפשר הוראה מבוססת ראיות הנאספות ומסווגות באופן אוטומטי עוצבה עבור מחקר זה יחידת הוראה בנושא מרובעים. המשימות נבנו במערכת המרא"ה- הערכה מעצבת לראות את התמונה (http://visustep.com). פלטפורמה זו תומכת בתהליך הערכה מעצבת בעזרת ניתוח משימות במתמטיקה באופן אוטומטי בזמן אמת ומאפשרת לקבל משוב הנוגע למאפיינים מתמטיים ופדגוגים של המשימה (Olsher et al , 2016). כחלק מביצוע המשימות ביחידה יש להגיש תשובות הכוללות סרטוט דוגמאות, דוגמאות אלו מוערכות ומסווגות באופן אוטומטי לפי מאפיינים שנקבעו מראש. יחידת לימוד זו כוללת תשעה שיעורים המתאימים לכיתות ה'-ו'. היחידה הועברה בכיתה ו' הטרוגנית המונה 21 תלמידים. כל השיעורים נערכו בסביבת מחשבים אישיים וכללו עבודה אישית ודיונים כיתתיים.

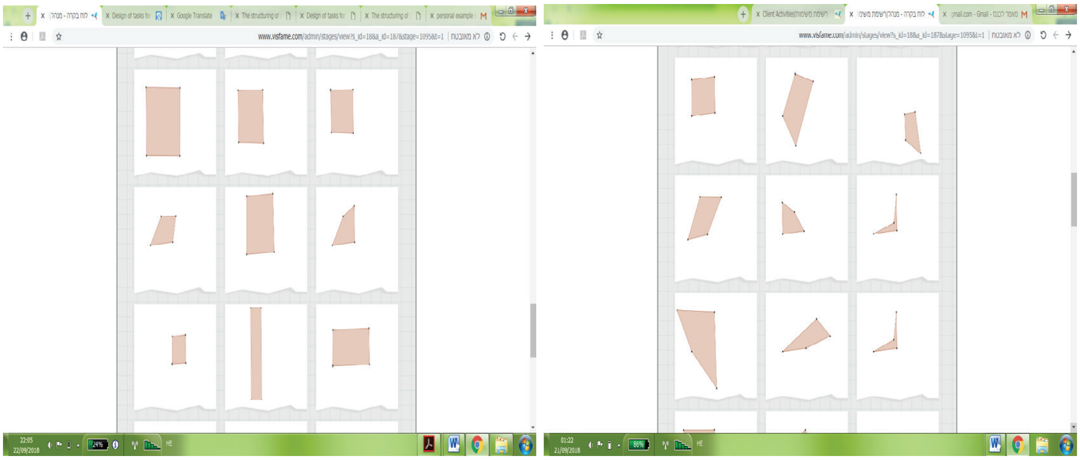
ממצאים

אציג דוגמה למשימה שמטרתה הכרת מרחב הדוגמאות הכיתתי עבור המושג מרובע. המשימה מוצגת תחת סיפור מסגרת של "חדרים בבית מלון" (איור 1).



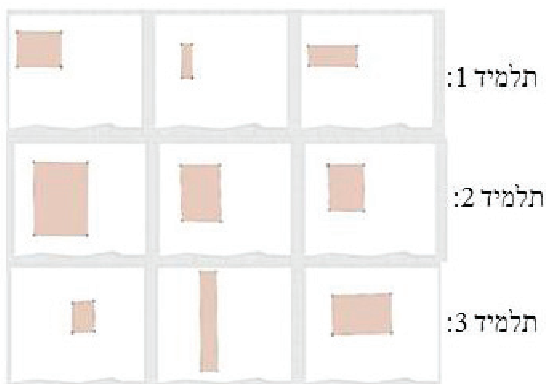
איור 1: משימה מתוך פעילות "מלון המרובעים"

במשימה זו יש לסרטט שלוש דוגמאות של מרובעים בעזרת גרירת סרטוט דינמי. הדרישה להגיש שלוש דוגמאות אמורה לגרום לתלמידים לחשוב על עוד דוגמאות מלבד הדוגמה הראשונה שהיא המיידית ומאפשרת לעקוב אחר מה נראה כדימוי המושג שלהם. הדוגמאות נאספות ומוצגות למורה באופן שמי או אנונימי, חלק מאוסף הדוגמאות הכיתתי שהוגש למשימה זו מוצג באיור 2.



איור 2: חלק מאוסף הדוגמאות הכיתתי שהוגש עבור המושג מרובע

בעזרת סיווג של אוסף הדוגמאות הכיתתי לפי צורות נמצא שדוגמאות שאובחנו כמלבן הינם הדוגמה הנפוצה ביותר (מלבד דוגמאות של מרובעים כלליים). בנוסף זוהו תלמידים ששלושת הגשותיהם למשימה זו כללו מלבנים בלבד (איור 3), דוגמאות אלו מהוות תשובה נכונה למשימה אך מצביעות על מרחב דימויים מצומצם למושג. תפיסת המרובע כמלבן מתבטאת אצל אותם תלמידים במשימות נוספות , נמצא שהם מגישים רק מלבנים כדוגמאות למושג מרובע ואף מציינים שמרובעים קעורים או קיצוניים אינם נחשבים כמרובעים.



איור 3: שלשות של דוגמאות שהוגשו עבור המושג מרובע

במקביל לכך ניתן לזהות תלמידים שהגישו דוגמאות שאינן נחשבות כאב טיפוס למרובע כמו מרובעים קעורים, מרובעים שאינם במנח אופקי ועוד. במשימות נוספות תלמידים אלו הסבירו שמרובעים קיצוניים או קעורים נחשבים כמרובע כיוון שיש להם ארבע צלעות.

סיכום

המקרה המוצג כאן מדגים משימה המאפשרת לזהות באופן אוטומטי מאפיינים לתפיסת אב טיפוס עבור המושג מרובע. המחקר הכולל עסק בניתוח של משימות נוספות ונמצאו מאפיינים לתפיסות כגון: תפיסה ויזואלית של המושג, תפיסת המושג כתלות במנח הסרטוט, שימוש בתכונות לא מדויקות, תפיסת אב טיפוס כמסגרת התייחסות,

תפיסת אב טיפוס חלקי, שימוש בדוגמאות קיצוניות ובגרירה. השפעת מחקר זה באה לידי בפיתוח יחידת הוראה המיועדת להערכה מעצבת אוטומטית ובחינת מאפייני הערכה זו מתוך מטרה לאפשר למורה לראות את התמונה הכיתתית במהירות ולהתאים את ההוראה לצרכי הכיתה.

Black, P., & Wiliam, D. (2010). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 92*(1), 81-90.

Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). How Might the Use of Technology in Formative Assessment Support Changes in Mathematics Teaching?. *For the Learning of Mathematics, 36*(3), 11-18.

Zaslavsky, O., & Zodik, I. (2014). Example-Generation as Indicator and Catalyst of Mathematical and Pedagogical Understandings. In *Transforming Mathematics Instruction* (pp. 525-546). Springer International Publishing.

חידושים בגיאומטריה אוקלידית

דוד פרייברט, שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך

◆◆◆

מבוא ורקע תיאורטי

אחת מהאתגרים של החינוך המתמטי הוא היכולת להציג לתלמידים את החידושים וההתפתחויות האחרונות שהתרחשו במחקר המתמטי העכשווי. בכך להפוך את מתמטיקה ממקצוע מיושן למקצוע עכשווי, דינמי ומתפתח. אחד מהקשיים באתגר זה נובע מהפער בין רוב הנושאים של המחקר העכשווי לרקע המתמטי של התלמידים (Movshovitz-Hadar 2008, Amit, Movshovitz-Hadar, Berman 2011).

הדבר נכון במיוחד לגבי גיאומטריה, תחום שכבר נחקר במשך אלפי שנים.

תכונות בסיסיות של מרובע ומעגל וכן תכונות של מעגל החסום במרובע ומעגל החוסם מרובע, המקשרות בין שתי הצורות הללו, נלמדים בתיכון. אולם רוב המחקרים האחרונים בתחומים אלו הם מעבר לרקע של תלמידי תיכון.

התאוריה של מרובע קמור ומעגל היוצר נקודות פסקל על צלעותיו חוקרת מצב שבו קיים קשר מסוג אחר בין מרובע ומעגל. זהו נושא חדש בגיאומטריה אוקלידית שטרם נחקר בעבר, התוצאות התפרסמו בשלוש השנים האחרונות.

הרקע המתמטי של תלמידי תיכון מספיק להבנת חלק גדול מהמשפטים החדשים.

המשפטים הללו מרתקים בפני עצמם, אך גם מאפשרים ליצור בעיות בנייה חדשות ומגוונות.

שיטת המחקר

המחקר התחיל מגילוי ויזואלי, בעזרת GeoGebra, של תכונה חדשה המתקיימת עבור טרפז ומעגל הקשור אליו. במהלך חיפוש אחר הוכחת התכונה התברר שהיא מתקיימת עבור כל מרובע קמור ולאו דווקא טרפז (Fraivert 2016a).

תכונה זו גילתה נושא חדש בגיאומטריה אוקלידית שטרם נחקר בעבר.

שימוש בתוכנות גיאומטריות דינמיות (D.G.S) העלה השערות לגבי יותר מ-40 תכונות חדשות. במהלך חיפוש אחר ההוכחות של התכונות הללו, התברר שחלקן מתקיימות במרובע קמור כללי, חלקן מתקיימות במרובע בר חסימה וחלקן מתקיימות במרובע בעל אלכסונים מאונכים.

נציג את המשפט היסודי ו-12 תכונות נבחרות שמתאימות ביותר להצגה בפני תלמידי תיכון.

ממצאים נבחרים

בתיאוריה החדשה חוקרים את המצב שבו ABCD הוא מרובע קמור שעבורו קיים מעגל ω המקיים את שתי הדרישות הבאות:

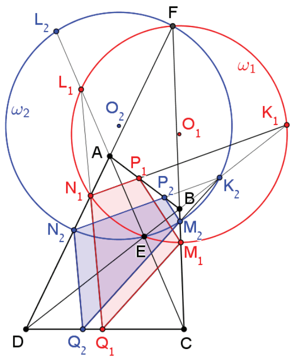
(i) ω עובר דרך נקודת חיתוך האלכסונים E ודרך הנקודה F שהיא נקודת חיתוך המשכי הצלעות BC ו-AD.

(ii) ω חותך את הצלעות BC ו-AD בנקודות פנימיות (באיור 1 אילו הנקודות M ו-N בהתאמה).

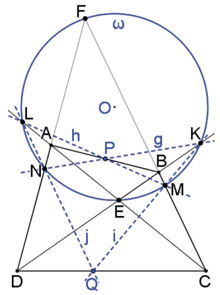
בנוסף יהיו K ו-L נקודות החיתוך של עם המשכי האלכסונים BD ו-AC בהתאמה.

במקרה זה מתקיים המשפט היסודי הבא (Fraivert 2016a, Fraivert 2016b):

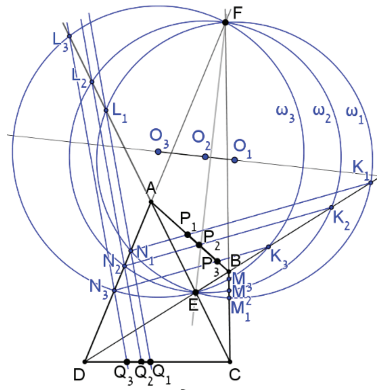
המשפט היסודי: הישרים KN ו- LM נחתכים בנקודה P השייכת לצלע AB, הישרים KM ו- LN נחתכים בנקודה Q השייכת לצלע CD(ראה איור 1).



איור 3



איור 1



איור 2

הגדרות: הנקודות P ו-Q נקראות "נקודות פסקל על הצלעות AB ו-CD של המרובע".כל מעגל המקיים את הדרישות (i) ו-(ii) לעיל נקרא "מעגל היוצר נקודות פסקל על צלעות המרובע" (Fraivert 2016b).

התכונות הבאות מתייחסות לנתון הכללי הבא:

יהי ABCD מרובע קמור שבו E נקודת חיתוך האלכסונים ו-F נקודת חיתוך המשכי הצלעות BC ו-AD, ויהי ω_i מעגל כלשהו (שמרכזו) העובר דרך הנקודות E ו-F ודרך נקודות פנימיות של הצלעות BC ו-AD ו-($M_i = \omega_i \cap BC$, $N_i = \omega_i \cap AD$); P_i ו-Q_i הן נקודות פסקל הנוצרות בעזרת על הצלעות AB ו-CD בהתאמה.

תכונה 1: עבור כל שלושה מעגלים ω_1, ω_2 ו-ω_3, ו- מתקיים: $\frac{P_1P_2}{P_2P_3} = \frac{Q_1Q_2}{Q_2Q_3} = \frac{O_1O_2}{O_2O_3}$.
כלומר, נקודות פסקל על הצלע AB, נקודות פסקל על הצלע CD ומרכזי שלושת המעגלים היוצרים את הנקודות הפסקל הללו, יוצרים קטעים פרופורציוניים (Fraivert 2016b).

תכונה 2: עבור כל שני מעגלים ω_1 ו-ω_2 מתקיים (Fraivert 2016b): הצלעות המתאימות של המרובעים $P_1M_1Q_1N_1$ ו- $P_2M_2Q_2N_2$ מקבילות זו לזו (ראה איור 3).

תכונה 3: אם נקודות פסקל P_i ו-Q_i קולינאריות עם המרכז O_i של המעגל ω_i, אז המרובע $P_iM_iQ_iN_i$ הוא דלתון (Fraivert 2016b)

תכונה 4: בכל מרובע $P_iM_iQ_iN_i$, המוגדר בעזרת המעגל ω_i, הזוויות $P_iM_iQ_i$ ו-$P_iN_iQ_i$ שוות (ראה איור 4).

התכונות 5-7 מתקיימות כאשר ABCD הוא מרובע בר-חסימה.

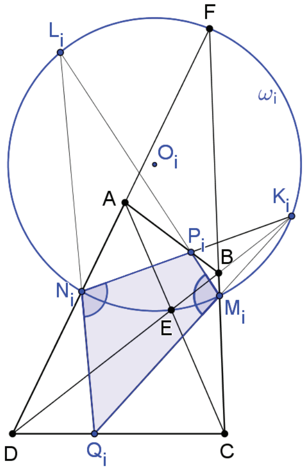
תכונה 5: עבור כל שני מעגלים ω_1 ו-ω_2 מתקיים: המרובעים $P_1M_1Q_1N_1$ ו-$P_2M_2Q_2N_2$ בעלי היקפים שווים (Fraivert 2016c).

תכונה 6: עבור המעגל ω_{EF} שקוטרו הקטע EF, החותך את הצלעות BC ו-AD בנקודות M_0 ו-N_0 בהתאמה (ראה איור 5), מתקיים (Fraivert 2016c):

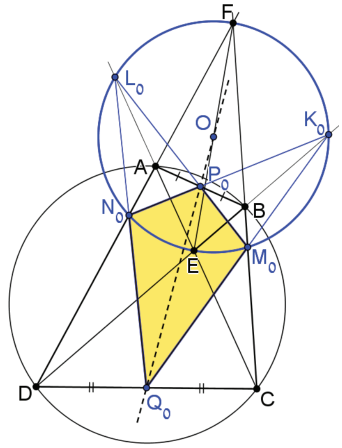
(א) נקודות פסקל P_0 ו-Q_0 הנוצרות בעזרת המעגל ω_{EF} קולניאריות עם המרכז O של ω_{EF}.

(ב) הנקודות P_0 ו-Q_0 הם אמצעי הצלעות AB ו-CD בהתאמה.

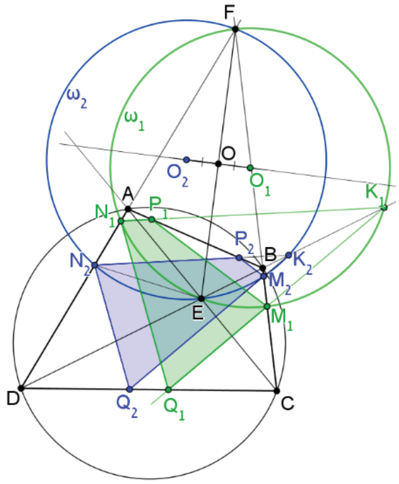
(ג) המרובע $P_0M_0Q_0N_0$ הוא דלתון.
(ד) מבין כל המרובעים , המרובע בעל השטח המקסימלי הוא הדלתון .



איור 4



איור 5



איור 6

תכונה 7 (Fraivert 2019): יהיו ω_1 ו-ω_2 שני מעגלים היוצרים נקודות פסקל. אם מרכזי המעגלים O_1 ו-O_2 מקיימים את התנאי $O_1O=OO_2$, אז המרובעים $P_iM_iQ_iN_i$ ו-$P_2M_2Q_2N_2$, המוגדרים בעזרת המעגלים ω_1 ו-ω_2 , חופפים זה לזה (ראה איור 6).

התכונות הבאות מתקיימות כאשר ABCD הוא מרובע בעל אלכסונים מאונכים.

הגדרה: יהיו P_i ו-Q_i זוג נקודות פסקל הנוצרות בעזרת מעגל ω_i כלשהו. "מעגל נקודות פסקל $\sigma_{P_iQ_i}$" הוא מעגל שקוטרו הקטע P_iQ_i.

תכונה 8: עבור כל מעגל ω_i היוצר את נקודות פסקל P_i ו-Q_i מתקיים (Fraivert 2017b).
(א) מעגל נקודות פסקל $\sigma_{P_iQ_i}$ חותך את הצלע BC בנקודות M_i ו-V_i ואת הצלע AD בנקודות N_i ו-W_i (יתכן שהנקודות M_i ו-V_i או הנקודות N_i ו-W_i מתלכדות).
(ב) הקטע V_iW_i הוא קוטר של המעגל $\sigma_{P_iQ_i}$. לכן המרובע $P_iV_iQ_iW_i$ הוא מלבן החסום במרובע ABCD הנתון.

הגדרה: נכנה את המלבן $P_iV_iQ_iW_i$ "המלבן המוגדר בעזרת מעגלים ω_i ו-$\sigma_{P_iQ_i}$".

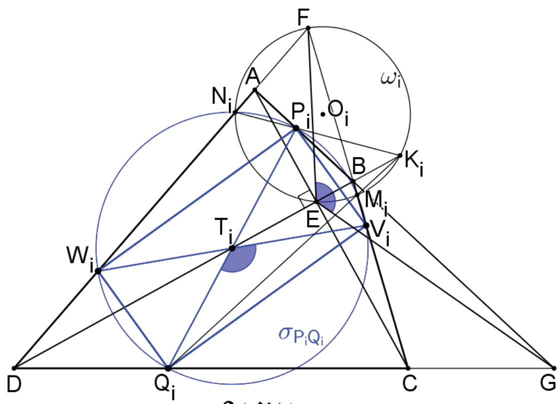
תכונה 9: עבור כל מרובע ABCD, בעל אלכסונים מאונכים, קיימים אינסוף מלבנים המוגדרים בעזרת זוגות מעגלים ω_i ו-$\sigma_{P_iQ_i}$ וחסומים במרובע הנתון.
נסמן קבוצת מלבנים זו ב-$M_{\odot}$ (Fraivert 2017b).

תכונה 10 (Fraivert 2017b): עבור המעגל ω_{EF} שקוטרו הקטע EF, היוצר את נקודות פסקל P_0 ו-Q_0, מתקיים:
(א) המעגל נקודות פסקל $\sigma_{P_0Q_0}$ חותך את צלעות המרובע ABCD ב-8 הנקודות הבאות (ראה איור 7): את הצלע AB בנקודות P_0 ו-M_0, את הצלע BC בנקודות M_0 ו-V_0, את הצלע CD בנקודות Q_0 ו-N_0, ואת הצלע AD בנקודות N_0 ו-W_0;
(ב) ארבעת המיתרים V_0N_0, W_0M_0, Q_0M_σ ו-P_0N_σ של המעגל $\sigma_{P_0Q_0}$ נחתכים בנקודה E.

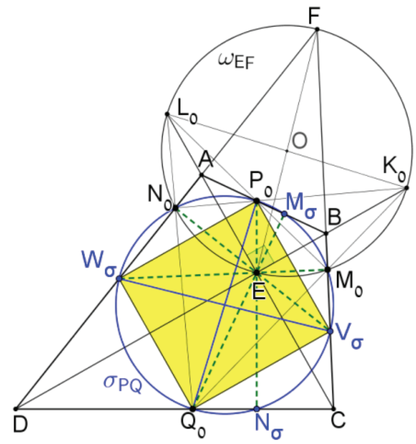
תכונה 11: אם במרובע ABCD גם הצלעות AB ו-CD נחתכות (בנקודה G), מתקיים:

(א) הזווית FEG שבין הקטעים EF ו-EG שווה לזווית $V_0T_0Q_0$ שבין האלכסונים P_0Q_0 ו-V_0W_0 של המלבן $P_0V_0Q_0W_0$.

(ב) לכל מלבנים מהקבוצה $M_\odot$, ערך הזווית שבין האלכסונים הוא גודל קבוע, שתלוי רק במרובע ABCD ואינו תלוי בבחירת המעגל ω_i, דהיינו: הזווית $V_iT_iQ_i$, שבין האלכסוני המלבן $P_iV_iQ_iW_i$, שווה לזווית FEG (ראה איור 8).



איור 8



איור 7

תכונה 12: מבין כל מלבנים מהקבוצה $M_\odot$, המלבן המוגדר בעזרת המעגל ω_{EF} ומעגל נקודות פסקל $\sigma_{P_0Q_0}$ הוא:

(א) המלבן בעל ההיקף והשטח המינימאליים;

(ב) המלבן היחיד שצלעותיו מקבילות לאלכסוני המרובע ABCD.

מקורות

Movshovitz-Hadar, N., (2008), "Today's news are Tomorrow's history – Interweaving mathematical news in teaching high-school math". In: Barbin, E., Stehlikova, N., Tzanakis C., 2008 (eds.) History and Epistemology in Mathematics Education: *Proceedings of the fifth European Summer University*, Ch. 3.12, pp.535-546, Vydavatelsky Press, Prague 2008.

Amit, B., Movshovitz-Hadar, N., and Berman, A. 2011, *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*, Chapter 9, Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fraivert, D., (2016a), Discovering new geometric properties by spiral inductive deductive investigation, *Far East Journal of Mathematical Education, 16*(2), 185-202. http://dx.doi.org/10.17654/ME016020185.

Fraivert, D., (2016b), The theory of a convex quadrilateral and a circle that forms "Pascal points" - the properties of "Pascal points" on the sides of a convex quadrilateral, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 40, 1-34. http://dx.doi.org/10.18642/jmsaa_7100121666.

Fraivert, D., (2016c), The Theory of an Inscribable Quadrilateral and a Circle that Forms Pascal Points, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 42, 81-107. http://dx.doi.org/10.18642/jmsaa_7100121742.

Fraivert, D., (2017a), Properties of the Tangents to a Circle that Forms Pascal Points on the Sides of a Convex quadrilateral, *Forum Geometricorum*, 17, 223-243. http://forumgeom.fau.edu/FG2017volume17/FG201726.pdf.

Fraivert, D., (2017b), Properties of a Pascal points circle in a quadrilateral with perpendicular diagonals, *Forum Geometricorum*, 17, 509-526. http://forumgeom.fau.edu/FG2017volume17/FG201748.pdf.

Fraivert, D., (2019), Properties of a cyclic quadrilateral and the Pascal points on its sides, *The Mathematical Gazette,* in press.

חיזוק הכשרתם של מורים למתמטיקה באמצעות שילוב זהותם התרבותית

סבינה סגרה, המכללה האקדמית אחוה

◆◆◆

רקע תאורטי

מחקרים מראים שמורים שמתייחסים בהוראתם לרקע התרבותי שלהם ושל תלמידיהם מצליחים לקדם את מעורבות התלמידים בכיתה (White, Zion, & Kozleski, 2005). כיוון שסטודנטים להוראה עלולים לשדר את עמדותיהם כלפי המתמטיקה אל תלמידיהם (העתידיים) (Burton, 2012), חשוב להראות דרכים ליצירת רגש חיובי על ידי השתלבות של הרקע התרבותי האינדיבידואלי בתחום הלימוד (Gurgel, Pietrocola, & Watanabe, 2014). חוקרים רבים מדגישים את חשיבות ההכנה של סטודנטים לחינוך אל ההוראה בכיתות רב-תרבותיות, הן בתחום המתמטיקה והן בתחומים אחרים (Koellner & Jacobs, 2002; Ladson-Billings 1995b).

היתרונות של "הוראה שמתייחסת לרקע התרבותי" (cultural relevant teaching) נדונו במידה רבה בספרות המקצועית. חשוב שהחינוך יתאים ויתייחס לתרבות קיימת, במקום לדחות תרבויות קיימות לטובת תרבות המיינסטרים (Cobern, 1991; Ladson-Billings, 1995a; White et al., 2005). גרדס, גוז ובנינסון (Bennison, 2015; Gerdes, 1988 ; Goos, 2013) דנים ביתרונות של הצבת הוראת המתמטיקה בהקשר התרבותי שלה. גרדס מראה שלטכניקות חישוב רבות קיימים אלגוריתמים אלטרנטיביים עם שורשים בתרבות שכדאי מאוד ללמד. במאמרים רבים שנכתבו בארצות הברית מדגישים החוקרים את חשיבות ההכנה של סטודנטים להוראה אל כיתות רב-תרבותיות (Anderson, 1994;Koellner & Jacobs, 2002). בארצות הברית מתמודדים מורים מהמיינסטרים של התרבות עם סטודנטים מהגרים (Bryan & Atwater, 2002; Anderson, 1994). המצב שונה בישראל, כאשר סטודנטים דוברי ערבית לומדים במכללות בהן מלמדים קורסים רבים בעברית, בעוד שהתלמידים העתידיים של חלק גדול מהם יהיו ערבים ישראלים. מעבר לזה, החינוך בקהילת הבדואים שונה מהחינוך המערבי. במערכת החינוך הבדואית, יש חשיבות רבה למסורת ולידע הקשור ישירות לחיי היומיום (Abu-Saad, 1991; Karnieli, 2006). כאשר מכינים סטודנטים בדואים להוראה בתוך הקהילה הבדואית, היכולת להתייחס לתרבות הקיימת עונה לצורך ויכולה לסייע בסגירת פערים מבלי להכניס ערכים מערביים לא מתאימים.

מידע מתודולוגי

מטרת המחקר שמוצג בהמשך הייתה להראות כי

א. מבחר נושאים הרלוונטיים לרקע התרבותי של הסטודנטים מעשיר ומשפר את עמדתם של מורים לעתיד כלפי המתמטיקה.

ב. מורים למתמטיקה שרואים את תחומם בהקשר תרבותי מלמדים טוב יותר ומצליחים יותר להניע את תלמידיהם.

כדי להגיע למטרות המחקר הללו היה חשוב לשקף את עמדת הסטודנטים כלפי המתמטיקה בתחילת שנת הלימודים ובסופה, ולבחון שינויים. עשינו זאת בשיטות מחקר שונות.

שיטות המחקר

במחקר השתתפו סטודנטים משש קבוצות סמינריון, כולם בשנת הלימודים האחרונה שלהם. שלוש קבוצות למדו בשנה של ביצוע המחקר (שנת הלימודים 2016/2017) במכללה.

כדי לקבל תמונה שלמה נעזרתי בשלוש שיטות מחקר: שאלונים, מפות חשיבה וראיונות.

שאלונים

בתחילת השנה ובסוף השנה הסטודנטים שהשתתפו במחקר התבקשו לענות על שאלונים. לשאלונים היה קוד זיהוי אנונימי כך שהיה אפשרי לתאם בין שאלונים של אותו הסטודנט מתחילת השנה ומסופה.

סטודנטים שלמדו במכללה בשנות הלימודים 2015/2016 ו-2014/2015 התבקשו למלא שאלונן מקוון, בשל העובדה שלא נכחו בקמפוס מספיק על מנת לענות על שאלונים מודפסים (הם היו כבר בסטאז'). השאלון המקוון התייחס לעמדת הסטודנט בתחילתה ובסופה של השנה בנפרד.

בסך הכול השתתפו 32 סטודנטים בסקר המקוון. 34 סטודנטים מילאו שאלונים (מודפסים) בתחילת השנה ובסופה. ווידאנו בעזרת מבחני כי בריבוע (Chi squared test) כי לא היו הבדלים משמעותיים בין התשובות של שתי קבוצות הסטודנטים (שמילאו שאלון מקוון או מודפס).

בין היתר הופיעו בסקר שאלות על מידת החשיבות לעונים של חיבור בין תרבותם לבין המתמטיקה, וכיצד בחרו בנושא העבודה שלהם (באופן עצמאי או לפי הצעות המנחה).

מפות חשיבה

מפות חשיבה משמשות בהוראה לשקף עמדות של התלמיד כלפי נושאים מסוימים ולהראות את האסוציאציות שלו לגבי מושג מרכזי נתון. הסטודנטים שהשתתפו במחקר התבקשו לצייר מפות חשיבה בתחילת השנה ובסופה. המושג הנתון במרכז המפות היה "מתמטיקה". על הסטודנטים היה להוסיף למפה את כל מה שנראה להם קשור למתמטיקה. כדי לנתח את המפות ספרתי את המושגים ואת הרעיונות שהופיעו במפות השונות. בהמשך סיווגתי את המושגים במפות השונות בעשר קטגוריות ובדקתי איזה משקל נתנו הסטודנטים לקטגוריות השונות בתחילת השנה ובסופה. עשר הקטגוריות הן: נושאים מתמטיים, מדע וטבע, טכנולוגיה ומחשבים, מדעי הרוח ואמנות, דרכי חשיבה, הוראה ולמידה, משחקים ואתגרים, הרגשות טובות והצלחה, הרגשות לא טובות וכישלון, ואחר (לא מתאים לקטגוריות האחרות).

כל הסטודנטים ציירו את המפות החשיבה בכיתה, גם בשנתיים לפני ביצוע המחקר העיקרי. מפות החשיבה לא הופיעו בשאלונים המקוונים.

ראיונות

במהלך המחקר ראיינתי שני סטודנטים ערביים ושני סטודנטים יהודיים שסיימו את לימודיהם לאחרונה ושהתנסו כבר בהוראה. התעניינתי במידה שבה הסטודנטים הללו ראו קשר בין תרבותם ללימודי המתמטיקה כשהם היו סטודנטים, עד כמה הם למדו תכנים מתמטיים שהיו קשורים לתרבותם, ואם היום כמורים הם מנסים להתייחס לתרבותם של תלמידיהם.

סקירת ספרים

בזכות שני סטודנטים דוברי ערבית שהתנדבו הצלחנו להשוות בין ספרי לימוד למתמטיקה עבור בית הספר היסודיים, הן בערבית והן בעברית (Haibi, 2011, 2013; The Matah math team, 2015a, 2015b).

ממצאים ודיון

בראיונות גיליתי שלסטודנטים חשוב לחבר בין תרבותם למתמטיקה. ההתייחסות לרקע התרבותי של סטודנטים וגם של התלמידים מגבירה את המוטיבציה שלהם. הסקרים הראו כי רוב הסטודנטים אוהבים לבחור בנושא העבודה שלהם, אך הם זקוקים לעזרה. עובדה זאת נותנת למנחה הסמינריון כלי חשוב שבאמצעותו הוא יכול להשפיע על בחירת הנושאים. הסקרים הציגו גם כי לסטודנטים רבים הקשר בין המתמטיקה לבין תרבותם היה חשוב יותר בסוף שנת הלימודים (אחרי החשיפה לנושאי העבודות הרבים והשונים).

מפות החשיבה הראו כי סטודנטים בסוף השנה רואים את תחום המתמטיקה בהקשר רחב יותר.

לדוברי הערבית הקשר בין מתמטיקה לתרבותם היה חשוב יותר עוד מתחילת השנה, ויותר מהם בחרו בנושא עבודה שקשור לתקופת הזהב של המתמטיקה הערבית. ניתן להסביר תופעה זו באמצעות העובדה כי דוברי הערבית הם מיעוט במדינת ישראל, ולכן חשוב להם יותר הקשר לתרבותם והעברתה מדור לדור.

בספרי הלימוד מצאנו מעט מאפיינים תרבותיים, בראש ובראשונה שמות וסמלים (בגדים, מגן דויד וכו'). בספרים בשפת הערבית מצאנו יותר שמות של בנים ופחות שמות של בנות. בשתי השפות הדמויות ההיסטוריות הן אך ורק יווניות - לא יהודים ולא ערבים.

כדאי להרחיב את הסקרים ולשפר את השאלונים כדי להגיע לקבוצות סטודנטים גדולות יותר וכדי להימנע ממספרים קטנים מדי בניתוח הסטטיסטי.

כדאי לעודד סטודנטים ומורים עתידיים למתמטיקה להתעניין ברקע של תלמידיהם, להתייחס לתרבות התלמידים ולספר על מדענים מהתרבויות השונות. מומלץ לעשות זאת גם על-מנת להגביר מוטיבציה וגם כדי לעניין סטודנטים ותלמידים בתרבויות של אחרים. דבר זה חשוב בפיתוח הבנה ושיח בין-תרבותי.

תודות

מחקר זה נערך בהמלצת ועדת המחקר הבין-מכללתית במכון מופ"ת ובתמיכת האגף להכשרת עובדי הוראה במשרד החינוך.

תודות לענאן אבו עיאדה ויאסר אלחרומי שהתנדבו וסקרו ספרי מתמטיקה עבוד בית הספר היסודי בעברית ובערבית.

רשימת מקורות

Abu-Saad, I. (1991). Towards an Understanding of Minority Education in Israel: the case of the Bedouin Arabs of the Negev. *Comparative Education, 27*(2), 235–242.

Anderson, J. A. (1994). Examining teaching styles and student learning styles in science and math classrooms. *Multicultural Education: Inclusion of All*, 93–106.

Bennison, A. (2015). Supporting teachers to embed numeracy across the curriculum: a sociocultural approach. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 47*(4), 561–573.

Bryan, L. A., & Atwater, M. M. (2002). Teacher Beliefs and Cultural Models: A Challenge for Science Teacher Preparation Programs. *Science Education, 86*(6), 821–839.

Burton, M. (2012). What Is Math? Exploring the Perception of Elementary Pre-Service Teachers. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal, 5*(January), 1–17.

Cobern, W. W. (1991). Contextual Constructivism : The Impact of Culture on the Learning and Teaching of Science. *Proceedings of the Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching*.

Gerdes, P. (1988). On culture, geometrical thinking and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 19*(2), 137–162.

Goos, M. (2013). Sociocultural perspectives in research on and with mathematics teachers: A zone theory approach. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 45*(4), 521–533.

Gurgel, I., Pietrocola, M., & Watanabe, G. (2014). The role of cultural identity as a learning factor in physics: a discussion through the role of science in Brazil. *Cultural Studies of Science Education*.

Haibi, A. (2011). *Bavakir* (بواكير). Al-Manbar Foundation for Culture and Science (مؤسسة المنبر للثقافة والعلوم).

Haibi, A. (2013). *Haisabi* (حسابي). Al-Manbar Foundation for Culture and Science (مؤسسة المنبر للثقافة والعلوم).

Karnieli, M. (2006). 'Invest in your children's education the way you invest in your goats': systemic educational intervention in a traditional Bedouin community – from theory into practice. *Educational Action Research*, 8 (January 2015), 37–41.

Koellner, K., & Jacobs, J. (2002). Preparing for Culturally Responsive Teaching. *Journal of Teacher Education*, 53, 106–116.

Ladson-Billings, G. (1995). But That's Just Good Teaching! The Case for Culturally Relevant Pedagogy. *Theory*

into Practice, 34(3), 159–165.
Ladson-Billings, G. (1995). Toward a Theory of Culturally Relevant Pedagogy. *American Educational Research Journal*, 32(3), 465–491.
The Matah math team. (2015a). *Shvilim* (שבילים לכיתה ה', חלק א'). מטח: המרכז לטכנולוגיה חינוכית ישראל. משרד החינוך, התרבות והספורט.
The Matah math team. (2015b). *Tracks* (مسارات). מטח: המרכז לטכנולוגיה חינוכית ישראל. משרד החינוך, התרבות והספורט.
White, K. K., Zion, S., & Kozleski, E. (2005). Cultural Identity and Teaching. *On Point*, (October), 1–8. http://doi.org/10.13140/RG.2.1.4254.1849

האם במבחן מקוון פתוח לקבל תמיד את התשובה השקולה אלגברית לתשובה הצפויה?

פיליפ סלובוצקי, "הלומדה" - המכללה האקדמית לחינוך תלפיות
מריאנה דורצ'בה, "הלומדה" - האוניברסיטה הטכנית, סופיה, בולגריה

◆◆◆

הערכה מתמטית מקוונת – אתגרים ופתרונות קיימים

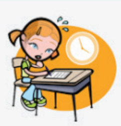
הערכה היא מרכיב מפתח בתהליך הלמידה, והיא מהווה אתגר למורים ולמפתחי מערכות ההערכה הממוחשבות [5]. מאמצים רבים מושקעים בפיתוח מערכות להערכה אוטומטיות [4]. הסוגיות העיקריות בהן נתקלים המפתחים הן:

א. קביעת סוג ההערכה: מבחן רב-ברירתי (MCQ multiple-choice question), או מבחן פתוח (OA - open answer) [4]. דיונים על היעילות של מבחן רב-ברירתי אינם פוסקים [5, 6], והם מעודדים גיבוש רעיונות חדשים [3]. בהמשך נציג גישה חדשה: שילוב של מבחן רב-ברירתי עם שיטות של בינה מלאכותית (Semi-Intelligent MCQ).

ב. הטמעת המערכת לניהול למידה (LMS) ב-Moodle, ותאימות עם מערכות הפעלה שונות: קיימות מערכות הפועלות דרך Moodle [1,2,7], אולם אלה דורשות התקנה של תוסף ייעודי, ואינן פועלות דרך מכשירים ניידים.

שילוב המערכת לתרגול והערכה מקוונים "Math-Tutor" ב-Moodle

המערכת Math-Tutor הינה אחד מחמשת המודולים של [8,9] "Math-Xpress" ("הנוסחא-5" בגרסה עברית): עורך נוסחאות, בונה גרפים של פונקציות, גיאומטריה אינטראקטיבית, אלגברה סימבולית (CAS) ו- XPress-Tutor - המערכת לתרגול ובדיקה של מבחנים, המבוססת על האלגוריתמים של אלגברה ממוחשבת (CA) ובינה מלאכותית.
XPress-Tutor מציע לתלמידים תרגילים המקובצים לעבודות תקופתיות או מבדקים המוגבלים לפרקי זמן קצובים, הנבדקים באופן אוטומטי.
למערכת שלושה אופני פעולה: לימוד, תרגול ומבחן (איור 1), והתלמידים יכולים לתרגל ולחזור על החומר באופן שוטף, לראות הסברים לכל שלבי הפתרון ולבדוק את תשובותיהם.

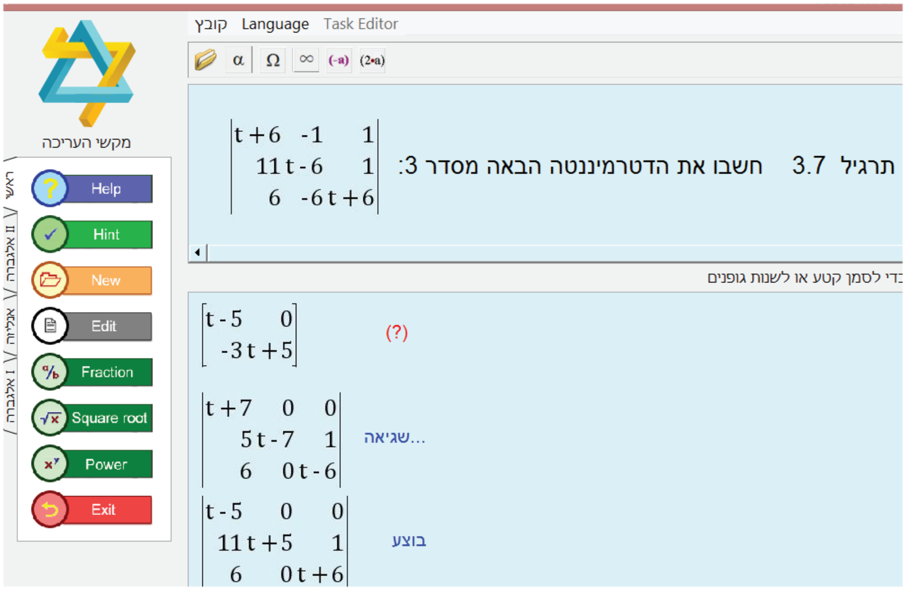
נושא	לימוד	תרגול	מבחן			
			מבחן	שאלות	ציון	
דטרמיננטות				23		342

איור 1. אופני פעולה

לימוד

בלימוד, כל תרגיל מופיע עם פרמטרים אקראיים, כך שבהפעלות חוזרות התלמיד יקבל תרגיל דומה אולם שונה בנתונים. התלמיד יכול לנסות לפתור אותו בדרכו שלו, על ידי כתיבת התשובה הסופית או התוצאה של שלב ביניים באמצעות עורך ביטויים המובנה.
התוכנה בודקת את הביטוי הרשום ומשווה אותו עם כל הביטויים שברשימת ה"תשובות הנכונות" לכל שלבי הפתרון, וגם עם כל התשובות השגויות הטיפוסיות לסוג התרגיל. ההשוואה יכולה להיות מדויקת (שומרת את הסינטקס) או שקולה (שומרת שקילות אלגברית).

סוג ההשוואה נקבע בקובץ התרגיל על-ידי עורך הקובץ (המורה המחבר את התרגיל).
בכל מקרה, התלמיד מקבל תגובה, המאפשרת לו להחליט כיצד להתקדם בפתרון התרגיל: סימן (?) מתקבל במקרה ותשובת התלמיד אינה תואמת לאף תשובה צפויה (נכונה או שגויה). כאשר הביטוי תואם לאחד מאלה שברשימה, מתקבלת תגובה מתאימה (איור 2):

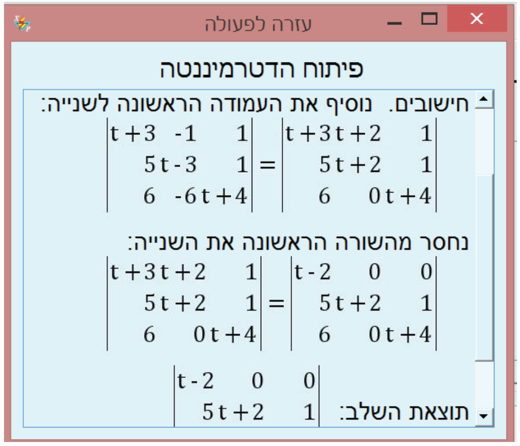


איור 2. תגובות המערכת

התלמיד יכול לבקש עזרה הניתנת בשלוש רמות:
א. עזרה כללית, בה מוסבר הפתרון ורואים את שלבי הפתרון המומלצים (איור 3):

איור 3. עזרה כללית

ב. **הסבר לכל שלב** (איור 4):

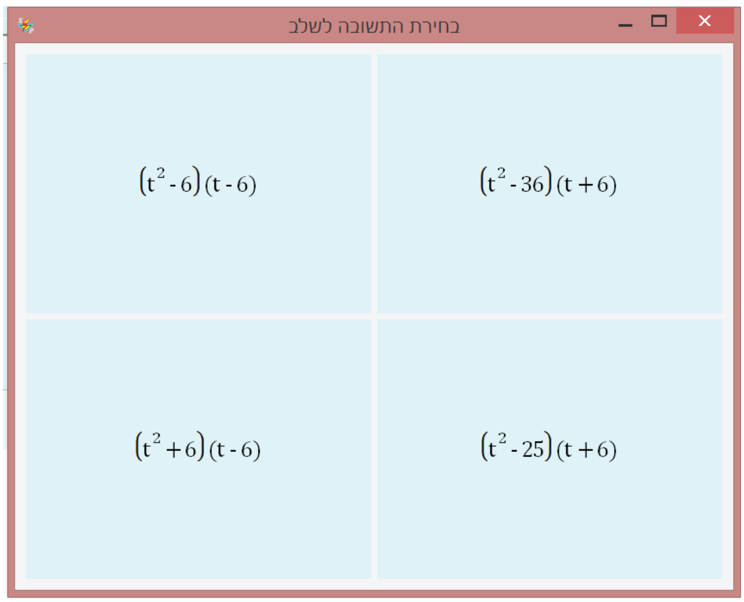


איור 4. תיאור השלב

ג. **תוצאת השלב** הקרוב הלא פתור. הקשה בכפתור **Hint** מציגה את התשובה.
בכל רגע התלמיד יכול לרשום את התשובה לשלב הבא, והתוכנה משווה אותה לכל הביטויים האפשריים (נכונים ושגויים טיפוסיים), ומגיבה בהתאם.

תרגול

במצב זה, התלמיד מקבל ארבע תשובות אפשריות (אחת נכונה ושלוש שגויות) לשלב הבא (או תשובה סופית, במקרה ונשאר שלב אחרון), וכדי להמשיך, על הסטודנט לרשום תשובה נכונה (איור 5).
ההסברים בלימוד ובתרגול יכולים לכלול טקסט, נוסחאות, שרטוטים וקישורים לקבצים, סרטונים או אתרים חיצוניים. בלימוד ובתרגול מספר ניסיונות אינו מוגבל.



איור 5. תרגול

מבחן

במבחן, עזרה כללית והסברים לשלבי הפתרון חסומים, ולתלמיד יש רק ניסיון אחד לרישום התשובה. ברם, המערכת מאפשרת לצאת מהמבחן ללא הורדת ציון, במקרה והתלמיד לא הגיש תשובה. מספר ניסיונות כאלה אומנם מוגבל לשלוש, אולם זה מאפשר לתלמיד לחזור ללימוד או לתרגול ולחזור על חומר הלימוד.

3. סוגיות ההערכה המקוונת: רב-ברירתי או שאלות פתוחות?

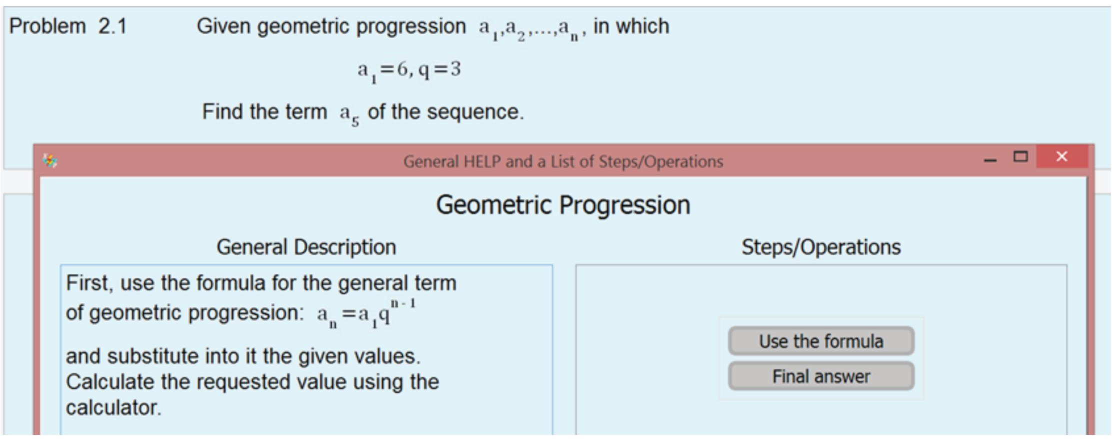
בספרות דנים על חסרונות ומגבלות של ההערכה רב-ברירתית [5], וגם על הקושי התכנותי והדידקטי במבחן פתוח [6]. הטענה הנפוצה לגבי מבחן רב-ברירתי היא שהוא מגביל את התלמיד באופן חשיבתו, ולא מקבל את התשובה השקולה אלגברית לתשובה ה"נכונה" שהמערכת מציגה.

מאידך, גם למבחן פתוח (המאפשר רישום חופשי של התשובה) ישנן מגבלות דידקטיות הנובעות מצורת התשובה המצופה. לדוגמה, אם בהשוואת הביטוי שהוגש לתשובה נכונה להסתפק בשקילות אלגברית בלבד, אזי אמור להתקבל כתשובה נכונה לדוגמה, גם הביטוי הזהה לביטוי שבשאלה.

כדי למנוע מצב זה יש להגדיר גם את הפורמטים האפשריים של תשובה, ולבדוק הן את השקילות האלגברית של הביטויים והן את התאמתם לאחד מהפורמטים הנדרשים.

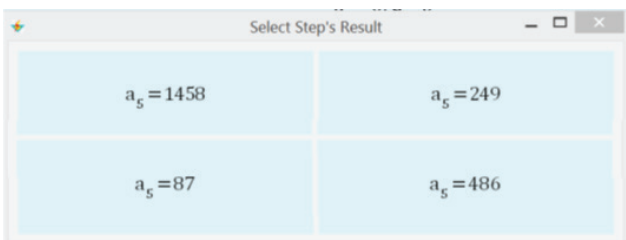
המערכת **XPress-Tutor** משתמשת בשתי גישות ההערכה בהתאם לצרוך הדידקטי: מבחן רב-ברירתי משוכלל (Semi-Intelligent Multiple-Choice Question) ומבחן פתוח.

נדגים את שתי השיטות בדוגמה הבאה (איור 6):

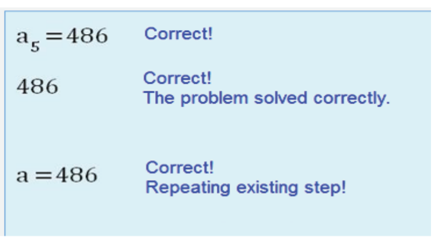


איור 6

במבחן רב-ברירתי, התלמיד יכול לראות את ארבע האפשרויות לכל שלבי פתרון – אחת נכונה ושלוש שגויות (איור 7).



איור 7. תוצאות השלב איור



איור 8. הערות המערכת

בדומה למבחן רב-ברירתי רגיל, התלמיד יכול לסמן את התשובה הנכונה (a5 = 486).

אולם, הודות לאפשרות של כתיבה חופשית, אותה מאפשרת המערכת, התלמיד יכול לרשום ביטוי אחר, למשל: 486, או a = 486. ברור, כי מבחינה דידקטית, גם הביטויים האלה נכונים, למרות שאינם בפורמט שהוצג על-ידי המערכת. **מבחן רב-ברירתי משוכלל מאפשר לקבל את התשובות האלה כנכונות.**

אפשרות זאת של זיהוי ביטויים בעלי פורמט אפשרי נרשמת בקובץ התרגיל על-ידי מחברו (מורה), אשר מגדיר צורות צפויות אפשריות של תשובה נכונה (הפקודות RESULT1 ו- RESULT2 בקובץ התרגיל (איור 9).

```
STEP1   '    Use the formula     '
METH1
'Example. Given:'EXPR(a[1]=6,q=3,n=5)
'The result of the 1-st step:'EXPR(a[5]=6*3^(5-1))

RESULT1  EXPR(a[@n]=@a1*@q^(@n-1))
EXPR(@a1*@q^(@n-1))
EXPR(a=@a1*@q^(@n-1))
FALSE1.1  EXPR(a[@n]=@a1*@q^(@n))
FALSE1.2  EXPR(a[@n]=@a1+@q^(@n-1))
FALSE1.3  EXPR(a[@n]=@a1+@q^(@n))
COMM1   'Correct!'
```

```
STEP2   'Final answer'
METH2
'The result of the 1-st step:'EXPR(a[5]=6*3^(5-1))
'Calculations:'EXPR(a[5]=6*3^4=6*81=486)
'The final result:'EXPR(a[5]=486)
RESULT2  EXPR(a[@n]=@S(@a1*@q^(@n-1)))
         EXPR(@S(@a1*@q^(@n-1)))
         EXPR(a=@S(@a1*@q^(@n-1)))
FALSE2.1  EXPR(a[@n]=@S(@a1*@q^(@n)))
FALSE2.2  EXPR(a[@n]=@S(@a1+@q^(@n-1)))
FALSE2.3  EXPR(a[@n]=@S(@a1+@q^(@n)))
COMM2   'Correct!'
```

איור 9. קובץ התרגיל

במבחן פתוח (OA - Open Answer mode), חלונות התשובות האפשריות בלתי נראים, והתלמיד נדרש לרשום תשובה באמצעות עורך ביטויים מובנה. במקרה זה, מחבר התרגיל (מורה) יכול לבחור בין שתי אופציות ההערכה: זהות הביטויים (הפורמט **המדויק**) או **שקילות אלגברית**.

במקרה הראשון, השוואה נעשית בין תשובת התלמיד לבין כל התשובות האפשריות (נכונות ושגויות).

במקרה השני, השוואה נעשית בעזרת האלגוריתמים של אלגברה ממוחשבת, הקובעים את השקילות האלגברית של הביטויים, כאשר לדוגמה, זוגות הביטויים הבאים נחשבים שקולים (איור 10):

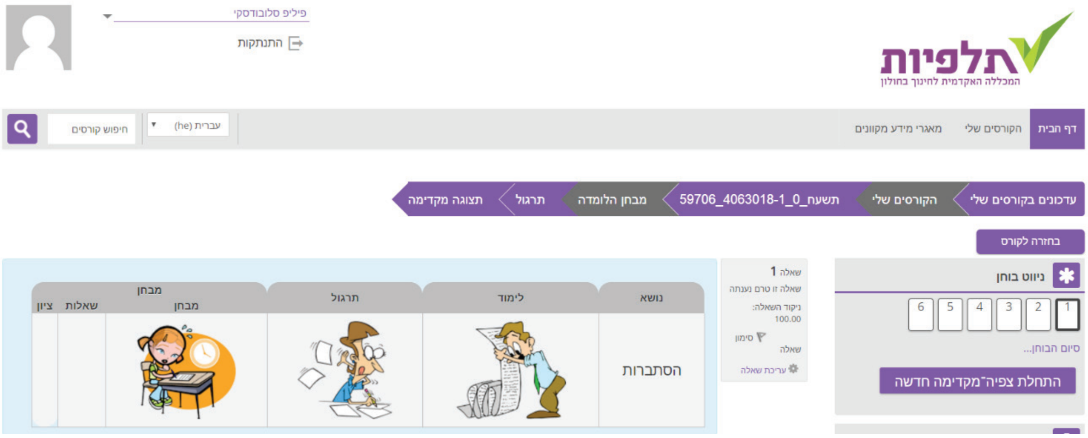
$$\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad 3^{2x},\ 9^{x} \qquad x = 2y - z,\ y = \frac{1}{2}(x+z)$$

איור 10. ביטויים שקולים

מבחן יכול להכיל בעיות בעלות אופן הערכה שונה. באחראיות מחבר המבחן לקבוע את סוג ההערכה של כל בעיה.

4. שילוב המערכת "XPress-Tutor" ב-Moodle

הפעלת תוכנה כלשהי להערכת מבחנים דרך מודל מצריכה הטמעת הגרעין המתמטי (יישומי האלגוריתמים של CA לפעולות בין ביטויים אלגבריים וחישוב ציוני המבחנים) בקוד של Moodle והעברת הציונים למערכת LMS [1, 2, 7]. כדי לעשות זאת, פותח תוסף ייעודי (plugin)' המאפשר לחבר את XPress-Tutor למערכת LMS של Moodle (איור 11).



איור 11. הפעלת XPress-Tutor דרך Moodle

בעשר שנים אחרונות, באמצעות המערכת XPress -Tutor הועברו כל הקורסים במתמטיקה לכ- 3000 סטודנטים בכל שנת לימודים באוניברסיטה באריאל [9]; בשנתיים האחרונות במכללת תלפיות הועבר קורס בחשיבה כמותית, קורס באלגברה ליניארית הועבר לסטודנטים באוניברסיטה טכנית בסופיה, בולגריה [10]. הפעלת XPress-Tutor בסביבה של Moodle תאפשר להרחיב שימוש במערכת למוסדות נוספים, בהם ניהול התלמידים מתבצע דרךLMS של Moodle.

מקורות

Maple T.A. Testing, Evaluation and Grading Software – Maplesoft https://maplesoft.com/products/mapleta/power.aspx .

STACK. www.stack.ed.ac.uk/

Shirai, S. Fukui, T. Yoshitomi, K. Kawazoe, M. Nakahara, T. Nakamura, Y. Kato, K.Taniguchi: Intelligent Editor for Authoring Educational Materials in Mathematics e-Learning Systems. In: ICMS 2018-Mathematical Software, pp. 431-487 (2018).

Sangwin C. and Kocher N: Automation of mathematics examinations. In: Computers & Education, vol. 94, pp. 215-227.

Azevedo J. M., Oliveira E. P. and Beites P. D.: How Do Mathematics Teachers in Higher Education Look at E-assessment with Multiple-Choice Questions In: Proceedings of the 9th International Conference on Computer Supported Education (CSEDU 2017) - Volume 2, pp. 137-145.

Hettiarachchi E., Mor E., Huertas M. A., Guerrero-Roldán A. E.: Introducing a Formative E-Assessment System to Improve Online Learning Experience and Performance. In: Journal of Universal Computer Science, vol. 21, no. 8 (2015), 1001-1021.

Moodle XML format, https://docs.moodle.org/24/en/Moodle_XML_format

Math-Xpress, https://halomda.org/platforma-E.php.

Slobodsky P., Ocheretovy A., Roiz E., Shtarkman A.: Using the Universal Math Environment "Math-XPress" for teaching and assessment of math courses. In: Journal Mathematics in Computer Science (2018) pp. 1-14.

Durcheva M.: Using the Universal Math Environment "Math-XPress" for teaching and assessment of Linear Algebra. In: Proc. of Technical University of Sofia, V. 67, Issue 3, 2017.

אינדקס

מ

נ

ס

ע

פ

צ

ק

ש

ת